Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

HT

380037

Fergola

380037

LÉGUÉ

à la Bibliothèque de la Ville de Lyon

PAR LE COMTE

SÉBASTIEN-GAËTAN-SALVADOR-MAXIME

DES GÜIDI

né à Caserte (Italie), le 5 Août 1769

mort à Lyon, le 27 Mai 1863

PRELEZIONI

380037

SUI PRINCIPJ MATEMATICI

DELLA FILOSOFIA NATURALE

DEL CAVALIER ISACCO NEWTON

Per uso dell' Universita' Interna del Real Convitto del Salvatore.

T O M. I.

BIBLIOTH DE LA VILLE DE LYON

NAPOLI 1792.

Presso Giuseppe Maria Porcelli Librajo, e Stampatore della R. Accad. Militare.

Con Licenza de' Superiori.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

PREFAZIONE DELL' AUTORE.

IL Cavalier Nevvton, che togliendo il velo, onde Natura si ricovre, vi spiò attento le di lei leggi, e di esse compiè un Codice pe' Sapienti, non parve uomo; ma sotto umane forme Sublime Genio quaggiù disceso ad illustrar la Natura, e ad eternarsi il nome (a). *Dunque questo Codice di Leggi Cosmologiche, ch' Ei disse* Principj Matematici della Filosofia Naturale, *si dovrebbe intender bene da ognuno, che brami contemplar l' Universo: o ch' ei si arresti a specularne il di lui sistema, e le leggi, o che guidato da' Metodi del Nevvton vogliane indagar delle nuove. Ed in fin coloro, cui Natura è Scala al Fattore, potranno a dispetto dell' empio raccorre da questo Codice, che un Dio Vivente, d' infinito Potere e di Sapienza ricolmo, e non mica l' inerte caso, nè il cieco fato* geometrizzi *ne' Cieli. Ma tu il sai, Amico Lettore, i parti de' Sublimi*

(a) In queſto paragrafo contengonſi i più preclari elogj fatti ad un sì Granduomo. Un Filoſofo franceſe claſſificando i Sommi Ingegni diſſe, che la mente del Nevvton era media tra le Angeliche Intelligenze, e le umane. Ed un' Ingleſe il celebrò con queſta leggiadra iſcrizione: *Hic jacet mortalis Newtonus, quem immortalem prædicant Tempus, Cælum, Natura.*

Digitalizzato da Google

mi Ingegni sovente si concepiscon men chiari nell' altrui mente. Per la qual cosa il Nostro Amabile Sovrano, cui cale molto la didascalica educazion de' suoi Popoli, m' impose (b), *che a vantaggio degli Alunni del Real Convitto del Salvatore io componessi chiare Prelezioni sul Nevvton: sistemandole col metodo di composizione, e col nitor della Sintesi dimostrando ciocchè ivi si aduna, e che da' Geometri posteriori saggiamente vuol delibarsi. In siffatta guisa ho io procurato giusta mia possa compiere queste Prelezioni fregiandole ancora di ricche note: in alcune delle quali ho esibito il filo di certe fisicomatematiche scoverte, ed i tentativi de' Sommi Ingegni (le quali cose sogliono l'acume de' Giovanetti perfezionare): ed in altre ho recata la genesi di quelle formole analitiche, che in pochi simboli ampie verità naturali contenendo sogliono fecondar bene in nostra mente. In fine per opera di un mio dotto allievo il Signor D. Stefano Forte ho fatto rigidamente dimostrare que' Lemmi di Geometria, che son di face ad alcune verità di queste Prelezioni; i quali anzichè disseminarli per l'intera Opera con discapito dell' attenzion di chi legge, gli ho innanzi ad essa col titolo di* Geometriche Prenozioni *insiem raccolti. E questo è quanto, Amico Lettore, conveniva dirti.*

GEO-

(b) Legislazione di S. M. Siciliana per l'Educazione pubblica del Real Convitto del Salvatore §. 21.

Digitalizzato da Google

GEOMETRICHE PRENOZIONI.

POSTUL. *Quando dall'Autore vuol dinotarsi, che la ragione di* X ad Y *sia composta dalle altre di* A *a* B, *di* C *a* D, *di* E *ad* F, ec. *ei suol adottare la seguente compendiosa indicazione*, X : Y : : (A : B) (C : D) (E : F), ec.

PRENOZ. I. *Se in mezzo a due grandezze omogenee* A, *e* B *vi si frappongano delle altre* M, N, P, *ancora ad esse omogenee; sarà sempre la ragione di* A *a* B *composta dalle ragioni di* A *ad* M, *di* M *ad* N, *di* N *a* P, *e di* P *a* B.

Vedi Lemm. Prop. 23. El. VI.

PRENOZ. II. *Se di due ragioni si scambiino gli antecedenti, o ch' è lo stesso, i conseguenti; la ragione, che da esse si compone, riman la stessa. Così, a cagion di esempio, la ragion composta da quelle di* M *ad* N, *e di* P *ad* R *è la stessa di quella, che componesi dalle altre di* M *ad* R, *e di* P *ad* N.

Questa verità chiaramente si rileva dalla Prop. 23. del VI. degli Elem.

PRENOZ. III. *La ragion composta da più ragioni semplici, due delle quali sien fra loro inverse, è la stessa, che quella che si compone dalle medesime, minorate di quelle due.*

Dimos. La ragion composta da più ragioni semplici è quella, che ha per esponente il prodotto degli esponenti di esse. E poichè dagli esponenti di esse risultane lo stesso prodotto, o che vi s' includa il prodotto degli esponenti delle due ragioni inverse, ch' è l' unità, o che se n' escluda; sì nell' uno, che nell' altro caso, la stessa ragion composta dovrà ricavarsi. C. B. D.

PRENOZ. IV. *Se le due ragioni di* a : b, *e di* c : d *compongano la ragione di* M : N; *una di quelle due com-*

Digitalizzato da Google

componenti sarà direttamente come la ragion composta di M : N, *ed inversamente come l' altra componente.*

Dimos. Imperciocchè essendo $a.c : b.d :: M : N$ (per Ipot.) , e $b.d : b.c :: d : c$; sarà (Pren. I.) $a.c : b.c :: (M : N)\ (d : c)$: cioè $a : b :: (M : N)\ (d : c)$. Con simigliante maniera dimostrasi, che stia anche $c : d :: (M : N)\ (b : a)$. C. B. D.

PRENOZ. V. *Essendovi più analogie,* A : B :: C : D, A : B' :: C : D', &c. *allora potrà conchiudersi, che la somma degli antecedenti delle prime ragioni stia alla somma de' loro conseguenti, siccome la somma degli antecedenti delle seconde ragioni alla somma de' conseguenti di loro ; quando gli antecedenti delle prime ragioni sieno a quelle delle seconde proporzionali : ovvero quando i conseguenti delle prime faccian proporzione con quei delle seconde.*

PRENOZ. VI. *Lo stesso può stabilirsi, qualora sieno infinite coteste analogie.*

Vedi la dim. del Lemm. II. recata ne' conici illustrati dal Giannattasio.

PRENOZ. VII. *Se la ragione di* M : N *sia maggiore di ciascheduna delle ragioni di* A : B, A' : B', A'' : B'', &c. ; *ella sarà anche maggiore della ragione della somma degli antecedenti di queste alla somma de' loro conseguenti.*

Dimos. Facciasi $M : N :: A : F$, ed $M : N :: A' : G$, saranno F, e G respettivamente minori di B, e B : e quindi sarà anche $F+G$ minore di $B+B'$. E poichè si è fatto $M : N :: A : F$, ed $M : N :: A' : G$; sarà $M : N :: A+A' : F+G$ (12. *El. V.*). Or essendo $F+G$ minore di $B+B'$, la ragione di $A+A' : F+G$ è maggiore di quella di $A+A' : B+B'$; dunque anche la ragione di $M : N$ è maggiore della ragione di $A+A' : B+B'$. E proseguendosi in simil guisa la dimostrazione, conchiuderassi l' assunto. C. B. D.

PRE-

Digitalizzato da Google

PRENOZ. VIII. *Sia* A a P F *una qualunque curva riferita all' asse* A F, *ed in essa s' inscrivano de' rettangoli* B a, C b, D c, &c. *di uguali altezze, ed altrettanti* B f, C g, D h, &c. *le si circoscrivano; io dico che l' aja di tal curva termini nella somma de' rettangoli iscritti, o de' circoscritti, qualora l'altezza di ciascheduno di essi diventi una grandezza minore di qualunque data.* Fig. 75.

La dimostrazione può leggersi ne' Conici illustrati dal Giann. Lemm. I.

PRENOZ. IX. *In ogni curva* A D F *il triangolo formato da un' archetto di lei* D d, *e da' due elementi* g D, *e* g d *delle coordinate ortogonali* D B, B A, *è sempre simile al triangolo* D L B *costituito dall' ordinata* D B, *dalla normale* D L, *e dalla sunnormale* B L. Fig. 6.

Dimos. Imperciocchè essendo gli angoli acuti *B L D*, *B D L* del triangolo rettangolo *DLB* uguali ad un retto; essi debbono pareggiare l' angolo *L D d*, che si è supposto retto: quindi toltovi di comune l' angolo *L D B*, rimarrà l' angolo *B L D* uguale all'altro *g D d*. Dunque i due triangoli rettangoli *D L B*, *d D g* saranno equiangoli, e con ciò simili. C. B. D.

Defin. I. Se dentro l' angolo retto *T C A* si concepisca descritta la curva *B P p* tale, che le ordinate *P M*, *G F*, *&c.* all' asse *C A* sieno inversamente come i quadrati delle loro ascisse *C M*, *C F*, *&c.*; cotesta curva si dice *Iperbole cubica*. Il punto C si chiama di lei *centro*, ed i lati *C A*, *C T* del divisato angolo, che deggionsi sempre avvicinare al perimetro di quest' Iperbole senza poterlo giammai toccare, si chiamano *Assintoti di essa.* Fig. 76.

PRENOZ. X. *Lo spazio asintotico infinitamente lungo* M Y P *dell' Iperbole cubica* B P p *è uguale al rettangolo delle sottoposte coordinate* P M, M C.

E gli spazj asintotici M Y P, F Y G *sono in sudduplicata ragione delle sottoposte ordinate* M P, F G, *o nell' inversa delle loro ascisse* C M, C F.

Dim.

Digitalizzato da Google

Dim. Part. I. Si biſechi l' angolo $A\,C\,T$ colla retta $C\,B$, che prolungata incontri in B la detta Iperbole cubica. Pel punto B e col medeſimo angolo aſintotico ACT ſi deſcriva l' Iperbole conica $B\,N\,n$ (Con. Giann. Lib. IV. Prop. 5.). E poi preſo in queſta Iperbole l'archetto $N\,n$ infinitesimo, ſi conduca pel ſuo eſtremo n l'ordinata $n\,m$, ed indi la retta $N\,Z$, che lo tocchi in N, e per B ſi ordini a $C\,M$ la retta $A\,B$. Sarà $C\,A$ uguale ad $A\,B$ per eſſere il triangolo $C\,A\,B$ iſoſcele rettangolo: e (per lo Cor. I. Prop. 18. Lib. III. Con. Gian.) ſarà $M\,Z$ uguale ad $M\,C$. Per la qual coſa eſsendo (Prop. 20. dell. ſteſ. Lib. III.) $N\,M : A\,B :: C\,A : C\,M$, e quindi $NM : C\,M :: C\,A^2 : C\,M^2$, ſarà $N\,M : M\,Z :: C\,A^2 : CM^2$.

Or eſſendo (Pren. IX.) il triangolo $N\,M\,Z$ ſimile al triangoletto $N\,r\,n$, ſta $N\,M : M\,Z :: N\,r : r\,n$; e per la natura di queſt' iperbole cubica è $C\,A^2 : C\,M^2 :: M\,P : A\,B$. Dunque ſiccome *ex ostensis* ſono uguali le prime ragioni di queſte due analogìe, così le altre ſaranno ancora tra ſe uguali. Vale a dire ſarà $N\,r : r\,n :: M\,P : A\,B$, e 'l rettangolo di $N\,r$ in $A\,B$ ſarà uguale al rettangolo di $r\,n$ in $M\,P$, cioè al trapezietto $Ppm\,M$. E quindi tutti queſt' infiniti trapezietti, che compongono l'aja aſintotica $M\,\Upsilon\,P$, adegueranno il rettangolo di AB nell' intera $M\,N$. Ma poichè ſi è dimoſtrato eſsere $N\,M$ a $C\,M$, come $C\,A^2$ a $C\,M^2$, o per l'iperbole cubica $B\,P\,p$, come $M\,P$ ad $A\,B$; ſarà il rettangolo di $N\,M$ in $A\,B$ quanto quello di $C\,M$ in $M\,P$. Dunque anche lo ſpazio aſintotico infinitamente lungo $M\,\Upsilon\,P$ uguaglierà il rettangolo delle ſottopoſte coordinate $M\,C$, $M\,P$.

Part. II. E dimoſtrandoſi col medeſimo ſiſtema di ragioni, che l' altro ſpazio aſintotico $F\,\Upsilon\,G$ agguagli il rettangolo delle coordinate $F\,G$, $F\,C$; ſarà lo ſpazio aſintotico $M\Upsilon P$ all' altro $F\Upsilon G$, come il rettangolo $P\,M\,C$ al rettangolo $G\,F\,C$, cioè in ragion compoſta di $P\,M$ a $G\,F$, e di $C\,M$ a $C\,F$, cioè in ſuddduplicata ragione di $P\,M$ a $G\,F$, o nella ſemplice ragione di $C\,F$ a $C\,M$. Imperocchè la ſeconda di quelle due componenti è per la natura dell' iperbole cubica ſuddduplicata inverſa della prima. C. B. D.

Co-

Digitalizzato da Google

Corol. I. Eſſendo le aje aſintotiche infinitamente lunghe BYE, AYD uguali ai rettangoli EBC, DAC delle ſottopoſte coordinate; ſarà l'aja $BADE$, differenza di quelle, uguale alla differenza de' rettangoli EBC, DAC. Laonde deſcrivendoſi un' iperbole conica, che ſi rapporti ai medeſimi aſintoti della cubica, e che paſſi per D, ſarà il rettangolo DAC uguale all' altro RBC: e quindi la differenza de' rettangoli EBC, RBC, ch'è il rettangolo di ER in CB, ſarà quanto l'aja $BADE$ dell' iperbole cubica. *Fig.* 16.

Cor. II. Ed eſsendo per la natura dell' iperbole cubica $EB : DA :: CA^2 : CB^2$: e per la natura dell' iperbole conica $DA : RB :: CB : CA :: CB^2 : CB . CA$; ſaranno le tre grandezze EB, DA, RB in ordinata ragione colle tre altre CA^2, CB^2, $CB . CA$: onde per uguaglianza ordinata ſtarà $EB : RB :: CA^2 : CB . CA :: CA : CB$. E quindi dividendo reſterà $ER : RB :: AB : BC$, e 'l rettangolo di ER in BC pareggerà l' altro di RB in AB.

n. 1. *Cor. III.* E' dunque l'aja $DABE$ uguale al rettangolo di RB in AB. E quindi *le due aje* EDAB, eDAb, *che sono uguali rispettivamente a' rettangoli* ABR, Abr, *saranno fra loro in ragion composta di* AB ad Ab, e di BR a br, *o di* Cb *a* CB. Vedi Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Con. Giann.

n. 2. *Cor. V.* Per l' eſtremo d di una qualunque altra ordinata ad ſi deſcriva l'iperbole conica df rapportata agli aſintoti AC, CQ; ſaranno i due rettangoli DAC, daC reſpettivamente uguali agli altri RBC, fbC: onde ſiccome i due primi ſono (Pren. X.) nella ragione di aC ad AC; così ſarà pure $RBC : fbC :: aC : AC$, e poi (Pren. IV.) $RB : fb :: (aC : AC)$ $(bC : BC)$. Ma le aje $DABE$, $dabe$ dell' Iperbole cubica ſi ſon moſtrate uguali a' rettangoli di BR in BA, e di bf in ba. Dunque quelle al par di queſti ſaranno in ragion compoſta di Rb ad fb, e di BA a ba: *e quindi sarà* $DABE : dabe :: (aC : AC)$ $(bC : BC)$ $(BA : ba)$.

PRE-

Digitalizzato da Google

PRENOZ. XI. *Se la retta* A O, *che unisce il vertice del triangolo* B A C *colla metà della sua base* BC *protraggasi su del vertice, sicchè* AD *sia dupla di* A O; *congiunte le rette* C D, B D *queste saranno anche dai lati* BA, C A *dello stesso triangolo bisecate. E vicev.*

Fig. 14.

Dim. Facciasi *A F* uguale ad *A D*, e si uniscano le rette *B F*, *C F*; sarà il triangolo *B O F* uguale all' altro *A O C* (4. El. I). Dunque l' angolo *O B F* sarà uguale ad *O C A*, e quindi *B F*, ch' era uguale ad *A C*, le sarà anche parallela, e la figura *B A C F* un parallelogrammo.

E poichè la retta *A G* è parallela alla *F C*, dee stare *F D*: *D A*:: *F C*: *A G*, ed *F D*: *D A*:: *C D*: *DG*. Dunque la congiunta *C D* vien bisecata dalla *B A* prodotta, finchè l' incontra: ed è *A G* metà di *F C*, o di *A B*.

Part. II. Che se il punto medio *G* della retta *D C* si unisca col punto *A*, la retta *G A* dee giacersi a diritto colla *B A*: altrimenti *B A* passando per *G* non combacerebbe colla *G A*: lo che è assurdo. C. B. D.

n. 1. *Cor. I.* I lati *A B*, *B F*, *A F* del triangolo *ABF* sono come i seni degli angoli *A F B*, *F A B*, *A B F*, che loro oppongonsi. E questi seni sono gli stessi, che quei degli angoli *CAF*, *BAF*, *BAC*. *Dunque le rette* A B, A C, A F *son proporzionali ai seni degli angoli* C A F, B A F, B A C.

n. 2. *Cor. II.* E sarà (come con corto filo di ragioni può rilevarsi) *A F* ad *A B* + *A C*, come sen. *B A C* a sen. *C A F* + sen. *B A F*.

n. 3. *Cor. III.* Finalmente, se *A B* adegui *A C*, la retta *A F* dovrà bisecar l' angolo *B A C*. E se questo angolo sia di 120°, sarà tanto *B A F*, che *F A C*, o il suo uguale *B F A* di 60°. *Dunque il triangolo* B A F *sarà equilatero, ed* A F *sarà uguale tanto ad* A B, *che ad* A C.

Fig. 24.

PRENOZ. XII. *Se per l' angolo* C *del quadrilineo* KOCF *conducansi comunque nel dilui piano le due rette* BR,

Digitalizzato da Google

ER, br, *ed abbassate dagli altri angoli* O, K, F *del quadrilineo le perpendicolari* OB, KA, FR *su di* BR, *e le altre* Ob, Ka, Fr *sulla* br, *sieno* BA, *e* ba *respettivamente uguali a* CR, *e* Cr; *il proposto quadrilineo sarà un parallelogrammo.*

Dim. Si calino dal punto *O* le due rette *OL*, *OM* reſpettivamente perpendicolari a *KA*, *Ka*, e ſi congiungano le altre due *LM*, *Rr*. E poichè (10. El. XI.) l'angolo *LOM* è uguale all' altro *RCr*, ed i lati *di* quello *OL*, *OM* ſono uguali alle rette *BA*, *ba* (34. El. I.), cioè per ipoteſi a *CR*, *Cr* lati di queſto, ſarà la retta *LM* uguale ad *Rr*, e l' angolo *LMO* uguale all' altro *RrC*. Con che eſſendo *OM* parallela a *CR*, anche *LM* ſarà ad *Rr* parallela. Per la qual coſa avendo i due triangoli *LKM*, *RFr* tutti i loro lati tra ſe paralleli, dovranno eſſere equiangoli (10. El. XI.); ed eſſendoſi moſtrata la *LM* uguale alla *Rr*, ſarà (26. El. I.) *LK* uguale ad *FR*. E poichè i triangoli rettangoli *OKL*, *CFR*, come ſi è dimoſtrato, hanno uguali non meno i cateti *OL*, *CR*, che gli altri *LK*, *RF*, è d' uopo che *OK* ipotenuſa del primo ſia ancora uguale, e parallela a *CF* ipotenuſa del ſecondo. Dunque (33. El. I.) la figura *KOCF* ſarà un parallelogrammo. C. B. D.

PRENOZ. XIII. *Se fuori de' due cerchi uguali* FBY, fby *ſi prendano ovunque i due punti* A, *ed* a, *e condotte pe 'l primo di essi le seganti* AM, AO *tra loro vicinissime, si tirino pe 'l secondo le altre due* am, ao, *che ascindano gli archi* bo, dm *rispettivamente uguali a* BO, *e* DM; *io dico essere gli archetti* BD, bd *nella ragion diretta delle parti esteriori* AB, ab *di esse seganti, e nell' inversa di* AP, *ed* ap, *somme delle medesime parti, e delle metà delle parti interiori.* *Fig.* 29. *e* 30.

Dim. Da' centri *S*, ed *s* ſi calino *SP*, *SR*, *sp*, *sx* reſpettivamente perpendicolari ſulle medeſime ſecanti, e da' punti *B*, e *b* ſi tirino *BT*, *bt* perpendicolari ſu di *AM*, ed *am*. E poichè l' angolo *AQP* manca dal retto *APQ* per quanto è l' angolo infinitesimo *PAQ*,

ei

Digitalizzato da Google

ei ſi potrà ſtimare uguale ad APQ. Dunque anche SRQ ſarà uguale ad SQR, il lato SR ſarà uguale ad SQ, e QP dinoterà la differenza di SP, e di SR. Con ſimil ragionamento moſtreraſſi, che pq ſia differenza di sp, e di sr. Onde eſſendo le due SP, SR reſpettivamente uguali ad sp ed sr, ſarà PQ uguale a pq. Ciò poſto, per la ſimilitudine de'triangoli BAT, PAQ ſtà BT a PQ come AB ad AQ, o ad AP. E per la ſimilitudine degli altri due apq, abt, l'è anche $pq : bt :: ap : ab$: dunque ſarà (Pren. I. e II.) $BT : bt :: (AB : ab)\ (ap : AP)$. Ma per l' uguaglianza delle due corde DM, dm, gli angoli BDT, bdt, ch' eſſe formano co' loro archi, ſon pure tra ſe uguali. Dunque ſaranno ſimili tra loro i triangoletti rettangoli BDT, bdt. Con che eſſendo la ragion degli archetti BD, bd quanto quella di BT a bt, ſarà $BD : bd :: (AB : ab)\ (ap : AP)$. C. B. D.

PRENOZ. XIV, *Ne'triangoli rettangoli* SAP, sap *i ſeni degli angoli acuti* ASP, asp *ſono direttamente come i cateti* AP, ap, *che li ſottendono, ed inverſamente come le loro ipotenuſe.*

Dim. Poſto il raggio uguale ad R, è nel triangolo rettangolo SAP ſen. $ASP : R :: AP : AS$, e nell' altro triangolo sap l' è pure R : ſen. $asp :: as : ap$. Dunque (Pren. I. e II.) ſarà ſen. ASP : ſen. $asp :: (AP : ap)\ (as : AS)$. C. B. D.

Fig. 81. PRENOZ. XV. *Date di poſizione le tre rette* AB, BC, AC, *che non ſien tutte tra ſe parallele, ritrovare un punto, da cui le perpendicolari, che vi ſi abbaſſano, ſieno come le tre rette date* M, N, P.

Costr. Cas. I. Le prime due rette ſi uniſcano in B; ed in A, e C le ſeghi la terza AC. Si prendano 1. accanto all'angolo B le due rette uguali BF, BG, e fatta CR uguale a CG, ſi congiungano le altre due FG, GR. 2. Si divida FG in E, ſicchè ſtia $FE : EG :: M : N$, e l' altra GR in H, talchè ſia $GH : HR :: N : P$. 3. Finalmente ſi uniſcano le rette BE, CH, che protratte

Digitalizzato da Google

tratte s' incontreranno in *L*. *Sarà* L *il punto addimandato*.

Dim. Essendo tra se uguali gli angoli *B F G*, *B G F* (5. El. I.); se dal punto *E* si calino *E O*, *E Q* perpendicolari su di *BA*, e *BC*, i due triangoli rettangoli *E F O*, *E G Q* riusciranno equiangoli, e simili. Dunque sarà *E O* : *E Q* : : *F E* : *E G*. Ed abbassate le *L I*, ed *L K* perpendicolari sulle medesime *B A*, *B C*; la prima delle divisate ragioni è uguale a quella di *L I* ad *L K*; e l' altra è per costruzione uguale alla ragione di *M* ad *N*. Dunque sarà *L I* : *L K* : : *M* : *N*.

Nella stessa guisa si dimostrerà, che stia *L K* : *L S* : : *N* : *P*. Dunque le tre perpendicolari *L I*, *L K*, *L S* sono come le tre rette date *M*, *N*, *P*.

Cas. II. Sieno *B A*, *B C*, *a c* le tre rette date, delle quali *BC*, ed *a c* sieno parallele, e le altre due s'incontrino in *B*. A tal uopo si prendano le uguali *B F*, *B G* d' accanto l' angolo *B*, e congiunta la *F G*, la si divida in *E*, ficchè stia *F E* : *E G* : : *M* : *N*, e si unisca *B E*. II. Da un qualunque punto C della *BC* si cali C *c* perpendicolare su di *c a*, e si prolunghi in *D*, talchè sia *D C* : *D c* : : *N* : *P*. III. Per *D* si tiri *DL* parallela a *C K*, che s' incontri con *B E* in *L* : *sarà questo punto quello*, *che si domanda*. Lo che dimostrasi come prima. C. B. D.

Cor. Il richiesto punto *L*, segnato dal concorso di due rette, non è, che un solo.

DEL-

Digitalizzato da Google

DELL'EPICICLOIDE INFERIORE.

PRENOZ. XVI. *Def.II.* Se il circolo *BnO* esistente nel piano dell'altro *RAS*, entro di questo con perfetta rivoluzione si aggiri in maniera, che i punti della sua periferia vadansi successivamente adattando nella concavità del circolo *RAS*, cioè che il circolo *B n O* vada rotolando entro dell' altro *RAS*; un qualunque punto *n* del circolo *B n O* segna la curva *A n M*, ch' *Epicicloide inferiore* si domanda. Il punto medio di questa curva, qual è il punto *Q*, si dice *vertice* di essa: e l'arco *A B M* n'è la di lei *base*. Il circolo *R A M* dicesi *cerchio immobile* e l' altro *B n O circolo rotatore*, di cui il punto *n* chiamasi *punto descrivente*.

Fig. 82.

Cor.I. Nel generarsi l'arco *A n* dell'Epicicloide *AQM*, tutt' i punti dell'arco *nB* si sono successivamente adattati a quei dell'arco *AB*. E nel trasferirsi fino ad *M* il punto *n*, tutt' i rimanenti punti della circonferenza *B n O* di mano in mano si sono soprapposti a quei dell'arco *BXM*. Dunque l'arco *n B* è uguale all'arco *AB*, e l'arco *nOPB* pareggia l'altro *BM*: e con ciò l' intera periferia del circolo rotatore *BnO* uguaglia la base di questa Epicicloide.

Cor. II. Rotolando il circolo *B n O* entro dell' altro *R A S*, la corda *B n* nel principio di tal movimento genera un' archetto infinitesimo, cui essa corda è perpendicolare in *n*: ma l' è anche *B n* perpendicolare ad *n O*. (31. El. III.). Dunque la *n O è tangente dell' Epicicloide in N*.

Cor. III. Quindi adattandosi ad un qualunque punto *n* dell' Epicicloide la tangente *n O*, e la normale *n B*; e dal punto *B*, ove la normale incontra il cerchio immobile *RAS*, tirandosi al centro C del medesimo il raggio *BC*; *la parte* BO *di esso raggio, intercetta tra la normale, e la tangente, uguaglia il diametro del circolo rotatore, e viceversa*.

Cor. IV. Unito il centro *C* del cerchio immobile col vertice *Q* dell' Epicicloide per la retta *C Q*, e prodotta fino ad *X*; sarà *Q X* uguale al diametro del cerchio rotatore.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. I. *Se ad un qualunque punto* n *dell' Epicicloide* A n M *si adatti la tangente* n O, *e la normale* n B, *e dal punto* B, *ove la normale incontra il cerchio immobile* R B S, *si tiri al di lui centro* C *il raggio* B C; *dico, che l' arco epicicloidale* n Q *stia alla parte* n O *della tangente, che il raggio* BC *ascinde verso del contatto, nella costante ragione della differenza dei diametri del circolo immobile e del rotatore, al raggio del cerchio immobile.*

Dim. Si biſechi *B O* in *I*, e col centro *I* intervallo *I B* deſcrivaſi il circolo *B n O*, il quale dovrà paſſare pel punto *n*, e ſarà il circolo rotatore (Cor. 3. Defin. 2.). Concepiſcaſi ora, che tal circolo rotolando nella concavità dell' altro *R A S* ſi trasferiſca nel ſito proſſimo *G t P*; coſicchè i punti dell'archetto infinitesimo *B b* ſi adattino ſucceſſivamente a quei dell' archetto *B G*: con tal movimento il punto dato *n* condurraſſi in *t* ſcorrendo per l' archetto infinitesimo *n t* dell' Epicicloide; e 'l centro *I* del circolo rotatore trasferiraſſi in *K*. Si uniſcano le rette *C G*, *C t*, *K t*, *P t*; e ne' punti *P*, e *t* ſi adattino al circolo *G t P* le tangenti *P E*, *t E*, e dal punto *E* del loro incontro ſi abbaſſi ſulla *P t* la perpendicolare *E H*: indi da *P* ſi cali ſulla *C t* la perpendicolare *P L*, la quale ſi prolunghi, finchè incontri la *t E* in *D*, d' onde ſi abbaſſi ſu di *P t* l' altra perpendicolare *D F*. Dipoi col centro C intervallo *C n* deſcrivaſi l' arco *n a*: e col centro *P* intervallo *P a* ſi deſcriva l' altro *a v*. Finalmente la retta *C t* ſi prolunghi, finchè tagli in *r* l' arco *n a*.

E poichè il ſemicerchio *G t P* è uguale all'altro *B n O*, e l' arco *G a*, com' è chiaro di per ſe ſteſſo, pareggia l' altro *B n*; ſarà il rimanente arco *a t P* uguale al rimanente arco *n fO*: e con ciò le loro corde *P a*, *On* ſono anche uguali. E quindi *P v*, ch'è uguale a *P a*, pareggia *On*: e *t v* differenza di *P v*, e *P t*, è anche differenza di *O n*, e *P t*. Dunque, nel trasferirſi il circolo *B n O* nel ſito proſſimo *G t P*, l'arco *n Q* ſi è diminuito dell' archetto *n t*, e contemporaneamente la corda *O n* ſi

Digitalizzato da Google

è minorata di $t\,v$. Essendo ora gli archi $G\,a$, $B\,n$ uguali fra loro, $a\,t$ sarà il contemporaneo aumento dell' arco $B\,n$: e per essere $C\,r$ uguale a $C\,n$, $t\,r$ sarà il contemporaneo decremento di $C\,n$. Dunque non solo gli archi $t\,n$, $t\,v$ sono infinitesimi, ma lo sono ancora la retta $t\,r$, e l' arco $t\,a$; e con ciò la tangente $D\,t$ prolungandosi si confonde coll' archetto $t\,a$: siccome la $P\,t$ tangente dell' Epicicloide in t è a diritto col dilei archetto $t\,n$: onde i triangoletti $n\,t\,r$, $r\,t\,a$, $a\,t\,v$ si potranno avere per rettilinei.

Or i due triangoli $n\,t\,r$, $P\,t\,L$, che son rettangoli in r ed L, ed hanno anche uguali gli angoli opposti al vertice $r\,t\,n$, $P\,t\,L$, deggion essere simili fra loro. E per la stessa ragione i triangoletti $r\,t\,a$, $a\,t\,u$ sono respettivamente simili ai triangoli $L\,t\,D$, $D\,t\,F$. Dunque sarà $t\,n : t\,r :: t\,P : t\,L$, $t\,r : t\,a :: t\,L : t\,D$, $t\,a : t\,u :: t\,D : t\,F$: e quindi sarà ex æquo $t\,n : t\,u :: P\,t : t\,F$.

Intanto nel triangolo $C\,P\,Y$ rettangolo in P essendosi da P abbassata la perpendicolare PL sulla di lui base CY, dev'essere l'angolo YPL uguale all'angolo YCP (8.El.VI.): è poichè nel quadrilatero $K\,P\,E\,t$ son retti gli angoli $K\,P\,E$, $K\,t\,E$; gli altri due $P\,K\,t$, $P\,E\,t$ debbono far due retti. Ma i due angoli $P\,E\,D$, $P\,E\,t$ anche uguagliano due retti: dunque l' angolo $P\,K\,t$ è uguale all'angolo $P\,E\,D$. Laonde i due triangoli $P\,E\,D$, $C\,K\,t$, che hanno (per dim.) uguali gli angoli EPD, tCK, non men che gli altri PED, CKt sono fra loro simili; e con ciò dee stare $D\,E : E\,P :: t\,K : C\,K$; ossia $D\,E : E\,t :: G\,K : C\,K$, e componendo $D\,t : E\,t :: G\,C : C\,K$. Ma per la similitudine de' triangoli $D\,t\,F$, $E\,t\,H$ sta $D\,t : E\,t :: F\,t : H\,t$. Dunque l' è parimente $G\,C : C\,K :: F\,t : H\,t$; e duplicando i conseguenti sarà $G\,C : 2\,C\,K :: t\,F : t\,P$; ed invertendo si avrà $2\,C\,K : G\,C :: t\,P : t\,F$. Ma si è antecedentemente dimostrato essere $t\,n : t\,v :: t\,P : t\,F$. Dunque è ancora $t\,n : t\,v :: 2\,C\,K : G\,C$. E dimostrandosi con simile ragionamento essere sempre il decremento dell' arco $n\,O$ al contemporaneo decremento della corda $n\,O$ nella costante ragione di $2\,C\,K : G\,C$, sarà la somma dei primi alla somma dei secondi, come $2CK$:

Digitalizzato da Google

$\frac{1}{2}$ *CK* : *GC*. E poichè giugnendo il punto *n* in *Q*, ſvaniſcono contemporaneamente l' arco *nQ*, e la corda *nO*; quindi dovrà eſsere *nQ* uguale alla ſomma dei primi decrementi, ed *nO* uguale alla ſomma de' ſecondi. Dunque ſtarà *nQ* : *nO* : : 2 *CK* : *CG*; cioè l'arco epicicloidale *nQ* ſta ad *nO*, ſiccome è la differenza dei diametri del circolo immobile *RAS*, e del rotatore *BnO* al raggio del circolo immobile *RAS*. C. B. D.

PROP. II. *Sia* AnQ *il ſemiperimetro di un' Epicicloide deſcritta dal cerchio* GnO, *che rotoli nella concavità dell' altro immobile* RAX; *ritrovare la curva, che nasce dall' evoluzione di queſta Epicicloide.* *Fig.* 83.

Costr. 1. Dal centro C del cerchio immobile *RAX* conducaſi al punto *A*, ch' è un' eſtremo dell' Epicicloide, la retta *CA*, da cui ſe ne tronchi *AT* uguale al diametro *GO* del cerchio rotatore. 2. Si rittovi *GP* terza proporzionale in ordine a *CA*, e *CT*. 3. Si deſcriva col centro *C* intervallo *CT* il cerchio *MTQ*, il quale dovrà paſsare pel punto *Q* vertice dell'Epicicloide *AnQ*: imperciocchè condotto per *Q* il raggio *CQX*, dee *QX* uguagliare *AT* diametro del cerchio rotatore (Cor. 4. Def. 2): e quindi l' arco *MTO* paſserà per *Q*. 4. Finalmente ſi concepiſca, che un cerchio, il di cui diametro ſia quanto *TP*, tocchi nel punto *Q* l' arco *TQ*, e che vada nella cavità di queſto rotolando da *Q* verſo *T*, ſicchè tutti i punti della ſua circonferenza ſi adattino ſucceſſivamente ſull' arco *QTM*, mentre il dilei punto *Q* ſegni l' Epicicloide *QPM*. Dico, *che la prima metà di queſta curva sia quella, che si domanda.*

Dim. Il cerchio *GnO* dicaſi per brevità *primo rotatore*: e l' altro, che abbia *TP* per diametro, *secondo cerchio rotatore*.

1. E poichè dalla coſtr. ſta *CA* : *CT* : : *CT* : *CP*, ſarà (19. El. V.) *CA* : *CT* : : *AT* : *TP*. Ma gli archi ſimili *AX*, e *TQ* ſon come i loro raggi *CA*, e *CT*: dunque ſaranno i medeſimi archi *AX*, *TQ* come *AT* a *TP*, o come la ſemicirconferenza del primo cerchio

Digitalizzato da Google

chio rotatore a quella del ſecondo. Ma l' arco AX è uguale alla ſemicirconferenza del primo cerchio rotatore: dunque ſarà pure TQ uguale alla ſemicirconferenza del ſecondo: e quindi dovrà cadere in P il vertice della ſeconda Epicicloide.

2. Si adatti ad un qualunque punto n della data Epicicloide la tangente nO; e ſia GnO la poſizione del primo cerchio rotatore, quando il dilui punto deſcrivente ſi trovi in n; dovrà le retta CK, che uniſce il centro C del cerchio RAX con quello di GnO, paſsare (11. 12. El. III.) pe' punti G, ed O, ove lo ſteſso cerchio GnO tocca gli altri due RAX, MOQ. E perchè la tangente nO tronca da CG la parte GO (Cor. 3. Def. 2.) uguale al diametro del primo cerchio rotatore; è d' uopo, che l' incontro delle due rette NO, CG cada in quel punto, ove il cerchio GnO tocca il cerchio MOQ.

3. Si tagli OB uguale a TP, e ſi protragga nO in D, ſicchè ſtia $nO : OD :: GO : OB$: ei ſarà chiaro, che congiunte le rette Gn, DB, debba eſsere il triangolo GnO ſimile all'altro BDO (6.El.VI.): e che l'angolo ODB ſia retto al par dell' altro GnO (Cor. 3. Def.2.). Dunque il punto D dovrà caſcare nella periferia del ſecondo cerchio rotatore, quando il di lui centro ſi ritrovi nella retta CO. E dico altresì che lo ſteſſo punto D debba ritrovarſi nell' Epicicloide deſcritta dal ſecondo cerchio rotatore. Imperocchè, ſe vogliaſi che il cerchio ODB, il quale abbia OB per diametro, incontri in un'altro punto p la ſeconda Epicicloide; l' arco Op dovrebbe pareggiare OQ. Laonde eſsendoſi dimoſtrato (n. 1.), che QOT adegui ODB, ſarà OT uguale a pB. Ma ſta $CA : CT :: AG : TO$, e di queſte ragioni la prima è uguale a quella di AT a TP, o di GO ad OB: e ſon poi Gn, e pB reſpettivamente uguali a GA, ed OT. Dunque ſarà $Gn : pB :: GO : OB$: e quindi ſarà l' arco Gn ſimile all' altro pB, e l' angolo GOn uguale a pOB. Ma il primo è uguale a BOD. Dunque ſarà BOp uguale a BOD. Lo che è aſsurdo.

4. Si biſechi TA in E. E poichè ſi è dimoſtrato (n. 1.) eſsere $CT : CA :: TP : TA$: ſarà compo-

nen-

Digitalizzato da Google

nendo $C\,T + C\,A$, o ſia $2\,C\,E$ a $C\,A$, come $P\,A$ a $T\,A$, o come $G\,B$ a $G\,O$, cioè a dire come $n\,D$ ad $n\,O$. Ma (Prop. ant.) $2\,C\,E$ ſta a $C\,A$ come $n\,Q$ ad $n\,O$. Dunque ſarà $n\,D : n\,O :: n\,Q : n\,O$, e quindi $n\,D$ uguale ad $n\,Q$. Sicchè l' eſtremo D della tangente $n\,D$ dell' arco $n\,Q$, ch' ella parreggia, ſempre ſi ritrova nell' Epicicloide, che ſi deſcrive dal ſecondo cerchio rotatore. Dunque queſta Epicicloide ſarà quella, che naſce dall' evoluzione della data $A\,n\,Q$. C. B. D.

Cor. La retta $A\,P$, come può intenderſi facilmente, è il raggio dell' oſcolo nel vertice P dell' Epicicloide $Q\,D$ P. *Dunque ſe il cerchio* O D B, *che rotoli entro l' immobile* QTM *deſcriva l'Epicicloide inferiore* QPM, *il dicui vertice ſia* P; *il raggio* A P *dell' oſcolo nel dilei vertice* P *dovrà inveſtigarſi, facendo* C P *a* C T, *come* C T *a* C A. E queſto vuol capirſi bene per intender chiaramente la Prop. G. delle Prelez.

DELLA CICLOIDE.

Defin. III. Se il circolo $T\,N\,M$, che tocchi in M la retta $A\,M$, compia ſu di queſta un perfetto rotolamento, ed in uno ſteſſo piano; il punto M deſcriverà una curva, che *Cicloide* ſemplicemente, o *Cicloide volgare* ſi domanda. *Fig.* 80.

Cor. I. Qualora il raggio $C\,G$ del cerchio immobile $R\,A\,S$ ſia infinito riſpetto a $G\,K$ raggio del cerchio rotatore $G\,a\,P$; la periferia di queſto, e con ciò anche l' arco $A\,B\,M$ ad eſsa uguale ſarà una parte infinitesima della periferia del cerchio immobile. Dunque l' arco $A\,B\,M$ potrà averſi come una retta, cui ſian perpendicolari le $C\,X$, $C\,G$, &c. e la curva $A\,Q\,M$ ſarà in tal caſo una Cicloide volgare. *Fig.* 82.

Cor. II. Di più eſsendo $C\,K$ preſsochè uguale a $C\,G$, l' arco $Q\,n$, che nell. I. Prop. dell' Epicic., ſi è dimoſtrato eſſere alla corda $n\,O$ del cerchio rotatore, come $2\,C\,K$ a $C\,G$, le ſarà come 2 ad 1: cioè *l' arco cicloi-*

dale

Digitalizzato da Google

dale Q n *è doppio della corda* n O *del cerchio rotatore.*

Cor. III. Gli altri Coroll. dedotti dalla defin. dell'Epicicl. si posſono convenevolmente alla Cicloide applicare.

Defin. IV. Si bisechi in *X* la base *A M* della Cicloide *A Q M*, di dove le si eriga la perpendicolare *X Q*, che incontri in *Q* il dilei perimetro; si dirà *Q X asse* della Cicloide, intorno a cui suol mettersi il cerchio generatore *Q L X*: il punto *Q* si dirà *vertice* della stessa curva: e tutte le dilei corde parallele alla *M A* si diranno *ordinate* alla Cicloide, e le loro *ascisse* saranno le parti dell'asse, ch'esse verso il vertice ne tagliano.

Fig. 80.

PRENOZ. XVII. *Ogni arco cicloidale* Q n *è duplo della corda* QL, *che gli corrisponde nel circolo generatore. E la tangente* On *condotta all'estremo di esso arco è parallela alla medesima corda.*

Dimost. Il circolo rotatore intendasi trasferito nella posizione *n B N*, sicchè il suo punto descrivente cada in *n* estremo dell'arco *Q n*, dopo che tutti i punti dell'arco *B n* sienſi adattati successivamente su quelli della retta *AB*. Si congiunga il centro *R* di questo circolo col punto *B*, ov'ei tocca la *BA*: e la retta *BR* protraggasi, finchè incontri in *O* il cerchio *N B O*; sarà *B O* perpendicolare ad *A B* (Cor.3. Def.3.); ed uguale ad *X Q*. E poichè a cagion del parallelogrammo *B E F X* le rette *X F*, *B E* parti de' diametri uguali *X Q*, *B O* son anche tra se uguali; è d'uopo, che *Q F*, ed *O E* rimanenti porzioni de' diametri anche si pareggino. Ma la corda *Q L* è media proporzionale (Cor. Prop.8. El.VI.) tra *X Q*, e *Q F*, ed *O n* tra *B O*, ed *O E*: dunque sarà *Q L* uguale ad *O n*. Il perchè essendo l'arco cicloidale *Q n* duplo della corda *O n* (Cor.2. Def.3.), il sarà anche duplo della *Q L*.

Ed essendo tra se uguali gli angoli *Q X L*, *O B n*, perchè insistono sugli archi uguali *Q L*, *O n*; anche gli angoli *Q L F*, *O n E*, che a quelli (8. El. VI.) son respettivamente uguali, dovranno pareggiarsi. Dunque *n O*, ch'è tangente (Cor.3. Def.3.) della Cicloide nel punto *n*, sarà (27. El. I.) parallela alla corrispondente corda *Q L*. C. B. D.

Cor.

Digitalizzato da Google

Cor. I. Dunque, preſo l' archetto $n t$ infiniteſimo, e calata $t r$ perpendicolare ſu di nF, dovrà riſultarne il triangoletto $n t r$ ſimile al triangolo $Q L F$.

Cor. II. Ed i triangoli $Q X L$, $O B n$ ſaranno perfettamente tra ſe uguali.

PRENOZ. XVIII. *Poste le medesime supp. della prec. pren. la parte* n L *della semiordinata* n F, *cioè quella, che framezza l' arco cicloidale, e 'l cerchio generatore, è sempre uguale al corrispondente arco circolare* Q L.

Dim. Gli archi $X L$, $B n$, ſotteſi dalle uguali corde XL, $B n$, ſono tra ſe uguali. Dunque togliendo coteſti archi dalle uguali ſemicirconferenze $Q L X$, $n B N$ dovrà rimanervi l' arco $L Q$ uguale all' altro $B N$. Or l' arco $B N$ è quanto la $B X$, concioſſiachè l' arco $B N$ deeſi adattare ſulla $B X$, affinchè il cerchio generatore compia una metà della ſua rotazione: ed è poi a cagion del parallelogrammo $L X B n$ la retta $B X$ uguale alla nL: dunque ſarà pure $L Q$ uguale ad $n L$. C. B. D.

PRENOZ. XIX. *La Cicloide volgare è simile, ed uguale a quella, che si genera dalla sua evoluzione.*

Dim. Suppoſto quanto ſi è detto nell. Prop. 2. dell' Epic., immaginatevi, che il raggio C A del cerchio immobile $R A X$ diventi infinito riſpetto ad $A T$ diametro del primo cerchio rotatore, in tal caſo i raggi C A, CG, C X, &c. diverranno tra ſe paralleli: gli archi circolari $A X$, $T Q$ ſaranno qual rette uguali, e perpendicolari alla C A: e la ſemiepicicloide $A n Q$ dovrà degenerare in una ſemicicloide volgare. E perchè il diametro $P T$ del ſecondo cerchio rotatore dee ſtare a $T A$ diametro (n. 3. coſtr. Prop. 2. Epic.) del primo rotatore, come C T a C A, cioè in ragion d' uguaglianza, eſſendo tali rette infinite per la finita TA differenti; ſarà anche TP uguale a $T A$. E quindi la curva $Q D P$, che ſi deſcrive dalla evoluzione della Cicloide volgare $A n Q$, ſarà ancor eſſa una Cicloide uguale, e ſimile alla $A n Q$. C. B. D. *Fig.* 83.

Cor. Eſſendo nO ad OD, come GO ad $O B$, cioè in ra-

Digitalizzato da Google

ragion di uguaglianza; *sarà vero, che ogni raggio dell' evoluta di una Cicloide volgare debba esser bisecato dalla base di quell' altra, che nasce dalla dilei evoluzione. E poi il raggio dell' oscolo nel vertice di una Cicloide sarà duplo del diametro del cerchio generatore.* Vedi fig. 74.

PRENOZ. XX. *Sia la retta* A B *divisa ad arbitrio in* C, *ed essa si prolunghi fino ad* O, *o si divida in un' altro punto* O; *sarà* A C . B O ± B C . A O = A B . C O.

Fig. 79. n. 1. 2.

Dim. Part. I. Per la I. El. II. è B C . A O = B C. C O + B C . A C. Dunque aggiungendovisi A C . B O, sarà A C . B O + B C . A O = B C . C O + B C . A C + A C . B O: ma questi due ultimi rettangoli sono uguali (1. El. II.) al rettangolo di A C . C O. Dunque sarà A C . B O + B C . A O = B C . C O + A C . C O = A B . C O.

n. 1.

Part. II. Ed essendo A C . B O = A O . B O + O C. B O; togliendovi d' ambe le parti B C. A O, sarà A C. B O − B C . A O = A O . B O + O C . B O − B C. A O. Ma A O . B O − A O . B C = A O . C O. Dunque sarà A C . B O − B C . A O = A O . C O + O C . B O = A B . C O. C. B. D.

n. 2.

LA

Digitalizzato da Google

LA
MECCANICA

CAP. I.

DEL MOTO EQUABILE.

§. 1. DEFIN. I. QUella Scienza, che ha per oggetto i moti de' corpi solidi, e le forze, che gl' investono, si addimanda *Meccanica*.

§. 2. DEFIN. II. Un corpo si dice mosso *equabilmente*, se per uguali parti del suo sentiero, qualunque sian queste, vi si conduca sempre in tempi uguali.

§. 3. COROLL. I. Dunque questo corpo dovrà impiegarvi più tempo in percorrere un qualche spazio, che un' altro minore di esso.

§. 4. COROLL. II. Di più un corpo mosso equabilmente dee correre un dato spazio in un dato tempo: dunque dovrà spendervi il doppio tempo nel condursi per lo doppio spazio, il triplo per lo triplo, ec.

§. 5. DEFIN. III. E se un corpo in tempi uguali percorra spazj disuguali, o pur v' impieghi ineguali tempi in descrivere uguali spazj, il suo moto si dirà *variabile*.

Digitalizzato da Google

§. 6. DEFIN. IV. Il moto variabile sarà poi *accelerato*, o *ritardato*, secondochè gli spazj descritti in tempi uguali vadano crescendo successivamente, o decrescendo.

§. 7. SCOL. La forza motrice, come l'intenderete, cari Giovanetti, nel Capo III., non si giace *inoperosa* entro di un corpo; ma tantosto lo guida al moto, obbligandolo a descrivere equabilmente un dato spazio in un dato tempo. Dunque questa nuova determinazione sorta nel corpo dalla forza motrice che lo riempie, e che da' Fisici *velocità* del mobile si domanda, l'è un' affezione del di lui moto, che come cosa al corpo inerente può concepirsi. E quindi da questo concetto della velocità le rapportate definizioni potran ricevere le seguenti forme del pari eleganti, che le primiere. Un corpo *si dirà mosso equabilmente, se ovunque ne serbi invariabile quella velocità, onde ha principiato il suo moto* (a). E 'l movimento di un' *altro corpo si dirà accelerato, o ritardato, se la dilui velocità continuamente cresca, o pur decresca.*

§ 8.

(a) Alcuni fogliono dire, che la velocità di un corpo fia il *rapporto dello spazio al tempo*. Ma la definizione recata alla velocità nel §. 7. è più conveniente al fenfo di tante efpreffioni ufe non men dal volgo, che da' medefimi Geometri: e fono *la velocità, che ad un corpo s' imprime: quella con cui n' esce da un dato luogo, o ad un' altro ne perviene: la velocità si accresce, si diminuisce; &c.*

Digitalizzato da Google

§. 8. ASSIOMA. *Le velocità di più corpi, che camminano equabilmente, sono nella ragion degli spazj, ch' essi descrivono in tempi uguali.*

Ciò segue immediatamente dalla definizione della velocità, qualunque si voglia quì adottare (a), senza che faccia uopo dimostrarvelo compiutamente. Onde tal principio l'è un vero assioma.

PROP. I. TEOR.

§. 9. *Se un corpo equabilmente si conduca pel sentiero* ABD; *gli spazj* AB, BD, *che vi descrive, saran come i tempi impiegati a descriverli.* *Fig. 1. n. 1.*

DIM. Quì si possono verificar due casi: primamente che gli spazj AB, e BD sieno commensurabili, loro servendo per comune misura la linea finita N: e poi che nol sieno.

CAS. I. Rappresenti la retta M quel tempo, che il mobile ne impiega a percorrere la parte N del suo cammino: indi si prendano le due rette PS, ed SR tali, che stia PS: M:: AB: N, ed M: SR:: N: BD; sarà *ex æquo* PS: SR:: AB: BD. E perchè le due grandezze M ed N sono aliquote simili delle altre due PS ed AB; siccome la retta M dinota il tempo, in che lo spazio N si è dal mobile descritto, così l' altra PS (4) dovrà puranche di-

(a) *Not.* §. 7.

Digitalizzato da Google

dinotare quel tempo, che vi si richiede a percorrere lo spazio AB. In simil guisa può concludersi, che la retta S R esprima il tempo per B D: dunque essendosi dianzi mostrato, che gli spazj A B, e B D sieno proporzionali alle rette P S, ed S R; essi saran come i tempi, ne' quali dal mobile si son percorsi.

Cas. II. Sieno in secondo luogo incommensurabili gli spazj A B, e B D, e dinotino le medesime rette P S, S R i tempi, ne' quali son essi equabilmente percorsi: dico esser ben anche A B : B D :: P S : S R. Imperocchè, se ciò non sia vero, suppongasi primieramente, che la ragione degli spazj sia minore di quella de' tempi: sarà P S ad S R come A B ad un' altra B T minore di B D. E quindi se prendasi un' aliquota di A B, che sia minore di T D, e tolgasi dall' altra B D quante volte si possa, rimarrà finalmente f D minore di T D, e B f commensurabile ad AB. E poichè B f è maggiore di B T, la ragione di A B a B f sarà minore di quella di A B a B T, e perciò minore dell' altra di P S ad S R, che le si è supposta uguale. Dunque starà A B a B f come P S ad un' altra retta S Q maggiore di S R. Or poichè i due spazj A B, e B f si sono mostrati commensurabili, e dalla supposizione S P dinota il tempo per A B, dovrà l'altra S Q dinotare il tempo per B f (*a*). Per la

(a) *Cas. prec.*

Digitalizzato da Google

la qual cosa, essendo S R il tempo per B D, ed S Q il tempo per B f, ci vorrà più tempo a percorrerne equabilmente uno spazio minore, che un' altro maggiore. Locchè è assurdo (3).

Che se suppongasi la ragione di A B a B D maggiore di quella di P S ad S R; sarà invertendo B D ad A B in minor ragione di S R a P S. La qual cosa mostrerassi assurda, come qui sopra. Dunque gli spazj percorsi da un corpo, che equabilmente si muove, sono sempre come i tempi, in che quelli si percorrono. *Che Bisognava Dimostrare* (a).

§. 10. Cor. I. Essendosi mostrato, che stia A B : B D :: P S : S R, sarà componendo A D : B D :: P R : S R.

§. 11. Cor. II. Quindi, *se due o più corpi, che si muovono equabilmente, abbiano pur anche*

(a) Alcuni Meccanici si son contentati di dimostrar questo Teorema nel solo caso, che gli spazj descritti da' corpi sieno commensurabili. Altri più accurati, come il Galilei, l' Ab. Grandi, Maclaurin, Keil, &c. volendo adeguatamente rilevare la proporzionalità degli spazj coi tempi si son prevaluti del *criterio degli Equimoltiplici*: e 'l Sig. d' Alembert nella sua Dinamica si è servito delle proprietà del Triangolo per conchiuderne lo stesso assunto. Ma la presente dimostrazione debben rigorosa, e compiuta, non si è ordita col criterio degli Equimoltiplici, nè dalle proprietà del triangolo si è derivata; ma solo dalla natura del moto equabile, e dalle proprietà di due ragioni uguali.

Digitalizzato da Google

le loro velocità uguali; gli spazj da essi descritti saranno nella ragione de' tempi decorsi nel descriverli.

PROP. II. TEOR.

Fig. 1. n. 2. *Muovansi equabilmente i due corpi* A, *e* B *ne' tempi* P, *ed* R, *e colle velocità* M, *ed* N; *la ragione degli spazj corsi sarà composta da quella de' tempi, e da quell' altra delle velocità.*

DIM. Si concepisca un terzo corpo C muoversi equabilmente colla velocità M del primo di que' due corpi, e nel tempo R del secondo; sarà (11) lo spazio descritto dal corpo A a quello, che C ne percorre, siccome P ad R. Ma lo spazio descritto dal corpo C sta allo spazio descritto dal corpo B come la velocità M all'altra N (8). Dunque (*a*) sarà lo spazio percorso dal corpo A a quello, che da B si percorre, in ragion composta del tempo P al tempo R, e della velocità M all' altra N. C. B. D.

§. 13. COR. I. Quindi se le basi M, ed N de' rettangoli X, e Z dinotino le velocità, con cui equabilmente si muovono i corpi A, e B, e le loro altezze P, ed R esprimano i tempi, ne' quali i medesimi si sono mossi; l'aja del ret-

Fig. 1. n. 3.

(a) *Prenoz. I.*

Digitalizzato da Google

rettangolo X a quella del rettangolo Z starà come lo spazio corso dal corpo A a quello, che B ne percorre. Imperocchè essendo i rettangoli X, e Z in ragion composta delle loro basi M, ed N, e delle loro altezze P, ed R, saran pure in ragion composta delle velocità, e de' tempi, che da quelle, e da queste sono rispettivamente rappresentate; e quindi per la prop. pres., come gli spazj percorsi dai medesimi corpi A, e B.

§. 14. Cor. II. Dunque tutti que' rapporti, che hanno due rettangoli rispetto alle loro altezze, ed alle basi su cui poggiano, potranno adattarsi agli spazj rispetto ai tempi, ed alle velocità, ond' essi equabilmente ne son percorsi. Cioè

1. *Due spazj equabilmente descritti saranno tra se uguali, qualora i tempi, e le velocità sieno rispettivamente uguali fra loro.*

2. *O quando le velocità sieno inversamente come i tempi.*

3. *E le velocità sono inversamente come i tempi, se gli spazj equabilmente percorsi sien tra se uguali.*

4. *Le velocità di due corpi, che muovonsi equabilmente, saranno tra se uguali, se gli spazj serbino la ragion de' tempi.*

5. *E se gli spazj sieno come le velocità, i tempi saranno tra se uguali.*

Digitalizzato da Google

PROP. III. TEOR.

§. 15. *Poste le medesime cose della proposizione precedente, la ragione delle velocità è composta dalla diretta ragione degli spazj corsi, e dalla inversa de' tempi. Ed i tempi sono direttamente come gli spazj, ed inversamente come le velocità.*

La dimostrazione di questo Teorema dipende dalla sola Prenozione IV. tanto nella I. Parte, che nella II.

§. 16. SCOL. Ma prima, ch'io ne discenda alla speculazione de' moti variabili, mi è paruto convenevole avvertire, che la velocità, onde equabilmente si muove un corpo, lo spazio, ch'ei percorre in qualche tempo, e questo stesso tempo (le quali cose principalmente discernonsi in tal moto) sono sì strettamente tra lor connesse, che sempre una di esse può agevolmente dalle altre due rinvenirsi. In fatti, se la velocità di un corpo mosso equabilmente sia 4, cioè atta a fargli percorrere, per esempio 4 passi in un secondo, e 'l tempo del suo cammino sia 10"; lo spazio percorso in questo tempo sarà di 40 passi, prodotto della velocità 4 nel tempo 10". E se lo spazio di 40 passi sia descritto equabilmente in 10", la velocità del moto sarà 4, quoto, che nasce dividendo 40 per 10. E finalmente se i medesimi 40 passi sieno descrit-

Digitalizzato da Google

ti colla velocità 4; il tempo, in che il mobile gli ha equabilmente percorsi, sarà 10, quoto, che nasce dividendo 40 per 4. (a)

CA-

(a) *Nota*. Il tempo assoluto, ch'è la durazion delle cose, di per se fluisce continuamente senza punto accelerarsi, ritardarsi, o intermettersi in verun modo. Dunque il solo moto equabile è analogo al suo progresso, ed atto a misurarne il rapporto delle sue parti. Or tutti gli abitanti del nostro globo avendo adottato il moto del Sole per la misura del tempo, si sono mirabilmente accordati nel prendere per unità delle grandezze successive quel tempo, che passa tra due prossime culminazioni di questo stesso luminare, vale a dire un giorno naturale. E quindi le settimane, i mesi, gli anni, i secoli, &c. non sono, che tanti moltiplici di coresta unità del tempo, e di essa ne sono summoltiplici le ore, i minuti, i secondi, &c. E poichè per l'obbliquità dell'Ecclittica, e per la dilei eccentricità i giorni naturali non sono tra se uguali, come il dovrebbero essere a tal uopo; affin di agguagliarli fra loro, hanno gli Astronomi escogitato un giorno medio, e l'equazione di tempo: del che si ragiona nell'Astronomia. Ma intanto per gli usi civili l'unità delle grandezze successive non è che il giorno naturale: e per gli usi Meccanici si suol prendere per unità il *minuto secondo*, cioè la parte 3600ma di un'ora del giorno solare medio.

Di più la velocità di un corpo suol disegnarsi per lo spazio corso equabilmente in un secondo.

Finalmente se lo spazio percorso da un corpo equabilmente si chiami s, u la velocità, e t il tempo: si dovran sempre verificare queste 3. equazioni I°. $s = tu$, II°. $u = \frac{s}{t}$, III°. $t = \frac{s}{u}$.

Digitalizzato da Google

CAP. II.

Teoria Generale del Moto Variabile.

§. 17. Quantunque io non abbia sin qui esaminato, nemmen di leggieri, le cagioni, e le leggi, onde ne' moti variabili la velocità del mobile continuamente si accresca, o si scemi; pure dovrà prendersi come postulato, che in tali moti l'acquisto di velocità, o la perdita, che ne fa il mobile alla fine di un tempo finito, o dopo averne percorso uno spazio finito, non debba essere, che di una magnitudine ancor finita. Dunque se le parti AM, AN, AB, ec. della retta ABX indefinita verso X dinotino i tempi, da che si è fatto muovere un corpo, e le perpendicolari MP, NQ, BD, ec. su di essa eccitate da' punti M, N, B, ec. rappresentino le velocità, ond'egli n'è affetto alla fine de' mentovati tempi; *la linea, che passa pe' punti* P, Q, D, ec. *o sarà una retta inclinata alla* BA, *o pure una curva di continua curvatura.* Similmente se dal punto A incominci a muoversi un corpo per la retta AX, e le perpendicolari MP, NQ, BD, ec. elevate su di essa da' punti M, N, B, ec. esprimano le velocità, con cui il mobile ai luoghi M, N, B, ec. ne per-

Fig. 2. n. 2.

Digitalizzato da Google

perviene; *la serie de' punti* P, Q, D, ec. *dovrà giacersi in una retta, o in una curva di continua curvatura.*

§. 18. DEFIN. V. La figura C A P Q, le di- *Fig. 2.*
cui ascisse A B, A C, ec. dinotano i tempi, da *n. 1.*
che un corpo si è incominciato a muovere, e
le corrispondenti ordinate BR, CQ, ec. segnano
le velocità, ond' egli n' è affetto alla fine di
essi, suol chiamarsi *Piano delle velocità del mobile.* (a)

§. 19. DEFIN. VI. La figura A B C si dice
Scala delle velocità di un mobile, se le sue ascis- *Fig. 3.*
se A D, A B, ec. sieno gli spazj dal corpo
descritti dal principio del moto, e le corri-
spondenti ordinate D G, B C, ec. dinotino le
velocità, colle quali lo stesso corpo n'è perve-
nuto ai luoghi D, B, ec.

§. 20. DEFIN. VII. E si dirà *scala de' tempi*
quell' altra curva A S B, ove le ascisse A D, *Fig. 4.*
A B, ec, sieno gli spazj percorsi da un cor-
po, da che si è incominciato a muovere, e
le corrispondenti ordinate P D, S B, ec. dino-
tino i tempi decorsi nel descriverli.

PROP.

(a) Il primo, che usò i *Piani delle velocità*, fu il noſtro acutiſsimo Geometra Gio: Alfonſo Borelli *de vi percuss. cap.* 20. *e Prop.* 78.

Digitalizzato da Google

PROP. IV. TEOR.

§. 21. *Comunque si muova un corpo, può sempre concepirsi ch' egli trascorra equabilmente uno spazietto infinitamente piccolo. O che il suo moto sia equabile in un tempo infinitesimo.*

Fig. 3. PART. I. La curva A G C rappresenti la scala delle velocità di un corpo, che dal luogo A cominciando il suo moto ne progredisca per la A X: e la retticciuola D d dinoti uno spazietto infinitesimo ovunque descritto dallo stesso mobile. Egli è chiaro (17) che le ordinate D G, d g distese alla curva pe' punti D, e d debban essere a un dipresso fra di loro uguali. Dunque il moto per D d sarà equabile (7). C. B. D.

PART. II. Nello stesso modo può guidarsi la dimostrazione per la II. Part. (*a*)

PROP.

(a) Se un qualche spazio descritto dal mobile si dica s; il tempo, in ch'ei si descrive, si chiami t, ed u la velocità finale; lo spazietto ds potrà aversi come descritto equabilmente colla velocità u nel tempuscolo dt. Dunque (15) sarà sempre nel moto variabile $\frac{ds}{dt} = u$. E perchè nel moto equabile la velocità è costante, per esempio uguale ad a, sarà nel moto equabile $\frac{ds}{dt} = a$, e $\frac{ddt}{dt} = o$: cioè rendendo omogenea questa espressione potrà rilevarsi, che il moto sarà equabile, se si avveri che sia $\frac{dds}{dt^2} = o$.

Digitalizzato da Google

PROP. V. PROBL.

§. 22. *Data la legge, onde varia la velocità di un mobile riguardo al tempo, da che si è incominciato a muovere, e concesse le quadrature de' Curvilinei, determinare i rapporti degli spazj coi tempi, e colle velocità corrispondenti.*

COSTR. Si descriva la curva A C Q P ; che sia il piano delle velocità del mobile, ove AB, AD, A C, ec. dinotino i tempi scorsi dal principio del moto, e le perpendicolari BR , DE, CQ, ec. esprimano le velocità dallo stesso mobile acquistate alla fine di que' tempi. Io dico, che *gli spazj descritti ne' tempi* A C , A B *sien proporzionali alle aje mistilinee* A C Q P , A B R P , *e che concessa la quadratura di queste ne resti determinato il rapporto degli spazj ai tempi , o alle velocità finali , qual si addimandava.* *Fig.* 2. *n.* 1.

DIM. Si prendano le due particelle A d, B D infinitesime rispetto ad A B , e B C, ed a queste proporzionali : e poi dalle medesime A B , e B C se ne tolgan delle altre d f , f n , ec. D F , F H, ec. respettivamente uguali alle prime A d , B D . E poichè ne' due tempuscoli A d , B D il corpo può concepirsi mosso equabilmente colle velocità A P , B R (21) ; gli spazietti , ch' egli vi descrive , saran come i rettangoli di d A in A P , e di D B in B R (13). Similmente negli altri due tempuscoli d f , e D F gli spazj descritti dallo stesso mobile

Digitalizzato da Google

bile saran proporzionali ai rettangoli di d f in d e, e di D F in D E, e cosi in appresso. Ma son pure gli spazj descritti ne' tempi A d, d f, f n, ec. colle velocità A P, d e, f g, ec. come i rettangoli di d A in A P, di f d in d e, di n f in f g, ec. Dunque in forza della Prenoz. VI. saranno tutti quegli spazietti, che il mobile percorre nel tempo A B, agli altrettanti descritti nel tempo B C, come la somma de' rettangoli d A P, f d e, n f g, ec. all' aggregato degli altri D B R, F D E, H F G, ec. cioè prendendo le grandezze equivalenti ai termini di questa analogia, sarà lo spazio descritto dal mobile nel tempo A B a quello, ch' egli descrive nel tempo B C, come (*a*) l' aja A B R P all'altra C B R Q. Dunque (*b*) gli spazj descritti ne'tempi A C, ed A B saran come le aje A C Q P, A B R P. C. B. D.

Fig. 2. n. 2. §. 23. Cor. Se nel principio del moto la velocità del mobile sia zero, come lo è ne' gravi, che si lascian cadere dalla quiete; la curva A P D dovrà incontrare nel punto A il suo asse. Dunque

1. Gli spazj descritti dal mobile ne' tempi A M, A N, A B presi dal principio del moto saranno come i trilinei A M P, A N Q, A B D.

2. Gli spazj descritti ne' tempi successivi A M, M N, N B saran come le aje A M P, M N Q P, N B D Q.

3. E

(a) *Pren. VIII.* (b) *Invert. e Compon.*

Digitalizzato da Google

3. E lo spazio descritto nel tempo AB con questa legge di accelerazione starà a quello, che nello stesso tempo si percorrerebbe da un' altro corpo equabilmente, e colla BD velocità finale di quello, come il trilineo ABD al rettangolo di AB in BD.

§. 24. SCOL. I. Perchè la dimostrazione di questo Problema, come ogni altra, che l'è affine, alle leggi si astringa di una Sintesi rigorosa, non si vuol semplicemente dividere la AB in parti uguali, ed infinitesime, e lo stesso poi fare della BC; ma si esige „ che „ ciascuna di quelle a ciascuna di questa stia „ come la AB alla BC; affinchè le medesime „ AB, e BC restino in ugual numero di par- „ ticelle eziandio ripartite. Dopo di ciò si di- „ stenda il filo della dimostrazione, in sin che „ si rilevino quattro serie tali, che i primi „ loro termini sieno tra se proporzionali, e 'l „ sieno ancora i secondi, i terzi, ec. all' infi- „ nito. Ma ciò non basta, come si è avvertito „ nella pren. V., per concluderne la propor- „ zionalità di esse serie: conviene altresì di- „ mostrare, che le grandezze della prima se- „ rie sieno proporzionali a quelle della terza, „ o quelle della seconda proporzionali alle al- „ tre della quarta„. La qual condizione se in appresso io tralascio di verificare, non è già che la stimi ridondante; ma vo' solamente isgravar le dimostrazioni di ciò, che il vostro intendimento può supplirlo di leggieri. *Fig. 2. n. 1.*

§. 25.

Digitalizzato da Google

§. 25. Scol. II. Da ciò che si è recato nel-la Proposizione V. io m'immagino, che avrete compreso non potersi adeguatamente risolvere questo Problema Meccanico, se non si concedano le quadrature de'Curvilinei (*a*). Conciossiachè niente gioverebbe esibire gli spazj descritti ne' tempi A C, A B per le aje A C Q P, A B R P, quando ignorata la quadratura di queste in un s'ignori qual ragione abbian esse rispetto alle loro ascisse A C, A B, che ne rappresentano i tempi, o alle ordinate C Q, B R, che le velocità ne dinotano. Ma poichè per mezzo de' nuovi metodi agevolmente or si ottiene la quadratura di una curva dato il rapporto delle di lei coordinate; lo stesso Problema, ed ogni altro somigliante s' intenderà risoluto, sol che vi si riduca. E di qui comprenderete ancora perchè mai nell' enunciazione di esso Problema abbiasi dovuto aggiungere quel dato necessario *concesse le quadrature de' Curvilinei*, e che ne importi cotesta espressione: la quale se mai si ometta, dovrà senza meno sottintendersi. Ma ove si tratti di risolvere con dell'analisi lo stesso Problema, i moderni Meccanici senza mica soggettarlo alla Geometria, e senza usar tanti andirivieni, lo riducono immantinente all' integrazion di una *formola ad una*

(a) Il Cavalier Nevvton ne' Problemi del I. Libro de' ſuoi Princ. Mat. vi aggiunge queſto dato, ma poi l' omette verſo la fine del I., e nel II. Libro.

Digitalizzato da Google

una variabile, che ad infiniti casi speditamente può adattarsi (*a*).

§. 26. ESEMP. Ma per chiarirvi con qualch' esemplo ciò che vi si è generalmente recato, supponete *che la velocità di un mobile cresca come il tempo da ch' ei si è mosso.* In questa legge di accelerazione (che, come quaggiù l'intenderete, si conviene a' gravi lascitisi cader verticalmente dalla quiete) saranno le ascisse A M, A N, A B, che i tempi ne dinotano, come le corrispondenti ordinate M P, N Q, B D, che le velocità del mobile n'esprimono. Dunque i punti P, Q, D ec. dovranno cascar tutti in una retta, che per A si conduce: e gli spazj descritti dal mobile ne' tempi A M, A N, A B, essendo analoghi ai triangoli simili A M P, A N Q, A B D, saranno al par di questi in duplicata ragione de' lati omologhi A M, A N, A B, o degli altri M P, N Q, B D. *Fig. 2. n. 2.*

§. 27. E perciò *se le velocità di un mobile seguano la ragione de' tempi, da ch' egli si è mosso; gli spazj descritti dal principio del moto saranno tra loro, come i quadrati de' tempi, o delle velocità finali.*

(a) Se il tempo A B si dinoti per t, e la velocità B R per u, o per T, (che sia una funzione di t), sarà l'aja curvilinea A B R P, come si rileva dai metodi delle quadrature, uguale a $\int u dt$, cioè a $\int T dt$. *Fig. 2. n. 1.*

Digitalizzato da Google

§.28. Di più prendendosi le parti uguali A M, M N, N B, ec. nella retta A B, ed ordinate le rette M P, N Q, B D, ec. ne risulta il trapezio M N Q P triplo del triangolo A M P; il trapezio N B D Q quintuplo dello stesso triangolo A M P, e così gli altri in appresso settuplo, noncuplo ec. dello stesso triangolo. Dunque nella medesima ipotesi di accelerazione *gli spazj descritti in tempi uguali, che successivamente si computino dal principio del moto, crescono come i numeri dispari* 1, 3, 5, 7, 9. *ec.*

§.29. Finalmente essendo il triangolo A B D, metà del rettangolo di A B in B D, dovrà in questa legge di accelerazione anche verificarsi, che *uno spazio descritto dal principio del moto sia metà di quello, che un corpo movèndosi equabilmente colla velocità finale descriverebbe nello stesso tempo.*

PROP. VI. PROBL.

§. 30. *Data la Legge, con cui varia la velocità di un mobile riguardo agli spazj percorsi, e concesse le quadrature delle figure curvilinee, ritrovar la ragione de' tempi ai medesimi spazj.*

Fig. 3. COSTR. Muovasi il corpo A nella retta A B, ed ogni perpendicolare D G, che le si erige, dinoti quella velocità, ond' egli n' è affetto nel luogo D; e sieno gli estremi di coteste rette

Digitalizzato da Google

rette allogati nella curva continua AGC. Ciò supposto

I. Si distenda BA verso H, e per A si meni AR parallela a DG: e poi cogli asintoti rettangoli AH, AR, e con qualunque potenza, si descriva l'iperbole conica TS (*a*).

II. Si tiri per G la retta GT parallela ad AB, che incontri la medesima iperbole in T.

III. Si distenda GD in N, sicchè DN pareggi la retta VT, che resta fra l'iperbole TS, e l'asintoto AR. E ciò sempre facendosi, si formi l'altra curva ENM. Io dico, *che il tempo impiegatosi dal mobile a percorrere* AD *a quell' altro, in che percorre* AB, *stia come l'aja curvilinea* ADNEQ *all' altra* ABMEQ.

Dim. Si prendano dalle rette AD, AB due aliquote simili Dd, Bb, che sieno infinitesime rispetto ad esse: e le medesime AD, AB s'intendano divise in parti rispettivamente uguali alle Dd, e Bb. E poichè gli spazietti Dd, e Bb son percorsi equabilmente colle velocità DG, e BC (21), sarà (15) il tempo per Dd al tempo per Bb, come Dd a Bb, e come BC a DG. Ma BC, e DG avvegnachè uguali alle rette AR, AV sono (*b*) come VT ed RS, o come DN ed MB, che dalla costruzione quelle ne uguagliano. Dun-

(a) *Prop. V. Lib. IV. de' Conici illust. dal Giannattasio.*

(b) *Cor. 2. Prop. 20. Lib. III. Conic. del Giann.*

Digitalizzato da Google

que il tempo per Dd starà al tempo per Bb, come Dd a Bb, e come DN a BM, cioè come il rettangolo di Dd in DN al rettangolo di Bb in BM. Qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà (*a*) il tempo per AD al tempo per AB come l'aja ADNEQ all'altra ABMNEQ (*b*). C. B. D.

§. 31. COR. I. Essendo il tempo per AB al tempo per AD come l'aja ABMNE all'altra ADNEQ; sarà dividendo il tempo per BD al tempo per AD, come l'aja BDNM all'altra ADNEQ.

§. 32. COR. II. *Due corpi descriveranno in tempi uguali gli spazj* AB, AD, *se le loro velocità ne' punti corrispondenti* (*c*) *di queste linee sien sempre, come le lunghezze* AB, AD *de' medesimi spazj*. Imperocchè (supposti i prelim. della prec. prop.) il tempo per Bb sta a quello per Dd, come Bb a Dd, e come AD ad AB (15), cioè in ragione di uguaglianza. E lo stesso dimostrandosi riguardo agli altri elementi de-

(a) *Prenoz. VI. ed VIII.* e §. 24.

(b) Lo ſpazio AB ſi dica s, e la velocità, onde il mobile in B ne perviene, ſi dinoti per u, o per S funzione di s, ſarà il tempo per AB uguale a $\int \frac{ds}{u}$, ovvero a $\int \frac{ds}{S}$.

(c) Cioè que' punti, ove le medeſime linee AB, AD ſon diviſe proporzionalmente.

Digitalizzato da Google

degli spazj A B, A D, saranno essi spazj contemporaneamente descritti.

§. 33. Cor. III. Il tempo, che v' impiegherebbe un mobile a correr lo spazietto D d colla velocità B C, sta a quello, che vi porrebbe un' altro a descriverlo colla velocità D G, come D G a B C (*a*), cioè (*b*) come B M, o la sua uguale D O a D N (intendendosi per M condotta la retta M L parallela ad A X); val quanto dire come il rettangolo D d o O all'altro D d n N. Ed in simil guisa dimostrandosi, che i tempi, ne' quali i medesimi corpi descrivono qualunque altro spazietto d r, uno colla velocità B C, l' altro colla velocità d g, sieno fra loro come i rettangoli r d o, ed r d n; sarà (*c*) *il tempo, onde colla velocità* B C *descrivesi equabilmente lo spazio* A B *a quello, che ci vuole a descriverlo con moto variabile, di cui la scala della velocità n' è la curva* A G C, *come il rettangolo* A B M L *all' aja mistilinea* A B M E Q.

§. 34. Cor. IV. Dalla dimostrazione di questo Problema comprendesi, che le D N, e B M ordinate nella curva de' tempi sieno nella ragione inversa delle D G, e B C corrispondenti ordinate della scala delle velocità. Dunque se la linea A G C sia una retta, sicchè D G, e B C diventino proporzionali ad A D, ed A B;

(a) §. 14. n. 2. e §. 21.
(b) *Costruz. di questo Probl.*
(c) *Pren. VI. ed VIII.*

Digitalizzato da Google

le medesime DN, ed MB saranno inversamente come le ascisse AD, ed AB: e quindi sarà un' Iperbole conica la curva de' tempi MNE (*a*).

§. 35. SCOL. La curva ENM, come rilevasi dalla costruzione di questo Problema, ha per asintoti le due rette AQ ed AX. E sebbene le sue ordinate DN, BM, ec. sempre ne pareggino le corrispondenti ordinate VT, RS, ec. dell' Iperbole conica TS; ella non per tanto non sarà un' Iperbole conica, se la linea AGC non sia una retta.

§. 36. ESEMP. Siano gli spazj AD, AB corsi dal mobile dal principio del moto in duplicata ragione delle velocità finali DG, BC; sarà la curva AGC una parabola conica (*b*): e poichè sta AD: AB :: DG²: BC² :: AV²: AR², ed è (per la natura dell' Iperbole TS) AV²: AR² :: RS² : VT² :: BM²: DN², sarà AD: AB :: BM²: DN². Dunque la curva NM sarà un Iperbole cubica, i dicui spazj asintotici ADNEQ, ABMEQ (*c*) sono in sudduplicata ragione di AD, e di AB. Dunque *se le velocità di un mobile sieno in sudduplicata ragione degli spazj percorsi, i tempi impiegati a trascorrerli saran puranche in sudduplicata ragione de' medesimi spazj, o come le velocità finali.*

PROP.

(a) *Cor. 2. Prop. 20. Lib. I. Conic. di Giann.*
(b) *Cor. 2. Prop. I. Lib. 4. Con. Giann.*
(c) *Prenoz. X.*

Digitalizzato da Google

PROP. VII. PROBL.

§. 37. *Data la Scala de' tempi* A B S, *costruire quella delle Velocità.* Fig. 4.

Cost. I. Si tiri ad un qualunque punto P nel perimetro della Scala de' tempi la tangente P F, che incontri l'asse prolungato in F. II. Si faccia come P D ordinata a D F sottangente (qual ragione conoscesi dall' indole nota della scala de' tempi), così la retta X, che dinoti un minuto secondo ad una quarta D G, che perpendicolarmente dal punto D erigasi su di D F; dico, che *il punto* G, *come ogni altro, il qual si rinvenga in simil guisa, debba cascarne nella scala* A C *delle velocità.*

Dim. Si prendano i due spazietti D d, B b infinitesimi, ed uguali; ed ordinata B C nella A G C scala delle velocità del mobile, si ordinino d p, B S, b s in quella de' tempi: e poi si tirino P Q, S R parallele ad A B. E poichè la ragione di P D a D F è per costruzione uguale a quella di X a D G, ed ella è puranche uguale all' altra di p Q a Q P (essendo tra se simili i due triangoli p Q P, P D F), sarà X: D G:: p Q: Q P; ed invertendo D G: X:: Q P: p Q. Per simil modo dimostrandosi, che stia X a B C come s R ad R S, sarà per uguaglianza perturbata D G: B C:: s R: p Q: imperocchè le due rette P Q, S R come uguali a D d, e B b, sono uguali fra loro. Dunque le due or-

Digitalizzato da Google

dinate D G, B C essendo inversamente come p Q, ed s R, cioè inversamente come i tempi, ne' quali equabilmente percorronsi i due spazietti uguali D d; B b, saranno come le velocità, che accompagnano il mobile pe' luoghi D, e B. E quindi potendosi ciò sempre dimostrare, la curva A G C (19) sarà la scala delle velocità. C. B. D.

§. 38. Cor. I. Che se gli spazj sieno come i tempi, la curva A P S diverrà una retta, che nel punto A inclinasi ad A B. Dunque sarà costante la ragione di p Q a P Q, e quindi ancora la sua uguale di X a D G. Ma la grandezza X è costante: dunque tale sarà pure la D G, ed ogni altra ordinata dalla scala delle velocità.

§. 39. Cor. II. Dunque *se un corpo cammini con tal legge, che i tempi sieno come gli spazj, il suo moto non può essere, che equabile.*

CAP. III.

Delle Forze.

§. 40. L'Aggregato delle forze, che negli elementi della materia innestò Natura, è l'anima, che informa l'immensa mole dell' Universo, e la ravviva. Dunque l'intenden-

Digitalizzato da Google

tenderle non è mica uno studio vano, o biasimevole, ma il vero modo di saggiar le leggi dell' Universo; e 'l profondo sapere di chi lo regge, e sostiene. Ma che sian mai coteste forze, e come empiendo ciascun corpo fra lor si stringano, non è dato a' Mortali saperlo in verun modo: e sol ci si concede poterne spiare alcune di loro relazioni, da cui attignendone i principj della Meccanica, e della Statica ne deriviamo le Teorie di queste Scienze.

§. 41. Tra le diverse forze, che si ritrovano entro a' corpi, ve ne ha una sola, che può *intendersi*, e *rimettersi*, e che sovvente si transfonde in altri: laddove le rimanenti quivi ne reggon sì forte, che lungi dal potersi in altri corpi traspiantare, ritengono sempre un'invariabil vigore, ed energia. Quella, di che intendo quì primieramente ragionarvi, puol dirsi *forza motrice*, e le altre poi saranno quaggiù co' proprj nomi, e colle qualità loro divisate.

§. 42. Quantunque noi tuttogiorno muoviamo alcuni corpi, ed altri da tante altre cagioni veggiamo ancor mossi; pure nè sì frequente sperienza, nè qualunque speculazione che vi si faccia, vale a chiarirne la natura di quel principio attivo, che intrudesi in essi, e 'l modo, onde quivi ne agisce. E quel che più ne duole, in tutte le attrazioni, e gravitazioni de' corpi, oltre a queste cose, che

del

Digitalizzato da Google

del pari ignoriamo, ci rimangono eziandio ascose le cagioni moventi, e le loro sedi. Dunque la comunicazione del moto, la composizion delle forze, la loro diffusione pe' solidi, e pe' fluidi, il rinvigorirsi e l'allentarsi, cui le scorgiam soggette, saran sempre pe' Filosofi, non che pel volgo ignaro altrettanti arcani: nè loro sarà permesso conoscer le forze motrici, che per *gli effetti prodotti ne' corpi mossi, per le cagioni da cui esse ne provengono, e per un certo modo, onde transfondonsi ne' corpi*. Quali cose m'ingegnerò dilucidarle, prima di esibirvi le Teorie di queste forze.

§.43. La forza motrice (*a*), che si ritrova in un corpo, purchè non resti elisa da straniera ca-

(a) Quelle, che dal Borelli chiamavansi *Forze motive*, e che non pochi de' Moderni soglion dirle *Forze de' Corpi in moto*, quì son chiamate *Forze motrici*, come son dette dal Papino, e dal Leibnitz negli *Atti di Lips.* 1691 e dal Sig. Jurin nelle *Transaz. Angl.* an. 1741. e da altri. Esse da straniere cagioni sempre ne derivano: son soggette ad accrescersi, a diminuirsi, e ad estinguersi: sovvente si trasfondono ad altri corpi: e la di loro quantità può ancora adeguatamente misurarsi. Dunque non si divieta considerarle come cose inerenti a' corpi mossi, trasmessevi da cagioni esterne, e quivi dall' inerzia conservate. Che anzi con un' espressione improntataci da' fluidi, ed assai proporzionata all' intelligenza de' Giovani, può dirsi, che *le forze motrici riempiano i corpi mossi, e che le potenze sien di loro come sorgenti*. Ma conveniva distinguer le potenze dalle forze motrici, perchè le prime hanno differenti nature, come vedesi chiaramente dalle loro specie esibite nel §. 44, mentre le forze motrici son tutte

Digitalizzato da Google

cagione, lo spinge ben tosto al moto, compartendogli un grado di velocità proporzionale alla sua energia. Dunque dovrà aversi, come un'Assioma, *che la velocità di un mobile sol ne provenga dalla forza motrice che lo riempie, e che quella a questa debba esser sempre proporzionale.*

§. 44. Le potenze moventi son poi quelle cagioni, che trasmettono a' corpi le forze motrici. Tali sono le forze muscolari degli animali, l' elasticità di certi solidi, e di certi fluidi, la forza di gravità, e di diverse altre attrazioni, la forza elettrica, l' impeto di un corpo mosso, la forza dell' acqua profluente, quelle dell' aria, de' vapori, del fuoco ec. ed in sin la Mano del Vivente Iddio, onde proiettò un tempo i Pianeti, e le Comete, ed ognor ne rifocilla i loro moti presso a languire, l'è ancor essa una potenza movente. Che copia di potenze non è nel Mondo! e qual divario non v'ha tra esse! E pure han saputo i Meccanici riporle tutte in due soli generi indicativi nel §. che segue.

§. 45.

tutte fimili fra loro. Sebbene volendoſi conſiderar le potenze pel ſolo valore, che hanno di muovere i corpi, ſi poſſano tutte riguardare come omogenee, e talora alle forze motrici pareggiarſi. Finalmente vuolſi quì avvertire, che la natura di queſte forze n' è interamente ignota al noſtro intendimento, ma che poi la loro eſiſtenza dal moto de' corpi ſi rileva, e dal riflettervi, che la materia ſia del pari indifferente alla quiete, ed al moto, o che il moto ne' corpi non ſia, che contingente.

Digitalizzato da Google

§. 45. Ogni potenza, che muove un corpo, o gli transfonde in un' istante qualche forza finita senza spingerlo di vantaggio; o pur recandogli delle continue spinte vi genera una consimil forza dopo esserne decorso un tempo finito. E quindi volendosi distinguere questi due supremi generi di potenze, quelle del primo genere si son dette *Forze d' urto*, e *Pressioni* quelle del secondo: o piuttosto le prime converrà chiamarle *Forze Spingenti*, o *Impellenti*, o *Forze istantanee*, e *Forze continue* le altre. Immaginatevi, che un martello percuotendo gagliardamente un corpo duro lo guidi al moto; non sarà egli vero, che nel solo momento della percossa (a) abbiasi questo corpo acquistata l' intera for-

(a) Il Gran Galilei, il Torricelli, il Borelli, ed altri opinarono, che la forza della percossa sia infinita rispetto alla forza della gravità. In fatti dicea il Galilei, percuotete sopra di un chiodo da ficcarsi in un durissimo legno, ovvero sopra un palo, che debba penetrar dentro in terreno ben fisso; vedrete per la sola virtù della percossa spingersi, e l' uno, e l' altro avanti, onde senza quella mettendosi sopra il martello, non solo non si muoverà, ma nè meno, quando anco vi fosse appoggiato un peso molte, e molte volte dell' istesso martello più grave. Ma i Leibniziani usi a misurar la prima forza dal quadrato della velocità nella massa del mobile, e l' altra dalla semplice velocità nella stessa massa, credettero eterogenee cotesse forze, per appunto come l' è una superficie rispetto ad una linea. Finalmente il Sommo Eulero in una *dissert. inser. negl. Att. di Berl.* 1746. *sulla vera misur. della percossa*, sostenne non esser punto eterogenee tali forze; poichè l' urto de' corpi (che se-

Digitalizzato da Google

forza, onde si muove? E se per avventura egli si trovi in uno spazio, ove niun corpo gli resista, nè forza straniera vi penetri a turbargli il moto, quivi dovrà girne per diritto, ed equabilmente: poichè l'inerzia delle sue parti, qual custode della forza impressagli, il reggerà con una medesima velocità pe 'l sentiero primitivo, senzachè si richiegga nuova potenza, che quella ne ravvivi, questo ne raddrizzi (*a*). Ma ove poi si lasci cadere un grave, continue spinte gli saran recate dalla gravità terrestre, che tutte accogliendosi entro di esso, ne comporranno alla fine di un tempo finito una forza ancor finita.

§.46. Intanto ogni corpo animato da una forza continua, purchè da estranee cagioni non sia impedito, deesi condurre per un dato spazio in un dato tempo. Dunque l'impression di questa forza potrà supporsi continuata o nella stessa guisa, che gli elementi dello spazio si van descrivendo l'un dopo l'altro, o come ne fluisce secondo esso non son mai perfettamente duri) lungi dall'eseguirsi in un'istante, esige un'intervallo di tempo. Ma che che si pensi di questa Teoria di Eulero, e de' calcoli che su vi distende, non si dovrà da ciò rilevare non esservi in Natura potenze materiali o immateriali, che operino con una sola spinta ne' corpi, cui son esse applicate.

(a) Il Cavalier Newton *ne' Princ. Mat. della Filos. Nat.* suol dire *moveatur corpus sola vi insita*, e vuol intendere che cotesto corpo cammini colla sola forza instantanea impressagli da un'esterna cagione,

Digitalizzato da Google

sce il tempo, in che si muove il corpo. Cioè a dire le spinte, che riceve un corpo da una forza continua o sono tante, quanti ne sono gli elementi dello spazio descritto, o quanti momenti di tempo ne son passati in descriverlo. Delle quali supposizioni sebben la prima sembri del pari concettibile, che la seconda; ella non di meno vi sarà mostrata impossibile nel seguente Teorema.

PROP. VIII. TEOR.

§. 47. *Non si può immaginare veruna forza continua, che ad un corpo arrechi tante spinte, quanti sono gli elementi dello spazio, pei quali lo conduce.*

Dim. Cas. I. Gl' impulsi recati al corpo A da una forza continua, s' è possibile, sien tanti, quanti sono gli elementi dello spazio descritto dallo stesso mobile: e si supponga in I. luogo, che quelli al par di questi sieno tra se uguali. E poichè uguali spinte generano (43) uguali particelle di velocità nello stesso mobile, il numero di queste dovrà ben anche uguagliare il numero de' mentovati elementi. Dunque le intere velocità saran come gli spazj descritti dal mobile dal principio del suo moto.

Fig. 3. Ciò premesso sia A X il sentiero del corpo, che dal punto A ne cominci il suo moto; saranno gli spazj A D, A B come le velocità, onde

Digitalizzato da Google

onde lo stesso mobile ai luoghi D, e B 'ne perviene. Dunque la curva de' tempi M N E dovrà essere un' Iperbole conica, come vi fu mostrato nel Coroll. 3. della V. Prop. E quindi il tempo nel quale percorresi dal mobile lo spazio A D a quello per D B starà come l'aja iperbolica A D N E Q all' altra D B M N, cioè come una grandezza infinita (*a*) ad un'altra finita: vale a dire il corpo A animato da questa potenza dovrà descrivere in un tempo infinito la prima parte A D del suo cammino, ancorchè picciolissima, e v' impiegherà poi un tempo finito a passarne l' altra parte D B, sebben la sia molto grande. Lo che è assurdo.

Cas. II. Non si potendo verificare, che una potenza continua uniforme investendo un corpo vi replichi degl' impulsi come gli elementi dello spazio descritto da esso mobile; non potrà nemmeno avverarsi cotesto sistema di agire, quando la forza continua sia variabile, cioè nel caso, che le spinte variassero di energia. Conciossiachè ogni forza continua variabile non è che uniforme pe' spazietti iniziali: dunque l' assurdo rilevato nel I. Caso, ricaderebbe su di quest' altro. E quindi sarà vero quel che si è proposto. C. B. D.

§. 48. Nel movimento di un corpo, come si è detto, non si discernono, che due sole quantità continue tra lor diverse, cioè il tempo nel

(a) *Cor. 4. Prop. 22. Lib. III. Con. Giannat.*

Digitalizzato da Google

nel quale dura il dilui moto, e lo spazio, ch' egli ne descrive. Dunque essendosi qui sopra dimostrato non potersi concepir forza continua, che tante spinte al mobile ne arrechi quanti sono gli elementi dello spazio pe' quali lo conduce; dovrà concludersi che l' impression di questa forza si continui come il tempo, che ne fluisce: cioè che le spinte sien tante di numero, quanti momenti di tempo si ritrovano nella durata del moto. E quindi, se queste spinte si suppongano di uguali energie e cospiranti, ognuno dovrà inferirne, che la *velocità generata nel corpo debba proporzionarsi al valore di ciascuna spinta, ed al numero di esso, o esserne come il valore di ciascuna spinta, e come il tempo*. Quali cose saran dichiarate nel Capitolo, che segue.

§. 49. Oltre alle forze motrici, delle quali si è qui sopra ragionato, si ritrovan pur anche ne' corpi delle altre forze, che risedendo intimamente, e di continuo ne' loro elementi di materia, non si possono in verun modo a' corpi contigui traspiantare. Dunque son queste da quelle ben diverse: e quel che più reca meraviglia, tra loro eziandio differenti nell' indole, e nel fine, cui son destinate.

§. 50. La prima forza, che anima gli elementi della materia, senza potersi mai affievolire, non che distruggere, è quella che da Greci diceasi *ἀντιτυπία Antitipia*, e da noi chiamasi *Impenetrabilità*, e talvolta *Solidità*. Per mez-

Digitalizzato da Google

mezzo di essa la materia n' è sempre preservata dalla compenetrazione: ed ella poi è sì efficace, e poderosa, che sola varrebbe ad elidere tutte le forze di Natura, ancorchè cospirassero a volerne intromettere una particella di materia nel luogo, ove si giace un'altra. Dunque questa forza era necessaria nell' Universo materiale, perchè quivi si conservasse la medesima quantità di materia, e potessero i corpi da altri ricever moto, o divisione. Or poichè in tal guisa vengon essi dal loro distruggimento preservati; parmi, che tal forza sia quell'istesso *Principio di conservazione*, onde Iddio Ottimo Massimo li mantiene nel loro essere, e gl' impedisce d' immergersi nel sen del nulla.

§. 51. Scorgesi ben anche nella materia una forza passiva detta dal sagacissimo Keplero *Inerzia*, per mezzo di cui mantiensi ne' corpi lo stato di quiete, o di moto rettilineo uniforme, ove per avventura si ritrovino, finchè straniere cagioni non vengano a disturbarneli. Così se un corpo stia in quiete, l'inerzia della materia gli serberà questo stato, purchè non venga da esterne cagioni incitato al moto. E se gli s' imprima qualche forza, la medesima inerzia ne conserverà in esso la velocità recatagli da quella, e la direzione iniziale del suo moto, fintantochè cagioni straniere non vengano ad impedir cotesti effetti.

§. 52. Ma l'inerzia non solo impiegasi a man-

Digitalizzato da Google

mantener ne' corpi i loro stati, sian di quiete, sian di moto; ma resiste eziandio ad ogni mutazione di stato, che in essi forza straniera ne vuol indurre: e per questa ragione ella sovente suol chiamarsi *Forza d' inerzia*. Cade a proposito qui ponderare quanto su questa Teoria ha sagacemente avvertito l' immortal Newton *defin.* 3. *Princip. Matem. Fil. Nat.* „ Exercet vero corpus hanc vim solum-
„ modo in mutatione status sui per vim aliam
„ in se impressam facta: estque exercitium
„ ejus sub diverso respectu et resistentia, et
„ impetus. Resistentia, quatenus corpus ad
„ conservandum suum statum reluctatur vi im-
„ pressæ. Impetus, quatenus corpus idem, vi
„ resistentis obstaculi difficulter cedendo, co-
„ natur statum suum mutare.

§. 53. Da queste considerazioni ritraggonsi le 3. famose leggi del moto, che son come assiomi di queste Scienze. Eccole come le ha enunciate l' immortal Newton.

§. 54. LEX. I. *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi, vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

§. 55. LEX. II. *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressæ, et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.*

§. 56. LEX. III. *Actioni contrariam semper et æqualem esse reactionem.*

§. 57. Dunque niun corpo di per se vale a can-

Digitalizzato da Google

cangiarsi quello stato, in che si trova. S'egli è in quiete, vi vuole una çausa esteriore, che lo muova. Se l'è in moto, deesi a cagioni esterne attribuire, perchè talora cangi di velocità, o torca dal cammin dritto. E quindi il solo moto equabile rettilineo è *naturale* a' corpi, cioè quello, che per serbarvisi, non ha bisogno di Potenze esteriori. Che anzi, se le Potenze continuamente applicate ad un corpo mosso l'abbandonino di repente, egli dovrà riprendersi il moto equabile rettilineo, continuandolo sin che nuova cagione non lo perturbi.

§. 58. La terza legge, come men chiara delle altre due, fu dal Cavalier Newton con 3. esempli illustrata. Fingasi, ei dice in I. luogo, che un cavallo si tiri dietro un sasso legatoglisi con una fune, e che cammin facendo la spezzi, ovunque ciò ne accada. Osserverete ritirarsi con ugual empito i tratti della fune, l'uno verso il cavallo, l'altro verso la pietra. Dunque tanta è l'azione, che il cavallo esercitava su della pietra, quanto la reazione, che questa gli opponea.

II. S'io percuoto colla mia mano un corpo duro, l'energia della percossa, che gli arreco, è quanto l'impressione, che mi sento nella mano.

III. Qualora un corpo mosso incorre in un' altro, quanto moto nel conflitto perdesi da

Digitalizzato da Google

quello, tanto da questo si acquista.

§. 59. Ma non pertanto questa legge sembra a' Giovanetti incompatibile colla comunicazion del moto, e taluni credonla finanche assurda: conciossiachè, dicon essi, s' è vero, che l' azione esercitata dal corpo A nell' altro B pareggi la reazione, che B ne oppone ad A, come potrà muoversi talun di questi corpi, o tutti e due? come mai potrà progredire il cavallo trascinandosi quella pietra, quando ella sempre il ritiri verso di se con tanta forza, con quanta n' è dal cavallo continuamente investita? Ma cotali difficoltà, ed altre somiglianti non son che ombre gittate nelle loro menti dalle oscure idee di forza, e di azione, che si han formate: e basterà chiarir queste per toglier quelle immantinente. Eccone le vere idee di queste voci. La forza di un corpo mosso, per esempio del corpo A, è quel principio attivo, che lo muove, e che si trasfonde in un' altro, qualora quello in questo ne imbatta. L' Azione del corpo A non è la forza, che lo anima, come credesi falsamente da' Giovanetti. Ella è sì bene la transfusione, o la comunicazione di questa forza ad un' altro B, (che qui suppongasi quiescente): e la reazione del corpo B consiste nel distruggere in A altrettanta forza, quanta ne ha egli dal corpo A ricevuta. O, a dir breve, l'azione del corpo incorrente, e la reazione del quiescente non sono, che le reciproche, ed opposte im-

Digitalizzato da Google

impressioni, che nel momento dell' urto essi ne risentono, da che la materia di uno non può in quella dell' altro compenetrarsi, e dal voler tutti e due nel proprio stato rimanersi. E sebbene (a) l'umano intendimento non giunga a percepire, nè ad immaginarsi in che modo si perda la forza di un corpo, e da un' altro si riceva: pur non di meno la quantità della forza perduta, e quella della forza acquistata sono i valori delle divisate impressioni. Dunque chi non vede come in ogni mutazione di stato, che si cagionino i corpi, sempre l'azione ne pareggi la reazione, e le si opponga?

§. 60. Ma prima di esaminare altre Teorie, qui giova esibirne que' rapporti, che serbano le Potenze rispetto alle masse de' corpi, che investono, ed alle velocità, che vi producono.

(a) La celebre quistione sulla *misura delle forze vive* un tempo eccitata fra i Nevvtoniani, ed i seguaci del Leibnitz, e i dispareri, che non ha guari hanno avuto il Pref. de Mauperruis el Caval. d' Arcy sul *Minimo dell'Azione*, traggono la loro origine dall' oscura idea della voce *Azione*: la quale, non pur le menti de' Giovani, ma de' Filosofi sovente avviluppa.

Digitalizzato da Google

PROP. IX. TEOR.

§. 61. *Due Potenze* P, *e* p *spingendo respettivamente due corpi uguali, vi debbon produrre due gradi di velocità proporzionali alle loro energie.*

DIM. Le forze respettivamente impresse dalle Potenze P, e p a due corpi uguali sono effetti pieni di esse Potenze: dunque siccome quelle si dimostrarono proporzionali alle velocità de' mentovati corpi (43); così le Potenze P, e p saranno alle medesime velocità proporzionali. C. B. D.

PROP. X. TEOR.

§. 62. *Per prodursi da due Potenze spingenti ineguali un' istesso grado di velocità in due disuguali masse, debbon esser quelle in proporzion di queste.*

DIM. La Potenza P spingendo un' elemento M di materia gl' imprima un grado di velocità, che si dinoti per V: ei sarà chiaro che un' altra Potenza P' uguale a P abbia a produrvi l' istessa velocità in un' altro elemento M' uguale al primo M. Dunque se s' intendan congiunti i due elementi M, ed M', sicchè formino un sol corpicciuolo, e che insiem gli spinga una Potenza uguale a P + P', cioè uguale a 2P; l' aggregato di essi, cioè la massa

Digitalizzato da Google

sa ℓP dovrà girne puranche colla velocità V. Nello stesso modo può concludersi, che colla stessa velocità V si debbano muovere i corpicciuoli 3M, 4M, 5M, ec. qualora gl' investano le Potenze 3P, 4P, 5P ec. Dunque le masse de' corpi debbon essere proporzionali alle forze spingenti (*a*), quando da velocità uguali ne sono animati. C. B. D.

PROP. XI. TEOR.

§. 63. *Le Potenze* P, *e* p *sono fra loro, come le masse de' Corpi* M, *ed* m, *che spingono, e come le velocità* U, *ed* u, *che vi producono.*

Dim. Immaginatevi, che un' altra Potenza π urtando il corpo M' uguale al primo de' divisati corpi, ne produca le velocità del secondo: sarà (61) P : π :: U : u, e (62) π : p :: M : m. Dunque (*b*) sarà (*c*) benanche P : p :: (U : u) (M : m). C. B. D.

C 4 §. 64.

(a) Il noftro Borelli ſcoverſe il principio di queſta dimoſtrazione: in fatti egli rilevò *nel Cor. della Prop. XI. de vi percuss.* queſta verità; *duo æqualia corporæ æquivèlociter mota, si conjungantur, duplicatur quidem virtus motiva, remanente tamen velocitate inalterata.*

(b) *Prenoz. I.*

(c) Queſt' ultima eſpreſſione dinota che ſtia *P* a *p* in ragion compoſta di *U* ad *u*, e di *M* ad *m*.

Digitalizzato da Google

§. 64. Cor. Da questo Teorema si potran dedurre le seguenti verità.

§. 65. *Se due Potenze uguali spingano respettivamente due disuguali masse; le velocità, che vi generano, sono nell' inversa ragione delle stesse masse.*

§. 66. *E se le velocità sieno inversamente come le masse, le Potenze spingenti dovran pareggiarsi.*

§. 67. *Se Potenze disuguali spingano masse disuguali, le velocità, che vi producono, debbon essere nella diretta ragione delle Potenze, e nell' inversa delle masse.*

§. 68. *E le masse saranno direttamente come le Potenze, ed inversamente come le loro velocità.*

§. 69. Di più *se le masse sieno come le Potenze, che le spingono, le velocità in esse generate, saranno tra se uguali.*

§. 70. Finalmente *la velocità prodotta dalla Potenza* P *nella massa* M *sarà dinotata pel quoto* $\frac{P}{M}$.

PROP. XII. TEOR.

§. 71. *La Forza d' inerzia in ciascun corpo è come la quantità della materia, ch' egli contiene.*

Dim. Le Potenze P, e p spingendo respettivamente i corpi M, ed m vi producano uno stes-

Digitalizzato da Google

stesso grado di velocità, qualunque egli si sia; dovranno esser quelle come le masse di questi (62). Ma le forze d'inerzia di diverse masse sono come le Potenze, che spingendole dalla quiete loro impartiscono velocità uguali. Dunque le forze d'inerzia de' corpi M, ed m saranno alle loro masse proporzionali. C. B. D.

§. 72. DEF. VIII. La *quantità di moto* in un corpo, che va per diritto equabilmente, e che suol dirsi *Momento*, è il prodotto della dilui massa nella velocità. (a)

§. 73.

(a) La definizion del Momento, ch'è la seconda di quelle, che il Cavalier Neyvton rapporta ne' Principj Mat. della Filos. Natur. vien espressa ne' seguenti termini: *quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate, & quantitate materiæ conjunctim*. E vuol dinotare il Valentuomo, che la misura de' *Momenti* non sia una grandezza omogenea ad essi, come lo è in tutte le grandezze geometriche, ma un composto di grandezze eterogenee proporzionali a' medesimi momenti. Quelle grandezze che si misurano per altre minori omogenee si dicono *grandezze proprie*, e le altre che si valutano per grandezze eterogenee ad esse proporzionali, *quantità improprie* si domandano. Siccome le prime misure si dicon *vere*, e le altre *vicarie*. Intanto la sì famosa quistione sulla misura delle forze m' induce a recarvene un brieve saggio nel §. seguente.

La misura delle *forze vive*, cioè di quelle, che sono inerenti a' corpi mossi, chi non sa in quante guise abbia rivolto de' moderni Geometri il cervello? L' Immortal Neyvton seguendo le orme di alcuni Fisici Italiani, e dopo di lui il Desaguliers, il Mairan, Colin Mac-laurin, Jurin, ed altri si avvisarono doversi le forze de'corpi valutare dalle masse nelle velocità di essi. Laddove il gran Lei-

Digitalizzato da Google

§. 73. COR. I. Da questa definizione potrebbersi raccorre ben molte conseguenze: eccone alcune:

1. I momenti di due corpi sono in ragion composta delle loro velocità, e delle masse.

2. Se due corpi vadan per dritto equabilmente, le loro velocità sono direttamente come i momenti, ed inversamente come le masse.

3. E

Leibnitz, e con seco la famiglia de' celebri Bernulli, la numerosa Scuola de' Wolfiani, il Marchese Poleni, Ermanno, Rietero, il P. Riccati, ed altri sostenner forte, che la regola Nevvtoniana sol ne valesse per le pressioni, ch' essi chiamaronle *forze morte*; ma che per misurar le *forze vive*, cioè *le forze de' corpi in moto*, doveasi la massa del mobile nel quadrato della velocità moltiplicare. Su questo assunto d' ambe le parti si fecero varie speculazioni, ed esperienze; e tuttora ne' Volumi delle Reali Accademie di Lipsia, di Parigi, di Berlino, di Pietroburgo, nelle Transazioni Anglicane, ne' Commentarj di Bologna, &c. vi leggiamo non poche dissertazioni scritte su questo argomento da'Fautori del Leibnitz, e del Geometra Inglese. Nè vi fu mai letteraria discettazione sostenuta per tanto tempo, e con sì grande impegno da tanti Valentuomini, atti ad escogitar nuove esperienze, a ragionarvi profondamente, e a distendervi calcoli accurati, ed universali, quanto questa di che ragiono. Doveasi dunque (per non combattere alla maniera degli Andabati) fissar quell' effetto delle forze vive, dalla di cui grandezza la loro intensità dovesse sicuramente estimarsi; imperciocchè le forze non si conoscono in loro stesse, ma dagli effetti prodotti esternamente: nè la loro azione può valutarsi, che dagli obici superati. Or chi l' avrebbe creduto! i Nevvtoniani, ed i seguaci del Leibnitz non si accordaron mai su questo punto. I primi faceano consistere l'intero effetto della forza viva di un corpo

Digitalizzato da Google

3. E le masse son direttamente come i momenti, ed inversamente come le velocità.

4. Ed essendo uguali le loro masse, i momenti esser deggiono come le velocità de' corpi: e se queste sieno uguali, i medesimi momenti saranno come le velocità de' mobili.

5. I momenti di due corpi mossi equabilmente per dritto saranno uguali, se le masse e le

po nel poter egli rimuovere un' ostacolo di un' istantanea resistenza: mentre i Leibniziani si servivano di ostacoli di continuate resistenze. In fatti il Gran Leibnitz riflettendo, che ogni grave lasciatosi cadere da una qualunque altezza si acquisti tanta forza, con cui sospinto può salirne ad una pari altezza; stabilì che tutto l' effetto di cotesta forza dovea riporsi nel condurre il grave ad una tal salita. Giovanni Bernulli escogitò un sistema di balestre rettilinee in un certo modo tra lor combinate, e dalla tension di queste ne computava la percossa di quel corpo, che le tendeva. Il Marchese Poleni facendo cadere alcuni gravi sopra uno strato di materia molle, ne riducea l' effetto della percossa loro alla grandezza di quei cavi, ch' essi ne imprimevano. Ed altri Meccanici altri effetti della forza viva n' escogitarono. Dunque non fia maraviglia, se questi Valenti Discettatori non convenendo sull' effetto adeguato della forza viva abbian dette tante belle cose, e tutte vere, senza aver mai raffodate le loro Teorie, o confutate le avverse, e sovvente degenerando in mere, e biasimevoli logomachie. Dunque l' esempio di questi Valentuomini sia pe' Giovani salutare avvertimento a non isposar partito sulla misura delle forze vive: e sien sicuri, che colla misura Leibniziana, e colla Newtoniana si dimostrino ugualmente bene le Teorie Meccaniche, ed Idrodinamiche, e che ogni Problema proposto su queste Scienze dia identici risultati, o che alla maniera del Newton, o pur del Leibnitz si guidi a fine.

Digitalizzato da Google

e le velocità di essi mobili si adeguino respettivamente, o pur se quelle sieno inversamente come queste. E *viceversa*.

6. Se i momenti di due corpi sieno come le masse, le velocità de' mobili dovranno essere tra se uguali: e se i momenti sieno come le velocità de' mobili, le masse di questi dovranno essere tra se uguali.

§. 74. Cor. II. Di quì potrebbesi conoscere, e valutare l' efficacia delle machine belliche, onde gli Antichi solean demolire le mura ostili, e paragonarle con quelle de' moderni; sol che si sappiano le masse, e le velocità de' corpi percuzienti da esse machine animati.

§. 75. Intanto mi è paruto degno di gravissima ponderazione, avanti ch' io ne discenda all' esame delle forze centripete, l' investigar gli effetti, che ne produce in un corpo una Potenza continua uniforme, cioè quella che gli rechi continue spinte uguali per la medesima direzione, e poi valutarne geometricamente gli stessi effetti. Onde a tal uopo giova risalire un poco alle considerazioni ne' §. 47, e 48. esibite.

§. 76. Quivi si conchiuse non potersi immaginare veruna forza continua, che ad un mobile tante spinte ne imprima, quanti sieno gli elementi di quel sentiero rettilineo, pe' quali lo conduce: e che l'azione di questa forza debbasi concepir continuata come la durazione del moto, sicchè il suo progresso al flus-

so

Digitalizzato da Google

so del tempo si conformi. Or il tempo, che per la continuità delle sue parti è una grandezza analoga all'estensione (*a*), non può a rigor di Geometria in indivisibili elementi ripartirsi: e pure non v'ha chi nol ravvisi, come *una serie d'istanti* staccati per così dire l'un dall'altro al par delle grandezze, che discrete appelliamo. Dunque del pari l'azione di una forza continua potrà supporsi come una succession d'impulsi tutti fra lor distinti, sicchè ne paja quasi interrotta per intervalli di tempo infinitesimi. Ma egli è altresì vero, che ogni spinta produce in un'istesso corpo un grado di velocità proporzionale alla sua energia (61). Dunque imprimendoglisi più spinte successive di uguali intensità, e tutte cospiranti; cioè fatte per una stessa direzione, la velocità in esso mobile generata debb'esser proporzionale all'intensità di ciascuna spinta, ed al numero di esse: val quanto dire la medesima velocità è come l'energia della Potenza continua, e come il tempo: sostituendosi all'intensità di ciascuna spinta l'energia della Potenza, ed al numero delle spinte il numero degl'istanti, cioè il tempo. Ed ecco la più universale enunciazione, che può darsi al seguente Principio di Meccanica.

§. 77.

(a) Il Signor Cochius negli Atti di Berl. 1775. ha registrato un suo Opusc. sull'analogia del Tempo, e dell'Estensione.

Digitalizzato da Google

§. 77. LA VELOCITA' GENERATA IN UN MOBILE DA UNA FORZA CONTINUA UNIFORME E' DIRETTAMENTE COME L'ENERGIA DI QUESTA FORZA, EL TEMPO, ONDE' ELLA SI E' GENERATA, ED INVERSAMENTE COME LA MASSA DEL CORPO.

§. 78. Questo Principio, che si è qui sopra dimostrato a priori, non può contenere una *verità contingente*, come ne sembrava al Signor Daniele Bernulli (a), ma sì bene una *verità necessaria*, siccome il sommo Eulero lo ha ben anche con dell' Analisi rilevato (b). Egli è come face a' movimenti accelerati: e 'l gran Galilei, che lo scoverse nella fine (c) del viver suo, rinacque a vita immortale nella memoria de' Posteri.

§. 79. Finalmente la materia de' corpi, che si vide da tante forze ravvivata, l'è anche rapita verso di alcuni centri da una forza continua, che dall' Imm. Newton domandasi *Attra-*

(a) *Volum.* 1. *Accadem. Petropolit.*

(b) §. 152. *Mechan.* e §. 177. *dell. Teor. del Mot. de' Corp. rigidi*, ed Ermanno nel *Vol. II. Att. Petrob. Theor. Mot.* alludendo all' opinione di Daniele Bernulli, *che una funzione della Potenza potrebbesi concepir proporzionale agl' incrementi della velocità generati in un certo tempuscolo*, soggiunge, *sed hoc casu Functio Potentiæ esset vera Potentia agens.*

(c) La dimostrazione di questo Principio fu ritrovato dal Galilei un pò prima della sua morte, e dopo la pubblicazione de' suoi dialoghi: ond' ella è stata poi inserita nelle altre Edizioni.

Digitalizzato da Google

trazione. Per essa i corpi distanti si sforzano di avvicinarsi l'un l'altro, in sin che si tocchino: e per virtù di lei si mantien la coerenza ne' solidi, la rotondità delle parti de' fluidi, e quel maraviglioso equilibrarsi de' Pianeti su della nostra Terra, tuttochè un' altra forza poderosa gli spinga continuamente ad immergersi entro agl' immensi spazj de' Cieli. Ma intanto al nostro intendimento è ascosa l' origine di questa forza; nè può egli concepirsela come una proprietà della materia, o de' centri, nè come un' effetto di un fluido, che premendo i corpi sottoposti gli spinga incessantemente in ver de' centri.

CAP. IV.

NOZIONI DELLE FORZE CENTRIPETE.

§.80. DEF.IX. QUella forza continua, che investendo un corpo il fa tender sempre ad un dato punto, si domanda *gravità*, o *Forza Centripeta*. Esso corpo si dice *Grave*; el punto, ove ne tende, appellasi *Centro delle Forze*, o semplicemente di lui *Centro*.

§. 81. SCOL. Cotesta tendenza de' gravi o consiste nella loro discesa verso del centro delle forze, o nel conato di discendervi. La prima

Digitalizzato da Google

prima si appalesa in que' gravi, che si lascian cadere liberamente, nè son poi da corpi stranieri nel loro cammino impediti: e la seconda in quegli altri si sperimenta, che son ritenuti da ostacoli invincibili, o pur che si volgono intorno al centro delle forze. Così la gravità terrestre, che l' è una specie di tali forze, obbliga un grave a calar giù verticalmente o per un piano inclinato, tosto ch'ei si lasci nel vuoto, o in un fluido di esso grave più leggiero. Ella fa che un' altro grave prema quel piano, su cui poggia, o che tenda quel filo, da cui è sospeso: ed è altresì dovuto alla gravità terrestre, che la nostra Luna non iscappi per la tangente, e sen vada ad immergere ne' lontanissimi spazj del Fermamento. Ma niun di Voi s' immagini, che la forza centripeta sia virtù de' centri, o che questo abbiasi da me voluto indicare nella rapportata definizione: poichè qual cosa sarebbe mai sì strana, quanto il credere, che da' punti geometrici, quali sono i centri delle forze, sgorghin d'intorno intorno forze sì copiose, ed attive, che si vadan poi al discostarsi da' centri diradando? Che anzi nemmeno può stabilirsi, che le tendenze de' gravi sieno proprietà de' loro elementi, o che derivino da straniere potenze, le quali continuamente gli spingano, li premano, li traggono in ver de' centri. E solo potrà concepirsi tanto l' una, che l' altra di queste tendenze, co-

me

Digitalizzato da Google

me una succession di spinte recate al grave verso del suo centro; le quali ne' corpi cadenti si rammassan tutte, e negli altri, che dagli ostacoli son ritenuti, dalla renitenza di questi nel nascer loro ne son distrutte.

§. 82. DEF.X. Una forza centripeta si dirà *Uniforme*, se colla stessa energia ella ne investa un dato grave a qualunque distanza dal di lui centro.

§.83. DEF.XI. E si dirà poi *Variabile*, se la divisata energia si muti, al cangiarsi della distanza di un grave dal di lui centro.

§. 84. SCOL. A rigore niuna forza centripeta puol essere uniforme; ma tale può considerarsi in uno spazio infinitesimo trascorsone dal grave.

§. 85. DEF.XII. *Legge* della forza centripeta dicesi quel rapporto, ch' evvi tra la gravità di un' istesso corpo, e la dilui distanza dal centro delle forze. O pure può dirsi cogli Analisti, che la legge di una forza centripeta sia quella *funzione* della distanza di un corpo dal centro delle forze, cui n' è proporzionale la gravità di esso.

§. 86. SCOL. Così crescendo la gravità di un corpo come la distanza, ch' ei tiene dal centro delle forze, la *ragion di queste distanze* si dirà legge della forza centripeta. E se la gravità si minori; come ne cresce il quadrato della distanza di un corpo dal di lui centro, *la ragion inversa duplicata delle distanze* sarà in tal

Digitalizzato da Google

caso la legge della forza centripeta.

§. 87. DEF. XIII. La curva SECA dirassi *scala delle gravità, o delle forze centripete*, se il dilei asse AK passi per lo centro delle forze, e le ordinate BN, CE ec. sieno come le gravità di un' istesso corpo posto ne' luoghi B, C, ec. *Fig. 6.*

§.88. DEF.XIV. La tendenza dell' intero grave al centro delle forze chiamasi *Peso* del corpo: e dal Newton suol dirsi *Quantità motrice della forza centripeta*.

§. 89. SCOL. Il peso di un corpo non può conoscersi, nè estimarsi, che da quella forza, onde se ne impedisce la sua discesa verso del centro.

§. 90. DEF.XV. La tendenza di ciascun' elemento dello stesso grave dicesi *Quantità acceleratrice della forza centripeta*.

§. 91. COR. I. Il peso di un corpo, ch' è la somma de' conati, onde ciascun de' di lui elementi vuol irne al centro, conviene che si valuti dal numero di cotesti elementi, e dalla tendenza di ciascheduno. Dunque la quantità motrice della forza centripeta è il prodotto della massa di un corpo nella quantità acceleratrice della stessa forza. E di quì s' intende agevolmente ciò, che il Cavalier Newton deduce dalla Def. VIII. Princ. Mat. Fil. Nat. (*a*)

§.92.

(a) *Est igitur vis acceleratrix ad vim motricem ut*

Digitalizzato da Google

§. 92. Cor. II. Due elementi di materia disgregati dalla massa di un corpo, e posti a disuguali distanze dal centro delle forze, se quivi si faccian cadere liberamente, dovranno alla fine di un'istesso tempuscolo concepir due gradi di velocità alle di loro tendenze proporzionali (61), o alle quantità acceleratrici della forza centripeta. Dunque *la quantità acceleratrice della forza centripeta è proporzionale a quel grado di velocità, che in un dato tempuscolo si acquista un' elemento di materia liberamente calando verso del centro.*

§. 93. Cor. III. E poichè dopo un' istesso tempuscolo tanta velocità si acquista un semplice elemento di materia, quanto un qualunque grave, questo però dal suo peso animato al moto, e quello dal suo conato (62); sarà anche vero, che la misura della forza acceleratrice sia la velocità, che in un dato tempuscolo si produce in un qualunque grave libera-

ut celeritas ad motum. Oritur enim quantitas motus ex celeritate ducta in quantitatem materiæ, & vis motrix ex vi acceleratrice ducta in quantitatem ejusdem materiæ. Nam summa actionum vis acceleratricis in singulas corporis particulas est vis motrix totius. Unde juxta superficiem Terræ, ubi gravitas acceleratrix, seu vis gravitatis in corporibus universis eadem est, gravitas motrix, seu pondus est ut corpus: at si in regiones ascendatur, ubi gravitas acceleratrix sit minor, pondus pariter minuetur, eritque semper ut corpus in gravitatem acceleratricem ductum.

Digitalizzato da Google

mente scendendo verso del centro (a).

§. 94. Cor. IV. Le diverse tendenze di due uguali elementi di materia nascono dalle disuguali distanze, ch'essi serbano dal centro delle forze, o dai diversi luoghi, ove ne stanno. Siccome per l'opposto i diversi pesi, che sperimentansi in due gravi dal comun centro equidistanti, produconsi dalle disuguali masse, che in se contengono. Dunque la quantità acceleratrice della forza centripeta è relativa al luogo del grave, laddove la motrice riguarda la massa dello stesso corpo.

§. 95. Scol. Masse uguali collocate ad uguali distanze da altrettanti centri, vi possono tendere con disuguali forze. Ciò non è improbabile, sebbene il sembri nel primo aspetto: imperciocchè dall' esperienza siam tuttavia ammaestrati, che diverse magneti di peso uguali, traggan sovente con differenti ener-

(a) N. B. Se p dinoti il conato di ciascun elemento della materia, onde n' è composto un grave, ed M l' intera di lui massa; il peso dello stesso corpo, che l' è una Potenza continua (45), sarà espresso per pM, e la velocità generata nello stesso corpo dopo un dato tempuscolo (70) sarà proporzionale a $\frac{pM}{M}$, cioè a p. Ma se P dinoti l' intero conato della massa M; la velocità, che nello stesso tempuscolo vi si produce, sarà come $\frac{P}{M}$, ch' è quanto p. E bisogna capir bene queste due cose per l' esatta guida de' calcoli, che talora convien istituire su queste Teorie.

Digitalizzato da Google

nergie due pezzi di ferro uguali fra loro, e dalle magneti equidistanti. E 'l Cavalier Newton colla guida d' ingegnosi, ed accurati calcoli rinvenne, che, se ad uguali distanze dai centri del Sole, di Saturno, di Giove, e della nostra Terra si ponessero altrettanti corpicciuoli di uguali masse, i loro pesi lungi dall' essere tra se uguali, come parrebbe a taluno, sarebbero nella ragion de' seguenti numeri 227512, 1033, 2411, 1. Dunque i centri delle forze si possono concepir dotati di diverse forze attraenti, tuttochè di queste non ne sieno proprietarj, come vel dissi altrove.

§. 96. DEF. XVI. La *Quantità assoluta* della forza centripeta è il peso di un dato corpo posto ad una data distanza da un centro delle forze.

§. 97. COR. I. Dunque se i pesi di due corpi uguali ed ugualmente distanti da due centri sien fra loro come m ad n; questa medesima ragione dovran serbarsi le quantità assolute degli stessi centri (*a*).

(a) E di qui può intendersi chiaramente ciò, che il Cavalier Newton rapporta nell' *illust. dell. def. VIII. Hasce virium quantitates* (cioè la quantità motrice, l' acceleratrice, e l' assoluta della forza centripeta) *brevitatis gratia nominare licet vires motrices, acceleratrices, & absolutas; & distinctionis gratia referre ad corpora centrum petentia, ad corporum loca, & ad centrum virium: nimirum vim motricem ad corpus, tam-*

Digitalizzato da Google

§. 98. Cor. II. E con ciò le quantità assolute de' centri del Sole, di Saturno, di Giove, e della nostra Terra saranno come 227512, 1033, 2411, 1.

CAP. V.

Rapporto delle Forze Centripete ai moti de' Gravi.

§. 99. Def. XVII. Quella forza, che derivando dalla Centripeta, impiegasi solamente ad accelerare un grave nel suo cammino, o a ritardarnelo, dicesi *Forza Acceleratrice*, o *Ritardatrice* (a).

§. 100.

tamquam conatum, & propensionem totius in centrum ex propensionibus omnium partium compositam: & vim acceleratricem ad locum corporis, tamquam efficaciam quamdam de centro per loca singula in circuitu diffusam, ad movenda corpora, quæ in ipsis sunt: vim autem absolutam ad centrum, tamquam causa aliqua præditum, sine qua vires motrices non propagantur per regiones in circuitu, sive causa illa sit corpus aliquod centrale (quale est Magnes in centro vis magneticæ, vel Terra in centro vis gravitantis), sive alia aliqua, quæ non apparet. Mathematicus dumtaxat hic est conceptus; nam virium causas, & sedes Physicas jam non expendo.

(a) N. B. Non bisogna confondere *la quantità acceleratrice della forza centripeta* con quella, che qui si chiama *Forza acceleratrice*.

Digitalizzato da Google

§. 100. Scol. I gravi, che si lascian cadere in un mezzo libero, sono dai loro pesi respettivamente accelerati, cioè dall' intera forza centripeta, che incessantemente investendoli, verso del centro li dirigge. Ma quegli altri, che vi discendono a traverso de' fluidi, su de' piani obbliqui, o per sentieri curvilinei, sono accelerati da una parte della divisata forza, la dicui quantità, e la direzione sarà in appresso investigata.

§. 101. Cor. I. Dunque l'intensità della forza acceleratrice sarà proporzionale alla velocità generata in un dato tempuscolo.

§. 102. Cor. II. E poichè le velocità son come le Potenze applicate alle masse (70); dovrà tenersi per vero, che, nel corpo M sollecitato della potenza P per una qualunque direzione, l'energia della forza acceleratrice sia $\frac{P}{M}$.

§. 103. Def. XVIII. La forza acceleratrice di un corpo si dirà *uniforme*, s' egli per un' istessa direzione, e colla stessa energia n' è sempre animato al moto, ovunque si ritrovi nel suo sentiero.

§. 104. Scol. I gravi, che si lasciano liberamente cadere nelle vicinanze della nostra Terra sono animati al moto da una forza costante, e per la stessa direzione. Dunque l'è uniforme quella forza, che gli accelera nella

Digitalizzato da Google

loro discesa verticale. Ed è anche uniforme la loro accelerazione per i piani obbliqui, come a suo luogo vi sarà dimostrato.

PROP. XIII. TEOR.

§. 105. *Le velocità, che si producono in più corpi uniformemente accelerati da altrettante forze, sono come le intensità di queste, e come i tempi, in che quelle si son prodotte.*

DIM. La dimostrazione di questa verità può supplirsi da ciò, che abbondantemente si è detto in tanti luoghi.

§. 106. COR. 1. Dunque *le forze acceleratrici saranno nella ragion diretta delle velocità generate, se i tempi sieno uguali.*

2. *E le forze direttamente come le velocità generate, ed inversamente come i tempi* (Pren. IV.).

3. *E saranno tra se uguali le velocità respettivamente generate in due mobili da due forze acceleratrici, se queste seguano l' inversa ragion de' tempi. E viceversa.*

§. 107. SCOL. I. Le velocità generate non sono, che gl' incrementi delle velocità de' mobili.

§. 108. SCOL. II. La perdita di velocità, che fa un mobile uniformemente ritardato da una qualunque forza, l' è anche proporzionale all' intensità di essa forza, ed al tempo. Dunque tutto ciò, che qui sopra ho dimostrato de-

Digitalizzato da Google

degl' incrementi di velocità rispetto ai tempi, ed alle forze acceleratrici, potrà applicarsi a' decrementi della velocità riguardo ai tempi, ed alle forze ritardatrici.

PROP. XIV. TEOR.

§. 109. *Poste le medesime cose della Prop. prec. gli spazj, ch' essi corpi descrivono dal principio del loro moto, sono nella semplice ragion delle forze acceleratrici, e nella duplicata de' tempi. E gli stessi spazj son pure nella duplicata ragion diretta delle velocità finali, e nell' inversa delle forze.*

Dim. Part. I. Le rette A E, A C dinotino i tempi, ne' quali muovansi due corpi, uno dalla forza A P uniformemente accelerato, l' altro dalla A Q. Nella retta F D, che per E conducesi perpendicolare alla C A, si prendano le parti F E, E D proporzionali alle velocità dagli stessi corpi acquistate alla fine del tempo A E, le quali (106) dovranno essere nella ragion delle forze A P, A Q: ed unite le rette A F, A D, si prolunghi la A D, sinchè incontri la C B perpendicolarmente eccitata alla retta A C dal punto estremo C. *Fig.* 3.

Ciò posto, si tirino ovunque le rette b q, c f, ec. perpendicolari alla A C, saranno le rette F E, c d, b a ec. come le altre A E, A d, A a, ec. dunque siccome per F E dinotasi la velocità dal primo corpo acquistata alla

Digitalizzato da Google

la fine del tempo AE; così le altre cd, ba, ec. dovranno esprimere (26) quelle velocità, ond' ei si muove alla fine de' tempi Ad, Aa, ec. e quindi (26) lo spazio trascorso dallo stesso mobile nel tempo AE sarà rappresentato dal triangolo AFE. In simil guisa può dimostrarsi, che l' altro mobile uniformemente accelerato dalla forza AQ debba percorrerne nel tempo AC uno spazio dall' altro triangolo ACB disegnato. E poichè il triangolo AEF sta all' altro ACB (*a*) in ragion composta di AEF ad AED, e di AED ad ACB; ed è la prima di queste ragioni componenti uguale a quella di FE ad ED (*b*), cioè alla ragione delle forze acceleratrici; e l' altra de' triangoli simili AED, ACB uguaglia la ragione de' quadrati de' loro lati omologhi AE, AC, o de' tempi, che dalle rette AE, AC son disegnati. Dunque sarà vero che gli spazj descritti dal principio del moto sieno come le forze acceleratrici, e come i quadrati de' tempi.

PART. II. I triangoli AEF, ACB sono in ragion composta delle loro basi EF, CB, e delle altezze AE, AC, o delle ED, CB, che ad esse altezze sono proporzionali. Ma l'è poi ED : CB :: (ED : EF) (EF : CB). Dunque (*c*) sarà AEF : ACB :: (EF : CB) (ED :

(a) *Pren. I.* (b) *I. Elem. VI.*

(c) Le ragioni, che quì veggonsi distinte per parentesi, o rinchiuse ne' vincoli, sono le componenti della

Digitalizzato da Google

(ED : EF) (EF : CB), cioè a dire AEF : ACB :: (EF² : CB²) (ED : EF). E quindi gli spazj descritti ne' tempi AE, AC sono direttamente come i quadrati delle velocità finali, ed inversamente come le forze acceleratrici. C. B. D.

§. 110. Cor. I. Di quì si posson raccorre non poche verità Meccaniche utili e preclare, sol che s' intendano le affezioni, e gli sviluppi della ragion composta. In fatti dalla I. Parte di questo Teorema si deduce 1, che *gli spazj descritti dai riferiti corpi debbano essere come le forze acceleratrici, qualora i tempi sieno fra se uguali.*

2. *Ed essi debbon essere come i quadrati de' tempi, quando le forze acceleratrici son di uguali energie.*

3. Di più *reciprocandosi le forze acceleratrici coi quadrati de' tempi, dovran pareggiarsi gli spazj descritti da' mobili dal principio del loro moto. E viceversa.*

4. *I quadrati de' tempi saran poi direttamente come gli spazj descritti, ed inversamente come le forze acceleratrici. E le forze acceleratrici direttamente come gli spazj descritti, ed inversamente come i quadrati de' tempi.*

§. 111. Cor. II. E dalla II. Part. potrem rilevare 1. *che gli spazj descritti debban seguire la*

la ragione di ACF ad ACB, e così per brevità fogliam disegnarle.

Digitalizzato da Google

la ragion duplicata delle velocità finali, se le forze sieno uguali.

2. *E che essendo uguali le velocità finali, gli spazj descritti debbano essere nella ragion inversa delle forze.*

3. *E poi per essere uguali cotesti spazj, si richiede, che le forze sieno in duplicata ragione delle velocità finali. E viceversa.*

4. Finalmente *le medesime velocità saranno in sudduplicata ragione degli spazj corsi dal principio del moto, ed in sudduplicata ragione delle forze.*

§. 112. Cor. III. Dunque gli spazj descritti da questi mobili saranno tra se uguali, 1. *qualora le velocità finali serbino la ragion inversa de' tempi. 2. o quando le forze acceleratrici rispondan cantrariamente ai quadrati de' tempi.* 3. *o pur se le forze sieno in duplicata ragione delle velocità finali* (a).

§. 113. Cor. IV. Dunque *il valore di una forza acceleratrice potrà dinotarsi dallo spazio diviso per lo quadrato del tempo, o dal quadrato della velocità finale diviso per lo spazio.*

§. 114. Scol. Una Forza acceleratrice comunque *variabile* nella dilei energia, può concepirsi, che animi *uniformemente* il mobile nel con-

(a) Il primo carattere dell' egualità de' mentovati spazj conoscesi dal solo ravvisare i triangoli AEF, ACB, che li rappresentano. E gli altri due son dimostrati nei §. 110. n. 3. §. 111. n. 3.

Digitalizzato da Google

condurlo per uno spazietto infinitesimo, o descritto in un tempo infinitesimo. Dunque tutto ciò, che si è mostrato nelle due ultime Proposizioni, e ne' loro Coroll., può convenevolmente adattarsi agli spazietti iniziali (a), ed ai tempi infinitesimi, senza che faccia uopo dimostrarvelo di bel nuovo. Ed ecco l' enunciazione di tali Teoremi, e de' loro Corollarj.

PROP. XV. TEOR.

§. 115. *L' Incremento di velocità, che una forza accelerando un corpo vi produce, è come l' energia di questa forza, e come il tempuscolo, in ch'ei si è prodotto.* (b)

§. 116. COR. I. *Le forze acceleratrici sono direttamente come gl' incrementi di velocità prodotti ne' corpi, ed inversamente come i tempuscoli ne' quali si producono. E questi tempuscoli son pure nella*

(a) Gli spazietti iniziali sono que' spazietti infinitesimi, che dai gravi si descrivono in sul principio del loro moto.

(b) Un corpicciuolo, la di cui massa sia M, se venga sollecitato dalla potenza p nel tempuscolo dt, dovrà acquistarsi un' elemento di velocità (77) proporzionale a $\frac{p\,dt}{M}$. Dunque se u dinoti la velocità del mobile, e du quel suo elemento, dovrà esser sempre $du = \frac{\theta\,p\,dt}{M}$, ed $u = \frac{\theta}{M}\int p\,dt$; ove θ è un coefficiente costante da determinarsi colla sperienza,

Digitalizzato da Google

nella ragion diretta degl' incrementi di velocità , e nell' inversa delle forze generatrici .

§. 117. COR. II. *Gl' incrementi di velocità debbon essere uguali , se le forze acceleratrici sieno inversamente come i tempuscoli. E viceversa .*

PROP. XVI. TEOR.

§. 118. *Gli spazietti iniziali son come le forze acceleratrici , e come i quadrati de' tempi, ne' quali trascorronsi da' corpi .*

Ed essi son pure come i quadrati delle velocità generate , ed inversamente come le forze acceleratrici .

§. 119. COR. I. 1. *Dunque gli spazietti iniziali deggiono essere, come le forze acceleratrici, qualora i tempi sono uguali . E viceversa.*

2. *Ed i medesimi spazietti dovranno essere uguali , se le forze acceleratrici sieno inversamente come i quadrati de' tempuscoli , E viceversa.*

3. Di più *le forze acceleratrici son direttamente come gli spazietti iniziali , ed inversamente come i quadrati di que' tempuscoli , ne' quali si trascorrono . Ed i quadrati di questi tempuscoli saranno nella diretta ragione de' mentovati spazietti iniziali , e nell' inversa delle forze acceleratrici .*

§. 120. COR. II. E dalla II. Part. può dedursi 1. *che gli spazietti iniziali debbano essere nell' inversa ragione delle forze acceleratrici , qualo-*

Digitalizzato da Google

lora le velocità da' mobili acquistate si pareggino fra loro. E viceversa.

2. *Ed essi spazietti saranno uguali, sol che le forze sieno in duplicata ragione delle velocità generate.*

§. 121. Cor. III. Finalmente *il valore della forza acceleratrice potrà esibirsi dallo spazietto iniziale diviso pe 'l quadrato del tempuscolo; o dal quadrato della velocità generata diviso per lo spazietto iniziale.*

§. 122. Scol. I. I rapporti delle forze acceleratrici ai moti de' corpi convien che distintamente intendansi, e che si rendano familiari le loro idee: conciossiachè son essi tanti principj regolatori di moltissime dimostrazioni meccaniche. Oltre a che tutti i Problemi *diretti* del moto curvilineo non sono, che tante applicazioni di questo Teorema a diversi casi.

§. 123. Scol. II. Queste verità sono puranche applicabili a moti ritardati, purchè nelle loro enunciazioni si sostituiscano i *decrementi* agl' incrementi, e le forze *Ritardatrici* alle Acceleratrici.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XVII. TEOR.

§. 124. *Se un grave dal luogo* A *si lasci liberamente discendere all' immobile* (*a*) *centro* K *delle forze; le velocità, ond' ei ne perviene a' luoghi* B, *e* C, *saranno in sudduplicata ragione delle corrispondenti aje* ABNS, ACES *nella scala* ACES *delle forze centripete.*

Fig. 6.

DIM. La curva ADF s'intenda esser la scala delle velocità del mobile, e presi gli spazietti infinitesimi Bb, Cc alle intere AB, AC proporzionali, si conducano le ordinate NBD, nbd, ECF, ecf alle curve ADF, SNE. Si protraggano le rette BA, ed SA verso Y, e Q, e bisecato l'angolo QAY colla retta AT, si menino pe' punti D, d, F, f le rette DR, dr, FT, ft parallele al comun asse delle divisate curve. E poichè i triangoli ABR, AQT sono isosceli, i loro lati AP, AQ, o le sottoposte ordinate BD, CF saranno respettivamente uguali a PR, e QT. Onde prolungate le rette rd, tf, sinchè incontrino le ordinate BD, CF, dovranno i rettangoli di BD in gD, di CF in hF uguagliare respettivamente gli altri due PRrp, TQqt.

E poichè il grave trascorre equabilmente (15) gli spazietti Bb, Cc colle rispettive velocità BD, CF, e ne' tempuscoli, che si dicano

Digitalizzato da Google

no T, e t; sarà bd : cf : : (Bb : Cc) (t : T).
Ma è (115) anche gD : hF : : (bn : ce) (T : t).
Dunque componendo tra di loro le prime ragioni di queste due analogie, e le altre rimanenti, avrassi bd. gD : cf. hF : : (Bb : Cc) (t : T) (bn : ce) (T : t), cioè per la III. Prenozione bd. gD : cf. hF : : (Bb : Cc) (bn : ce), vale a dire i rettangoletti bd. gD, cf. hF, o gli altri PRrp, QTtq, che son loro uguali, saranno come i rettangoletti BbnN, CceE. Dunque (*b*) sarà il triangolo RAP all'altro TAQ, come l'aja ABNS (*c*) all'altra

(a) L'immobilità de' centri quì si richiede essenzialmente, perchè sia vero questo Teorema. Che se taluno brami saper le leggi de' gravi, che scendono naturalmente ad un centro mobile, o a due centri fissi, potrà leggere *negli Att. di Bologna Vol. VI. la diss. del P. Riccati de mot. rect. corporis attracti, aut repulsi a centro mobili*, e nel Vol. XI. *degli Att. Nuov. di Pietrob. un' Opusc. di Eulero de motu corporis attracti ad duo centra immobilia: il Sign. de la Grange nell. Part. II. Mechanique Analyt.* §. 17., *ed altri*. Ma tanto in questo Problema, che in ogni altro di questo Trattato di Meccanica prescindiamo dalla resistenza de' mezzi.

(b) *Pren. VIII. e* §. 24.

(c) Se lo spazietto $B\,b$ dicasi dx, la velocità $B\,d$ sia u, e du il suo elemento, p la spinta, che ha il grave in B, ed M la dilui massa; dovrà essere la forza acceleratrice uguale a $\frac{p}{M}$. Dunque sarà $u\,du = \frac{\theta p dx}{M}$, ed integrando $u^2 = \frac{2\theta}{M}\int p\,dx + C$. Quì la costante è zero, quando il grave si lasci di per se cadere: θ è un coefficiente

Digitalizzato da Google

tra A C E S. E quindi siccome i medesimi triangoli R A P, T A Q sono in duplicata ragione de' loro lati omologhi A P, A Q, o delle ordinate B D, C F, che li pareggianò; così le aje A B N S, A C E S saran pure di queste ordinate in ragion duplicata: cioè a dire le velocità B D, e C F, onde il grave liberamente calando dal luogo A agli altri B, e C ne perviene, sono in sudduplicata ragione delle aje A B N S, A C E S nella scala delle forze centripete. C. B. D.

§. 125. Cor. I. Concessa la quadratura della curva A C E S si possono geometricamente esibir de' quadrati, che nello spazio pareggino le aje A B N S, A C E S, ec. Dunque se dai punti B, C, ec. della indefinita A K le si erigano le perpendicolari B D, C F, ec. respettivamente uguali ai lati di questi quadrati; la curva A D F, che n' emerge per assegnazion di punti, sarà la scala delle velocità del mobile. E da questa cogli artifizj della Prop. VI. può la curva de' tempi rinvenirsi (*a*).

§. 126.

ciente costante da definirsi coll' esperienza: e questa formola potrebbesi rilevare dalla not. (b) §. 115, ponendo $\frac{dx}{u}$ in luogo di dt.

(a) Il Cavalier Newton rinvenne la verità di questo Teorema, dimostrandola *nell. Prop. 39. Lib. I. Princ. Mat.* in una maniera analitica indiretta: cioè supponendo i quadrati delle velocità proporzionali a certe aje, ei ne conchiuse esser queste nella scala delle forze. Ed ecco-

Digitalizzato da Google

§. 126. Cor. II. Prendasi C c uguale a B b, saranno i rettangoli B b n N, C c e E nella ragion delle loro basi B N, C E: e quindi gli altri due B g D, C h F, che a quelli si son dimostrati proporzionali, saranno ancora nella ragion di B N a C E.

§. 127. Cor. III. Cioè a dire, *le forze acceleratrici son come le velocità, e i loro elementi acquistatisi alla fine di uguali spazietti* (*b*).

§. 128. Cor. IV. Se i gravi L ed A si facian cadere liberamente dalle altezze LB, AC, le loro velocità finali saranno in sudduplicata ragione delle corrispondenti aje LBNK, ACES nella scala delle forze. *Fig. 7. n. 1.*

E 2 PROP.

eccone la maniera. La velocità, onde il grave calando dal luogo *A* ne perviene ai luoghi *b* e *B*, si dicano respettivamente u, ed $u+\omega$, ove ω è una grandezza infinitesima, e sieno le aje *A b n S*, *A B N S* come $v\,v$ ad $v\,v+2\,v\,\omega+\omega\,\omega$; sarà dividendo l' aja *B b n N* proporzionale a $2\,u\,\omega+\omega\,\omega$, o semplicemente a $2\,v\,\omega$ (potendo $\omega\,\omega$ trascurarsi rispetto a $2\,v\,\omega$): e quindi *N B* sarà come $\frac{2\,v\,\omega}{B\,b}$, o pure (prendendo la metà di questa espressione) come $\frac{v}{B\,b}\times\omega$. Vale a dire la *N B* è direttamente come l' incremento della velocità dinotato per ω, ed inversamente come il tempo espresso per $\frac{B\,b}{v}$ (15). Ella dunque è come la forza acceleratrice in *B* (115. n. 2); e l'aja *A B N S*, che si è supposta proporzionale al quadrato della velocità in *B*, sarà una parte della Scala delle forze.

(b) Il Signor Daniele Bernulli nel *Vol. V. Act. Ant.*

Digitalizzato da Google

PROP. XVIII. TEOR.

§. 129. *Poste le medesime cose della prop. prec. le forze, che accelerano il grave ne' luoghi* B, e C, *sono come le corrispondenti sunnormali* B L, C K *della scala* A D F *delle velocità di esso.*

Fig. 6.

Dim. Si prendano i due spazietti infinitesimi ed uguali B b, C c, ed ordinate le rette B D, b d, C F, c f, si calino sulle B D, e C F le perpendicolari d g, f h. E poichè il triangoletto d g D è simile (*a*) al triangolo D B L, dovrà stare D g : d g :: B L : B D: onde il rettangolo di B L in d g o in B b sarà uguale all' altro di B D in D g. E dimostrandosi in simil guisa che il rettangolo K C c pareggi l' altro C F h, saranno i due rettangoli L B b, K C c nella ragion degli altri due B D g, C F h. Or i primi rettangoli perchè *equealti* sono nella ragione delle loro basi B L, C K,

Ant. Petrob. chiamando *p d t* una pressione momentanea, che soffre il grave verso del centro, e *p d x* una pressione spaziale, deduſſe due belle verità, che quì giova esibirle. I. *Summa omnium pressionum momentanearum utcunque variantium, quæ definito corpori definitam velocitatem impresserint a quiete, semper est eadem.*

II. *Summa omnium pressionum spatialium utcunque variantium, quæ definito corpori definitam velocitatem impresserint a quiete, semper est eadem.*

(a) *Prenoz. IX.*

Digitalizzato da Google

CK, e gli altri due BDg, CFh (127) son come le forze, che accelerano il grave ne' luoghi B, e C. Dunque queste forze son come le corrispondenti sunnormali BL, CK nella scala ADF delle velocità del grave (*a*). C. B. D.

§. 130. Cor. I. Dunque se da' punti B, C, ec. si erigano sulla CA le perpendicolari BN, CE, ec. uguali alle respettive sunnormali BL, CK, ec. della ADF scala delle velocità; per assegnazion di punti verrà a costruirsi la scala delle forze acceleratrici.

§. 131. Cor. II. Se le velocità BD, CF, con che il grave lasciatosi cadere dal luogo A agli altri B, e C ne perviene, sieno in suddupplicata ragione delle altezze AB, AC; la curva ACF scala delle velocità di esso mobile, sarà una Parabola conica (*b*), le cui sunnormali, come da' Conici può appararsi (*c*), son tutte fra loro uguali.

(a) Nella Prop. prec. si è dimostrato il rettangolo di NB in Bb sempre proporzionale al suo corrispondente di BD in Dg. Dunque se le rette BN, BA, BD si dicano respettivamente φ, x, u; e con ciò le Bb, e Dg sieno dx, e du; sarà φdx proporzionale ad udu, e φ come $\frac{u\,du}{dx}$, cioè (per quel ch' è noto dal metodo diretto delle tangenti) come la sunnormale della curva AF nel punto L.

(b) *Prop. 7. lib. I. Con. del Giann.*

(c) *Prop. 9. dell' istess.*

Digitalizzato da Google

§. 132. Cor. III. Dunque *se le velocità di un grave, che colla sola forza di gravità giù ne discende, sieno in sudduplicata ragione delle altezze percorse, la forza acceleratrice sarà costante.*

PROP. XIX. PROBL.

§. 133. *Poste le medesime cose della Prop. XVII. ritrovar quello spazio, che dee trascorrere il corpo* B *uniformemente accelerato dalla forza* C G, *affinchè tanta velocità si acquisti, con quanta un grave al luogo* C *ne perviene lasciatosi liberamente cadere dall' altro* A.

Fig. 7. n. 1.

Cost. La retta C G rappresenti la forza, che costantemente accelera il corpo B: la CE sia quella del grave A, qualora ei si ritrovi in C, e la curva C L K E sia la scala delle gravità di questo corpo. Sulla C G si formi il rettangolo B C G M uguale all' aja A C E S, che quì suppongasi quadrabile: dico *esser* C B *lo spazio addimandato*.

Si prendano gli spazietti infinitesimi A a, B b reciprocamente proporzionali alle forze AS, B M, dalle quali i corpi A, e B sono accelerati nel principio del loro moto, e si compiano i rettangoletti A a s S, B b m M. Questi saranno uguali (a), e serberanno alle aje uguali

(a) *Prop.* 14. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

guali ACES, BCGM ugual ragione: vale a dire starà AasS: ACES:: BbnM: BCGM. Ma le aje AasS, ACES (124) sono in duplicata ragione delle velocità, che si acquista il grave A calando per le altezze Aa, AC; e le altre due son pure in duplicata ragione di quelle velocità, onde il corpo B sempre animato dalla forza CG a' luoghi B, e C ne perviene. Dunque quelle velocità saran come queste. Ma le velocità acquistatesi da' corpi A, e B nella discesa per gli spazietti iniziali Aa, Bb si uguagliano fra loro (120), essendo essi spazietti nell' inversa ragione delle forze acceleratrici. Dunque la velocità, che la scesa per la CA ne conferisce al grave, è quanto quella, che il corpo B si acquisterebbe passando lo spazio BC sempre accelerato dalla forza CG. C. B. D.

§. 134. Cor. I. Se il grave in giù si proietti dal luogo A con tanta velocità, quanta gliene avrebbe conferito la discesa per la LA; le velocità, ond' ei perviene a' luoghi B, e C, saranno in sudduplicata ragione di LASK + ABNS ad LASK + ACES.

§. 135. Cor. II. Che se la velocità impressa al grave A per AC sia uguale a quella, che gli produrrebbe la forza uniforme F conducendolo per lo spazio S; le velocità, ond' egli arriva ai luoghi B, e C, saranno in sudduplicata

Digitalizzato da Google

cata ragione di S.F + ABNS ad S.F + ACES (n).

PROP.

(a) Un gravé, la cui maſſa ſia 1, dal luogo A ſi laſci cadere all' immobile centro K, o pur ſi proietti per la retta centrale CK colla velocità c, e dopo qualche tempo, che ſi dica t, ei ne traſcorra lo ſpazietto Bb colla velocità u. Si ponga $KA = r$, $KB = x$, la gravità del corpo in $A = g$, ed R ed X eſprimano le funzioni di KA, e KB, cui ſon proporzionali le gravità dello ſteſſo corpo A, e B; ſarà la forza acceleratrice del grave poſto in B uguale $\frac{gX}{R}$, ed eſſendo $Bb = D(r-x) = -dx$, ſarà (not. b §. 124) $u\,du = \frac{-gX\,dx}{R}$. Dunque integrando, ed aggiungendo la convenevole coſt. avraſſi

Fig. 6.

$$u^2 = C - \frac{2g}{R}\int X dx, \text{ e con ciò } u = \sqrt{\left(C - \frac{2g}{R}\int X dx\right)}$$

Ed essendo $t = \int \frac{-dx}{v}$

$$\text{sarà } t = \int \frac{-dx}{\sqrt{\left(C - \frac{2g}{R}\int X dx\right)}} + \text{Cost.}$$

Esemp. Suppongasi $X = x^n$, e $c = o$; sarà $\int X\,dx = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, e determinando la cost. C dal supporsi, che u sia zero, quando x è uguale ad r, avrassi

$$u = \sqrt{\frac{2g}{r^n}\left(\frac{r^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}\right)}, \text{ o}$$

$$t = -\int dx : \sqrt{\frac{2g}{r^n}\left(\frac{r^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}\right)} + \text{Cost.}$$

Digitalizzato da Google

PROP. XX. TEOR.

§. 136. *Il grave* P *liberamente discenda al centro* C *delle forze, e l'altro* N *d'ugual massa salga nella* C N *sospinto da una forza impellente: io dico che se mai ne' luoghi* S, *ed* O *equidistanti dallo stesso centro abbiano questi corpi velocità uguali, anche negli altri punti del loro sentiero equidistanti dal centro dovranno avere velocità uguali.* Fig. 7. n. 2.

DIM. Si prendano nella C P le retticciuole S s, s t, ec. tutte uguali fra loro, ed uguali alle altre O o, o n, ec. dell'altra C N. Ei sarà chiaro, che i divisati corpi, supponendosi in S, ed in O ugualmente veloci, abbiano a passare gli spazietti uguali S s, o O in tempi uguali (15). Ma, per l'equidistanza de' punti S, ed O dal centro C, la forza acceleratrice del primo corpo è quanto quella, che l'altro ne ritarda. Dunque l'elemento di velocità, che acquista il grave P discendendo per S s, uguaglia quello, che si perde dall'altro N nella salita per o O: imperciocchè questi elementi sono in ragion composta delle divisate forze, e de' tempi (105, 108), che si son dimostrati respettivamente tra loro uguali. Ma per Ipotesi sono uguali le intere velocità, che hanno questi gravi ne' luoghi S, ed O: dunque il dovranno essere puranche uguali le velocità loro negli altri due luoghi s, ed o equi-

Digitalizzato da Google

quidistanti dal centro C delle forze. E continuando il filo del ragionamento nella stessa guisa, si conclude quel che si è proposto. C. B. D.

§. 137. Cor. Di qui può trarsi per conseguenza la verità, che segue. *In ogni sistema di accelerazione un corpo, che si fa liberamente cadere da una qualunque altezza, dee tanta forza acquistarsi, che con altrettanta sospintone valga a salir tant' alto. E per ogni punto di questa altezza egli dee passarvi colla stessa velocità sì nel discendere, che nel salire.*

PROP. XXI. TEOR.

§. 138. *Non si può verificare Ipotesi di accelerazione, ove le velocità d' un grave, che si lasci liberamente discendere, sieno come gli spazj percorsi, o in ragion duplicata, triplicata, ec. di essi spazj.*

Dim. Che non possano coteste velocità esser proporzionali agli spazj corsi dal principio del moto, ben si rileva dalla Prop. VIII. Cas. I. Ma che le medesime nè tampoco possan proporzionarsi alle potenze de' medesimi spazj, vi sarà mostrato nel seguente modo.

Fig. 3. S' è possibile; sieno le velocità D G, B C acquistatesi da un grave alla fine degli spazj A D, A B, come le potenze n de' medesimi. Intendasi descritta l' Iperbole M N E in mezzo agli asintoti rettangoli A Q, A B, sicchè le ordi-

Digitalizzato da Google

ordinate D N, B M sieno inversamente come le potenze n delle corrispondenti ascisse A D, A B; si costruisca l' Iperbole conica I N, che passi per N, e resti ancor situata tra' medesimi asintoti. E poichè la ragione di A D^n ad A d^n è maggiore di quella di A D ad A d, sarà puranchè la ragione di d n a D N maggiore di quella di d f a D N, essendo queste due ragioni respettivamente uguali alle prime a cagion delle due Iperboli. Dunque la d n sarà maggiore della d f: tutti i rettangoli circoscritti alla curva N E Q A D saranno maggiori de' corrispondenti circoscritti nell' Iperbole conica N f Q A D; e lo spazio N E Q A D sarà puranche maggiore dell' altro N f Q A D: ed essendo questo infinito (*a*) di grandezza, quello ne sarà piucchè infinito. Cioè a dire si richiederebbe un tempo infinito a far discendere liberamente un grave per l' altezza A D, ancorchè picciolissima: lo ché ripugna (*b*). C.B.D.

§. 139. Cor. Dunque è assurda l' Ipotesi di Baliano, *che le velocità de' gravi cadenti sieno proporzionali agli spazj percorsi*.

CAP.

(a) *Cor. 4. Prop. 22. Lib. III. Con. Giann.*

(b) Lo ſpazio *A B* liberamente percorſo dal gravè *A* ſia x, e la velocità in *B* ſi dinoti per *X* (qualunque Funzione di x), e ſia $\frac{X\,dX}{dx} = X'$. Perchè ſia poſſibile queſta generale Ipoteſi di accelerazione, la grandezza X' dee diventare una coſtante poſitiva, quando in eſſa poſi gaſi $x = 0$.

Digitalizzato da Google

CAP. VI.

DELLE VERE IPOTESI DI GRAVITA', CHE HAN LUOGO NELLA NOSTRA TERRA, E DE' MOTI RETTILINEI, CHE NE SON DETERMINATI.

§. 140. TRe sono le vere leggi di gravità, o di *centripetenza* che, come vel dimostro nel Trattato delle Attrazioni de' corpi sferici, han luogo nel nostro Globo, ed in ogni altro del Sistema Solare. Quì non fò che indicarle, ed esibirvi le leggi de' moti rettilinei, che ne son determinati.

§. 141. IPOT. I. *La gravità* (a) *di un corpo, ch' è presso la superficie della nostra Terra, non è che costante.*

§. 142. IPOT. II. *Se un corpo immergasi profondamente entro la nostra Terra, la sua gravità dee mancare, come la sua distanza dal di lei centro.*

§. 143. IPOT. III. *E sollevandosi un grave a grandi altezze dalla superficie terrestre, la gravità di esso è inversamente come il quadrato della sua distanza dal centro della nostra Terra.*

§. 144.

(a) Quì per gravità intendesi la di lei *quantità acceleratrice*. Di queste tre Ipotesi la prima fu escogitata dal Gran Galilei, e le altre due furon dimostrate dall'Imm. Nevvton.

Digitalizzato da Google

§. 144. Cor. I. Dunque tanto pesa un grave a lido di mare, quanto in sulla cima di una torre, che quivi si erga: tanto su di un colle, che nella vicina valle. E se un grave, il di cui peso sia per esempio di 100 ℔, s' intenda profondato nella nostra Terra per un mezzo raggio terrestre, il suo peso diverrà di 50 ℔; ed ei peserebbe sole 25 ℔ elevandosi dalla superficie terrestre per un semidiametro della Terra. E (ciocchè sembra meraviglioso) se il medesimo si sublimasse nella region della Luna, la quale dista da noi per 60 semidiametri terrestri, il suo peso di 100 ℔ si ridurrebbe a quello di un terzo di un' oncia. Imperocchè facendosi come $(60)^2$ ad $(1)^2$, così 100 ℔ ad un quarto: questo sarebbe $\frac{1}{3}\frac{1}{6}$ ℔, ch' è un terzo di un' oncia.

§. 145. Cor. II. Da ciò rilevasi ancora, che un corpo, ch'è presso la nostra Terra, ottiene il massimo peso, qualor ne giace nella di lei superficie.

§. 146. Cor. III. E dalle medesime leggi può intendersi ciocchè soggiunse Isacco Newton nel Cor. 2. Prop. LIII. Lib. I. de' Princip. Matem. *Nam gravitas decrescit in progressu a superficie Telluris, deorsum quidem in ratione simplici, sursum vero in ratione duplicata distantiarum.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXII. TEOR.

§. 147. *Nell' Ipotesi della gravità costante, il peso di un corpo è come la di lui massa.*

DIM. Il peso di un corpo è come il numero de' di lui elementi, e come la forza acceleratrice di ciascheduno (91). Ma questa forza quì supponesi costante nell'energia, e nella direzione: dunque il peso di esso sarà come il numero degli elementi, che il compongono, o come la massa che in se contiene (*a*). C. B. D.

§. 148.

(a) Che se vorrebbesi una dimostrazion rigorosa applicabile tanto alle masse commensurabili, che alle incommensurabili; fingasi, che i corpi *A*, e *B* sieno affatto sgombri di pori, affinchè la quantità di materia, che in essi si contiene, occupi adeguatamente i loro volumi: e sieno in primo luogo cotesti corpi commensurabili, avendo per comune misura il corpicciuolo *C*. Rappresenti la retta *V* il peso della massa *C*, e facciasi *V* a *PQ* come *C* ad *A*, ed *V* a *QF* come *C* a *B*; le rette *PQ*, e *QF* dinoteranno i pesi de' corpi *A*, e *B*, e saran proporzionali alle loro masse: lo che può dimostrarsi come il I. Cas. Prop. I.

Fig. 2. n. 3.

CAS. II. Che se le masse *A*, e *B* siano incommensurabili, anche in questo caso saran proporzionali alle rette *PQ*, *QF*, che n' esprimano i loro pesi. Imperciocchè se ciò non si accordi, la ragione di *A* a *B* fingasi minore di quella di *PQ* a *QF*: e prendasi la massa *D* manchevole di *B* per una grandezza minore di qualunque assegnabile, e che sia commensurabile ad *A*. E poichè la ragione de' corpi *A* e *B* si è supposta minore di quella de' loro pesi *PQ*, e *QF*, sarà la ragione di *A* a *D* al-

Digitalizzato da Google

§. 148. Cor. Sebbene ignoriamo la cagione della gravità terrestre, el di lei modo d' agir ne' corpi; si sa nondimeno ch' ella debba investire non pur l'esterne di loro parti, ma le interne ancora. Poichè se in quelle sol ne agisse, dovrebbe cangiarsi il peso di un corpo al cangiarsi della di lui superficie. Lo che ripugna ad una continuata esperienza.

§. 149. Scol. Se nel vuoto Boileano si faccian cadere più gravi comunque differenti nella massa, nel volume, nella densità, nella figura, ec. ed ancorchè uno di essi sia una levissima piuma, ed un'altro una palla di oro ponderosa; si vedran tutti discendere (come avealo presagito il Galilei) in tempi uguali da uguali altezze. Dunque le velocità finali di cotesti corpi dovran uguagliarsi; e i pesi loro, che

altresì minore di questa di PQ a QF, e con ciò uguale alla ragione della medesima PQ a QR maggiore di QF. Per la qual cosa, essendo le masse A, e D commensurabili, e rappresentando PQ il peso della prima, dovrà QR dinotar quello dell' altra D (Cas. I.). Adunque essendo QR maggiore di QF, sarà il peso del corpo D maggiore di quello dell' altro B: lo che è assurdo. Che se la ragione di $A : B$ supponga si maggiore di quella di $PQ : QF$, sarà invertendo la ragione di $B : A$ minore di quest' altra di $QF : PQ$: e questa illazione è falsa, come la precedente.

Il valentissimo Giacomo Ermanno nel *Teor. I. della sua Foron.* propone questi due casi, ma poi non ne dimostra, che il primo: conveniva dunque quì distenderne la dimostrazione del secondo.

Digitalizzato da Google

che come altrettante Potenze continue uniformi le han prodotte, (62) saranno proporzionali alle masse. Per mezzo delle oscillazioni de' pendoli, come vel dimostrerò a suo luogo, anche confermasi, che in ogni regione della nostra Terra le masse de' corpi sieno proporzionali ai loro pesi, e che quivi la gravità acceleratrice sia costante. Ma il Cavalier Newton volendo tra se paragonare i pesi de' corpi in diverse regioni, dimostrò sottilmente, che la gravità sotto dell' Equatore a quella, ch' è sotto a ciascun de' Poli di nostra Terra, sia come 229 a 230; e che scostandosi dall'Equatore verso di un Polo, l'incremento del peso di un corpo debba essere come il quadrato del seno della latitudine.

§. 150. DEF. XIX. Il moto di un corpo si dirà *uniformemente accelerato*, o *uniformemente ritardato*, se in tempi uguali riceva gradi di velocità uguali, o pur ne perda.

§. 151. COR. Qualor sia nulla la velocità iniziale di un corpo, che muovesi di moto uniformemente accelerato, le velocità successive saranno, come i tempi, da ch' ei s' è mosso.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIII. TEOR.

§. 152. *Se un grave si lasci liberamente cadere vicino la superficie della Terra, il suo moto sarà uniformemente accelerato.*
E se un' altro sospingasi verticalmente con una forza finita, ei dovrà salire con moto uniformemente ritardato.

DIM. Dall'azione uniforme della gravità terrestre intendesi agevolmente ciò, che si è proposto (77).

§. 153. COR. Dunque in un grave, che cade naturalmente dovrà verificarsi (27, 28, 29)

1. *Che gli spazj descritti dal principio del moto debbano crescere come i quadrati de' tempi, o delle velocità finali.*

2. *E gli spazj passati in tempi uguali da cotesto grave, che partesi dalla quiete, crescono come i numeri impari* ab unitate 1, 3, 5, *ec.*

3. E finalmente *un grave v' impiega tanto tempo a calar liberamente da un' altezza, quanto vi spenderebbe a percorrere il doppio spazio, se colla velocità finale ne gisse equabilmente* (a).

§. 154.

(a) Niuna cosa ha tanto contribuito ad illustrare il nome di Galileo Galilei, quanto l' aver egli sagacemente rilevato le leggi della discesa verticale de' gravi, el sentiero di quegli altri, che obbliquamente son proiettati: erigendosi col suo acume sugli altri Contemplatori della Natura, cui non era mai riuscito sviluppar le leggi di fenomeni cotanto ovvj, e fugando virilmente quegli

Digitalizzato da Google

§. 154. Cor. II. La velocità finale di un corpo, che scende con moto uniformemente accelerato, misurasi dal doppio spazio diviso pel tempo. E ciò si rileva dal n. 3. Cor. prec.

§. 155.

errori, onde le Scuole erano da gran tempo ingombre. In fatti i Peripatetici teneano come affioma, che le *velocità de' gravi fatti cadere da una stessa altezza fossero proporzionali ai pesi loro*: e seguendo lo Stagirita diceano, che una palla di 100 libbre cadendo dall'altezza di 100 braccia dovesse arrivare in terra prima, che una di una libbra fosse scesa un sol braccio. Ma il Galilei con pruove argute, ed eleganti dimostrò, che cotesta Ipotesi distruggea se stessa, cioè che supponendo un mobile più grave muoversi più velocemente del men grave, se ne concludea, che il più grave dovrebbe girne men veloce. E maneggiando sottilmente e con leggiadria la verità della Prop. X. §. 62. conchiuse, che pesi disuguali debbansi acquistare velocità uguali nel discendere da una stessa altezza, e che *nelle vicinanze della nostra Terra la gravità acceleratrice de' corpi sia costante*. Oltre a che egli fece piombare dall' alto del Duomo di Pisa masse ineguali, e mostrò ad infiniti Spettatori, che quivi ragunaronsi, esser quasi uguali i tempi della loro discesa da una stessa altezza, e con ciò le loro velocità finali. E facendo poi per archi di cerchio simili ed uguali oscillar due pesi, uno che fosse decuplo dell' altro, ritrovò isocrone cotestе oscillazioni, e quindi uguali le loro velocità ne' punti infimi degli archi descritti. Dunque il Valentuomo dimostrò questa Verità Meccanica con tante ragioni sì a priori, che a posteriori, cui piegaron tosto la fronte i Filosofi di Europa, tranne i suoi avversarj, che accesi di rabbia, e di dispetto gli divenner grandemente molesti.

Un' altro errore, che il Galilei anche rimosse dalla mente de' Fisici, si tenea per conseguenza immediata di una moltiplice esperienza, e come verità intuitiva. *Ogni gra-*

Digitalizzato da Google

§. 155. Cor. III. Se due gravi si faccian cadere liberamente in due diverse regioni della Terra, le altezze percorse saranno come i quadrati de' tempi, e come le forze, che quivi gli accelerano (109).

grave discendente, diceasi, *vires adquirit eundo*: *dunque la sua velocità dee crescere in ragion dello spazio*. Ma il Galilei avvalendosi di quella verità, che si è recata nel §. 32., dimostrò con quattro semplicissime ed argute parole esser tanto falsa, ed impossibile cotesta supposizione, quanto che il moto facciasi in un' istante: e proscrivendola dal regno di Natura sostituì in sua vece, che *le velocità ne' gravi cadenti fossero proporzionali ai tempi*. Conveniva dunque per filosofar saggiamente far due cose: prima conoscer colla luce della Geometria i fintomi del moto in questa nuova Ipotesi, e poi confermarli con replicate, e sicure sperienze. Le quali investigazioni eran del pari malagevoli: quella per non essersi ancora alla Scienza della Natura rinnestata la Geometria, questa per non potersi ravvisar le parti dello spazio verticale trascorse dal grave cadente, essendo molto rapido cotesto moto: nè poi vi erano degli orinoli a pendolo, onde misurare esattamente i piccioli tempi. Ma ecco gl' ingegnosi modi, con cui il Valentuomo riuscì nel suo intento.

Colla Geometria degl' Indivisibili rinvenne, che ogni grave in quel tempo, che naturalmente impiegavi a discendere da una data altezza, potrebbe percorrere un doppio spazio, se colla velocità finale ne gisse equabilmente. II. Che gli spazj corsi dal principio del moto sieno come i quadrati de' tempi. III. E che gli spazj descritti in tempi uguali debbano crescere come i numeri impari 1, 3, 5, 7, ec: Ei scoverse ancora, che se dalla cima di un piano inclinato si facean cadere due gravi, uno per la dilui lunghezza, l' altro verticalmente; le loro velocità in arrivando ad una medesima orizzontale dovean

essere

Digitalizzato da Google

§. 156. Cor. IV. Un corpo proiettato in su verticalmente dee salir tant' alto, che di là ricadendo al luogo della proiezione, acquistasi quella forza, onde ne fu sospinto. E per ogni punto del suo cammino, ch' ei compie ora salendo, ora scendendo, dee passarvi colla stessa velocità.

§. 157. Scol. I. Dalle affezioni del moto uniformemente accelerato si possono agevolmente conoscere quelle del moto uniformemente ritardato, senza indugiarne di vantaggio.

§. 158. Scol. II. L'acutissimo Ugenio traendo calcolo dall'essere uguali, e ch' era la stessa la legge di accelerazione di questi due moti. Dunque pensò su de' piani inclinati praticar l'esperienze nel seguente modo. In una trave lunga 12. braccia fece incavare un canaletto altrettanto lungo, e largo poco più di un dito, fattolo tirar ben dritto, e pulito: e poi disposelo in modo, che un dilei estremo si potesse ad arbitrio elevare ora un braccio, ora due, ec. sull' orizzonte. Per quel canaletto, che giaceasi obbliquo, vi facea discendere una palla di bronzo durissimo ben rotondata, e liscia: mentre lì d' appresso pendea una gran secchia piena d' acqua, la quale per un sottil cannello saldatogli nel fondo versava un filo d' acqua, che ricevendosi in un bicchiere nell' intero tempo della discesa della palla, o in una dilui parte, di volta in volta con esattissima bilancia si pesava, e 'l tempo n' esprimeva. Ed egli replicando ben cento volte tale sperienza, ed in diverse inclinazioni della trave all' orizzonte, sempre incontrò che gli spazj corsi dal principio del moto eran tra di loro, come i quadrati de' tempi. Sicchè conchiuse il Valentuomo, che la sua Ipotesi era favorita non pur dalla Ragione, ma ben anche dalla Natura.

Digitalizzato da Google

calcoli accurati da sicure sperienze rinvenne, che un grave lasciandosi liberamente cadere nelle vicinanze di nostra Terra, debba in un minuto secondo correre 15 $\frac{1}{11}$ pied. parig., i quali corrispondano a 15 $\frac{5}{8}$ pied. renan., o a 18, 57 palm. nap. (*a*). Dunque la velocità, che si ha guadagnato cotesto grave alla fine di un secondo è 30 $\frac{1}{6}$ pied. parig.

§. 159. DEFIN. XX. Qualora si dice la *velocità* V *è dovuta all' altezza* A, *o vicendevolmente* A *è dovuta ad* V, si vuol intendere, che un grave per acquistar cotesta velocità avrebbe a cadere liberamente dall' altezza A nelle vicinanze di nostra Terra, cioè sempre animato dalla gravità terrestre.

§. 160. SCOL. La velocità di un corpo si misura (*b*) dallo spazio, ch' ei può descrivere equabilmente in un secondo. Ma i moderni Meccanici sogliono misurarla dall' altezza, che l' è dovuta: poichè in tal modo non solo conoscesi il valore di essa velocità, ma questa può talvolta facilmente esibirsi.

(a) I piedi Renani 15 $\frac{5}{8}$ equivalgono a ſcrup. 15625, la cui radice quadrata è eſattamente 250.

(b) Nota (a) §. 16.

Digitalizzato da Google

PROP. XXIV. TEOR.

§. 161. *Se un gravè si lasci cadere all' immobile centro* N *delle forzè, ov' ei tenda come la sua distanza da esso; gli spazj corsi, le velocità finali, e i tempi impiegati a percorrerli, saranno respettivamente come i seni versi, i seni retti, e gli archi.*

Fig. 8.

DIM. Sia A quel luogo, donde si lasci cadere il grave, ed AB perpendicolare ad AN esprima il peso di cotesto corpo in A. Si congiunga la retta NB, e pe' punti C, F, ec. si conducano le rette CQ, FE, ec. parallele ad AB; saranno le ordinate AB, CQ, FE ec. del triangolo ANB come le ascisse NA, NC, NF, ec. vale a dire come le forze, che accelerano il grave in A, C, F, ec. Dunque il triangolo ANB è la scala delle forze centripete (87) in questa ipotesi: e le velocità, che lo stesso grave acquistasi calando dalle altezze AC, AF, saranno (124) in sudduplicata ragione de' trapezj ACQB, AFEB.

E poichè i triangoli simili ANB, CNQ sono come i quadrati de' lati omologhi NA, NC, sarà convertendo ANB:ACQB::AN^2: $AN^2 - CN^2$, ed invertendo ACQB:ANB::$AN^2 - CN^2$:AN^2. E dimostrandosi per simil modo, che stia ANB:AFEB::AN^2:$AN^2 - FN^2$, sarà *ex æquo* ACQB:AFEB::$AN^2 - CN^2$:$AN^2 - FN^2$. Or descritto col cen-

Digitalizzato da Google

centro N intervallo NA il circolo ASN, che stia nel piano del triangolo ANB, e prodotte le rette QC, EF, che ne incontrino la periferia in D, ed M, sono DC^2, ed MF^2 respettivamente uguali ad $AN^2 - CN^2$, ed $AN^2 - FN^2$ (a). Dunque il saran pure DC^2, ed MF^2, come i trapezj ACQB, AFEB; ed esse rette DC, MF in sudduplicata ragione di questi trapezj, cioè come le velocità acquistate dal grave nelle discese per AC, AF.(b)

Si prendano i due spazietti Cc, Ff infinitesimi, e proporzionali agl' interi spazj AC, AF, ed ordinate nel circolo le rette cd, fm, si calino dP, mR perpendicolari sulle CD, ed FM; saranno (c) i triangoletti DdP, MmR respettivamente simili a DNC, MNF. Dunque starà CD : DN :: Pd : Dd, e 'l rettangolo di DN in Pd, o in Cc sarà uguale all' altro di CD in Dd. E dimostrandosi nella stessa guisa, che il rettangolo di MN in Ff adegui l' altro di FM in Mm, sarà la ragione de' rettangoli di DN in Cc, e di MN in Ff uguale a quella degli altri due di CD in Dd, e di FM in Mm. Ma i primi son proporzionali (d) agli spazietti Cc, Ff, e gli altri due sono in ragion composta

(a) 35. *El. III.*
(b) Come si è mostrato.
(c) *Prenoz. IX.*
(d) 1. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

di C D ad F M, che rappresentano le velocità del grave in C, ed F, e di D d ad M m. Dunque questi archetti D d , M m (12) saran come i tempi, ne' quali sono stati trascorsi gli spazietti C c , F f. E quindi i tempi delle discese (*a*) per le altezze A C , A F saran come gli archi A D , A M , i di cui seni retti D C , M F esprimono le velocità finali , ed i seni versi A C , A F sono gli spazj corsi dal mobile . C. B. D.

§. 162. COR. I. Sia S D A la circonferenza di un circolo massimo terrestre, di dove si lasci all'ingiù cadere il grave A ; saranno le forze, che lo accelerano, come le distanze dal centro di nostra Terra : la quale ipotesi è stata abbracciata dal Cavalier Newton .

§. 163. COR. II. Dunque nel moto di cotesto grave dovrà verificarsi, che gli spazj corsi, le velocità finali, ed i tempi sieno respettivamente come i seni versi , i seni retti , e gli archi : cioè se lo spazio descritto sia A C, il tempo sarà espresso dall'arco A D , e la velocità in C dal di lui seno retto D C .

§. 164. COR. III. Dunque in questa Ipotesi di gravità è trascendente tanto il rapporto de' tempi agli spazj corsi, quanto quello de' tempi alle velocità finali .

§. 165. SCOL. Quest' Ipotesi di gravità fu adot-

(a) §. 24. , e *Pren. VIII.*

Digitalizzato da Google

adottata da alcuni Matematici Italiani, e 'l nostro Borelli la credè verificata rispetto alle acque. Vedi Guido Grandi *nelle Note al Tratt. del Galilei sul mot. unifor. acc.*

PROP. XXV. TEOR.

§. 166. *La velocità, che nel centro della nostra Terra si acquisterebbe un grave lasciatovisi cadere dalla superficie, è dovuta all' altezza di un mezzo raggio terrestre.*

E se con questa velocità un' altro mobile percorra equabilmente un quadrante di un circolo massimo della Terra, tanto tempo v' impiegherà a descriverlo, quanto quel grave a cadere dalla superficie al centro.

DIM. PART. I. Il semidiametro terrestre AN si bisechi in F, e poi si compia il rettangolo AFGB; sarà l'aja di questo rettangolo uguale a quella del triangolo ANB. Ma quel rettangolo è la scala della gravità costante, e 'l triangolo ANB è quella della gravità decrescente, come la distanza dal centro N (87). Dunque tant'è la velocità, che si acquisterebbe un grave discendendo per la metà del raggio terreste sempre animato dalla gravità AB, quanto quella che gli conferirebbe la discesa per NA accelerato dalla gravità decrescente come la distanza (33).

PART. II. I tempi, onde descrivonsi equabilmente l'archetto Dd, e lo spazietto Cc, quello

Digitalizzato da Google

quello colla velocità NS, questo coll' altra DC, sono (15) come Dd a Cc, e come DC ad NS, o ND. Ma si è qui sopra dimostrato, che stia Dd: Cc:: ND: DC. Dunque (14. n.5) que' tempuscoli sono uguali. E quindi il saran pure i tempi, ne' quali il grave scende dalla superficie al centro, e 'l mobile si aggira equabilmente in un quadrante di un circolo massimo colla velocità dovuta ad un mezzo raggio terrestre. C. B. D.

PROP. XXVI. PROBL.

§. 167. *Ritrovare il tempo, in che un grave liberamente cadendo dalla superficie della Terra, perverrebbe al dilei centro.*

I. Si ritrovi la velocità, che acquistasi da un grave disceso per la metà del raggio della nostra Terra, animato costantemente dalla gravità terrestre (*a*). II. Si divida il quadrante di un circolo massimo terrestre per sì fatta velocità: sarà tal quoto il tempo addimandato.

§. 168. Or essendo il semidiametro terrestre 19741200 pied. parig., sarà un quadrante di un circolo massimo della nostra Terra 31009407 pied. parig. Ed essendo la velocità acquistatasi da un grave alla fine di $15\frac{1}{12}$ pied. parig. uguale a $30\frac{1}{6}$: sarà quella ch'è dovuta ad un mezzo raggio terrestre uguale a 24405. E di-

vi-

(a) §. 153, e 158.

Digitalizzato da Google

videndo 31009407 per 24405, il quoto 1270 indicherà i secondi del tempo addimandato; cioè il tempo della discesa del grave dalla superficie al centro sarà 21', 10".

PROP. XXVII. TEOR.

§. 169. *Poste le medesime cose della prop. XXIV., se due gravi uguali si lascino liberamente cadere da' luoghi* A, *e* Q; *essi arriveranno in tempi uguali al comun centro* N *delle forze.* Fig. 9.
E le velocità quivi acquistate saran tra di loro, come le altezze AN, NQ, *ond' essi son discesi.*

Dim. Descritti col medesimo centro N, e cogl' intervalli NA, NQ i circoli AS, QT, che però stiano in uno stesso piano, si prenda nella circonferenza dell'esteriore l'archetto Dd infinitesimo, e si congiungano i raggi DN, dN. E poi si concepiscan due altri corpi muoversi equabilmente pe' quadranti AS, QT con quelle velocità, che i gravi avrebbersi acquistate nelle discese per AN, QN. E poichè le velocità, che i gravi A, e Q si acquistano discendendo per AN, e QN, sono in suddupli-cata ragione delle aje ANB, QNE (128); saranno esse come AN, e QN. E quindi il tempo per Rr (15) starà a quello per Dd, come Rr a Dd, e come ND ad RN, cioè a dire in ragion di uguaglianza, essendo gli archi simili Rr, Dd proporzionali ai raggi RN, DN.

Digitalizzato da Google

DN. E ciò sempre dimostrandosi, saranno i tempi, ne' quali descrivonsi i quadranti A S, Q T colle mentovate velocità, uguali fra loro. E saran benanche uguali i tempi delle discese de' due gravi (166) per le altezze A N, Q N. C. B. D.

§. 170. Cor. E generalmente *se un corpo muovasi con tal legge, che le forze acceleratrici sieno come que' spazj, che gli restano a descrivere; ei perverrà sempre in un istesso tempo al punto infimo, da qualunque punto cominci a discendervi.*

PROP. XXVIII. TEOR.

§. 171. *Se un grave si lasci cadere dal luogo A all' immobile centro C delle forze, ov' ei tenda in ragion inversa duplicata della sua distanza; i quadrati delle velocità, con cui ne perviene a' luoghi B, e b, sono direttamente come gli spazj corsi A B, A b, ed inversamente come gli spazj C B, C b, che gli restano a percorrere in sino al centro.*

Fig. 10.

Dim. Dal punto A si ecciti sulla C A la perpendicolare A D, ch' esprima il peso del grave in A; e poi condottale per C la parallela C Q si descriva l' Iperbole cubica D E d e, che abbia per asintoti A C, C Q, e passi per D. Finalmente si menino per B, e b le ordinate B E, b e alla stessa curva D E d e.

Ciò posto le ordinate A D, B E, b e, ec. sono

Digitalizzato da Google

sono per la natura dell' Iperbole D E d inversamente come i quadrati delle loro ascisse CA, C B, C b, ec. (*a*), cioè dalla supposizione come le forze acceleratrici in A, B, b, ec. Dunque l' Iperbole cubica D E d e (87) sarà la scala delle forze centripete in questa legge di gravità: ed i quadrati delle velocità, che il grave acquistasi nelle discese per A B, A b, saranno (124) come le corrispondenti aje A B E D, A b e D. Ma queste (*b*) sono direttamente come A B, A b, ed inversamente come CB, C b. Dunque in questa ragione saran pure i quadrati delle riferite velocità del grave. C. B. D.

§. 172. Cor. I. Ed esse velocità saranno in sudduplicata ragion diretta degli spazj corsi, ed in sudduplicata inversa di que', che gli restano a percorrere in sino al centro.

§. 173. Cor. II. Si descriva su di B R il semicerchio B D R, e quivi ordinate, ovunque ne piaccia, le due rette c d, p t, si tirino le corde R d, R t, che incontrino in A, ed E la tangente B A E. Unita la B d il triangolo B R A sarà simile a B c d: dunque starà B A^2 a B R^2, come B c^2 a c d^2, o come (*c*) B c a c R: e sarà in simil guisa B R^2: B E^2:: R p: p B: dunque (*d*) sarà B A^2: B E^2:: (B c: c R) (R p: *Fig.* 11.

(a) *Prenoz.* X.
(b) *Prenoz.* X. *n.* 1.
(c) Essendo ∴ B c, c d, c R.
(d) *Prenoz.* I.

Digitalizzato da Google

(R p : p B), cioè (*a*) sarà B A² : B E² : : (B c : B p) (R p : c R).

§. 174. COR. III. Sicchè i quadrati di B A, e di B E sono (171) in duplicata ragione delle velocità, che in c, e p acquistasi un grave calando liberamente dalle altezze B c, B p. *E queste velocità saran poi come le tangenti* B A, B E.

§. 175. COR. IV. Se da i luoghi A, ed a si faccian liberamente cadere due gravi uguali, i quadrati delle velocità, ond' essi pervengono ai luoghi B, e b, saranno direttamente come gli spazj corsi A B, a b, ed inversamente come i rettangoli A C B, a C b fatti dalle intere altezze A C, a C negli spazj da descriversi C B, C b. Imperocchè in questa ragione sono (*b*) le aje iperboliche A B E D, a b e d.

Fig. 10.

PROP. XXIX. TEOR.

§. 176. *Poste le medesime cose della Prop. prec. i tempi, ne' quali percorronsi dal grave gli spazj* B C, B P, *sono come* B D + D C, *e* B T + T P, *cioè come le somme de' seni retti, e degli archi, di cui gli spazj corsi sono i seni versi.*

Fig. 11.

DIM. Si prendano le retticcuole C c, P p infinitesime, e proporzionali agli spazj B C, B P,

(a) *Prenoz. II.*
(b) *Prenoz. X. n. 2.*

Digitalizzato da Google

BP, e ordinate nel semicircolo BDR le due rette dc, tp, si tirino le corde Bd, Bt, che incontrino in f, e g le altre ordinate CD, PT. E poichè l'angolo OdB fatto dalla tangente Od e dalla corda dB è quanto l'angolo dRB posto nell' alterna porzion del circolo: ed è poi l'angolo dRB uguale a Bdc per la similitudine de' triangoli dRB, Bdc, saranno i due angoli OdB, Bdc tra se uguali, Ma questi angoli sono anche respettivamente uguali agli altri due Ddf, Dfd (*a*): dunque i due angoli Ddf, Dfd del triangolo Ddf dovran pareggiarsi, e sarà quindi fD uguale all' archetto Dd, ed fr (*b*) uguale a Dd + Dr. In simil guisa dimostrasi gs uguale a Tt + Ts.

E poichè il triangolo ABR è simile a Bdc, e con ciò a dfr, sarà BA: BR :: dr: rf. E dimostrandosi nello stesso modo, che stia BR: BE :: gs: ts, sarà BA a BE in ragion composta di dr: rf, e di gs: ts, cioè (*c*) in ragion composta di dr: ts, e di gs: fr. Vale a dire, le velocità con cui trascorronsi le retticciuole cC, pP dal grave, che si lascia cader liberamente dal luogo B sono

(a) *Prop.* 15. e 29. *El.* I.

(b) Se l' archetto *Dd* si rittrovasse nel quadrante inferiore *TR*, la retticciuola *fr* sarebbe uguale a *Dd* — *Dr*.

(c) *Prenoz.* II.

Digitalizzato da Google

(174), sono fra loro direttamente come gli stessi spazietti c C, p P, ed inversamente come le retticciuole f r, g s, o come le loro equivalenti somme D d + D r, T t + T s. Dunque queste somme saran (12) come i tempuscoli, ne' quali percorronsi dal grave gli spazietti c C, p P: e quindi gl' interi tempi della discesa del grave per le altezze B C, B P saranno (*a*) come B D+D C, e B T+T P (*b*), C. B. D.

PROP. XXX. TEOR.

§. 177. *Tanto tempo v' impiega questo grave a calare dal luogo* B *al centro* R *delle forze, quanto vi spenderebbe un' altro corpo ad aggirarsi equabilmente nella semicirconferenza* B T R *colla velocità, che quello si acquista calando dall' altezza* B p *metà di* B R.

DIM. Essendo per ipotesi R p uguale a p t, sarà pure R B ugnale a B E. E quindi le velocità, onde questo grave giugne ai luoghi c, e p fattovi cadere da B, saranno come B A, e B R (171), cioè a dire come le retticciuole d r, r f, essendo il triangoletto d r f simile a B c d, o a B R A. Dunque il tempo, che v' impie-

(a) *Prenoz.* VI.

(b) In questa ipotesi di gravità è trascendente la ragione degli spazj ai tempi, e de' tempi alle velocità finali.

Digitalizzato da Google

piegherebbe un corpo a descrivere l'archetto D d colla seconda di queste velocità, al tempo, in che dal grave percorresi lo spazietto C c, starà (15) come D d : C c, e come r d : r f, cioè (*a*) come D d : r f, o come D d : D d + D r, E quindi l'intero tempo, nel quale si volgerebbe equabilmente un mobile nella circonferenza BDR colla mentovata velocità, al tempo della discesa del grave dall'altezza B R starà, come la semicirconferenza B D R alla stessa semicirconferenza (*b*), cioè in ragion d'uguaglianza. C. B. D.

§. 178. Cor. I. Q R, e B R sieno le altezze, onde due gravi uguali si faccian cadere in sino al centro R, ed esse si bisechino ne'punti C, e P; saranno i tempi delle discese di questi gravi, come le loro velocità ne' punti P e C, e come le semicirconferenze, che han per diametri le stesse altezze Q R, e B R (15). *Fig.* 13. *n.* 1.

§. 179. Cor. II. Cioè a dire *i tempi, ne' quali cotesti gravi discendono liberamente all' immobile centro delle forze, sono direttamente come le intere altezze, ed inversamente come le velocità acquistatesi per le metà di esse.*

§. 180. Defin. XXI. Se vi sien due ragioni una duplicata dell' altra, quella che da queste

(a) *Prenoz. I.*

(b) Il seno del semicerchio B D R è zero; dunque B D R + sen. B D R sarà uguale a B D R.

Digitalizzato da Google

ste si compone, suol dirsi *sesquiplicata* della prima.

PROP. XXXI. TEOR.

§. 181. *In questa Ipotesi di gravità i tempi, che v' impiegan due gravi uguali a scendere liberamente dai luoghi* Q, *e* B *all' immobile centro* R *delle forze, sono in sesquiplicata ragione delle altezze, onde ne son discesi* (a).

DIM. I quadrati delle velocità, che si acquistano cotesti gravi ne' punti medj C, e P delle altezze QR, e BR, sono (175) in ragion composta di QC; BP, di RP: RC, e di BR:

(a) Suppongasi la gravità proporzionale alla potenza n della distanza dal centro R, e che da' luoghi Q, e B vi si lascino cadere due gravi uguali. Le altezze QR, e BR si chiamino r, e s; e detta x una qualunque RC, facciasi $RQ : RC :: RB : RP$, sarà $RP = \frac{sx}{r}$. *Fig.* 13. *n.* 1.

Dunque le velocità, onde cotesti gravi giungono respettivamente in C, e P, (n.a. §.135) saran come

$$\sqrt{\left(r^{n+1} - x^{n+1}\right)}, \text{ e } \sqrt{\left(s^{n+1} - \left(\frac{sx}{r}\right)^{n+1}\right)},$$

omettendosi que' fattori comuni, che vi si dovrebbero contenere. Ma questi radicali sono nella ragione di $r^{\frac{n+1}{2}}$, a $s^{\frac{n+1}{2}}$, come con lieve riduzione può rilevarsi. Dunque in questa medesima ragione saranno le velocità, onde i mentovati gravi pervengono a i termini degli spazj QC, BP proporzionali all' intere altezze QR, BR. Che

Digitalizzato da Google

BR: QR, cioè come BR: QR (*a*). E quindi le semplici velocità saranno in suddupli-cata ragione di BR: QR. Ma i tempi delle discese per le altezze QR, e BR (179) sono come QR a BR, e come la velocità in P a quella in C. Dunque i medesimi tempi saranno in ragion composta di QR a BR, e della sudduplicata di QR a BR: cioè a dire in sesquiplicata ragione delle altezze QR, e BR (180), onde i gravi ne son discesi. C. B. D.

G 2 PROP.

Che se gli spazietti Cc, Pp sieno proporzionali a QC, e BP, e con ciò a QR, e BR, i tempuscoli per Cc, e Pp (15) saran come r a t, e come $t^{\frac{n+1}{2}}$ ad $r^{\frac{n+1}{2}}$, cioè come $r^{\frac{1-n}{2}}$ a $t^{\frac{1-n}{2}}$. Ed in questa stessa ragione saran pure (12. El. V.) i tempi, ne' quali discenderanno i medesimi gravi al comun centro R delle forze. Dunque

TEOR. I. *Se la gravità di un corpo sia come la potenza* n *della di lui distanza dal centro; la velocità, ond' ei quivi ne perviene calando dall' altezza* r, *sarà come la potenza* (1+n) : 2 *della stess' altezza.*

TEOR. II. *E 'l tempo, in che vi discende, sarà come la potenza* (1—n) : 2 *della medesima altezza.*

L' espressione del tempo esibita nell' esempio della not. a §. 135. non può generalmente integrarsi; pur nondimeno il Sig. Eulero nel §. 308. *della sua Mecc.* si avvisò, che ogni termine dell' integrale del tempo dovrebb' essere della dimensione (1—*n*) : 2, e da ciò ne conchiuse questo II. Teorema. Ma quì mi è riuscito rilevarlo dalla 12. El. V. senza ricorrere ad integrazioni di formole, o a congetture sulle dimensioni de' termini di un' Integrale, che non può prendersi generalmente.

(a) *Prenoz. III.*

BIBLIOTH. DE LA VILLE DE LYON

Digitalizzato da Google

PROP. XXXII. TEOR.

§. 182. *In questa medesima Ipotesi, la velocità con cui un grave giugnerebbe nel luogo* B *della Terra fattovi cadere da un' altezza infinita, non è che finita: ed è uguale a quella, ch' ei si acquisterebbe cadendo dal semidiametro* B C *della Terra sempre accelerato dalla gravità terrestre.*

Fig. 12.

DIM. La retta B D perpendicolare al semidiametro terrestre BC dinoti la gravità del corpo A posto nel punto B della superficie della Terra. Si compia il rettangolo B C F D, e per D si descriva l' Iperbole cubica L D rapportata agli assintoti rettangoli A C, C F; sarà questa curva la scala della gravità decrescente come il quadrato della distanza (87). Prendasi finalmente B A uguale al semidiametro B C, e si compia il rettangolo B N.

E poichè l'aja assintotica infinitamente lunga B X D è uguale (*a*) al rettangolo delle sottoposte coordinate B D, B C, cioè a dire al rettangolo B D N A, la velocità, che si acquisterebbe un grave calando dall' altezza infinita X B, sarebbe dovuta ad A B, ch' è uguale al semidiametro terrestre B C (133). C. B. D.

§. 183. COR. I. Essendo il semidiametro terrestre di pied. parig. 19741200, la velocità d-

(a) *Prenoz. X.*

Digitalizzato da Google

dovuta a quest' altezza sarà 34510 piedi parig. Imperocchè facendosi come $\sqrt{(15+\frac{1}{12})}$ a $\sqrt{19741200}$, così $30+\frac{1}{6}$, (che dinota (158) la velocità dovuta a pied. $15+\frac{1}{12}$) ad un quarto, questo l' è a un di presso 34510.

§. 184. Cor. II. Dunque *nella vera Ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza, un grave lasciatosi liberamente cadere su della nostra Terra da un' altezza infinita, quivi ne perverrebbe con una velocità finita, e tale, che con essa passerebbe equabilmente* 34510 *pied. in un secondo.*

§. 185. Cor. III. E se dalla superficie terrestre con questa velocità un grave si projettasse in su verticalmente; ei dovrebbe ascendere ad un' altezza infinita, senza potersi mai estinguere il suo moto.

§. 186. Scol. Questo paradosso meccanico, che intrecciando poche ragioni ho qui sinteticamente rilevato, rinvennelo con dell' analisi il P. Fontana, Insigne Analista Italiano, e della Università Pavese Ornamento, e Splendore.

Digitalizzato da Google

CAP. VII.

DELLA COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

§. 187. DEF. XXII. Due forze insieme impresse ad un corpo diconsi *cospiranti*, se le loro direzioni formino una sola retta, ed entrambe spinganlo verso una stessa parte.

§. 188. DEF. XXIII. E tali forze si diranno *opposte*, se per direzioni, che formino una retta continuata, ne spingano il corpo a parti contrarie.

§. 189. DEF. XXIV. Due forze diconsi *laterali*, se i valori, e le direzioni loro sieno espresse dai lati di un'angolo rettilineo, ed esse insieme spingano un corpo, ch'è nell'apice dello stesso angolo.

§. 190. ASS. I. Un corpo investito da due forze cospiranti dee muoversi per la comune loro direzione con una forza uguale alla di loro somma.

§. 191. ASS. II. E se le forze sieno opposte, il corpo dovrà girne colla loro differenza per la direzione della forza maggiore.

§. 192. COR. Se per avventura sieno uguali l'energie delle forze opposte, queste si equilibreranno tra loro, e 'l corpo rimarrà in quiete.

§. 193.

Digitalizzato da Google

§.193. Ass.III. Un corpo spinto da due forze laterali deesi muovere equabilmente con una determinata forza, e per una determinata direzione.

§.194. SCOL. Trascende l'umano intendimento il saper come Natura dalle forze laterali una sola ne formi, che *media* si domanda, e come all' istante ella compia questo maraviglioso lavoro d'azione. Pur non di meno l'inerzia della materia chiaramente ne mostra il divisato effetto, cioè *che il mobile investito da più forze istantanee debba girne per dritto, ed equabilmente, come se una determinata forza avesselo spinto solamente* (a). Ma dura cosa, e malagevole è di tal for-

(a) Non v' ha sorgente più copiosa di verità meccaniche, statiche, ed idrodinamiche, quanto il *Principio della Composizion delle Forze*, che rinvennelo il Gran Galilei nel Dialogo IV. delle due Scienze Nuove sul moto. Questo Padre de' veri Contemplatori della Natura dimostrò con un corto filo di ragioni, *che se mai un corpo conducasi con due moti equabili, l' uno orizzontale, verticale l' altro, l' impeto risultante dalla composizion di essi debba essere in potenza uguale ad amendue*, cioè che la velocità del mobile debba esprimersi colla radice de' quadrati delle velocità di que' due moti. E 'l Cavalier Newton nato a promuovere grandemente le invenzioni Galileane, formò un' altra dimostrazione, che alla composizion delle forze più che a quella de' moti si conveniffe. „ Il corpo *A*, dicea questo Valentuomo „ Cor. I. leg. III, qualora è spinto dalle forze *M*, ed *Fig.* 13. „ *N*, i valori, e le direzioni delle quali son dinotate *n.* 2. „ dalle rette *AB*, *AC*, dovrà condursi per la diago- „ nale *AD* del parallelogrammo *ABDC*, che si com- „ pie da *AB*, ed *AC*, descrivendola nello stesso tempo, „ in

Digitalizzato da Google

forza investigarne la quantità, e la direzione, o da ciascuna di queste due determinazioni l' altra derivarne. Ond'io quaggiù metterò innanzi a' vostri occhi il prospetto delle proprietà di lei, cioè le *condizioni*, e le *limitazioni*, che dee aver tal forza media, perchè distintamente intendiate que' principj, co' quali l'ho rinvenuta.

§. 195.

„ in che con ciascuna forza sarebbesi condotto per ciascun
„ lato. Imperciocchè la forza *N* spingendo cotesto corpo
„ per la direzione *A C* parallela a *B D* non estingue la
„ velocità, che la forza *M* gl' impattisce d' accostarsi
„ alla *B D*. Dunque dopo qualche tempo ei dovrà rin-
„ venirsi in un punto della *B D*. Ma la forza *M* nè
„ tampoco toglie al mobile la velocità d' accostarsi alla
„ *C D* prodottavi dalla forza *N*: dunque è d' uopo, che
„ alla fine dello stesso tempo ei si ritrovi nella *C D*, e
„ che colle forze congiunte pervenga per la *A D* nel luo-
„ go *D*, ove si segano le due rette *B D*, *C D*. „
Ma com' è, può dir taluno, e donde addiviene, che in questo misto di forze restino tuttavia inalterati i loro effetti, cioè le velocità d' appressarne alle *B D*, *C D* il mobile *A*, che insieme investono? I Comentatori del Nevvton non fan che ridire, ciò che ha detto l'Ill. Autore senza dilucidarlo: ed altri temperano la rapportata dimostrazione nel seguente modo. „ In virtù della forza
„ *M* il corpo *A* dovrebbesi alla fine di un dato tempo
„ ritrovare in un punto della *A B* distando per un dato
„ intervallo dalla retta *A C*: e per la forza *N* dovreb-
„ besi alla fine dello stesso tempo rinvenire in un punto
„ della *AC*, il quale disti da *AB* per una data retta. Ma
„ il corpo *A* non può trovarsi nello stesso tempo ne'
„ luoghi *B*, e *C*, nè veruna forza vale a distruggere la
„ determinazion dell' altra: dunque necessariamente dee
„ ritrovarsi in un punto tale, che le perpendicolari da
„ esso calate sulle *A C*, ed *A B* sien quanto quelle, che
„ vi

Digitalizzato da Google

§. 195. I. La forza media dee avere una determinata direzione, ed energia: onde non è, che una sola.

§. 196. II. La forza media, in parità di altre circostanze, dee variare secondo che si cangi l'angolo delle direzioni delle forze laterali. Questo nesso, ch'evvi tra la variazione del-

„ vi si menano da *B*, e *C*. Or questo punto (come „ facilmente dimostrasi) è nella diagonale del parallelo„ grammo *A E D C*. Dunque ec. „ Ma siemi lecito proporre certi miei dubbj sul valore di questa dimostrazione. La forza *M* spingendo con una data energia il corpo *A* per *A B X*, lo determina a descrivere equabilmente lo spazio *A B* in un dato tempo. Dunque alla fine di questo tempo *ei dovrà trovarsi in un punto della* A X *distante dal luogo* A *per un dato intervallo*: e *dovrà alla fine di quel tempo serbare una certa distanza dalla retta* C A E, *o da qualunque altra data di sito*: imperciocchè la perpendicolare *B E* l'è data di magnitudine per esser dato di specie, e di grandezza il triangolo *A B E*. Sicchè la forza *M* mentre alla fine di quel tempo allontana il mobile per un dato intervallo dal luogo *A*, il fa anche serbare una certa distanza dalla retta *A E* data di posizione: e di queste determinazioni la prima, come ognun lo ravvisa, non è che principale, e l'altra n'accessoria: come lo stesso può dirsi dell'altra forza *N*. Or nell'atto, che le due forze *M* ed *N* insieme agiscono per *A B*, ed *A C* sul corpo *A*, le loro principali determinazioni, cioè quelle di translatarlo nello stesso tempo in *B*, e *C* non vi possono regger tuttavia: come dunque le di loro accessorie dovran rimanervi? Oltre a che molti Scrittori di Meccanica, tra' quali evvi il dottissimo Wolfio, trascurano di dimostrare, che il corpo equabilmente conducasi per la diagonale del detto parallelogrammo. Dunque non potrà mai convenevolmente con-

Digitalizzato da Google

dell'angolo delle forze laterali, e quella della forza media, lo dirò *legge della variazione della forza media*.

§. 197. III. La forza media pareggia la somma delle laterali, quando svanisce l'angolo, che comprendono le direzioni di queste forze. Ed ella sarà uguale alla differenza delle laterali, quando l'angolo delle loro direzioni facciasi di 180°. (190, 191). Questi valori sono *il primo, e l'ultimo rapporto della forza media alle laterali: o piuttosto dir si possono le di lei limitazioni*.

§. 198. conchiuderſi, che le velocità laterali e la media fieno come i lati di eſso parallelogrammo e come la diagonale reſpettivamente; nè tampoco che in queſta ragione fien pure le forze latetali e la media.

Ma oltre a ciò l'acutiſſimo Daniele Bernulli credendo verità contingente, *che le forze sieno come le velocità generate*, rigettò le antiche dimoſtrazioni *sulla composizion delle forze*, come quelle, che reggendo ſu di coteſta baſe men ſalda non poteſsero ſtabilire la verità neceſsaria di queſto Principio Meccanico; e ſi accinſe a formarne un'altra ben rigida, e convincente, ove niun principio precario, o vacillante vi s'intrudeſse in verun modo. Egli a tal uopo premettendo alcuni principj Intuitivi dimoſtrò ſinteticamente 3. Teoremi, e ſciolſe 4. Problemi nel Vol. I. Pietrob. onde rilevò poi, che *se dalle forze laterali si compia un parallelogrammo, la forza media debba esprimersi dalla diagonale di questa figura, che passi per l'angolo delle forze laterali.* Queſte dimoſtrazioni furono alquanto riſtrette dal P. Riccati *negli Att. Bolog.* 1745. e'l Sig. d'Alembert nella ſua Dinamica volle pur congegnarne un'altra ſintetica, ed aſsai brieve; della quale, cred'io, che poco reſtandone pago queſto Geometra, riprendeſse ne' ſuoi Opuſcoli a dimoſtrare analitica-

men-

Digitalizzato da Google

§. 198. IV. Supposto, che AF dinoti la forza media emergente dalle laterali AB, AC, un' altra forza AD uguale ed opposta alla AF dovrà equilibrarsi colle forze laterali AB, AC. E ciascuna di queste, per esempio la AB dovrà pure equilibrarsi colla AD, e coll' altra laterale AC.. *Fig. 14.*

§. 199. V. Se s' intenda il corpo A spinto dalla forza AC, ch' è una delle due laterali, e dalla AD, ch' è uguale e contraria alla media AF; ei dovrà muoversi colla forza AL, ch'è uguale all' altra laterale AB, ed a lei opposta. E se

mente alcuni Teoremi del Fernulli. Ma finalmente l' ill. Cavalier de Foncenex facendo variare l' angolo delle direzioni di due forze laterali tra se uguali, rinvenne il valore della forza media con un metodo analitico diretto; e poi sciolse generalmente il Problema della Composizion delle forze.

Or se le sole limitazioni (197, 203) delle forze laterali bastassero ad effettuarne una soluzione completa e soddisfacente, potrei senza tanto inerpicarmi a' principj analitici, ragionare a questo modo. Ciascuna delle due forze laterali tra se uguali sia a, ϕ l' angolo delle loro direzioni, e $2a\Phi$ esprima il valore della forza media; dovrà essere $\Phi = 1$, quando $\phi = 0$ (197). $\Phi = 0$, quando $\phi = 180°$ (111), e $\Phi = \frac{1}{2}$, quando $\phi = 120°$ (203). Dunque necessariamente vuol esser $\Phi = \text{Cos.} \frac{1}{2}\phi$, come n' è risultato da' calcoli dell' Ill. Foncenex *Vol. II. Att. Turin.* Ma omettendo queste analitiche ricerche, e le dimostrazioni sintetiche del Sig. Bernulli, che negli animi de' Giovanetti non usi a ragionar sì forte indurrebber qualche smarrimento; piacemi dimostrarvi il parallelogrammo delle forze con un metodo corto, e scevro, per quanto mi sembra, da' nei delle antiche dimostrazioni.

Digitalizzato da Google

E se mai spingasi cotesto corpo colla forza AD, e colla laterale AB; la forza media sarà AE uguale, e contraria alla laterale AC.

§. 200. SCOL. Questo rapporto della forza media alle laterali mi ha guidato nelle seguenti speculazioni, e nell'investigarla con un metodo nuovo, agevole, e sgombro di que' nei, che a' metodi antichi si sono imputati.

§. 201. VI. Qual è la legge della variazione della forza media AF, e 'l modo ond' ella si rinviene dalle laterali AB, AC, tal esser dee la variazione della forza AL, e l'artificio, con cui dalle forze AC, AD si rinverrebbe.

§. 202. VII. Ed avrassi per genuino quel metodo, onde dalle forze laterali AB, AC si determini la forza media AF, se adattandosi alle forze AC, AD dia la forza AL uguale, e contraria alla laterale AB. Questo vuol intendersi anche riguardo all'altra laterale AC.

§. 203. VIII. Se mai le forze laterali si uguaglino, la direzione della forza media dovrà bisecare l'angolo delle direzioni di quelle forze. E se l'angolo delle direzioni di tali forze sia ancora di 120°, la forza media sarà uguale a ciascuna delle laterali.

§. 204. SCOL. Queste considerazioni della forza media fluiscono dalla di lei natura, e sono sufficienti a determinarla col calcolo delle Funzioni, o coi stenti della rigorosa Sintesi. Tal forza non è che una sola. Ella dee avere

Digitalizzato da Google

avere le condizioni quassù rapportate, e non altre: dunque necessariamente dovrà esser quella, ove tali condizioni, e limitazioni abbian luogo; ed a questo modo ho procurato ordire la dimostrazione del seguente Problema.

PROP. XXXIII. PROBL.

§. 205. *Date le due forze laterali* A B, A C *ritrovare l' energia, e la direzione della forza media.* Fig. 14.

Cost. I. Gli estremi delle rette A B, A C, ch' esprimono le direzioni, e l'energie delle forze laterali, si uniscano colla B C. II. Si bisechi in O cotesta congiungente, e vi si tiri dal vertice A la retta A O: io dico, *che il doppio di questa retta debba dinotare l' energia, e la direzione della forza media.*

Dim. La retta A O producasi d'ambe le parti, sicchè A F, ed A D di essa sian duple. Inoltre si tirino le altre due rette C D, B D, e bisecate in G, ed H si congiungano le due A G, A H; sarà la B A dupla di A G, ed a dritto con questa; siccome anche la C A si giace a dritto colla A H, e di questa n'è dupla (*a*).

E poichè (*b*) le tre rette A B, A C, A F sono come i seni degli angoli C A F, B A F, BAC,

(a) *Prenoz. XI.*
(b) *Prenoz. XI. n. 1.*

Digitalizzato da Google

BAC, e questi seni sono gli stessi di que' degli angoli CAD, LAD, CAL: anche le 3. rette AL, AC, AD saran come i seni degli angoli CAD, LAD, CAL. Di più (*a*) sta AF: AB + AC:: Sen. BAC: Sen. BAF + Sen. CAF: ed è ancora AL: DA + AC:: Sen. DAC: Sen. DAL + Sen. CAL. E facendosi l'angolo BAC di 180° la retta AF diviene uguale alla differenza di BA, ed AC: siccome quando poi svanisce l'angolo BAC, la retta AF fassi uguale alla somma di AB, e di AC.

Inoltre se l'angolo BAC sia di 120°, e le forze BA, AC si uguaglino, la dupla della retta AO sarà quanto ciascuna delle laterali AB, AC. E lo stesso può dirsi di AL rispetto alle due CA, ed AD, e di AE riguardo ad AB ed AD (*b*).

Or la forza media (195) non è, che una sola, e quella esser dee, ove si trovino verificate tutte le condizioni, e limitazioni, e tutti que' rapporti alle laterali, ch'io vidi doverlesi appartenere (*c*). Ma tali cose si son dimostrate appartenersi alla AF: dunque questa sarà la forza media, che si addomanda. C. B. D.

§. 206. COR. I. *Se l'energie delle forze laterali*

(a) *Prenoz. XI. n. 2.*
(b) *Prenoz. XI. n. 3.*
(c) Vedi i §§. 196. fino a 203.

Digitalizzato da Google

rali si uguaglino, ciascuna di queste forze starà alla media, come il raggio al doppio coseno della metà dell'angolo delle loro direzioni (*a*).

§. 207. Cor. II. E generalmente la forza media è alla somma delle laterali, come il seno dell'angolo delle direzioni delle laterali alla somma de' seni degli angoli, che queste direzioni fanno colla media (*b*).

§. 208. Cor. III. Compito il parallelogrammo B A C F dalle forze laterali A C, A B, la sua diagonale A F dovrà dinotare l'energia della forza media: la quale, come di per se comprendesi, è sempre minore dell'energie delle laterali (*c*).

§. 209. Scol. Chiunque si porrà a riandare queste mie investigazioni sulla forza media, vedrà tosto, ch'io non le ho carpite da ciò, che su di essa dimostrasi comunemente; ma che tutte sien nate da quella proprietà di lei, ch'esposi nel §. 199.

§. 210. Def. XXV. Il parallelogrammo BACF, che

(a) *Prenoz. XI. n. 4.*
(b) *Prenoz. XI. n. 2.*
(c) Si cali FQ perpendicolare su di BA prolungata, se bisogni: le forze laterali AB, AC si dicano F, ed f, e l'angolo BAC delle loro direzioni, o il suo uguale FBQ si chiami φ. Essendo FB a BQ come il raggio, (che si ponga uguale ad 1) al coseno di QBF, sarà $f : BQ :: 1 : \cos.\varphi$, e quindi $BQ = f.\cos.\varphi$. Dunque sarà 13. El. II. $AF = \sqrt{(FF + ff \pm 2Ff\cos.\varphi)}$. e tale sarà il valore della forza media.

Digitalizzato da Google

che ha per lati le rette AB, AC esprimenti le forze laterali, e quindi per diagonale la forza media, appellasi *Parallelogrammo delle forze.*

§. 211. DEF. XXVI. La forza media AF dicesi *composta* dalle due laterali AB, AC, ed anche *equipollente*, o *equivalente* ad esse. Ed ecco la più generale enunciazione, che può darsi al Principio della Composizion delle forze.

§. 212. DUE POTENZE, CHE INSIEME AGISCONO IN UN CORPO, SONO EQUIVALENTI AD UNA SOLA RAPPRESENTATA NELLA QUANTITA', E NELLA DIREZIONE DALLA DIAGONALE DI QUEL PARALLELOGRAMMO, I DI CUI LATI ESPRIMONO LE RESPETTIVE QUANTITA', E DIREZIONI DELLE POTENZE DATE.

§. 213. SCOL. L'equipollenza delle forze consiste nell' identità dell' effetto, che le forze laterali producono in un corpo, e che in esso vi produrrebbe una sola forza quanto la media. Più forze si equilibrano fra loro, se niun effetto ne segua in quel corpo, che insieme investono. Ed una forza si dirà uguale ad altre forze, se l'energia di quella pareggi la somma dell' energie di queste. Dunque le voci *equipollenza*, *equilibrio*, ed *uguaglianza di forze*, che a taluno potran sembrare sinonime, esprimono respettivamente *l' identità dell' effetto*, *la nullità dell' effetto*, *l' identità delle cagioni*.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XXXIV. PROBL.

§. 214. *Date le intensità di tre forze, che insieme spingano il corpo* A *per le direzioni* AX, AY, AZ: *determinare il valore, e la direzione della forza, che da quelle si compone.* Fig. 15.

I. Si taglino sulle rette AX, AY, AZ, le parti AB, AC, AG, proporzionali alle forze impresse ad A per tali direzioni. II. Compiasi dalle due AB, AC il parallelogrammo BACD, e si tiri in esso la diagonale AD. III. Dalla diagonale AD, e dalla terza forza AG formisi benanche il parallelogrammo DAGF, e si conduca la diagonale AF; *questa ultima diagonale esprimerà il valore, e la direzione della forza composta dalle date.*

Dim. Essendo le due forze AB, AC equipollenti alla media AD, tanto è imprimere al corpo A le tre forze AB, AC, AG, quanto le due AD, AG. Ma queste due forze determinano (212) il corpo per la diagonale AF del parallelogrammo DAGF. Dunque la diagonale AF esprimerà la direzione, e l'intensità della forza composta dalle tre AB, AC, AG (a). C. B. D.

§. 215.

(a) La forza media *AE* può anche rilevarsi formando prima il parallelogrammo *CARF*, e poi compiendone l'altro *BAFE* dalla *AF* diagonale di quello, e dalla rimanente forza *AB*. Dunque dovreb- Fig. 16.

Digitalizzato da Google

§. 215. Cor. I. Collo stesso artificio si potrà rinvenire la direzione media, e l' intensità di una forza composta da quattro altre, da cinque, da sei, ec.; delle quali sappiansi non meno le intensità, che le direzioni.

§. 216. Cor. II. Se una di più forze applicate ad uno stesso corpicciuolo sia uguale, e contraria all' equipollente delle altre; il corpicciuolo resterà in quiete, ed esse forze si equilibreranno. E viceversa.

CAP.

besi dimostrare, che la diagonale AE del parallelogrammo $DACE$ sia identica a quella che nell'altro $BAFE$ conducesi per A: o che unite le rette BE, EF ne risulti un' parallelogrammo. Lo che si effettua nel seguente modo.

Le rette BD, CF, come uguali, e parallele alla stessa AR, sono fra di loro uguali, e parallele. Ma anche DE l' è uguale, e parallela alla CA: dunque sarà l' angolo BDE uguale ad ACF, e per la 4. El. I. BE uguale ad AF, e l' angolo EBD uguale a CFA. Ma BD si è dimostrata parallela a CF: dunque la BE sarà parallela all' altra AF, e la figura $BEFA$ (34 El. I.) un parallelogrammo.

Digitalizzato da Google

CAP. VIII.

PRINCIPJ, CHE SI DERIVANO DALLA COMPOSIZION DELLE FORZE.

PROP. XXXV. TEOR.

§. 217. *Se le* 3. *forze* AB, AC, AD *applicate al corpo* A *si equilibrino; le loro direzioni avranno a giacere in uno stesso piano. E ciascheduna di queste forze sarà come il seno dell' angolo compreso dalle direzioni delle altre due.* Fig. 14.

E se le direzioni delle 3. *forze* AB, AC, AD *giacciano in uno stesso piano, e l' energia di ciascheduna sia come il seno dell' angolo delle direzioni delle altre; tali forze si dovranno equilibrare.*

DIM. Part. I. La forza AD per equilibrarsi colle altre due AB, AC, vuol essere (216) uguale, e contraria ad AF equipollente alle AB, AC. Dunque siccome le tre rette AB, AC, AF sono sempre in uno stesso piano, così il dovranno essere benanche le tre AB, AC, AD. Che poi ciascuna forza debba essere come il seno dell' angolo delle direzioni delle altre due, ben si comprende da ciò, che si è dettò nel Cap. prec.

Digitalizzato da Google

Part. II. Sta BA ad AC, come il Sen. DAC al Sen. DAB: o pure (prolungando DA verso F, e tirando per B la BF parallela ad AC, che l'incontri in F,) AB è ad AC come Sen. FAC, o del suo uguale BFA al seno di BAF. Ma a questi seni son anche proporzionali i lati BA, BF del triangolo BAF: dunque sarà AB: AC:: AB: BF, e quindi BF sarà uguale ad AC, e la figura BACF un parallelogrammo avente AF per una sua diagonale. E poichè per la natura dello stesso triangolo AB sta ad AF come il seno di BFA a quello di ABF, ed i seni di questi angoli sono gli stessi di quelli degli angoli DAC, BAC; sarà dunque AB ad AF come il seno di DAC al seno di BAC, cioè per Ipotesi come BA ad AD. Dunque AF è uguale ad AD. E quindi (*a*) la forza AD dovrà equilibrarsi colle altre due (216) AB, AC. C. B. D.

§. 218. Cor. Da questo Teorema il Sig. Varignonio ha sagacemente rilevato l'equilibrio de' pesi sostenuti con delle corde, ed ha insiem risoluti non pochi Problemi di Statica.

§. 219.

(a) Il punto *A* ove si equilibrano le tre forze *AD*, *AB*, *AC* è il centro di gravità del triangolo *DBC*, come il Sig. Robervallio l'indicò ad Evangelista Torricelli. E'l gran Leibnitz poi rinvenne questo Teorema generale, che fa d'uopo quì rapportarvelo. *Se più forze applicate ad un corpicciuolo si equilibrino tra di loro; egli dovrà ritrovarsi nel centro di gravità de' punti estremi di quelle rette, che le rappresentano.*

Digitalizzato da Google

§.219. DEF. XXVII. La *Risoluzion* delle forze, ch'è il Problema inverso di quello della loro composizione, riducesi a scindere una data forza in più laterali, che l'equivalgano.

§. 220. COR. Dunque affinchè questo Problema sia determinato, debbonsi fissare il numero, e le direzioni delle forze laterali.

§.221. DEF.XXVIII. *Momento* di una Potenza è il valore, ch'ella tiene a produrre un certo effetto.

§. 222. SCOL. Il Momento di una stessa Potenza varia, secondo chè la si adatti a produrre ora un'effetto, ora un'altro. La qual cosa perchè chiaramente intendiate, piacemi addurvi qualch'esempio.

I. Immaginatevi che il corpo A poggi sul piano declive B A, il quale non sia cedevole, nè possa rivolgersi intorno a B, nè rinculare. Il peso di cotesto corpo esprimasi dalla verticale A F; ed abbassata F G perpendicolare sul piano B A si congiunga la G A, e poi si compia il parallelogrammo A G F E. La forza A F da quel, che si è detto nel Cap. prec., equivale alle due laterali A G, A E: dunque tant'è che questo corpo all'ingiù tenda col suo peso; quanto che spinganlo insieme le due forze A E, A G. Or la prima di queste forze impiegasi direttamente contro del piano B G; e dalla durezza, ed immobilità di questo tutta si elide senza avere alcun regresso sul corpo A. Dunque la sola forza A G

Fig. 17. *n.* 2.

Digitalizzato da Google

resterà a far discendere il corpo su del piano: *e 'l momento del grave su questo piano declive starà al peso di esso come* A G *ad* A F.

II. Suppongasi, che il corpo A stia impiantato nel piano B A, e che questo possa intorno a B liberamente aggirarsi; sarà chiaro che la forza A G, ch'è una delle divisate laterali, debbasi interamente distruggere, perchè impiegata contro del perno B, intorno a cui si volge il piano. Onde ad esso corpo riman solo la forza A E, colla quale ne aggira il piano. Dunque il *momento di questo corpo a rivolgere il piano sarà rappresentato dalla* A E, *e starà al dilui peso, come* A E *ad* A F.

III. Finalmente lo stesso corpo A cadendo dalla verticale A F percuota obbliquamente il piano F Q ancor esso fermo, ed immobile; sarà il momento di questa percossa obbliqua all' energia della percossa perpendicolare, com'è al raggio il seno dell' angolo d' inclinazione della retta A F al piano F E. Imperciocchè abbassandosi A E perpendicolare sul piano E Q, e congiunta la F E si compia il parallelogrammo A G F E: ed espressa per F R la forza, che la discesa per A F conferisce al corpo A, si menino R P, R Q perpendicolari sulle rette prolungate G F P, E F Q. Sarà cotesta forza equivalente alle due laterali F Q, F P: vale a dire l'impressione, che vi fa su di F E il corpo cadente, sarà quanto quella, che ne risulterebbe nel piano, se due martelli percuotessero il cor-

Digitalizzato da Google

corpo F, uno per FQ, l'altro per FP con forze proporzionali a queste rette. Or la percossa per FQ non s'imprime in detto piano, ma solamente l'altra FP. Dunque la FP dovrà dinotare il *momento di questa percossa obbliqua*, ed alla percossa perpendicolarmente esercitata sul piano FE starà come FP ad FR, cioè come il seno dell'angolo FRP, o di AFE al raggio.

§. 223. DEF. XXIX. Se la Potenza AN applicata al corpicciuolo A si risolva nelle due forze laterali AP, AQ, di cui la prima abbia la sua direzione coincidente colla retta MAP, che passi per A, e la direzion dell'altra sia perpendicolare alla stessa retta; la prima forza si dirà *forza stimata secondo la retta* MAP. *Fig.* 18.

PROP. XXXVI. TEOR.

§. 224. *Se le Potenze* RA, rA, NA, nA, *ec. comunque applicate al corpicciuolo* A *si equilibrino; le loro forze stimate secondo una qualunque retta* MAP, *che passi per esso corpicciuolo, si dovran sempre distrugger fra loro.* *Fig.* 18.

DIM. S' è possibile non si elidano le forze MA, ma, ec. colle altre PA, pa, ec. ma la differenza di quelle, e di queste esprimasi dalla TA. E poichè le direzioni delle altre laterali QA, qA, SA, sA, ec. sono perpendicolari alla retta MAP nel punto A, esse do-

Digitalizzato da Google

dovran sempre ritrovarsi nel piano sGS; che passa per A, ed insiste perpendicolarmente alla MAP. Or se queste forze si distruggan fra di loro, il corpicciuolo A si troverà animato dalla sola forza AT, e con questa dovrà girne per AT, contro la supposizion dell'equilibrio. Se poi dalle forze QA, qA, SA, sA, ec. ne risulti la forza media AG, la quale dee stare nel piano sGS; lo stesso corpicciuolo sarà dalle due forze AT, AG insieme animato, e dovrà ben anche muoversi: lo che ripugna all'ipotesi. Dunque le forze stimate secondo la retta MAP si distruggon fra loro. C. B. D.

§. 225. Cor. I. Se le forze stimate secondo la retta MAP si distruggano fra di loro, il corpicciuolo investito dalle Potenze RA, rA, NA, nA, ec. o rimarrà in quiete, o dovrà muoversi per una perpendicolare alla MP, che passi per A.

§. 226. Cor. II. Ritrovandosi le direzioni delle Potenze RA, rA, NA, nA, ec. in uno stesso piano, quivi dovranno pur giacerne le RM, rm, NP, np, ec. perpendicolari alla MAP. E siccome (224) le rette QA, SA, ec. sono uguali alle altre qA, sA, ec. così sarà pure RM+NP+ec. uguale ad rm + np + ec.

§. 227. Cor. III. Le tre forze CO, CF, CL applicate al punto C si equilibrino fra loro; e da

Fig. 20.

Digitalizzato da Google

e da un qualunque punto S preso nel piano, ove giacciono le loro direzioni CO, CF, CL, si calino su di queste le perpendicolari ST, SP, SQ. Si congiunga la retta SC, e su di essa da' punti O, F, L si abbassino le perpendicolari OB, FR, LA. Sarà il triangolo OCB simile all'altro SCT; ed essendo OB : OC :: ST : CS, sarà OB. SC uguale ad OC. ST. E saran pure, per la similitudine de' triangoli FCR, SCP, e degli altri LCA, SCQ, tanto FR. SC uguale ad FC. SP, quanto LA. SC uguale ad LC. SQ.

§. 228. Cor. IV. Intanto, come si è dimostrato nel Cor. I., OB + FR è uguale ad LA, o pure OB. SC + FR. SC uguale ad LA. SC. Dunque sarà ancora OC. ST + FC. SP = LC. SQ.

§. 229. Cor. V. Dunque *se per quel corpicciuolo, ove sieno applicate tre forze in equilibrio, si conduca nel piano delle loro direzioni una qualunque retta, ed in essa prendasi un qualunque punto; i valori di quelle forze, che stanno da una parte di questa retta, moltiplicati per le distanze delle loro direzioni da quel punto, saranno uguali al valore dell'altra forza moltiplicato per la distanza della sua direzione dal medesimo punto* (a).

PROP.

(a) Questa verità meccanica suol enunciarsi nel seguente modo, *se nel piano di due forze laterali prendasi un punto fisso, da cui si calino sulle loro direzioni,*

Digitalizzato da Google

PROP. XXXVII. TEOR.

§. 230. *Vi sarà equilibrio tra più Potenze comunque applicate al corpicciuolo* C, *se condotte per esso le tre rette* AB, A'B', A"B", *che non giacciano tutte in uno stesso piano; le forze stimate secondo queste rette vicendevolmente si distruggan tra di loro.*

Fig. 17. *n.* 1.

DIM. Se non v'ha equilibrio tra queste Potenze, il corpicciuolo C dovrà muoversi per la retta CN (225) perpendicolare a ciascuna delle tre rette AB, A'B', A"B". Dunque una stessa retta sarà perpendicolare a tre rette, che non istanno in uno stesso piano: lo che ripugna. C. B. D.

§. 231. COR. Qualora le direzioni alle Potenze RA, rA, ec. di cui vuol saggiarsi l'equilibrio, giacciano tutte in uno stesso piano; basterà condurre pel corpicciuolo due rette MAP, QAq tra se perpendicolari, e poi vederne se vicendevolmente si distruggano le forze stimate secondo queste rette. Imperciocchè se questo corpo non sia in riposo dovrebbe muo-

Fig. 18.

zioni, e su quella della forza media tre perpendicolari; la forza media moltiplicata per la sua perpendicolare sarà uguale alla somma, o alla differenza de' prodotti di ciascuna forza laterale nella sua perpendicolare. Ella suol dedursi da una proprietà del parallelogrammo esposta dal Varignonio nel Lemm. XVI. della Novell. Meccan. Vedi l'Ab. Marie, e 'l Sig. Salimbeni.

Digitalizzato da Google

muoversi per AQ (225), e per MP nello stesso tempo. Lo che ripugna.

§. 232. DEF. XXX. *Centro di una Potenza* è quel punto, da cui può concepirsi, ch'ella si diffonda.

§. 233. COR. Se la Potenza sia una forza continua, il dilei centro sarà lo stesso, che il centro delle forze.

§. 234. DEF. XXXI. Se imprimasi un picciol moto ad un corpiccuolo, ove si ritrovino applicate più Potenze in equilibrio, ogni momentaneo incremento, o decremento della distanza del corpicciuolo dal centro di ciascuna Potenza si dirà *spazietto d' accesso*, o *di recesso*. I divisati incrementi, o decrementi delle distanze si dicon pure *velocità virtuali negative*, o *positive delle stesse Potenze*. El prodotto della Potenza nella sua velocità virtuale chiamavasi dall' acutissimo Gio: Bernulli *Energia della Potenza*.

§. 235. SCOL. Rappresentino RA, rA, NA, nA, ec. più Potenze applicate al corpicciuolo A, e tra di loro equilibrate, i di cui centri sieno i punti R, r, N, n, ec. E poi s'imprima ad esso corpicciuolo un picciol moto per Aa, sicchè la retta Aa sia infinitesima. Si tirino le rette Ra, ra, Na, na, ec. e co' centri R, r, N, n, ec. e cogl' intervalli Ra, ra, NA, nA, ec. si descrivano gli archetti circolari Ba, ba, CA, cA, ec. Saranno le retticciuole BA, bA, ec. gli spazietti *Fig.* 19.

di

Digitalizzato da Google

di accesso, e le altre Ca, ca, ec. quei di recesso. Le medesime rette BA, bA, ec. son le velocità virtuali positive delle Potenze RA, rA, ec. e le altre Ca, ca, ec. son le velocità virtuali negative delle altre Potenze NA, nA, ec. le di cui energie saran dinotate da' rettangoli RAB, rAb, NA. aC, nA. ac, ec.

PROP. XXXVIII. TEOR.

§. 236. *Se le forze* RA, rA, NA, nA, *ec. applicate al corpicciuolo* A *lo mantengano in equilibrio; le forze* RA, rA, *ec. moltiplicate pe' loro spazietti di accesso* AB, Ab, *ec. saranno uguali alle rimanenti forze* NA, nA, *ec. moltiplicate pe' loro spazietti di recesso* Ca, ca, *ec.*

Dim. A cagion dell'equilibrio di queste Potenze, le loro forze MA, mA, ec. stimate secondo la retta AaM sono uguali alle altre forze PA, pa, ec. (224), cioè a dire tutti i rettangoli MAa, mAa, ec. uguaglian tutti gli altri PAa, pAa, ec. E poichè i due triangoli rettangoli MAR, BAa han di comune l'angolo acuto RAM, sono essi equiangoli, e simili fra loro: dunque sarà RA: AM :: Aa : AB, e 'l rettangolo MAa sarà uguale all'altro di RA in AB.

Similmente dall' essere i triangoli rAm, PAN, pAn, ec. respettivamente simili agli altri

Digitalizzato da Google

altri A a b, A a C, A a c, ec. si dimosterà, che i rettangoli m A a, P A a, p A a, ec. respettivamente uguaglino gli altri di r A in A b, di N A in a C, di n A in a c. Dunque sarà R A. A B + r A. A b + ec. = N A. a C + n A. a c + ec. C. B. D.

§. 237. Cor. Essendo l'energie delle Potenze R A, r A, ec. uguali all'energie delle altre N A, n A, ec. le forze di quelle, e di queste, stimate secondo la stessa retta M A P, saran pure uguali.

§. 238. Scol. In questo Teorema racchiudesi quel Principio della Statica quanto semplice, altrettanto generale; che *Principio delle velocità virtuali* si domanda. I primi stami di esso formaronsi nella mente del Gran Galilei, e l'acutissimo Giovanni Bernulli il rese più fecondo, e completo di quel ch' io l'ho quassù enunciato (*a*). Il Varignonio cercò dimostrarlo sinteticamente nella Sez. IX. de la Nouvel. Mecan. e 'l Principe de' moderni Analisti il

(a) Ecco l' enunciazione generale di queſto Principio, *In ogni sistema di forze tra loro equilibrate l' è uguale a zero la somma de' prodotti di ciascuna forza nella dilei velocità virtuale.* Intanto ſe le grandezze P, Q, R, ec. rappreſentino i valori di altrettante Potenze applicate ad un corpo, o ad un ſiſtema di corpi: p, q, r, *ec.* ſieno le loro direzioni, e dp, dq, dr, *ec.* dinotino le loro velocità virtuali. Sarà in caſo di equilibrio $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + ec. = o$. Il maneggio di queſta formola, che ſovente ſuol eſser lungo, e malagevole, ſarà rapportato altrove.

Digitalizzato da Google

il Sig. de la Grange non ha guari ne ha con dell'analisi agevolato l'uso, e lo ha poi applicato anche al movimento de' corpi animati da più forze. Intanto la voce *Principio* qui non vuol dinotare una verità primitiva, donde copiosamente si derivino delle altre; ma sì bene una Proposizione, che dimostra l'essenzial carattere di ogni sistema di forze tra di loro equilibrate.

PROP. XXXIX. TEOR.

§. 239. *Se un corpicciuolo, cui sieno applicate più Potenze intendasi spinto con picciol moto per tre diverse direzioni non giacenti in uno stesso piano, e sempre in ciascun caso si averi, che le Potenze moltiplicate per gli spazietti di accesso pareggino le altre moltiplicate per gli spazietti di recesso; coteste Potenze saran tra di loro in equilibrio.*

Dim. In ciascun di questi casi l' Energie delle Potenze positive sono uguali alle negative delle altre: dunque dovran distruggersi le loro forze stimate secondo quella retta per la quale intendesi spinto il corpicciuolo (237). E quindi tali Potenze dovranno tra loro (230) equilibrarsi. C. B. D.

§. 240. Scol. Questo Principio delle velocità virtuali avrebbesi potuto ritrar facilmente dalla Composizione delle forze per mezzo delle

Digitalizzato da Google

le seguenti verità di Geometria, ch' io dimostrai nella Prenoz. XII. I. *Se per un angolo* C *del parallelogrammo* COKF *comunque si conduca la retta* BCR, *e su di essa dagli altri angoli del parallelogrammo si menino le perpendicolari* OB, KA, FR; *sempre la differenza de' segmenti* CB, CA, *che stanno da una parte del punto* C, *dovrà uguagliare il segmento* CR, *ch' è nell' altra*. II. E *se per un punto* C *conducansi le due rette* BR, br *nel piano, ove stiano i quattro punti* C, O, K, F, *ed abbassate da' punti* O, K, F *le rette* OB, KA, FR *perpendicolari su di* BR, *e le altre* Ob, Ka, Fr *perpendicolari su di* br, *sia* BC − CA = CR, *e* Cb − Ca = Cr, *sarà un parallelogrammo la figura chiusa dalle rette* OC, CF, FK, KO (*a*). *Fig.* 24.

PROP.

(a) Ecco il modo, onde dal parallelogrammo delle forze potrebbesi dimostrare il Principio delle velocità virtuali. Le tre forze *OC*, *CL*, *CF* applicate al corpicciuolo *C* si equilibrino, compito il parallelogrammo *OCFK* dalle forze *CO*, *CF*, dovrà essere la forza media *CK* uguale, e contraria alla rimanente *CL* (216). Si concepisca il corpicciuolo *C* trasferito nel prossimo luogo *c* per la *Cc*, e sulla retta *QCB* si calino da' punti *O*, *K*, *F*, *L* le perpendicolari *OB*, *KA*, *FR*, *LQ*; sarà $BC = CA + CR$ (pren. XII.), o sia $CB = CQ + CR$: imperocchè *AC* è uguale a *CQ* per avere i due triangoli *CKA*, *CLQ* le condizioni della 26. El. I. Si congiungano le rette *Oc*, *Fc*, *Lc*, e co' centri *O*, *F*, *L*, e cogl' intervalli *Oc*, *FC*, *LC* si descrivano gli archetti circolari *cn*, *Co*, *Cm*; saranno i triangoletti *Ccn*, *Cco*, *Ccm* respettivamente simili ai triangoli *BCO*, *FCL*. *Fig.* 20.

Digitalizzato da Google

PROP. XL. PROBL.

§. 241. *Abbozzare un metodo generale, onde possa investigarsi il moto assoluto di un corpicciuolo comunque animato da quante forze si vogliano.*

Fig. 22.

COST. La linea N S s sia il sentiero del corpic-

FCR, LCQ. Dunque si avranno le tre seguenti analogie $BC : CO :: Cn : Cc$, $RC : CF :: co : Cc$, $QC : CL :: cm : Cc$, e quindi i tre rettangoli BCc, RCc, QCc saranno respettivamente uguali agli altri $OC . Cn$, $FC . co$, $LC . cm$. Ma essendo $BC = RC + QC$, anche BCc dee pareggiare $RCc + QCc$. Dunque sarà ancora $OC . Cn = FC . co + LC . cm$. cioè la forza OC moltiplicata pe 'l suo spazietto d' accesso Cn sarà uguale alle altre due forze FC, LC respettivamente moltiplicate pe' loro spazietti di recesso co, cm.

Essendo poi $OC . Cn = FC . co + LC . cm$, sarà ancora $BCc = RCc + QCc$, e quindi $BC = RC + QC$, cioè (prolungata LC in K, finchè CKL adegui $+$, e calata la perpendicolare KA su di QB) sarà $BC = RC + AC$. E dimostrandosi lo stesso su di un' altra retta che passi per C; la figura $OCFK$ sarà un parallelogrammo (Prenoz. XII,). Ed essendo la forza LC uguale, e contraria a CK eqnipollente delle due OC, FC, queste tre forze OC, FC, LC saranno in equilibrio (217).

E perchè più forze, che si equilibrano posson sempre ridursi a tre, che giacciono in uno stesso piano, facilmente può dedursi dal parallelogrammo delle forze il Principio delle velocità virtuali. Ma questo metodo, ed un' altro somigliante, che non ha guari mi è caduto in mente, l'è men semplice di quello, che si è quì sopra esibito, le cui tracce osservansi in Varignonio *sect. 9. Nouvel. Mecaniq.*

Digitalizzato da Google

picciuolo., la quale per la massima generalità, suppongasi essere a doppia curvatura.

1. D'accanto a questa linea intendasi posto, ove ne piaccia, l'angolo solido A di un cubo; e 'l moto del corpicciuolo si riferisca ai lati BA, CA, D'A di esso angolo; le quali rette dicansi *Direttrici del moto*.

2. Prendasi nel sentiero del mobile l'archetto Ss infinitesimo, ed abbassate le rette SY, sy perpendicolari sul piano dell'angolo BAD, da' punti Y, ed y, ove queste lo incontrino, si calino YX, yx perpendicolari alla retta AD; saranno le tre coordinate SY, YX, XA parallele alle tre Direttrici.

3. La forza per Ss si risolva in tre forze laterali, le cui direzioni SP, SQ, SR sien parallele alle Direttrici AD, AB, AC: ed i valori di queste forze, che comunque dipendano dalle riferite coordinate, si dicano P, Q, R (*a*).

4. Per mezzo della Prop. XV. si ricavino tre equazioni, ch'esprimano gli effetti di queste forze.

Que-

(a) Si cali *S s* perpendicolare su di *s y*, e *s n* su di *S P*; e poi si compiano i due parallelogrammi rettangoli *S t s o*, *S n s m*; sarà l'angolo *n S s* uguale all'altro *y Y r*, perciocchè i lati di quello son paralleli ai lati di questo. E quindi i due triangoli *n S s*, *Y y r* per la 26. El. I. avranno uguali i cateti *s n*, *y r*, e gli altri *S n*, *Y r*: e 'l quadrato di *S s* sarà uguale ai quadrati di *Y r*, e di *y r*. Dunque il quadrato di *S s*, ch'è uguale ai

Digitalizzato da Google

Quest' equazioni maestrevolmente maneggiate daranno l' accelerazione del corpicciuolo, e 'l di lui sentiero (a).

§. 242. COR. Se il sentiero del corpicciuolo giaccia in uno stesso piano, basterà risolvere il di lui moto elementare in due moti, le cui dire-

quadrati di Ss, e di ts, sarà uguale ai tre quadrati di Υr, di yr, e di ts.

E poichè la forza Ss è equivalente alle due So, St, ed St è pure equivalente all' altre due Sm, Sn: la forza Ss sarà equivalente alle tre So, Sm, Sn.

(a) Le tre coordinate AX, $X\Upsilon$, ΥS si dicano x, y, z; l'archetto Ss sia ds, e dt il tempo, in ch'ei si percorre. Sia M la massa del corpicciuolo, e P, Q, R le forze, che lo accelerano per SP, SQ, SR; saranno le rettic-ciuole Xx, ry, ts respettivamente uguali a dx, dy, dz, e le velocità, onde il corpicciuolo le descriverebbe nel tempuscolo dt, saranno $(dx) : dt$, $(dy) : dt$, $(dz) : dt$, i di cui elementi sono $(ddx) : dt$, $(ddy) : dt$, $(ddz) : dt$, prendendo dt per costante. Dunque per la Prop. XV, si avranno le tre seguenti equazioni,

$$Mddx = \theta P dt^2, \quad Mddy = \theta Q dt^2, \quad Mddz = \theta R dt^2.$$

E moltiplicando la prima equazione per $(2dx) : Mdt^2$, la seconda per $(2dy) : Mdt^2$, la terza per $(2dz) : Mdt^2$, e sommando fra loro i primi membri di queste nuove equazioni, ed i secondi, avrassi $(2dxddx + 2dyddy + 2dzddz) : dt^2 = \frac{2\theta}{M}(Pdx + Qdy + Rdz)$. Ma il primo membro di quest' equazione è il differenziale di $(dx^2 + dy^2 + dz^2) : dt^2$, ove dt^2 sia costante, cioè di $(ds^2) : dt^2$, cioè del quadrato della velocità (a. §. 16) per l' archetto Ss, la quale si dica u: dunque sarà $uu = \frac{2\theta}{M}\int(Pdx + Qdy + Rdz) + C$

Digitalizzato da Google

direzioni sieno parallele a due rette date, che si seghino perpendicolarmente, o pur comunque.

§. 243. SCOL. Il sommo Eulero applicatosi a risolvere il *Problema de' tre corpi* si abbattè in un Principio nuovo di Meccanica, o piuttosto in un nuovo metodo da calcolare *i moti de' corpi comunque animati da quante forze si vogliono*, ch' esposelo nel Vol. dell' ann. 1750. dell' Acc. Reale di Berlino. Questo metodo consiste nel rapportare a tre piani fissi, o a tre assi il movimento di un corpo, su cui agiscano quante forze si vogliono, la qual cosa erasi anteriormente ritrovata dall' Ill. Maclaurin; e nel dedurne tre convenevoli equazioni tra le forze, che lo accelerano verso di ciascun piano, e i di loro effetti. Ma poi il Valentuomo nella *Teor. del Moto de' Corpi Rigidi*, *ed in altre Dissert.*, ch' ei fece su questo argomento, si avvisò doversi in luogo di tre qualunque Direttrici determinare i *tre Assi Principali*, che sono insieme i *tre Assi liberi di girazione*, (come il Sig. de Segner avealo nel 1755 giudiziosamente rilevato); e quindi calcolarne il moto del corpo rigido, e le sue leggi. Ma poichè le formole, che in tal guisa ritraggonsi, sono grandemente inviluppate, e n' è poi molesta la loro applicazione ai casi particolari; l' acutiss. Sig. della Grange *Vol. di Berlin.* 1773. tenne altra via per riuscirne in quest' impegno: e lo stesso Eule-

Digitalizzato da Google

ro nel *Volum. XX. degli Att. Nuov. Pietrob.*, *e nella Teor. del moto de' corp. rigid. data in luce nell'an. scorso*, ha semplificato i suoi calcoli rapportandogli a quell'*Asse Invariato*, ch'ei si avvide doversi nel moto de' corpi rigidi mai sempre ritrovare.

CAP. IX.

DELLA LIBERA DISCESA DE' GRAVI PER PIANI DECLIVI.

§. 244. DEF. XXXII. Piano *Inclinato*, *Obbliquo*, o *Declive* dicesi quello, che non è posto verticalmente nè in sito orizzontale. E chiamerò *obbliquità* di un tal piano quell'angolo acuto, che ne misura la sua inclinazione all'orizzonte (*a*).

§. 245. DEF. XXXIII. Per la retta PN perFig. 23. pendicolare al piano inclinato QC conducasi il piano verticale TPN, la comune sezione di questo piano, e di quello dirassi *lunghezza* del piano inclinato.

PROP.

(a) Le voci *Inclinato*, *Obbliquo*, *Declive*, *Obbliquità*, *ec.* che di lor natura son relative, quì si enunciano come assolute; intendendosi la posizion di questi piani rapportata all'Orizzonte.

Digitalizzato da Google

PROP. XLI. TEOR.

§. 246. *Un grave posto su di un piano declive cerca di scendere per la dilui lunghezza con una forza, che sta al suo peso, com' è al raggio il seno dell' obbliquità di esso piano.*

DIM. Il peso del corpo P, ch' è sul piano inclinato QC, esprimasi dalla retta verticale PL condotta pel luogo, ove quello ne giace: e su di PN perpendicolare allo stesso piano si cali dal punto L la perpendicolare LN, e poi si compia il parallelogrammo PMLN. Finalmente prodotte le due rette PM, PL, finchè incontrino in T, ed O il piano orizzontale AB, si unisca la retta TO. *Fig. 23.*

Ciò posto il piano QC è perpendicolare al verticale TPO (*a*); ma allo stesso verticale l' è anche perpendicolare il piano orizzontale AB: dunque la retta CT comune sezione del piano inclinato, e dell' orizzontale sarà perpendicolare (*b*) al piano verticale TPO. Il perchè sarà retto tanto l' angolo CTP, che l' altro CTO (*c*), e l' angolo PTO sarà la misura dell' inclinazione del piano QC all' altro

(a) *Prop.* 18. *El. XI.*
(b) *Prop.* 19. *El. XI.*
(c) *Defin.* 3. *El. XI.*

Digitalizzato da Google

A B (*a*), cioè l'obbliquità dello stesso piano Q C (243).

E perchè la forza, che spinge il grave P su del piano declive è dinotata dalla retta PM, (*b*) ed ella sta al peso del grave, come P M a P L, cioè come P O a P T (essendo simili i due triangoli P M L, P O T), o pure come il seno dell'angolo P T O al raggio; sarà vero, che il grave P cercherà di calare per la lunghezza P T del piano Q C, ov'ei posi, con una forza che sta al suo peso, come il seno dell'obbliquità del piano al raggio. C. B. D.

§. 247. COR. I. Se un globo ponderoso, e duro si lasci giù discendere per un piano declive, il quale sia fermo, immobile, ed incapace di aggirarsi, o di rinculare (*c*); il suo moto dovrà

(a) *Defin. 6. El. XI.*

(b) §. 222. n. I.

(c) Se il piano obbliquo *A C*, su di cui cada rotolando la palla *M* ben rotondata, e dura, posa orizzontalmente, e senza resistenza rinculare; la forza perpendicolare ad esso piano lungi dal distruggersi, come si è detto nella dimostrazione di questo Teorema, avrà regresso ad accelerar la palla. Per intender come ciò vada, supponete che il peso della palla *M* si esprima dalla verticale *F M*, e ch'ei si risolva nella forza *F G* parallela al pian declive, e nella *G M* perpendicolare allo stesso piano. Si cali *G f* perpendicolare su di *F M*, *f g* perpendicolare su di *G M*, *g r* sulla *F M*, ec. sarà *F G* la forza che all'ingiù spigne la palla per la lunghezza del piano obbliquo: e risolvendo la forza perpendicolare *G M* nelle due *G f*, *f M*, la prima di queste s'impiegherà ad urta-

Fig. 25.

Digitalizzato da Google

vrà essere uniformemente accelerato. Imperocchè la forza, che quivi all'ingiù ne spigne cotesto globo, serbando al di lui peso la costante ragione del seno dell'obbliquità del piano al raggio, dee essere uniforme, e 'l movimento del globo uniformemente accelerato (77. 150).

urtare il piano orizzontalmente; e l'altra fM resterà verticalmente applicata alla stessa palla. Con che se di bel nuovo scindasi la forza fM nelle due fg, e gM, e la gM nelle altre gr, ed rM; la forza fg urterà la stessa palla per la lunghezza del piano obbliquo, mentre la gr si unirà colla Gf ad urtare il piano orizzontalmente. E così delle altre. Dunque la forza acceleratrice della palla M sul piano AC non è in tal caso analoga alla FG, ma si bene ad $FG + fg +$ *ec.* Su di che vedi *la diss. di Gio. Bern. nel vol. V. Att. Ant. Pietrob.*

Che se quel piano declive, su cui scenda una palla, si aggiri verticalmente, o in altro modo; il di lei moto non sarà uniformemente accelerato, nè tampoco uniforme quella forza, che quivi l'obbliga a scender giù. E converrà impiegar nuovi principj per iscovrire i sintomi di questo moto quanto in se vario, tanto malagevole a calcolarsi. Vedi *il Sig. Clairaut Memoir. de Paris* 1742. *i Bernulli, l'Eulero, e quegli altri Geometri, che hanno esaminata la discesa di una palla in un tubo, che si aggira.*

Non di rado addiviene, che un corpo posando su di un piano declive nè rotolando, nè strisciando quivi ne discenda, tuttochè niuna forza il ritenga, nè obice alcuno il fermi. Ciò è dovuto allo stropicciamento del corpo col piano: e 'l Sig. Buffingero *nel vol. II. Att. Ant. Pietrob.*, ed altri han saputo di ciò trarne i principj per calcolare le frizioni de' corpi. Eccone il modo. „ Si determini colla sperienza *l'angolo della quiete*, „ cioè la massima inclinazione del piano obbliquo AC, „ su

Digitalizzato da Google

§. 248. Cor. II. E quindi le principali affezioni di questo moto, che furon recate nei §. (27, 28, 29), converranno alla discesa di un globo su di un piano declive fermo, ed immobile, ed ove si prescinda dalla resistenza dell'aria, e dallo stropicciamento del globo, e del piano.

§. 249. Cor. III. Dal presente Teorema rilevasi, che la massa di un corpo moltiplicata pel seno dell'obbliquità di quel piano, ov' ei giace,

„ su cui posa reggersi il solido $FAMG$ senza discen-
„ derne per la dilui lunghezza. Dovrà in tal caso la fri-
„ zione del corpo con del piano obbliquo pareggiar quella
„ forza, che all'ingiù lo spinge per la lunghezza del
„ piano. E quindi se facciasi come il raggio al seno del-
„ l'angolo della quiete, così il peso del corpo dato ad
„ un quarto, questo darà la frizione del corpo sul piano.
„ Ed essendo la forza, che accelera il corpo pel piano,
„ alla pressione, che quello esercita su questo, come FG
„ a GM, o come AB a BC, cioè come la tangente
„ dell'angolo ACB al raggio, in questa stessa ragione
„ farà la frizione alla forza premente. Or, secondo ciò
„ che sperimentarono il Sig. d'Amontons, ed altri Geo-
„ metri, l'angolo della quiete è di 18°, 27', la cui
„ tangente è pressochè un terzo del raggio. Dunque la
„ frizione di un corpo sta alla dilui forza premente, co-
„ me 1. a 3.

Se un grave è posto talmente su di un piano declive, che la verticale condotta pel suo centro di gravità cada nella sua base; egli dovrà venir giù strisciando su del piano; e vi dovrà scender rotolando, se quella cadane fuori di questa. Una tal regola, che nel primo aspetto sembra sgombra di dubbio, e che dall'Ab. Grandi, dal Musschembroek, e da altri vien francamente proposta, chi l'avrebbe creduto! fu per mezzo di fi-

cu-

Digitalizzato da Google

giace, uguagli il seno massimo moltiplicato per la forza, con cui lo stesso corpo cerca di scenderne pel piano. Dunque essendo il seno massimo di una costante magnitudine, potrà inferirsi, che *le forze, onde più gravi posti su di altrettanti piani declivi cercan di scendervi, sien proporzionali ai loro pesi, ed ai seni delle respettive obbliquità de' piani.*

§. 250. Cor. IV. Or le forze acceleratrici sono direttamente come le Potenze, ed inversamente come le masse (102); dunque le forze acceleratrici de' gravi posti sui piani obbliqui saranno direttamente come i loro pesi, ed i seni delle obbliquità de' piani, ed inversamente come le loro masse: cioè (per esser le masse proporzionali (147) ai pesi,) nella ragion de' seni delle obbliquità de' piani (*a*).

§. 251.

curiſſime ſperienze moſtrata falſa da quegli Accademici Napoletani, che prima della metà di queſto ſecolo ſoleanſi raccorre a ſpecular la natura. Il Sig. Candido Piſtoi nel *Vol. III. degli Atti de' Fisiocritici di Siena*, Giorgio Krafft, ed Eulero *ne' Vol. XII., e XIII. degli Att. Ant. di Pietrob.* han poi recate molte altre ſperienze per confermarne la falſità della diviſata regola. E lo ſteſſo Eulero hà nel *cit. Vol.* XIII. giudizioſamente calcolati i moti de' corpi ſu de' piani obbliqui, tenendo conto della loro frizione.

Finalmente un corpo, che ſcende per un piano obliquo, ſe per avventura ſi tragga dietro un' altro grave legatogli con una corda, che attraverſi una girella ſtabile, con qual legge dovrà egli progredire? Vedete la *Dinam. dell' Ill. Sig. d'Alembert, ed uh' Opusc. di Eulero negl. Att. Pietr. an.* 1778.

(a) *Pren. III.*

Digitalizzato da Google

§. 251. COR. V. Dunque *le forze acceleratrici di più gravi posti su di altrettanti piani obbliqui sono nella ragion de' seni delle obbliquità de' piani.*

PROP. XLII. TEOR.

§. 252. *Se dalla cima* A *del piano obbliquo* A C *si faccian cadere due gravi, uno verticalmente, l'altro per la lunghezza del piano; gli spazj, ch'essi descriveranno dopo un dato tempo, saran fra di loro come il raggio al seno dell' obbliquità dello stesso piano.*

Fig. 25.

Ed in questa stessa ragione saran pure le respettive velocità finali de' medesimi gravi.

DIM. Le forze, che accelerano il grave cadente verticalmente, e l'altro che giù ne scende pel piano inclinato, sono tra di loro come il raggio al seno dell'obbliquità del piano (246). Dunque gli spazj contemporaneamente descritti da' medesimi corpi, e le loro velocità finali, che sono come le mentovate forze (110,106), debbon esser fra loro come il raggio al seno dell'obbliquità del piano. C.B.D.

§. 253. COR. I. A B ed A M sieno gli spazj contemporaneamente descritti da questi gravi, che partono dalla cima del piano inclinato AC. Si elevi B C perpendicolare su di B A, e si unisca B M; sarà A B ad A M come il peso del

Digitalizzato da Google

del corpo, che scende verticalmente, alla forza acceleratrice di quell' altro, che cala pel piano inclinato A C, cioè come il raggio al seno dell' angolo A C B; val quanto dire come A C ad A B. Dunque i due triangoli ABC, A B M, che hanno l' angolo B A C di comune, ed i lati B A, ed A C proporzionali a' lati AM, ed A B, saranno tra se equiangoli: onde l' angolo A M B sarà retto al par del suo uguale A B C.

§. 254. Cor. II. Dunque la retta B M, che unisce gli estremi B, ed M de' due spazj AB, AM

(a) Dunque se il Diametro *A B* del semicircolo *A M B* si ponga verticalmente, e pe' suoi estremi *A*, e *B* si tirino delle corde *A M*, *A N*, *ec. B M*, *B N*, *ec.* tanto quelle, che queste saran percorse da un grave in quell' istesso tempo, in ch' ei vi discenderebbe pe 'l diametro *A B*. Imperocchè nel triangolo rettangolo *ABM* presa l' ipotenusa *A B* per raggio, *A M* è seno dell' angolo *A B M*, o del suo uguale *A C B*. Dunque *A M* sta ad *A B* come la forza acceleratrice del corpo che scende per *A M* al peso del medesimo corpo: e quindi *A M*, ed *A B* son descritte nel medesimo tempo. Così si dimostra, che *A N*, ed *A B* sian descritte nel medesimo tempo, e così delle altre. E poichè *B M* sta a *B A* come il seno dell' angolo *M A B*, o del suo uguale *M B C* al raggio, cioè come la forza acceleratrice di un corpo, che scende per *M B* al peso dello stesso corpo; *M B*, e *BA* saran descritte in uguali tempi. Nella stessa guisa può dimostrarsi, che *N B* percorrasi da un grave in tanto tempo, quanto vi spenderebbe un' altro a calare per *AB*: dunque non solo le corde *A M*, *A N*, *ec.*, che le altre *M B*, *N B*, *ec.* son descritte nello stesso tempo, che il diametro verticale *A B*.

Digitalizzato da Google

AM descritti in uguali tempi, e dal grave, che cala verticalmente, e da quell'altro, che discende pe'l piano obbliquo AC, l'è perpendicolare al medesimo piano.

§. 255. Cor. III. E se più corpi si facciano cadere per diversi piani obbliqui, gli spazj ch'essi descriveranno in uguali tempi, saranno come le loro forze acceleratrici, cioè come i seni delle obbliquità de' piani (110, 251).

PROP. XLIII. TEOR.

§. 256. *Se i due gravi* A, *ed* a *si facciano insiem cadere dalla cima del piano inclinato* AC, *questo però verticalmente, quello per la lunghezza del piano; essi giugneranno all'orizzonte* BC *con velocità uguali.*
Ed i tempi delle loro discese saranno, come gli spazj percorsi.

Dim. Gli spazj AB, ed AC sono fra di loro come le forze, le quali accelerano il grave, che scende pel piano obbliquo AC, e quell'altro, che cala verticalmente. Dunque (111.n.2.) le velocità finali de' medesimi corpi saranno tra se uguali.

E poichè le velocità, onde i medesimi corpi arrivano in B, e C, sono come i tempi, e le forze (105); e quelle si son mostrate tra se uguali; l'è mestiere, che i tempi siano inversamente come le forze: cioè il tempo per

AB

Digitalizzato da Google

AB a quello per AC, come AB ad AC. C. B. D.

§. 257. Cor. Dunque *i tempi, in che più gravi discendono per altrettanti piani diversamente inclinati all' orizzonte, e della stessa altezza, sono come le lunghezze de' piani, che percorrono. E sono tra se uguali le velocità, ond' essi pervengono all' orizzonte.*

PROP. XLIV. TEOR.

§. 258. *Se vi sieno due piani contigui diversamente inclinati all' orizzonte; la velocità, che acquistasi da un grave in calando pel piano superiore, sta a quella con cui entra nell' inferiore, come il raggio al coseno dell' angolo d' inclinazione de' medesimi piani (a).* Fig. 26. n. 2.

Dim. Le rette NB, e BC dinotino le lunghezze de' piani contigui per cui ne scenda il grave; e l' energia di quella forza, ch' egli acquista in B, esprimasi dalla NB. Si cali NM perpendicolare su di CB prolungata verso M, e si compia il parallelogrammo MNDB. Ciò

(a) Credeasi dal Galilei, dall' Ugenio, da Keil, e da tanti altri Meccanici, che un grave calando pel piano obbliquo *NB* n' entrasse nel piano *BC*, che gli è contiguo, con quella stessa velocità, ch' egli aveasi pel primo *NB* acquistata. Ma questa cosa fu mostrata falsa dal cel. Varignonio nelle *Memorie dell' Acc. delle Scienze di Parigi degli an.* 1693, 1704.

Digitalizzato da Google

Ciò premesso, la forza NB equivale alle due DB, e BM (212). Ma di queste la prima direttamente impiegasi contro del piano BC, e per la resistenza di esso si elide interamente: dunque al grave B gliene resta la sola forza MB, con cui entra nel piano BC. Ma nello stesso corpo le forze sono come le velocità (73.n.4): dunque la velocità, che il grave B acquistasi nella discesa per BN, sta a quella, onde poi n'entra nel piano BC, come NB a BM, cioè come il raggio al coseno dell'angolo NBM, che misura l'inclinazione de' piani contigui NB, BC. C. B. D.

§. 259. Cor. I. Col centro B, intervallo BN, descrivasi l'arco circolare NS; sarà SM differenza dalle due BN, e BM, ed insiem senoverso dell'arco NS, o dell'angolo NBM. Dunque la velocità, che perde il grave B passando dal piano NB nell'altro BC, sta alla velocità acquistatasi nella discesa per NB, come il senoverso dell'angolo d'inclinazione de' piani contigui al raggio.

§. 260. Cor. II. Sia l'angolo NBS minore di qualunque acuto rettilineo (qual' è per appunto quello, che forma ogni elemento di una curva colla sua tangente); sarà l'arco NS infinitesimo rispetto alla circonferenza del raggio SB, e la sua corda SN una parte infinitesima del diametro 2SB. Ma per la natura del circolo sta SM: SN :: SN: 2SB: dunque

SM

Digitalizzato da Google

SM sarà puranche infinitesima rispetto ad SN, ed infinitesima di secondo ordine riguardo a 2SB.

§. 261. Cor. III. Val quanto dire, *il grave* B *passando dal piano* NB *nel contiguo* BC, *non soffre sensibile perdita di velocità, quando sien questi piani tra loro inclinati ad angolo ottusissimo.*

PROP. XLV. TEOR.

§. 262. *Sia* ABCDE *una linea curva verticalmente disposta, e colla concavità in su* (a).

Io dico, che la velocità finale di un grave, che vi si lasci liberamente discender dentro, debbasi all' altezza dell' arco. Fig. 26. n. 1.

Dim. Sieno AB, BC, CD, DE, ec. gli elementi contigui di quella curva, onde col suo proprio peso discenda il grave per la di-lei parte concava. Per A, per C, e per D si distendano le rette orizzontali AF, CQ, DG, e si protraggano gli elementi CB, DC, in fin che incontrino AF ne' punti N, F. Finalmente si calino NQ, FG perpendicolari su di CQ, e DG.

E poichè il grave nulla perde di sua velocità in passando dall'elemento AB nell'altro conti-

(a) Se un grave discenda nella parte convessa di una curva situata verticalmente, egli sarà obbligato in un punto di essa a sbalzar fuori. Vedi un' Opusc. del celeb. P. Fontana inserito nel II. *Vol. della Società Italiana.*

Digitalizzato da Google

tiguo BC (261), la velocità, ch' ei s' acquista discendendo per ABC sarà quanto quella, che gliene verrebbe calando pel solo piano NBC, o (257) per la dilui altezza NQ. Similmente lo stesso grave entrando nel piano CD, non perde veruna quota della velocità, che aveva in C, e quindi percorso l'elemento CD troverassi avere in D tanta velocità, quanta ne avrebbe conceputa in D calando pel solo piano FCD, o per la FG altezza di questo. Dunque, continuando in simil guisa cotesto ragionamento, la velocità, che si acquista un grave discendendo per un qualunque arco, il di cui piano è verticale, è dovuta all' altezza del medesimo arco. C. B. D.

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. X.

DELL'ATTRAZIONE DE' CORPI SFERICI.

PROP. XLVI. TEOR.

§. 263. *Se tutti i punti della circonferenza del circolo* B R b *attraggano con forze uguali il corpicciuolo* A, *ch'è ad essi equidistante, e fuori del di loro piano; un tal corpicciuolo tenderà al centro del circolo con una forza proporzionale alla divisata circonferenza, al seno dell'angolo* ABC, *ed all'intensità di ciascuna forza traente.*

Fig. 27. n. 1.

DIM. Si conduca per un punto qualunque B della circonferenza il diametro B b, ed unite le AC, A b, si compiano i due rettangoli ADBC, A d b C. Le forze, onde i due punti opposti B, e b traggono il corpicciuolo A, esprimansi con delle rette A B, A b: e quella si risolva nelle laterali A D, A C, questa nelle laterali A d, A C. Ei sarà chiaro doversi distrugger tra loro le forze A D, A d come uguali, e contrarie: onde dalla forza AB dee risultar nel corpicciuolo la forza A C, ed un'altra uguale ad A C anche n' emerge nello stesso corpo dall' altra A b. Dunque la forza, che trae il corpicciuolo per A B starà alla risultante per AC,

Digitalizzato da Google

come AB ad AC (212), o come il raggio al seno dell' angolo ABC. E quindi ponendo il raggio uguale ad 1, sarà la risultante per AC uguale al valore di essa forza traente moltiplicato pel seno dell' angolo ABC. E quindi la forza, che da tutti i punti della circonferenza BRb risulta nel corpicciuolo A verso del centro C, sarà come l' intensità della forza di ciascun punto, come il seno dell' angolo ABC, e come il numero de' punti della circonferenza, o come la medesima circonferenza. C. B. D.

§. 264. COR. I. La *tendenza del corpicciuolo* A *al centro* C è una forza, che in esso risultane dalle infinite forze, che insiem lo traggono per AB, Ab, ec.

§. 265. COR. II. E se tutti i punti della zonetta sferica generata dall' archetto circolare BD rivolto con perfetta rivoluzione intorno ad AS, che passi pel dilui centro, tirino con uguali forze il corpicciuolo A equidistante da essi; *la tendenza del corpicciuolo si farà al centro della sfera, e sarà come la superficie della zonetta, come il seno dell' angolo* ABC, *e come l' intensità di ciascuna forza traente*. O pure *la divisata tendenza sarà, come l' attrazione della zonetta sferica di* BD, *e come il seno dell' angolo* ABC.

Fig. 29.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XLVII. TEOR.

§. 266. *Se il corpicciuolo* S *pongasi entro la superficie sferica* D G O F, *e tutt' i punti di questa il tirino con forze, le cui quantità assolute sieno uguali, e le acceleratrici decrescano come i quadrati delle distanze; ei resterà quivi immobile, senz' esserne in verun modo turbato da queste infinite attrazioni.* Fig. 27. n. 2.

Dim. Sia D G O F un circolo massimo di essa sfera, che passi per S: e disteso per S il diametro D O, la corda R Q, e l'altra M A infinitamente a lei vicina, si ordinino M N, A B sul diametro D O di esso cerchio.

I due triangoli A S Q, M S R, avendo gli angoli verticali A S Q, M S R tra se uguali, non men che gli altri due S A Q, M R S, come insistenti sullo stesso arco M F Q, sono simili fra loro. Dunque sta Q A ad M R, come Q S, o la sua uguale A S ad S M, cioè come A B ad M N. E quindi le armille sferiche generate dagli archetti A Q, ed M R essendo (*a*) in ragion composta di A Q ad M R,

(a) L'elemento di una curva nel volgersi intorno al ſuo aſſe genera una ſuperficie di un cono troncato, la quale ſi miſura dallo ſteſſo archetto moltiplicato per la circonferenza di un ſuo eſtremo: onde l'è proporzionale all' archetto generatore, ed alla dilui diſtanza dall' aſſe di rotazione.

Digitalizzato da Google

e di AB ad MN, saranno come AB^2 ad MN^2. E poichè le forze, con cui coteste armille traggono il corpicciuolo S per le direzioni medie SB, SN sono fra loro direttamente come le medesime armille, ed inversamente come i quadrati di SA, e di SM (265) esse saranno come AB^2 ad MN^2, e come MS^2 ad SA^2, cioè in ragion di uguaglianza. E quindi dalle attrazioni di queste due armille, il corpicciuolo S resterà quivi equilibrato, ed immobile. La qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà vero ciocchè proposi. C. B. D.

§. 267. COR. Che se per lo corpicciuolo S intendasi passare il piano FG perpendicolare su di DO; le forze, onde le superficie de' segmenti sferici FDG, FOG il tirano per SD, ed SO, saranno tra se uguali.

PROP. XLVIII. TEOR.

§. 268. *Poste le medesime cose del Teor. prec. un corpicciuolo situato fuori la stessa superficie sferica tenderà al dilei centro con una forza reciprocamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal centro della sfera.*

Fig. 29. 30. DIM. Sieno MBF, mbf (a) due circoli massimi

(a) Questi due circoli, che per agevolar la dimostrazione, veggonsi distinti fra loro, si debbon concepire che abbiano il medesimo centro della sfera.

Digitalizzato da Google

simi della sfera BOY, che passino pe' corpicciuoli uguali A, ed a situati a disuguali distanze dal di lei centro, e tutti i punti della superficie sferica tirino questi corpicciuoli, come si è supposto nel Teor. prec. Ed intendendosi ne' medesimi circoli praticato ciò che vi recai nella Prenoz. XIII., saranno le armille sferiche generate dagli archetti BD, bd in ragion composta de' rettangoli sap, SAP, e de' quadrati di AB, ed ab distanze de' corpicciuoli dalle armille. Dunque i medesimi rettangoli (a) sap, SAP saranno direttamente come le divisate armille, ed inversamente come i quadrati delle loro distanze da' corpicciuoli, cioè i medesimi rettangoli saranno come le attrazioni esercitate dalle medesime armille su de' corpicciuoli A, ed a (b).

Or le respettive tendenze de' corpicciuoli A, ed a attratti dalle divisate armille sono dirette al centro della sfera, ed elleno son proporzionali alle attrazioni delle armille, ed a i seni degli angoli ABC, abc, o de' loro uguali ASP, asp (265). Dunque le tendenze de' corpicciuoli al centro della sfera saranno come il rettangolo sap all' altro SAP, e come il seno dell' angolo ASP al seno dell' altro asp, cioè a dire in ragion composta di (sa : SA) (ap : AP) (AP : ap) (sa : SA), essendo le prime due ra-

(a) *Prenoz. IV.*
(b) Per Ipot.

Digitalizzato da Google

ragioni equivalenti a quella de' rettangoli, e le altre due a quella de' seni (*a*).

Ma dalla composizione di queste ragioni (*b*) n' emerge quella di sa^2 ad SA^2. Dunque le tendenze de' corpicciuoli A ed a inver del centro della sfera, che vi si producono dalle mentovate armille attraenti, saranno inversamente come i quadrati delle distanze de' medesimi corpicciuoli dal centro della sfera. La qual cosa potendosi sempre dimostrare, sarà vero quel, che si è proposto. C. B. D. (*c*)

PROP.

(a) *Pren. XIV.*

(b) *Pren. III.*

(c) Questa verità esponesi dall'Imm. Nevvton *nell. Prop.* 71. *Lib. I. Princ. Mat.* e tanto la dimostrazione, che quivi si legge, quando questa, che ne ho quì recata, son coi medesimi principj di Geometria, e di Meccanica, sebben diversamente, condotte a fine. Più volte tentai farne un'altra, che fosse di verità geometriche men ingombra di queste due: ma quanto l' Analisi secondava i miei desiderj, tanto la Sintesi erane a ciò restia; sicchè credei impossibile d' escire da quella del Cavalier Nevvton. Ma poi con un metodo analitico comunicatomi dal valentissimo giovane D. Annibale Giordano, e che altrove mi farò pregio esibirvelo, ho conosciuto *a priori*, che volendosi prendere le tendenze medie delle armille di BD, e di bd nella costante ragione di as^2 ad AS^2, convienși necessariamente tirar le seganti AO, AM, ed ao, am ne' circoli FDO, Fdo, sicchè le corde BO, DM parti di quelle sieno respettivamente uguali a bo, dm parti di queste.

Digitalizzato da Google

PROP. XLIX. TEOR.

§. 269. *Posta la medesima legge di attrazione, se i corpicciuoli uguali* A, *ed* a *pongansi fuori le superficie sferiche attraenti* B N M, b n m, *e le loro distanze da' centri di esse sieno proporzionali a' semidiametri delle sfere; le forze, onde i medesimi corpicciuoli tenderanno a i centri delle sfere, saranno tra se uguali.* Fig. 32.

Dim. Sieno B N M, b n m due circoli massimi di esse sfere, che passino per A, ed a. E condotta ovunque nel primo di questi circoli la segante A B, si formi in a l'angolo c a b uguale a C A B, e di questi sieno B A D, b a d due uguali elementi. Si uniscano i raggi CD, e cd, e si calino D f, d f perpendicolari su di A C, ed a c.

E poichè dalla supposizione le distanze CA, ca son proporzionali ai semidiametri CD, cd delle sfere; e si è dalla costruzione adeguato l'angolo c a d all'altro C A D, saranno simili fra loro i triangoli C A D, c a d. Dunque le seganti A D, a d saran proporzionali ad essi raggi, e l'angolo D C F pareggerà l'altro d c f. Per la qual cosa avendo i due triangoli rettangoli D C F, d c f uguali cotesti angoli acuti, dovranno essere anche simili fra loro, e saranno i cateti D F, d f proporzionali alle ipotenuse C D, c d, cioè a' raggi delle sfere.

Digitalizzato da Google

Or essendo retti gli angoli CDB, cdb, che i raggi fanno colle circonferenze, ed essendo tra se uguali i due angoli CDA, cda de' triangoli simili CDA, cda; saranno i rimanenti angoli ADB, adb tra se uguali, ed i triangoletti DAB, dab simili tra loro, onde gli archetti DB, db saran proporzionali alle seganti AD, ad, cioè, come si è dimostrato, ai raggi CD, cd. Ma le zone sferiche generate dagli archetti DB, db rivolti intorno ad AC, ed ac sono proporzionali ad essi archetti, ed alle loro distanze dagli assi di rotazione (a); dunque le stesse armille saranno come i quadrati de' raggi CD, cd; e le forze, ond' esse trarranno i corpicciuoli A, ed a, essendo direttamente come le loro superficie, ed inversamente come i quadrati di AD, e di ad, saran tra di loro come CD^2 a cd^2, e come ad^4 ad AD^2, cioè in ragion di uguaglianza.

Ma l'attrazione, che l'armilla di DB esercita sul corpicciuolo A, sta alla di lui tendenza verso il centro C della sfera, come il raggio al seno dell'angolo ADF: ed in questa medesima ragione l'è pure l'attrazione esercitata dall'armilla di db sul corpicciuolo a alla tendenza, che in questo risultane verso del centro c. Dunque coteste tendenze de' corpicciuoli A, ed a ai centri C, e c delle sfere MNB, mnb, saranno tra se uguali.

La

(a) *Ved. not.* (a) §. 267.

Digitalizzato da Google

La qual cosa sempre dimostrandosi, sarà vero ciò, che ho proposto. C. B. D.

PROP. L. TEOR.

§. 270. *Poste le medesime cose del Teor. preced. se tutti i punti delle mentovate sfere tirino i corpicciuoli* A, *ed* a; *le tendenze di questi saranno come i raggi di quelle.*

DIM. Prendansi gli elementi N R, n r de' raggi, che sieno ad essi proporzionali; saranno le attrazioni, che i solidi N M Q R, n m q r producono ne' corpicciuoli A, ed a, come i numeri delle superficie sferiche, che in essi contengonsi, cioè come N R ad n r, o come N C ad n c. E ciò sempre dimostrandosi, sarà vero il Teorema. C. B. D.

§. 271. COR. Ed in questa stessa ragione saranno dalle sfere tirati i corpicciuoli A, ed a, quando questi sieno posti in N, ed n.

PROP. LI. TEOR.

§. 272. *Un corpicciuolo situato fuori di una sfera, i dieui punti il tirino con forze uguali, e decrescenti come i quadrati delle distanze, tenderà al centro della sfera con forza reciprocamente proporzionale al quadrato della sua distanza dal dilei centro.*

DIM. S'intenda la sfera divisa in infinite su-

Digitalizzato da Google

superficie sferiche concentriche fra loro; sarà l'attrazione, che ciascuna di esse esercita sul corpicciuolo, inversamente come il quadrato della distanza ch' ei tiene dal centro della sfera (268). Dunque l'attrazione esercitata da tutta la sfera sul corpicciuolo sarà inversamente come il quadrato della distanza di questo dal centro di quella. C. B. D.

§. 273. Cor. I. Se tutta la materia della sfera attraente intendasi raccolta nel dilei centro; l'attrazione, che in tal caso soffrirà il corpicciuolo, sarà come quella, che prima gliene recava l'intera sfera attraente.

§. 274. Cor. II. E se un corpicciuolo tiri ciascun punto di una sfera colla medesima legge di sopra esposta; la forza totale, onde questa tenderà al corpicciuolo, sarà inversamente come il quadrato della distanza di esso dal centro della sfera.

PROP. LII. TEOR.

§. 275. *Poste le medesime cose della proposizione precedente, un tal corpicciuolo intromesso nella sfera attraente tenderà al dilei centro, come la sua distanza da esso.*

Fig. 28. Dim. S'intendano due corpicciuoli uguali B, e b immersi entro la sfera D A F ad ineguali distanze dal centro C; e pe' punti B, e b si fac-

Digitalizzato da Google

faccian passare le superficie sferiche B P, b p. Egli è chiaro dalla prop. XLVII. che si equilibrino fra loro le attrazioni di ciascun superficie sferica contenuta nel solido A D F P B. Dunque niuna tendenza dovrà da questo solido prodursi nel corpicciuolo B, e la sola sfera interiore B P C sarà quella, che il farà tendere al suo centro. È per la stessa ragione l' altro corpicciuolo b tenderà al centro dell' altra sfera b p c, come se non vi fosse il solido b p A D F. Per la qual cosa essendo le attrazioni esercitate dalle sfere B P C, b p c su i corpicciuoli uguali B, b, come i loro raggi C B, C b (271); saranno in questa medesima ragione le forze, ond' essi tenderanno al comun centro di questa sfera. C. B. D.

§. 276. Cor. I. E quindi più corpi uguali situati fuori la superficie della nostra Terra, tenderanno al dilei centro con forze, che decrescono come i quadrati delle loro distanze dal medesimo centro. E que', che vi s' intromettono dentro di essa, anche ne graviteranno al centro terrestre, ma in ragion delle loro distanze dallo stesso centro.

§. 277. Cor. II. E di quì può conoscersi la verità delle tre Ipotesi di accelerazione, ch' Io rapportai nei §. 141, 142, 143.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LIII. PROP.

§. 278. *Se ciascun punto della sfera* ABD *tiri ciascun punto dell' altra* abd *con forza centripeta decrescente, come il quadrato della distanza; la sfera* abd *tenderà al centro* C *della prima inversamente come il quadrato di* Cc *distanza de' loro centri.*

Fig. 31.

DIM. S' intenda la massa della sfera ABD raccolta nel centro di essa C; sarà l'attrazione esercitata dalla sfera ABD in un punto a dell'altra, come quella che vi eserciterebbe il corpicciuolo C (273), cioè inversamente come il quadrato di Ca. Dunque il corpicciuolo C tira ogni punto della sfera abd inversamente come il quadrato della sua distanza da esso punto. E quindi essendo (274) la forza totale, onde la sfera abd tende al corpicciuolo C, inversamente come il quadrato di Cc, sarà puranche la tendenza della sfera abd nell'altra ABD inversamente come il quadrato di Cc. C. B. D. (*a*)

(a) Questi Teoremi si dimostrano in simil guisa dal Cav. Newton *nell. Sez. XII. Princ. Mat.* e parecchi Problemi affini veggionsi risoluti col metodo delle flussioni nella *Sez. XIII. Princ. Mat.*

Digitalizzato da Google

CAP. XI.

GENERALI CONSIDERAZIONI SUL MOTO DE' CORPI, CHE NE' MEZZI LIBERI SI AGGIRANO INTORNO AGL' IMMOBILI CENTRI DELLE FORZE.

PROP. LIV. TEOR.

§. 279. *Se al corpo* A *imprimasi una forza finita per la direzione* A B D, *mentr' ei tenda di continuo all' immobile centro* S *delle forze; il sentiero di tal corpo sarà curvilineo: giacerà nel piano delle rette* AD, AS: *e volgerà la sua parte concava allo stesso centro.* Fig. 33.

DIM. IL corpo A, se fosse animato dalla sola forza impressagli per A B D, progredirebbe equabilmente per la retta A D senza mai torcer cammino: e quindi disegnando A B quello spazietto, ch' ei percorre nel primo elemento di tempo; le retticciuole BD, D X, ec. uguali alla prima A B sarebbero percorse dal mobile A nel secondo elemento di tempo, nel 3°, nel 4°, ec. Ma appena ei giunge all'estremo B della prima retticciuola A B, che riceve una spinta verso il centro S delle forze, la quale valga a farlo discendere per uno spazietto B P in quello stesso tempo, che avreb-

Digitalizzato da Google

avrebbe colla sola forza d'impulsione descritta la B D. Dunque con entrambe queste forze ei dovrà equabilmente percorrere la B C diagonale del parallelogrammo B P C D, e nel medesimo tempo, che colla sola forza di proiezione avrebbene descritta la B D. Similmente se non vi fosse altra sollicitazione verso il centro S delle forze, il corpo seguirebbe il suo cammino per la retta B C R, descrivendo C R uguale a C B nel medesimo tempo, che C B. Ma replicandoglisi in C una spinta per C S, che valga a farlo discendere per C Q nello stesso tempo, in che avrebbe descritta la C R; è d'uopo che secondando queste due forze ei si guidi per la C N diagonale del parallelogrammo R C Q N, e così in appresso. E poichè la velocità acquistatasi dal corpo A nella discesa per B P l'è infinitesima rispetto a quella, che gli arreca la forza di proiezione (a), sarà B P infinitesima rispetto ad A B, e con ciò puranche C D infinitesima rispetto a B D. Dunque descrivendosi un cirtolo intorno al triangolo BDC, sarà l'arco sotteso da D C infinitesimo riguardo a quello, che da B C si sottende: e perciò l'angolo D B C sarà evanescente riguardo a

(a) La velocità iniziale di un grave cadente è sempre infinitesima rispetto a quella, ch' ei si acquisterebbe dopo un tempo finito: e quindi anche infinitesima riguardo alla velocità di proiezione, che si è supposta finita.

Digitalizzato da Google

a BDC, o al suo uguale ABS, e quindi sarà infinitamente ottuso l'angolo ABC. Collo stesso ragionamento proverassi, che sieno infinitamente ottusi gli angoli BCN, CNF,.ec. che tra se comprendon le rette infinitesime BC, CN, NF, ec. dunque sarà curvilineo il sentiero del corpo A, e'l sarà benanche concavo verso il centro S, poichè gli angoli ABC, BCN, CNF, ec. han le diloro aperture rivolte al punto S.

Or giacendo nel piano delle due rette DB, BS non meno il triangolo ABS, che l'altro BSC; saranno essi triangoli nel piano disteso per le rette AX, ed AS. La qual cosa potendosi in simil guisa dimostrare degli altri triangoli CSN, NSF, ec. la curva descritta dal proietto dovrà giacere nel piano delle rette ADX, ed AS, cioè della direzione della forza proiettile, e di quella retta, che passa pel centro delle forze, e per lo punto della proiezione. C. B. D. (*a*)

§. 280.

(a) L' Ill. Nevvton nella dimoſtrazione di queſto Teorema *Prop.* I. *Lib. I. Princip. Mat.* divide il tempo della rivoluzion del corpo non già in particelle infinitesime, come ſi è fatto quì ſopra, ma in parti finite, e tutte fra loro uguali: e poi ſuppone, che alla fine di ciaſcuna parte di tempo la forza centripeta agiſca nel proietto *unico impulsu*, *sed magno*. Il corpo (112) deve condurſi per le diagonali de'parallelogrammi *BPCD*, *CQNR*, *ec.*, i quali hanno tutti i loro lati di una magnitudine finita. Or ſupponendoſi, ſegue lo ſteſſo Autore, che creſca all' infinito il n. de' triangoli *ASB*, *BSC*,

Digitalizzato da Google

§. 280. DEF. XXXIV. La curva ABCNF dicesi *Orbita*, o *Trajettoria*; le rette SA, SB, SC, ec. si appellano *Raggi Vettori*; ed i triangoli mistilinei ASC, NSB, ec. diconsi *Aje descritte intorno al centro delle forze*.

§. 281. DEF. XXXV. Quella forza, con cui il proietto in ciascun punto della sua Trajettoria cerca scapparne per la tangente, suol dirsi *Tangenziale*; e quell' altra, che ritirandolo dalla tangente lo fa piegare nell' Orbita, si dice *forza Centripeta*, il di cui conato opposto *forza Centrifuga* si domanda (*b*).

§. 282. COR. I. Gli elementi AB, BC, CN ec. della Trajettoria ABCNF sono descritti in tempi uguali.

§. 283.

B S C, C S N, ec. i quali han per basi le diagonali di que' parallelogrammi; e che all' infinito s' impiccioliscano le loro basi; verran queste a costituire il perimetro di una curva, nella quale si volgerà il proietto, e la forza centripeta, che per intervalli di tempo erasi supposta replicar sul corpo le sue spinte, si renderà continua. Ma per l' intelligenza de' giovani vi aggiugnerei, che nel rendersi continua cotesta forza, le sue spinte successive non sieno più finite, ma di un' *infinitesima energia*.

(a) Aggirate una fionda colla vostra mano: osserverete, ch' ella in ogn' istante cerchi scapparne per la tangente, e che la vostra mano ne la debba incessantemente ritirare. La prima forza è la *tangenziale*, e l'altra è la *centripeta*. Ma poi v' è un' altra forza, cioè quella, onde continuamente si stira la corda, e che debb' esser contraria all' azion della vostra mano, e questa è la *centrifuga*.

Digitalizzato da Google

§. 283. Cor. II. Il sentiero, che descrivesi dal proietto intorno ad un immobile centro delle forze, non puol esser mai una *linea a doppia curvatura*, nè quivi può ritrovarsi *punto di flesso contrario*.

PROP. LV. TEOR.

§. 284. *Poste le medesime cose della prop. prec. i tempi, in che il proietto trascorre due archi qualunque* A B C, C N F *della sua Trajettoria* A C F, *son proporzionali alle aje corrispondenti* A S C, C S F *descritte intorno al centro* S *delle forze.*

E le velocità, ond' ei si muove in due qualunque luoghi B, *ed* N *della stessa Trajettoria, sono inversamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti de' medesimi punti* B *ed* N.

Dim. Par. I. Premesse le medesime cose della dim. prec. i due triangoli A S B, B S D sono uguali fra loro, e 'l sono benanche (*a*) questi altri due B S C, B S D. Dunque sarà il triangolo A S B uguale all'altro B S C. Nella stessa guisa dimostrasi, che gli altri triangoli C S N, N S F, ec. sieno uguali fra loro, ed uguali ai due primi A S B, B S C. Or gli elementi A B, B C, C N, N F ec. della Trajettoria A C F (282) son descritti in uguali particelle di tempo:

(a) *Prop.* 37. 38. *El.* I.

Digitalizzato da Google

dunque quante volte l'aja ASC contiene il triangolo ASB, altrettante volte il tempo per ABC dovrà contenere il tempo per AB: e quante volte l'altra CSF contiene il triangolo CSN, tante volte il tempo per CNF conterrà quello per CN: e quindi sarà l'aja ASC all' altra CSF come il tempo per ABC al tempo per CNF.

PART.II. I due elementi AB, CN della Trajettoria ACF sono a cagion della loro picciolezza descritti equabilmente; ma essi son altresì descritti in tempi uguali (282): dunque saran proporzionali alle velocità, onde muovesi il corpo ne' luoghi B, ed N. Or i medesimi elementi AB, CN, avvegnachè basi de' triangoli uguali ASB, CSN, sono inversamente come le di loro altezze, cioè inversamente come le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle rette AB, e CN, che son le tangenti dell' orbita ne' punti B, ed N. Son dunque le velocità del mobile ne' luoghi B ed N della Trajettoria, ch' ei descrive, inversamente come le perpendicolari menate dal centro delle forze sulle tangenti di essa ne' medesimi luoghi. C. B. D.

§. 285. DEF. XXXVI. La proporzionalità delle aje ASC, CSF, ec. ai tempi, in che si descrivono gli archi ABC, CNF, cc. dicesi *equabilità delle aje* (a).

§. 286.

(a) Giovanni Keplero, il di cui genio ſpingealo ſe.

Digitalizzato da Google

§. 286. DEF. XXXVII. Se la Trajettoria sia una curva, che torni in se stessa, il tempo, in che il corpo la descrive, si dirà *Tempo Periodico*.

sovente ad indagar armonie ne' moti de'corpi celesti, rinvenne tra le altre cose, che i Pianeti lassù ne' Cieli descrivano equabilmente le aje intorno al Sole, abbenchè si volgano con variabil moto nelle loro Trajettorie. Ma chi l' avrebbe creduto! questa equabilità delle aje l' è una legge universale, onde Natura tempera i moti de' corpi, che giran d' intorno ad immobili centri: ed era serbato al Geometra Inglese l'avvertirla, il dimostrarla *a priori*, e l' impiegarla come principio euristico per iscovrire i sintomi de' curvilinei movimenti. Nè poi vi farà maraviglia, perchè prima del Nevvton siasi nulla, o poco saputo di questi moti. In fatti il gran Galilei avea fissate le sue speculazioni al moto de' proietti, e l' acutissimo Ugenio erasi ristretto al solo esame delle forze centrifughe de' corpi, che volgonsi circolarmente.

Il *Principio delle aje*, che rinvenne il Cavalier d'Arcy, e che avendolo dimostrato egregiamente *nel Vol. dell. Real Acc. del. Scien. di Par. per l'an.* 1747. quivi l'impiegò a sciogliere alquanti Problemi Dinamici, non è che il presente Teorema Nevvtoniano reso più generale. Eccone la sua enunciazione: *A, B, C, ec. sia un sistema di corpi, che agiscan fra loro per attrazione, o perchè legati a fili flessibili, o a verghe inflessibili, o in altra guisa; sarà sempre la somma de' prodotti di ciascun corpo nell' aja, che il suo raggio vettore descrive intorno ad un centro fisso, proporzionale al tempo.* Lo stesso Autore proponendo questa verità in altro aspetto ne formò un Principio Metafisico, che disse *Conservazion dell' azione*; il quale non è, che identico al Principio *della Conservazion del momento nel moto di circolazione*, anteriormente adottato dai Signori Daniele Bernulli, ed Eulero. Vedi *Memoir. de l'Acad. des Scien. de Berl. an.* 1745., e *gli Opusc. di Eulero*.

Digitalizzato da Google

§.287. COR. Il tempo periodico di un corpo, che si volge nell'Orbita APS con forza centripeta tendente al punto C, è come il numero delle aje ACL, LCP, ec. ciascuna delle quali sia descritta in un dato tempo. Ma questo numero è come la magnitudine dell'intera Orbita APS direttamente, ed inversamente come la grandezza di una di quelle aje. L'è dunque il *tempo periodico per l'orbita* APS *direttamente come la sua grandezza, ed inversamente come quella dell'aja* ACL *descritta in un dato tempo*.

Fig. 38.

PROP. LVI. TEOR.

§. 288. *Poste le medesime cose delle prop. prec. le forze, onde il mobile ne' luoghi* B, *ed* N *vien ritirato dalle tangenti, e ritenuto nell'Orbita* ACF, *sono come le saette* Bt, Nr *degli archi minimi* ABC, GNF *descritti in uguali tempi*.

Fig. 34.

DIM. Se nel luogo B s'intendesse spenta la forza tangenziale del corpo A, egli lasciato a se liberamente dovrebbe discenderne al centro S per la BS: descrivendo lo spazietto BP nello stesso tempo, che AB. E supponendosi nello stesso mobile annullata la forza tangenziale, che lo agita nel punto N; ci dovrebbe di là calarne al centro delle forze per la retta NS, e descrivere il primo spazietto NL in

in quanto tempo avrebbe colla sola forza tangenziale descritta la NT, o colla tangenziale e colla centripeta insiem combinate percorsa la diagonale NF. Ma (282) sono uguali i tempi per AB, e per NF: dunque il saranno ancora quei delle discese per BP, ed NL. E quindi le forze centripete ne' luoghi B, ed N saranno fra loro nella ragione di questi spazj iniziali BP, NL (119): cioè, compiti i parallelogrammi BAPC, GLFN, come le loro metà Bt, Nr. C. B. D.

§. 289. Cor. I. Se i tempi, ne' quali descrivonsi gli archetti minimi ABC, GNF, non sieno uguali fra loro, come si è supposto qui sopra; le forze centripete ne' luoghi B ed N saranno direttamente come le saette Bt, Nr, ed inversamente come i quadrati de' mentovati tempi (119. n. 3.).

§. 290. Cor. II. Intanto i tempi per gli archetti ABC, GNF son come le aje ASC, GSF (284): e queste essendo duple de' triangoli BSC, NSF, son rispettivamente uguali a' rettangoli di BS in Cx, e di NS in Fz (intendendosi calate le perpendicolari Cx, Fz su di SB, e di SN). Dunque le forze centripete ne' luoghi B ed N saranno fra loro nella semplice ragion diretta delle saette Bt, Nr, e nell'inversa duplicata de' rettangoli di SB in Cx, e di SN in Fz.

§. 291. Cor. III. E volendo esprimere alla

Digitalizzato da Google

maniera degli Analisti la quantità della forza centripeta, che anima il mobile nel luogo B, si dirà, ch'ella sia uguale a $\frac{Bt}{SB^2 . Cx^2}$.

§. 292. SCOL. In queste tre proposizioni tre cose ho voluto generalmente definire: *la natura del sentiero, in che si piega il proietto: la qualità del suo moto: e la legge di quella forza, che ritirandolo continuamente dalle tangenti l'obbliga ad inflettersi nella Trajettoria*. E saran poi queste cose sufficientemente determinate nelle proposizioni de' Capi, che seguono.

PROP. LVII. TEOR.

§. 293. *Se il corpo* A *si volga nella Trajettoria* ABNF, *e le aje descritte intorno all' immobile punto* S *situato verso la parte concava di essa sieno proporzionali ai tempi; il punto* S *sarà il centro delle forze.*

Fig. 38.

DIM. Si prendano i due archetti contigui AB, BC, che però sieno infinitesimi, e descritti in uguali particelle di tempo: il primo di esso, che può considerarsi qual retticciuola, si prolunghi verso X, sicchè BD l'adegui: e poi si congiungan le rette BS, CS, DS, DC. Essendo AB, e BD uguali fra loro, i triangoli ASB, BSD saranno tra se uguali. Ma dall'Ipot. il triangolo ASB adegua l'altro BSC. Dunque sarà il triangolo BSC uguale all'altro

Digitalizzato da Google

tro B S D, e quindi (a) B S parallela a D C. Per la qual cosa designando il lato D B del parallelogrammo D B P C la forza tangenziale del mobile, e la diagonale B C quella, che si compone dalla tangenziale, e dalla centripeta, è d' uopo che l'altro lato B P dinoti la direzione, e l' attività della forza centripeta, onde il mobile ritirato dalla tangente torce il suo cammino nell' orbita. E conchiudendosi collo stesso ragionamento, che agisca per C S la forza centripeta nel luogo C; il centro delle forze dovrà risedere nel concorso delle due rette B S, C S, val quanto dire nel punto S. C. B. D.

§. 294. Cor. I. L'equabilità delle aje descritte intorno all' immobile punto S posto nella parte cava della curva A C F l' è un indizio sicuro, che ad esso tenda quella forza centripeta, con cui il corpo, che volgesi in tal curva, quivi n' è ritenuto. El centro delle forze dee stare nel concorso delle rette B S, C S, ec. per le quali n' è il corpo ritirato dalle tangenti.

§. 295. Cor. II. Che se un corpo si aggiri in una linea curva, e le aje descritte intorno ad un punto, ch' è verso la parte concava di lei, non sieno proporzionali ai tempi; esso punto non sarà mai il centro delle forze.

(a) *Prop. 40. Elem. I.*

Digitalizzato da Google

PROP. LVIII. PROBL.

§. 296. *Dato il rapporto delle velocità, onde un corpo si muove ne' tre luoghi* A, B, C *della sua Trajettoria* A B C, *determinare il centro delle forze.*

Fig. 35. n. 1.

Cost. I. Si tirino ai tre dati punti le rispettive tangenti A D, D E, E C: sarà data la loro posizione dall'esser nota la Trajettoria A B C, ed in essa i punti A, B, C anche dati. II. Si trovi in mezzo a queste tre tangenti il punto S, donde le perpendicolari abbassate su di esse sieno inversamente come le velocità in A, B, e C (*a*). *Sarà* S *il centro delle forze.*

Dim. S' è possibile sia un'.altro punto P il centro delle forze; saranno (284) le perpendicolari calate da P sulle sottoposte rette A D, D E, EC inversamente, come le velocità del mobile ne' luoghi A, B, C. Ma in questo rapporto son per costruzione le perpendicolari calate dal punto S sulle medesime rette. Dunque vi saran due punti in mezzo alle tre rette A D, D E, E C, donde le perpendicolari menate su di esse sien proporzionali a tre grandezze date. Lo che ripugna al cor. della cit. Pren. C. B. D.

PROP.

(a) *Prenoz. XV.*

Digitalizzato da Google

PROP. LIX. TEOR.

§. 297. *Se il corpo* A, *che tende all' immobile centro* S *delle forze, dal luogo* A *si proietti per la direzione* A B D *con una data forza; ei non potrà descrivere, che una sola curva determinata.* Fig. 35. n. 2.

DIMOST. S' è possibile, il corpo A gittato per la direzione A B D con una data forza descriva l' orbita A B Q, ed altra volta, che si proietti colle medesime condizioni, si pieghi nella Trajettoria A B N F. La retticciuola A B dinoti il primo, e 'l comune elemento di queste due orbite, e B Q e B N sieno due altri elementi delle medesime orbite contigui ad A B. Si prolunghi A B in D, fintantochè B D l' uguagli: e per D si conduca D N parallela a B S, che incontri le due orbite in Q ed N. Ciò posto, il corpo A appena giunto in B piegasi nell'orbita B Q L per l' azion di una forza valevole a farlo discendere per B P nello stesso tempo, onde colla forza di proiezione avrebbe percorso lo spazio A B (*a*). Ma quando deesi piegare nell'elemento B N della seconda orbita, la forza centripeta, che impiegasi a quest' uopo, debb' essere efficace a farlo calare in quello stesso tempo per la B R. Dunque la forza centripeta eserci-

(a) Vedi *il princ. dell. dim. Prop. LIV.*

Digitalizzato da Google

citata dallo stesso centro in un dato corpo è nello stesso luogo non sarebbe la stessa. Lo che ripugna. C. B. D. (a)

§. 298. Cor. Dunque due *curve osculatrici*, cioè tali, che abbiano comuni alcuni diloro elementi, non si posson descrivere intorno ad uno stesso centro di forze.

PROP. LX. TEOR.

§. 299. *Volgasi il corpo* A *nell'orbita* QAD *intorno all'immobile centro* S, *e l'altro* B *discenda allo stesso centro per la retta* MS, *e sieno tra se uguali le velocità, onde si muovano cotesti corpi ne' luoghi* A, e B *ugualmente distanti dal centro* S: *io dico, che negli altri luoghi de' loro sentieri ugualmente distanti dallo stesso centro debban essi pur anche avere velocità uguali.*

Fig. 36.

Dim. Prendasi l'archetto AD infinitesimo; e congiunte le rette SA, SD, col centro S, e cogl'intervalli SA, SD si descrivano gli archi

(a) Il luogo, donde si proietta un corpo, la velocità di proiezione, la direzione del moto, la quantità assoluta della forza centripeta, e la legge della quantità acceleratrice sono i cinque *Determinanti* dell'Orbita del proietto. Sicchè cangiandosi una di queste cose dovrà emergerne un'Orbita diversa o nella specie, o nella grandezza, o nella posizione.

Digitalizzato da Google

chì circolari A B, D F, che seghino Q S ne' punti B, ed F. E finalmente dal punto E si cali E G perpendicolare su di A D. E poichè i due spazietti A D, B F a cagion della loro picciolezza son descritti equabilmente da' corpi A, e B, i quali son dall' ipotesi ugualmente veloci ne' luoghi A, e B; saranno i medesimi spazietti (11) nella ragion de' tempi, in che da' mobili trascorronsi. E perchè gli stessi corpi son benanche ugualmente distanti dal centro S delle forze; dovran quivi esser sollecitati da uguali forze centripete, che si potran designare per le uguali retticciuole A E, B F.

Ciò premesso la forza B F tutta s'impiega ad accelerare il corpo B nella sua discesa rettilinea: e risoluta l'altra forza A E nelle sue laterali A G, G E, la sola A G dovrà accelerare il corpo A pe 'l sentiero A D: conciossiachè l' altra laterale E G si occupa a ritenerlo nell' orbita. Dunque le forze acceleratrici de' corpi A, e B sono fra loro nella ragione di A G a BF: e quindi gl' incrementi di velocità, ch'essi acquistansi ne' luoghi D ed F, essendo nella ragion composta delle mentovate forze, e de' tempi per A D, e per B F, saranno come (AG : BF) (A D : A E). Dunque come l' è d' uguaglianza la ragion (*a*) che si compone di queste due; così

(a) Per la Prop. 8. El. VI. sta *A G* : *A E* : : *AE*: *A D*: dunque sarà d' uguaglianza la ragion che si compone

Digitalizzato da Google

così quegl' incrementi di velocità saran pure tra se uguali. Per la qual cosa essendosi supposte uguali le velocità di cotesti mobili ne' luoghi A, e B, ed or mostrati uguali que'loro incrementi di velocità, che ricevono trascorrendo gli spazietti A D, B F, saranno altresì uguali quelle intere velocità, onde i medesimi mobili saranno affetti negli altri luoghi D, ed F equidistanti dal centro S delle forze. E così sempre dimostrandosi lo stesso assunto, sarà vero ciò che si è proposto. C. B. D.

§. 300. Cor. I. Qualor si volga il corpo A nell' orbita Q A D, e la sua velocità nel luogo Q sia quanto quella, ch' ei si acquisterebbe liberamente calando dall' altezza M Q; la velocità, che avrà questo mobile in un' altro luogo A dell'orbita, sarà uguale a quella, che gli conferirebbe la discesa per MB: intendendosi descritto il cerchio A B col centro S intervallo S A.

§. 301. Cor. II. Col centro S intervallo S M descrivasi il circolo M N, ed ogni raggio vettore nella divisata orbita si distenda, in sin che incontri la sua circonferenza; saranno le velocità del mobile ne' luoghi A, D, ec. della stessa orbita respettivamente uguali a quelle, che gli recherebber le discese per NA, PD, ec.

§. 302.

pone da *A G* ad *A E*, o a *B F*, e da *A D* ad *A E*. *Prem. III.*

Digitalizzato da Google

§. 302. DEF. XXXVIII. Questo circolo MNP dicesi *Linea di Sublimità*.

§. 303. COR. III. dunque le velocità, che si acquisterebbe un grave calando dalle altezze N A, P D, ec. sono inversamente come le perpendicolari menate dal centro S delle forze sulle tangenti dell' orbita ne' punti A, D, ec.

§. 304. COR. IV. Un grave proiettato dal luogo Q per la direzione Q K, e colla velocità, che si acquisterebbe calando per M Q, descriva l'orbita Q A D; egli è fuor di dubbio, che avventandosi questo grave dal luogo A per la tangente A L, e colla velocità acquistatasi per N A debba pur anche girne per la medesima Trajettoria.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXI. TEOR.

§. 305. *Se il punto* C, *ch' è un' immobile centro di forze, sia puranche il centro del circolo* P S, *e dentro di questa figura siavi descritta la curva* R a A *tale, che le perpendicolari calate dal centro* C *delle forze sulle tangenti de' punti* R, A, *ec. sieno inversamente come le velocità, che in tai luoghi si acquisterebbe un grave calando dalle altezze* P R, S A, *ec.; la curva* R a A *sarà il sentiero di questo grave, che da un suo punto* R *si proietterebbe per la tangente* R X *colla celerità acquistatasi per* P R.

Fig. 37.

DIM. Dal centro C delle forze si tiri una retta, come la C R, che seghi la curva obbliquamente, ovunque ciò ne addivenga: e l'angolo C R A, o C R X sia l'acuto de' due conseguenti.

Ciò premesso, se la curva R a A non sia il sentiero del grave proiettato dal luogo R per la tangente R X, e colla velocità da tal corpo acquistatasi per P R; l'altra curva R b B, che più di quella si accosti, o si allontani dalla loro comun tangente R X, siane cotesto sentiero. Si cali la retta C X perpendicolare sulla R X, che tagli in A quella di queste curve, che n'è al di fuori dell'altra: e poi preso l'archetto A a infinitesimo, si tiri la retta C a, e si

Digitalizzato da Google

e si descrivano col centro C intervalli C A, C a gli archi circolari A G, a g, i quali seghino l'altra curva in B, e b. E finalmente congiunte le rette C B, C b, e condotte ai punti a, e b delle due curve le tangenti a M, b N, su di queste si calino dal punto C le perpendicolari C M, C N.

E poichè dall' ipot. sta C M a C X, come la velocità acquistatasi da un grave nella discesa per P R a quella, ch'ei si acquisterebbe calando per s a, o per P g; ed in questa medesima ragione (303) l'è anche C N a C X; sarà C M: C X:: C N: C X, e C M uguale a C N. Dunque i due triangoli rettangoli C a M, C b N, che hanno uguali le loro ipotenuse C a, C b, ed i cateti C M, C N, avranno (a) uguali gli altri cateti a M, b N, e gli angoli C a M, C b N, o questi altri r a A, t b B. E quindi i due triangoletti r a A, t b B, che hanno uguali i lati a r, b t, e gli angoli r a A, a r A respettivamente uguali agli altri due t b B, b t B, dovranno avere pur anche uguali i lati A r, B t. Per la qual cosa essendosi mostrati uguali i due archetti circolari A r, B t, misure degli angoli A C r, B C t, saranno gli angoli A C r, B C t, o pur questi altri A C a, B C b tra se uguali. E questo potendosi dimostrar sempre, sarà l'angolo A C R uguale all'altro B C R: lo che è assurdo. C. B. D.

§. 306.

(a) *Prop. 47. ed 8. El. I.*

Digitalizzato da Google

§.306. SCOL. Ogni Problema, che sulle forze centrali si propone, o è *diretto*, o pur *inverso*. Nel primo *si vuol determinare la legge della forza centripeta, onde un corpo, che si volge in una data Trajettoria, ad un dato punto immobile ne tende*. E nell' Inverso poi si domanda *la natura, il sito, e la grandezza di quella curva, che descrivesi da un corpo tendente ad un' immobile centro, qualora ei si proietti da un luogo dato con una velocità data, e per una data direzione*. Il Teorema quassù dimostrato, ch' è converso del precedente, serve a compier rigide dimostrazioni al Problema inverso delle forze centrali, che andrò in certi casi risolvendo. E l' orditura del metodo, onde alla maniera Newtoniana risolvonsi i Problemi diretti, ho voluto per chiara intelligenza de' giovani quaggiù immediatamente rapportare (*a*).

PROP.

(a) Prima, che altrove io mi rivolga, non vò tacervi un' insigne proprietà delle Trajettorie rilevata dal Sommo Eulero, che giova nella serie delle scoverte affini quì rapportare.

Aristotile fin da' tempi suoi solea dire, che *Natura niente oprasse in vano*; ed i Filosofi dell' età recente gli han fatto ecco. L' Immortal Nevvton ha proferito nella I. Reg. di Filosofare, che *la Natura sia semplice, e non usi lusso nelle cagioni*: il Gran Leibnitz, ch' *ella segua il più facile cammino*; ed altri in diverse congiunture hanno ancor detto, che *non siavi nel mondo dispendio*, o *profusione di cause meccaniche*: *che i fenomeni naturali vengan su pe' sentieri più corti*: o *che nel menomo tempo si producano*. Ma chi mai colla luce della Geometria, e del Calcolo erasi accertato di que-

Digitalizzato da Google

PROP. LXII. PROBL.

§. 307. *Esporre il metodo Nevvtoniano, onde sinteticamente risolvesi il Problema Diretto delle forze centrali.*

I. Prendansi nell'orbita P Q q i due archetti infinitesimi P Q, p q descritti in uguali tempuscoli: e condotti ai loro estremi P, e p i rag- *Fig.* 45.

questa saggia economia della Natura? L' Ill. Sig. de Maupertuis Presid. della Real Acc. di Berlino fu il primo a saggiar con dell' Analisi, che il *Minimo d' Azione sia Suprema Legge dell' Universo*, da cui ogni altra o si temperi, o ne dipenda. In fatti dopo aver egli stabilito, che l' azione di un mobile si debba misurare dalla dilui massa nella velocità e nello spazio trascorso, dimostrò analiticamente, che *nell' urto de' corpi le forze si ripartiscan sempre fra di loro colla menoma quantità di azione*. II. Che *succedendo un picciol moto ne' corpi equilibrati, la quantità dell' azione sia sempre un minimo*. Il Valentuomo poi distese l' applicazione di questo principio a determinar le figure, e 'l sito, che prendono più corpi uniti fra loro, e da più forze animati. E si è conosciuto, *che una catena sospesa a' suoi estremi si debba sempre incurvare, sicchè il di lei centro di gravità ne giaccia più basso, che sia possibile: che un fluido riempiendo un vase flessibile debba dargli la più grande ampiezza, affinchè il suo centro di gravità sia nella massima depressione &c.* Intanto questo Principio è stato dal Cavalier d' Arcy oppugnato, e difeso dal Sig. Bertrand. *Vedi Att. dell' Acc. di Berlin. an* 1750.

Il Sommo Eulero immerso in simili pensieri rinvenne, *che nelle Trajettorie descritte da' corpi con forze centrali sia sempre un massimo, o un minimo* in-

Digitalizzato da Google

raggi vettori SP, Sp, e le tangenti PY, pγ, si tirino dagli altri di loro estremi Q, e q le rette QX, qx respettivamente parallele a queste tangenti, che incontrino que' raggi vettori in X, ed x. Saranno queste parallele QX, qx uguali agli archi PQ, pq. Imperciocchè per la 13. El. II. CP^2 è uguale a $BC^2 + BP^2 - 2PBx$ (intendendosi dal punto C calata Cx perpendicolare su di SB), e le due grandezze BP^2, e 2PBx son poi trascurabili rispetto a BC^2 per

Fig. 34.

integrale della celerità del mobile nell' elemento della curva. E 'l Principe degli Analisti il Sig. Luigi de la Grange promovendo questa scoverta Euleriana ne ha rilevato il seguente principio generale. *Se i Corpi M, M', M'', &c., i quali comunque agiscano fra loro, e si attraggano, descrivano in un tempo* t *gli spazj* S, S', S'', &c. *e le loro velocità finali sieno* u, u', u'', &c. *sarà sempre* $M\int u\,ds + M'\int u'\,ds' + M''\int u''\,ds'' +$ ec. *un Massimo, o un Minimo*. Vedi Eulero *nell' addiz. al Method. inven. lineas. curv. maxim. &c. e 'l II. Vol. Acc. Real di Turino*. Dunque le leggi de' fenomeni naturali si possono dall' Analista indagar per due vie, per quella cioè delle cause efficienti, e per l'altra delle finali. Nella prima basterà prendere i valori delle forze, e pareggiandoli coi loro effetti poi trarne con accortezza le leggi del moto. Ma in quella delle cause finali converrà prima calcolar sagacemente la quantità dell' azione del mobile, e poi adattarle il metodo de' Massimi, e de' Minimi. E' questo metodo, come v' è noto dal calcolo degl' Infiniti, alle volte restringesi a *determinare il valore di una variabile, di cui una certa Funzione sia un massimo, o un minimo*: e talvolta impiegasi per una più malagevole impresa, qual è *l' indagar quella curva, ove una certa funzione delle sue coordinate sia nel massimo, ovver nel minimo grado*.

Digitalizzato da Google

per essere BP una infinitesima (a. 279) della BC: dunque CP^2 sarà uguale a BC^2, e CP uguale a BC. E poichè gli archetti PQ, pq descritti in uguali tempuscoli dal corpo, che volgesi nell' orbita PQq, son come le velocità (8), ond' essi descrivonsi, cioè come Sy, ed SY perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti de'punti p, e P (284); sarà eziandio QX : qx :: Sy : SY, e $QX^2 : qx^2 :: Sy^2 : SY^2$. E sarà altresì PX a px come la forza centripeta in P a quella in p (288). *Fig.* 45.

II. Ciò premesso ecco le leggi del divisato metodo.

Si procuri dalle affezioni della curva data PQq determinare una funzione del raggio vettore SP, che sia proporzionale ad SY^2, ed un' altra del rettangolo SPX, che sia proporzionale a QX^2. Si troverà agevolmente PX a px, come una funzione di SP ad un' altra simile di Sp: e come queste (288) saran tra di loro le forze centripete in P, e p. C.B.D.

Questo, che ho quì generalmente indicato, ed in accorcio, si vedrà ne' Problemi del Capo seguente esibito in alcuni casi particolari, e a disteso.

Digitalizzato da Google

CAP. XII.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DIRETTO DELLE FORZE CENTRALI PER LE SEZIONI CONICHE.

PROP. LXIII. TEOR.

§. 308. *Volgasi il corpo* A *nel circolo* A P S *con forza centripeta tendente al di lui centro; dico esser costante la forza, che ritiene questo corpo in tal orbita, e ch' ei vi si debba muovere equabilmente.*

Fig. 38. *E se il medesimo corpo equabilmente si volga nella periferia del circolo* A P S, *la sua forza centripeta sarà diretta al centro della figura.*

PART. I. DIM. Si prendano i due archetti infinitesimi A L, L P descritti in uguali tempuscoli, e si congiungano i raggi C A, C L, C P: saranno tra se uguali i settori A C L, L C P (284): dunque l'archetto A L sarà uguale all'altro L P, ed A B saetta di questo pareggerà L E saetta di quello. E quindi la forza centripeta in A sarà dell'istessa attività di quella, ch' è in L (288). Ed essendo le velocità del mobile ne'luoghi L ed A, come le perpendicolari calate da C sulle tangenti di A e di L (284), cioè come i raggi C A, C L; saran quelle anche

tra

Digitalizzato da Google

tra se uguali. E quindi il corpo A si volgerà equabilmente nella periferia del circolo A P S.

PART. II. Prendansi gli archi uguali A L, L P, qualunque ne sia la loro grandezza; saranno essi per l'equabilità del moto del corpo A descritti in tempi uguali. Ma i settori ACL, L C P son pure tra se uguali (*a*): dunque il punto C, cioè il centro della figura, sarà il centro delle forze (293). C. B. D.

§. 309. COR. Allorchè un corpo si volge nella periferia di un circolo, *l' equabilità del suo moto, e la direzione della forza centripeta al centro della figura* son due cose sì strettamente tra loro unite, che da una di esse n' è sempre l'altra determinata. E quindi tanto è dire *volgasi equabilmente un corpo nella periferia di un circolo*, quanto *si aggiri un corpo nella periferia di un circolo con forza centripeta tendente al centro di esso*.

(a) *Prop. 33. El. VI.*

Digitalizzato da Google

PROP. LXIV. TEOR.

§. 310. *Se i corpi* A *ed* N *si volgano equabilmente ne' circoli* A P S, N M R; *le loro forze centripete sono in duplicata ragion diretta delle velocità, con cui vi si aggirano, ed in ragion inversa de' raggi de' circoli, che descrivono.*

Fig. 38. 39.

Dim. Gli archetti A T, M N, che supponganSi infinitesimi e descritti in uguali tempuscoli, sono come le velocità de'corpi A ed N: e le loro saette A F, N Q come le forze, che in A ed N, (284, 288) ritengon cotesti mobili ne'cerchi. Or l'archetto A T per la sua estrema picciolezza confondesi colla sua corda; dunque siccome il quadrato di questa pareggia il rettangolo S A F, così il quadrato di quello dovrà lo stesso rettangolo adeguare. E dimostrandosi per simil modo, che il rettangolo RNQ adegui il quadrato dell' archetto N M; sarà AT^2 ad NM^2 come S A F ad R N Q: val quanto dire $AT^2 : NM^2 :: (AF : NQ)(SA : RN)$, e quindi $AF : NQ :: (AT^2 : NM^2)(RN : SA)$. Cioè la forza centripeta in A sta a quella in N, come il quadrato della velocità del mobile A al quadrato della velocità del mobile N, e come il raggio G N di questo circolo al raggio C A di quello. C. B. D.

§. 311. Cor. I. *Che se i medesimi corpi con*

ugua-

Digitalizzato da Google

uguali velocità si aggirino nelle disuguali periferie APS, NMR; *le di loro forze centripete saranno inversamente come i raggi de' circoli, che descrivono.*

§. 312. COR. II. *E se mai in cerchi uguali si volgessero con disuguali velocità; nella duplicata ragione di queste saran le forze, ond' essi son ritenuti in tali orbite.*

§. 313. COR. III. *La velocità, con cui un corpo equabilmente si volge in un circolo, il raggio di questo circolo, e la forza che quivi lo ritiene,* sono tre cose talmente tra lor connesse, che ciascuna di esse può sempre dalle altre due determinarsi.

§. 314. *Dunque un corpo, che volgesi equabilmente con una velocità data in un cerchio dato, quivi vuol esserne da una data forza ritenuto.*

§. 315. *E se volgendosi un corpo in un dato cerchio, con una data forza siane al di lui centro ritenuto, la sua velocità debb' esser data.*

§. 316. Finalmente *qualora un corpo con una data velocità vada equabilmente radendo la circonferenza di un cerchio, ed una data forza quivi il ritenga, dovrà esser pur anche dato il raggio di esso cerchio.*

Digitalizzato da Google

PROP. LXV. TEOR.

§. 317. *Poste le medesime cose della prop. prec. tali forze saranno direttamente come i raggi de' circoli, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici.*

DIM. Le velocità, con cui i corpi A ed N equabilmente si volgono nelle periferie A P S, N M R, sono direttamente come le medesime periferie, o come i loro raggi, ed inversamente come i tempi periodici (15). Dunque i quadrati delle riferite velocità saran direttamente come i quadrati de' raggi, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici. E quindi essendosi mostrato nella prop. prec., che le forze centripete de' corpi A ed N sieno direttamente come i quadrati delle velocità, ed inversamente come i raggi; saranno le medesime forze direttamente come i quadrati de' raggi, inversamente come i quadrati de' tempi periodici, ed inversamente come i medesimi raggi, vale a dire direttamente come i raggi, ed inversamente come i quadrati de' tempi periodici. C. B. D.

§. 318. COR. I. *Che se i corpi* A ed N *si volgessero equabilmente ed in tempi uguali nelle periferie de' cerchi disuguali* A P S, N M R; *le loro forze centripete dovranno essere nella ragione de' raggi.*

§. 319.

Digitalizzato da Google

§. 319. COR. II. *E se i quadrati de' tempi periodici sieno come i cubi de' raggi ; le medesime forze centripete saranno inversamente come i quadrati de' raggi* ; imperciocchè sarebber queste direttamente come i raggi, ed inversamente come i cubi de' medesimi raggi (sostituendosi alla ragione de' quadrati de' tempi periodici quella de' cubi de' raggi), cioè a dire inversamente come i quadrati de' raggi.

§. 320. COR. III. Ed agevolmente può eziandio rilevarsi, *che, se ne' circoli le forze centripete sieno inversamente come i quadrati de' raggi, i quadrati de' tempi periodici esser debbano come i cubi de' raggi ; ed essi tempi periodici in sesquiplicata ragion de' raggi* (180).

PROP. LXVI. TEOR.

§. 321. *Se la velocità, ond' equabilmente si volge un corpo nella periferia del circolo* N D R *sia dovuta all' altezza* N V *metà del raggio ; la sua forza centripeta sarà quanto il peso, ch' egli avrebbe sulla nostra Terra.* Fig. 39.

DIM. Nella circonferenza del circolo N D R, si suppongan presi i due archi N M, N D, quello però infinitesimo, questo uguale al raggio N G : e le rette M O, e K dinotino que' spazj, che il mobile uniformemente animato dalla forza centripeta in N potrebbe trascorrere ne' tempi, in ch' ei si rivolge per gli archi N M, N D. Saranno quegli spazj, come i quadrati

Digitalizzato da Google

ti di questi tempi (110.2.), o degli archi NM, ND (9): vale a dire starà K: MO :: ND^2: MN^2. Ma per esser le rette MO, MN, NR continuamente proporzionali l'è ancora MO : NR :: MN^2 : NR^2. Dunque sarà *ex æquo* K: NR :: ND^2 : NR^2: e quindi essendo ND^2, o NG^2 una quarta parte di NR^2, sarà pure la retta K un'quarto dell'altra NR, cioè quanto NV. Ma tanto tempo v'impiega un grave a calare per NV col suo peso, quanto vi porrebbe (153. n.3.) a descrivere equabilmente la ND colla velocità dovuta all' altezza NV. Dunque gli spazj K, ed NV sono uguali, e descritti in tempi uguali dallo stesso grave, che supponesi uniformemente animato or dalla sua forza centripeta, ed ora dalla gravità terrestre. Per lo che il peso del mobile N sarà quanto la forza centripeta, che nel divisato circolo lo ritiene (113). C. B. D.

Fig. 38. 39. §. 322. Cor. Ne'cerchi uguali NDR, APS volgansi equabilmente due corpi uguali N, ed A colle velocità dovute alle altezze NV ed X; saranno le loro forze centripete (312) come i quadrati di queste velocità, vale a dire (153.n.1) come NV ed X. Ma la forza centripeta del corpo N è uguale al di lui peso, e la massa del corpo N è quanto quella dell' altro A. Dunque *il peso, che avrebbe un corpo sulla nostra Terra, sta alla forza centripeta, con cui equabilmente in un dato cerchio si rivolge, come la*

Digitalizzato da Google

la metà del raggio di esso cerchio all' altezza dovuta alla velocità del suo moto (a).

PROP. LXVII. TEOR.

§. 323. *Volgendosi il corpo* A *nell' orbita* B A a *intorno all' immobile centro* S ; *le forze centripete in* A, *ed* a *sono tra loro nella diretta ragione de' raggi vettori* S A, S a, *nell' inversa de' raggi de' circoli osculatori* F A, f a, *e nell' inversa triplicata delle perpendicolari* S R, S r *calate dal centro delle forze sulle tangenti dell' orbita ne' punti* A, *ed* a. Fig. 40

Dim. Si prendano gli archetti infinitesimi A B, a b descritti in uguali tempuscoli, e si tirino le rette B D, b d respettivamente parallele ad A R, ed a r. E poichè le rette A F, ed

(a) La Propoſizione converſa di quella, che ſi è in queſto Corollario enunciata, l' è anche vera: cioè *ſe il corpo* N, *che tende all'immobile centro* G *come una qualunque potenza della diſtanza* G N, *ſi proietti per la direzione* N O *perpendicolare a* G N, *e l' altezza dovuta alla velocità di proiezione ſia alla metà della ſteſſa* G N, *come la forza centripeta in* N *alla gravità terreſtre ; ei deſcriverà ſempre un cerchio il di cui centro è* G. Dunque volgendoſi un corpo nella periferia di un cerchio con forza centripeta tendente al di-lui centro, potrà ſolo ſaperſi, che quivi n' è da per tutto con ugual forza coteſto mobile ritenuto ; ma non ſi potrà mai conoſcer la legge della forza centripeta, che tende ad eſſo punto.

Digitalizzato da Google

ed S R sono perpendicolari alla stessa R A, e quindi tra se parallele, i loro angoli alterni D A C, A S R saranno tra se uguali. Dunque i due triangoli rettangoli C A D, A S R saranno equiangoli, e simili: ed essendo AD: AC:: SR: S A, sarà il rettangolo di S A in A D uguale a quello di S R in C A. Con simile ragionamento si prova esser il rettangolo di S a in a d uguale all'altro di S r in c a: dunque saranno i rettangoli di S A in A D, e di Sa in a d in ragione composta di S R ad S r, e di C A a c a: e quindi sarà vicendevolmente CA a c a in ragion composta del rettangolo S A D all'altro S a d, e di S r ad S R (a), cioè a dire C A : c a : : (S A : S a) (D A : d a) (S r : S R)

Or le retticciuole D A, e d a son come le forze centripete ne'circoli osculatori; e queste fra loro (310) come i quadrati delle velocità, onde si volge il mobile ne'luoghi A, ed a, e come f a ad F A cioè come Sr^2 ad SR^2 (284) e come f a ad F A. Dunque sostituendo in luogo della ragione di A D ad a d la composta di Sr^2 ad SR^2, e di f a ad F A; avrassi A C: a c :: (S A : S a) (Sr^2 : SR^2) (f a : F A) (S r : S R), val quanto dire A C : a c : : (S A : S a) (f a : F A) (Sr^1 : SR^1). E quindi (288) le forze centripete ne'luoghi A, ed a saranno direttamente come i raggi vettori S A, ed S a, inversamente come i raggi de' circoli osculatori, ed inversamente come

(a) *Pren. IV.*

Digitalizzato da Google

come i cubi delle perpendicolari SR, e Sr.
C. B. D.

§. 324. COR. Dunque, *se la quantità della ragione del raggio vettore* SA *al raggio dell'oscolo* FA *dividasi pe'l cubo della perpendicolare* SR *calata dal centro* S *delle forze sulla tangente del punto* A; *il quoto darà l'energia della forza, onde un corpo, che volgesi nell'orbita* ANa, *n'è ritenuto nel luogo* A.

§. 325. SCOL. Questo Teorema, che Abramo de Moivre insigne Analista Inglese dimostrò egli il primo, piacque oltremodo all'acutissimo Gio: Bernulli, e ad altri Matematici di Europa: perciocchè in quantità finite esprime il valor della forza, onde ad un'immobile centro vien ritenuto quel corpo, che giragli d'intorno. Egli è vero, che nell'enunciazion di questo Teorema non vi sia grandezza infinitesima, che lo inviluppi; pur non dimeno nell'analitica espressione, cui sovente giova sottoporlo, sorgon tosto que' differenziali di II. ordine, che nel valore annidavansi del raggio del cerchio osculatore. Dunque par che la formola Moivreana non sia più semplice della Newtoniana, nè diversa da questa: e massime da ch'ella può trarsi immediate dalla Prop. VII. *de' Prine. Mat.* Ciò non pertanto i Problemi sulle forze centrali per mezzo della formola Moivreana subito convertonsi in analitici: ed in certi casi le dimostrazioni al

Pro-

Digitalizzato da Google

Problema Diretto riescono più agevoli, ed eleganti (*a*).

§. 326. ESEMP. Volgasi il corpo R nel circolo A R Q intorno al punto S, che non sia centro della figura. In due punti qualunque R ed r di quest' orbita si tirino le tangenti R P, r p, i raggi vettori S R, S r, e le perpendicolari S P, S p su di esse tangenti, e prolungata R S in Q, si tiri per lo centro la retta Q A, e si unisca R A. Ciò supposto, l'angolo S R P è uguale ad R A Q (32. El. III.): dunque i due triangoli rettangoli S R P, Q R A saranno simili fra loro, ed essendo S P: S R :: Q R: Q A, sarà il rettangolo Q R S uguale al rettangolo della perpendicolare S P nel diametro Q A. Con simil ragionamento si rileva il rettangolo di S p in Q A uguale al rettangolo q r S: dunque sarà S P ad S p come il rettangolo Q R S all' ultro q r S, cioè in ragion composta di Q R a q r, e di S R ad S r, e con ciò S P² ad S p² in ragion composta di Q R² a q r², e di S R² ad S r². Or essendo le forze centripete in R ed r direttamente come i raggi vettori, ed inversamente come i cubi delle perpendicolari (poichè i raggi osculatori sono nel circolo sempre uguali a' raggi della figura); esse saranno fra loro come S R ad

Fig. 41. *n.* 1.

(a) Il Cavalier Nevvton avea anteriormente ritrovata una verità affine a queſta, che ſi è quì moſtrata, come l'atteſta lo ſteſſo Moivre.

Digitalizzato da Google

ad Sr, come qr' a QR', e come Sr' ad SR', cioè come qr' a QR', e come Sr' ad SR'. Vale a dire le forze centripete, onde vien ritenuto nel circolo ARQ il mobile A, che tende al punto S diverso dal centro, sono in triplicata inversa ragione delle corde, che passano pe 'l centro delle forze, e per esso mobile, e in duplicata inversa dei raggi vettori.

§. 327. Cor. E se il centro S delle forze all' infinito si discosti dal diametro AB, i raggi vettori SR, ed Sr diverranno tra se uguali, e paralleli: dunque in tal caso *le forze centripete ne' luoghi* R *ed* r *saran fra loro come i cubi delle corde* qr, e QR, *o come i cubi di* tr, *e di* TR. *Fig.* 41. *n.* 2.

PROP. LXVIII. TEOR.

§. 328. *Se nell' orbita* ABO *si prenda l' archetto* Bb *infinitesimo; la forza centripeta, onde il corpo è ritenuto al centro* S, *sarà direttamente come la differenza delle perpendicolari calate da* S *sulle tangenti di* B, e b, *inversamente come la differenza de' raggi vettori* SB, Sb, *ed inversamente come il cubo della perpendicolare calata da* S *sulla tangente di* B. *Fig.* 42.

Dim. Descrivasi il circolo LBq osculatore dell' orbita in B, cioè, che sia ugualmente cur-

Digitalizzato da Google

curvo, che l'archetto B b: e prolungati i raggi vettori B S, b S in sin che tocchino le circonferenze del circolo in Q, e q, dinoti B R la differenza di essi raggi vettori, e P O quella delle perpendicolari. E poichè (3.El.II.) i rettangoli QBS, q b S sono respettivamente uguali a $QSB + SB^2$, e $qSb + Sb^2$, sarà la differenza di que' rettangoli uguale alla differenza de'soli quadrati di S B, e di S b (conciossiachè per la natura del circolo il rettangolo Q S B è uguale a q S b) cioè uguale a 2 S B R. Ma essendo i medesimi rettangoli Q B S, q b S rispettivamente uguali a' rettangoli del diametro Q L nelle perpendicolari calate da S sulle tangenti di B, e b (326); la differenza di quelli dovrà pareggiare il rettangolo di Q L in PO differenza di queste perpendicolari. Dunque sarà 2 S B R uguale a Q L in P O, ed S B R uguale a C L in P O. Sicchè la ragione di S B raggio vettore a C L, o C B raggio dell' osculo sarà uguale a quella di PO a BR: e quindi nell' espressione della forza centripeta recata nel cor. prop. LXVII. sostituendo questa ragione in luogo di quella, sarà l'attività di essa forza nel luogo B come la quantità della ragione di P O a B R applicata al cubo di S P, cioè direttamente come P O differenza delle perpendicolari menate dal centro delle forze sulle tangenti di B, e b, inversamente come la differenza de'raggi vettori S B, S b, ed inversamen-

Digitalizzato da Google

mente come il cubo della perpendicolare S P C. B. D. (*a*)

PROP.

(a) Niuna cosa tanto avviluppa i giovani Analisti, quanto il condurre saggiamente que' calcoli, ove contengonsi grandezze meccaniche di diverso genere, ed agli usi pratici poi adattarne i risultati loro. Or queste grandezze non son, che cinque, *lo spazio*, *il tempo*, *la velocità*, *la forza spingente*, *e la massa*; che per intenderle bene giova por mente alle loro *misure* ed alle *unità*, cui da' Fisici soglionsi rapportare.

1. *La misura dello spazio, il quale è una linea, ben si comprende dalle nozioni di Geometria.*

2. *L' unità del tempo, come udiste altrove* (a. §.16), *non è che il minuto secondo del giorno solare medio.*

3. *La velocità più comodamente misurasi dallo spazio corso equabilmente in un secondo, che per l' altezza dovutale.*

4. *Le forze spingenti deggionsi esibire per i pesi, che loro sono uguali.* Imperciocchè essendo i pesi, e le forze spingenti grandezze omogenee, si potran queste dinotar per quelli.

5. Finalmente *la Massa di un corpo esprimesi per lo peso, ch' egli avrebbe sulla nostra terra.* E ciò si concede dall' esser le masse de' corpi come i pesi loro.

6. Dunque 1. se P dinoti il peso della massa M, sarà sempre $P : M = 1$. E quindi 2. la formola esibita nella (b) §. 115, si cangerà in quest' altra $v = \theta \int dt = \theta t$. Con che se pongasi $t = 1''$, *e g* sia l'altezza, che da un grave percorresi naturalmente in un secondo; sarà $2g$ la velocità dovuta a quest' altezza. E sostituendo nell' equazione $u = \theta t$ le grandezze $2g$ ed $1''$, in luogo di u e di t, avrassi $2g = \theta$. 3. Di più riducendo le forze a pesi terrestri, converrà nelle formole, ove si è posto θ per coefficiente indeterminato, scriver $2g$. 4. Finalmente nelle formole così preparate non vi saranno, che numeri, e linee: e da ciò potrà conoscersi se i termini di co-

Digitalizzato da Google

PROP. LXIX. TEOR.

§. 329. *Volgasi il corpo* A *nella Parabola conica* S A s *con forza centripeta tendente al fuoco* C *della figura : dico esser le velocità del mobile ne' luoghi* S, *ed* s *in sudduplicata ragione inversa de' raggi vettori* C S, C s.

Fig. 43.

E qui-

teste equazioni sieno tra loro omogenei, come si conviene, o pur eterogenei.

7 A questa condotta di calcolo propostaci dal Sommo Eulero *Theor. Mot. Corp. Rig.* è affine la seguente regola, che ne ha data l' acutissimo Sig. de la Grange *Mechan. Anal. Part. II. Sect. 2. Prendasi per unità delle forze la gravità terrestre, e 'l minuto secondo per l' unità del tempo ; sarà lo spazio, trascorso in un secondo da un grave cadente, l'unità degli spazj, e la dilui velocità finale, l' unità delle velocità.* Dunque l' unità degli spazj sarà pied. paris. 30, 169 : e volendoci servire di un n. esatto, ella sarà 250. scrup. renan.

8. Premesse queste cose, le rette $S A$, $F A$, $S R$, cioè il raggio vettore, il raggio dell' oscolo, e la perpendicolare calata sulla tangente si dicano R, r, p, ed F la forza centripeta in S ; si avranno in virtù del Teorema Moivreano, e di quello del Sig. Keil esibiti ne' §§. (323, 328) le seguenti equazioni

$$\text{I. } F = \frac{R}{r\,p^3} \qquad \text{II. } F = \frac{\frac{d\,p}{p^3}}{d\,R}$$

con ciascuna delle quali si potrà risolvere il Problema diretto, e l' inverso delle forze centrali. Vedi Keil *de Virib. Central.* Varignonio *Act. dell' Acc. delle Scienz.* an. 1700, 1701. Eulero *Mechan. Cap. V.* Rolli *de mot. Corp lib. II.*

9. Ma ecco un metodo universale per risolver questi Problemi, ancorchè la forza centripeta non sia diretta ad un punto. Si rapporti il moto del corpo M a due direttrici

Digitalizzato da Google

E quivi le forze centripete sono in duplicata ragion inversa de' medesimi raggi CS, Cs.

PART. I. DIM. Dall' umbilico C si calino le perpendicolari CG, Cg sulle tangenti dell'Orbita

trici rettangole, e si dicano x, ed y le coordinate dell' orbita parallele ad esse: sia r il corrispondente raggio d' oscolo, ed u la velocità, onde il mobile trascorre lo spazietto ds nel tempuscolo dt. Facciasi $dy = p\,dx$, sarà $ds^2 = dx^2 + dy^2$; e quindi $ds^2 = dx^2(1+pp)$. Laonde essendo $ds^2 = vv\,dt^2$, sarà $vv\,dt^2 = dx^2(1+pp)$, e con ciò

$$(dt^2) : dx^2 = (1+pp) : vv \qquad A$$

Ma l' è ancora $r = -ds(1+pp) : dp$, com' è noto dal calcolo differenziale: dunque sarà

$$dp = -\frac{ds}{r}(1+pp) \qquad B$$

Or essendosi fatto $dy = p\,dx$, sarà $ddy = p\,ddx + dp\,dx$: e quindi sostituendo in questa equazione i valori di ddx, e di ddy, che sono (a. 241) respettivamente $2gP\,dt^2 : M$, e $2gQ\,dt^2 : M$, e fatte le dovute riduzioni, avrassi

$$dp = 2g\,dt^2(Q\,dx - P\,dy) : M\,dx^2$$

e sostituendo il valore di $dt^2 : dx^2$ ritrovato nell'equazione A, dovrà emergerne

$$dp = \frac{(1+pp)}{Mvv}(Q\,dx - P\,dy)\,2g \qquad C$$

E finalmente pareggiando i secondi membri dell'equazioni B, e C, e riducendole convenevolmente, si avrà

$$Mvv\,ds = 2gr(P\,dy - Q\,dx) \qquad D$$

E nella not. a §. 241 ponendo $R = 0$, e $\theta = 2g$, otterrassi

$$Mv\,dv = 2g(P\,dx + Q\,dy) \qquad E$$

Con queste due equazioni D, ed E esprimesi adeguatamente il moto del corpo, e con facilità se ne indagano i suoi sintomi.

10. Se il grave M si aggiri in un cerchio, il di cui rag-

Digitalizzato da Google

bita in S, ed s; saran quelle (a) in suddupli-cata ragione de' corrispondenti rami CS, Cs. E quindi essendo le velocità del mobile ne' luoghi S, ed s della Trajettoria SAs inversamente come siffatte perpendicolari (284); esse saranno nell' inversa sudduplicata ragione de' rami

raggio sia $2g$, e la velocità del suo moto sia dovuta a g; questa dovrà esprimersi per $\frac{2g}{1^{u}}$ il suo quadrato per $4g^2$, e la sua forza acceleratrice sarà 1. Si concepisca, che lo stesso corpo M movendosi in una qualunque curva abbia in un punto di essa, il dicui raggio d' oscolo sia r, la velocità v: e si chiami N la forza normale, e la forza tangenziale T; dovrà essere la quantità acceleratrice della forza $N = \frac{N}{M}$ e quindi (310) sarà

$$1 : \frac{N}{M} :: (4gg : vv)\ (r : 2g) \text{ e con ciò}$$

$$Mvv = 2gNr \qquad F$$

Ed è poi (c. 124) $Mvdv = 2gTds$ G

Dunque con queste due formole $Mvv = 2gNr$, ed $Mvdv = 2gTds$ potrà investigarsi lo stesso moto.

Dunque la forza normale sarà $(Pdy - Qdx) : ds$, e la Tangenziale $\frac{Pdx + Qdy}{ds}$; come può rilevarsi confrontando l' equazioni F, e D, e le altre G ed E.

(a) Prodotto l' asse CA della Parabola SAs, finchè incontri in N la tangente SG, le si conduca la tangente verticale AG. Sarà chiaro dalla *Prop.* 16. *lib. I. Con. del Giann.*, che la congiunta CG sia perpendicolare ad NS: il perchè essendo simili (8. *El. VI.*) i due triangoli ACG, NCG, sarà CG^2 ugnale ad NCA, o ad $SC . CA$ (*Cor. I. Prop.* 18. *Lib. I. Con. Giann.*). E dimostrandosi nella stessa guisa esser $Cg^2 = sC . CA$, sarà $CG^2 : Cg^2 :: SC : sC$.

Digitalizzato da Google

rami CS, Cs, cioè de'raggi vettori, che passano pei punti S, ed s.

PART. II. Intendasi praticata la costruzione del Probl. LXII. e per S, ed s conducansi i diametri della parabola ST, st, che incontrino QR, e qr in T, e t. Ciò posto, essendo di finita grandezza (a) gli angoli del triangolo RST, ed RS infinitesima rispetto ad RQ (307); il sarà benanche RT infinitesima rispetto ad RQ; onde sarà QT quasi uguale a QR. E quindi siccome il quadrato di QT (b) adegua il rettangolo di 4CS in ST, o di 4CS in SR, così a questo rettangolo sarà puranche uguale il quadrato di QR. Con simil ragionamento rilevandosi qr^2 uguale a 4Cs in sr; sarà CS.SR : Cs.sr :: QR^2 : qr^2. Ma si è nella I. Par. dimostrato esser CG^2 : Cg^2 :: CS : Cs, e pel §. 307. è CG^2 : Cg^2 :: qr^2 : QR^2. Dunque sarà ancora CS.SR : Cs.sr :: Cs : CS : e quindi (c) SR : sr :: Cs^2 : CS^2 : cioè le forze centripete ne' luoghi S, ed s in duplicata ragion inversa de' raggi vettori. C. B. D.

§. 330. COR. Dalla I. Par. di questo Teore-

(a) Questo non si avvera, quando il punto *S* sia viciniſſimo al vertice principale della Parabola. Ma in tal caſo combaciando il ramo *CS* coll' aſſe, ſarà *RT* evaneſcente, e *QR* uguale a *QT*.

Lo ſteſſo deeſi intender nell' Elliſſe Prop. LXXI.

(b) *Prop.* 18. *Lib. I. Con. Giann.*

(c) *Pren. IIII.*

Digitalizzato da Google

ma rilevasi, che i quadrato-quadrati delle velocità del mobile sieno inversamente come i quadrati de' rami. Dunque saranno per la II. Par. *le forze centripete di un corpo, che volgesi nella Parabola ritenuto al dilei fuoco, come i quadrato-quadrati delle velocità di esso.*

PROP. LXX. TEOR.

§. 331. *Se un corpo si rivolga nell' Ellisse* QBR *con forza centripeta tendente al centro* A *della figura; le velocità ne' luoghi* Q, *e* C *son proporzionali a' semidiametri* AK, AT *conjugati a quei, che passano pe' punti* Q, *e* C.

Fig. 44.

E le forze centripete ne' medesimi luoghi Q, *e* C *sono come i semidiametri principali* AQ, AC.

Part. I. Dim. Il parallelogrammo compito da' semidiametri conjugati QA, AK è uguale a quello, che si formerebbe dagli altri due CA, AT (*a*). Dunque dovendo cotesti parallelogrammi reciprocar le basi, e le altezze loro; sarà AK ad AT, come la perpendicolare calata dal punto A sulla tangente di C all'altra, che da A si menerebbe sulla tangente di Q; vale a dire (284) come la velocità in Q alla velocità in C.

Part. II. Si prendano gli archetti QM, e BC infinitesimi, e descritti in uguali tempuscoli

(a) *Prop. 15. Lib. II. Con. Gionn.*

Digitalizzato da Google

scoli, e si ordinino su i diametri QR, CS le rette MP, BE; saranno queste (307) proporzionali alle velocità in Q, e C, cioè (per la I. parte) alle rette AK, AT. Laonde essendo MP: BE:: AK: AT, sarà $MP^2 : BE^2 :: AK^2 : AT^2$, e permutando $MP^2 : AK^2 :: BE^2 : AT^2$. Ma per la natura dell'Ellisse la prima di queste ragioni pareggia quella del rettangolo RPQ, o del suo uguale RQP (essendo QP evanescente) al quadrato di AQ, cioè alla ragione di 2PQ ad AQ (*a*). Ed è similmente l'altra ragione di BE^2 ad AT^2 anche uguale a quella di 2CE ad AC: sarà dunque 2BQ: AQ:: 2CE: AC: cioè PQ: CE:: AQ: AC. Val quanto dire le forze centripete in Q, e C, cui son proporzionali PQ, e CE (288), sono tra di loro, come i semidiametri AQ, AC. C. B. D. (*b*)

(a) 1. *El. VI.*

(b) Sieno *QKR*, *qkr* due Ellissi descritte da' mobili *Q*, e *q* intorno al punto *A* comun centro di esse: ed accanto agli estremi *Q*, e *q* degli assi *QR*, *qr* si prendano gli archetti *QM*, *qm* descritti in uguali tempuscoli, ed agli stessi assi si tirino le semiordinate *MP*, *mp*, ed i semiassi conjugati *AK*, *Ak*. Si conchiuderà colla guida della dimostrazione di questo Teorema esser le semiordinate *MP*, *mp* come i semiassi *AK*, *Ak*. Dunque i due triangoletti *AQM*, *Aqm*, che sono in ragion composta di *QA* : *qA*, e di *MP* : *mp*, saranno in ragion composta di *QA* : *qA*, e di *KA* : *kA*, cioè come l'Ellisse *QKR* all'altra *qkr*. (*Cor.2. Prop. 35. Lib.II. Con. Gian.*) E quindi i tempi periodici per quest' Ellissi, essendo direttamente come le loro aje, ed inversamen-

Digitalizzato da Google

PROP. LXXI. TEOR.

§. 332. *Se un Corpo si volga nel perimetro dell' Ellisse* P D d *con forza centripeta tendente al fuoco* S *di tal figura; le velocità, ond' ei si muove ne' luoghi* P, *e* p, *sono direttamente come i semidiametri conjugati a que', che passano pe' medesimi punti* P, *e* p, *ed inversamente come i raggi vettori* S P, S p.

Fig. 45.

E le forze centripete ne' luoghi P, *e* p *sono in duplicata ragione inversa de' medesimi raggi vettori* S P, S p.

DIM. PART. I. S' intenda fatta la costruzione esibita nel Probl. LXII., e si calino da S le perpendicolari S Y, S y sulle tangenti P Y, p y, e si conducano i semidiametri C D, C d conjugati agli altri due C P, C p. E poichè C D è parallela a P Y, sarà S P : P E :: S Y : N Y : e quindi il rettangolo di S P in N Y uguale all' altro di P E in S Y. Nella stessa maniera dimostrandosi tra loro uguali i due rettangoli di S p in n y, e di p e in S y; sarà il rettangolo di P E in S Y all'altro di p e in

mente come quelle di cotesti triangoletti (287), saranno uguali fra loro. Dunque *sono uguali i tempi delle rivoluzioni fatte nell' Ellissi intorno al diloro comun centro*,

Digitalizzato da Google

in Sy, cioè SY ad Sy (*a*), come il rettangolo di SP in NY a quello di sp in ny, val quanto dire in ragion composta di SP ad Sp, e di NY ad ny. Ma questa seconda ragione è uguale a quella di Cd a CD (*b*). Dunque sarà SY ad Sy in ragion composta di SP ad Sp, e di Cd a CD. E quindi essendo le velocità, ond'è affetto il mobile ne' luoghi P, e p della Trajettoria PDd, inversamente come (284) le perpendicolari SY ed Sy, saran quelle direttamente come CD a Cd, ed inversamente come i raggi vettori SP, Sp.

Dim. Part. II. Essendo a cagione de' triangoli simili EPC, XPV, la ragione di EP a PC uguale a quella di PX a PV; sarà la ragion, che si compone di queste due, duplicata di una di esse. Dunque sarà EPX a CPV ovvero 2EPX a 2CPV come PE^2 a PC^2, e permutando $2EPX : PE^2 :: 2CPV : PC^2$. Ma la prima di queste due ragioni è identica a quella di 2PX a PE; e la seconda è per la natura dell'Ellisse uguale alla ragione di QV^2 a CD^2: sarà dunque $2PX : PE :: QV^2 : CD^2$. Or essendo (*c*) PE uguale a pe, e dimostrandosi nella stessa guisa esserne $pe : 2px :: Cd^2 : qu^2$, sarà (*d*) PX : px ::

(a) *Cor. 7. Prop. 29. Lib. II. Con. Giann.*
(b) *Prop. 15. Lib. II. Lo stess.*
(c) *Cor. 7. Prop. 29. Lib. II. Con. Giann.*
(d) *Prem. I.*

Digitalizzato da Google

$px :: (QV^2 : CD^2)(Cd^2 : qu^2)$, cioè (a) $PX : px :: (QV^2 : qu^2)(Cd^2 : CD^2)$. Or essendo finiti gli angoli del triangolo PVX, tutti i lati di esso saran grandezze dello stesso ordine: e quindi siccome PX è infinitesima rispetto a QX (b); così l'è pure VX infinitesima rispetto alla stessa QX; onde QX confonderassi con QV, e per simili ragioni l'altra qx dovrà confondersi con qu. Dunque dovrà stare $PX : px :: (QX^2 : qx^2)(Cd^2 : CD^2)$

E poichè nella Prop. LXII. si è dimostrato essere $QX^2 : qx^2 :: Sy^2 : SY^2$, e nella prima parte di questo Teorema si è conchiuso, che stia $Sy^2 : SY^2 :: (CD^2 : Cd^2)(Sp^2 : SP^2)$; sarà $QX^2 : qx^2 :: (CD^2 : Cd^2)(Sp^2 : SP^2)$: e quindi $PX : px :: (CD^2 : Cd^2)(Sp^2 : SP^2)(Cd^2 : CD^2)$: val quanto (c) dire $PX : px :: Sp^2 : SP^2$. Dunque (288) le forze centripete ne' luoghi P, e p sono inversamente come i quadrati de' raggi vettori, che quivi si conducono. C. B. D.

§. 333. DEF. XXXIX. Quel punto di quest' Orbita, ch'è il più vicino al centro delle forze dicesi *Perielio*, ed *Afelio* quell' altro, che dallo stesso centro ne ha la massima distanza.

Il

(a) *Pren. II.*
(b) Vedi (a) §. 279.
(c) *Pren. III.*

Digitalizzato da Google

Il Perielio, e l'Afelio si chiamano *Assidi*, e la retta, che gli unisce, *Linea degli Assidi* si domanda.

§. 334. Cor. I. Dunque l'asse maggiore dell'Ellisse DAN descritta da un corpo, che tende al dilei umbilico F, sarà la linea degli assidi: e quindi i suoi estremi N, e D saranno il Perielio, e l'Afelio. *Fig. 47.*

§. 335. Cor. II. I quadrati delle velocità negli assidi N, e D sono (284) come FD^2 ad FN^2, cioè come la forza (332) centripeta in N a quella in D. Dunque le forze, che ritengono negli assidi il corpo A, sono in duplicata ragione delle velocità, ond' ei vi si aggira (a).

§. 336.

(a) Il corpo, che volgesi nell' Orbita *D A N* scende dal dilei Afelio al Perielio sempre accostandosi al centro delle forze, ed appena giunto al Perielio, anzichè piombar nel centro, quivi comincia a scostarsene rimontando all'Afelio. Come può ciò addivenire? domandavan taluni: ed altri più arditi credettero questa difficoltà qual momentosa objezione, che l' edificio intero delle Nevvtoniane Teorie abbattea. Ma ella, Cari Giovanetti, non è che lieve, e tosto dileguasi al rammentarvi, che la forza tangenziale vi concorre del pari colla centripeta ad effettuar la divisata rivoluzione. Or siccome la velocità di questo mobile va crescendo dall' Afelio al Perielio (284); così dee crescer nella stessa guisa la dilui forza tangenziale, e diverrà massima nel Perielio. Dunque al crescere della gravità del mobile cresce ancora la dilui forza tangenziale: e nel Perielio, ove quella divien massima, questa si rende sì ponderosa, che prevalendo alla gravità del corpo gl' impedisce di tader nel centro.

Digitalizzato da Google

§. 336. Cor. III. Le due ragioni di DC a DF, e di FA ad AC sono respettivamente uguali a queste due di FDC a DF², e di FA² ad FAC (*a*), cioè (sostituendo ai rettangoli FDC, FAC i quadrati di BO, e di BK semidiametri conjugati (*b*) a que', che passano per D, ed A) alle ragioni di BO² a DF², e di FA² a BK². Dunque la ragion, che si compone dalle due di DC a DF, e di FA ad AC, è quanto quella, che si comporrebbe dalle altre due di BO² a DF², e di FA² a BK². Val quanto dire (*c*) la ragion composta di DC ad AC, e di FA ad FD pareggia quella, che si comporrebbe da BO² a BK², e da FA² a DF².

§. 337. Cor. IV. E perchè si è dimostrato nella I. Part. di questo Teorema, che le velocità, onde passa il mobile pe' luoghi D ed A dell' Orbita ellittica DAN ritenuto al dilei fuoco F, sieno in ragion composta di BO: BK, e di FA: FD; saranno i quadrati delle mentovate velocità come (BO²: BK²) (FA²: FD²), e quindi ancora come (DC: AC) (FA: FD).

§. 338. Cor. V. Dunque i *quadrati delle velocità, con cui il mobile si aggira in due qualunque luoghi di quest' Orbita, sono inversamente come*

(a) *Prop.* 1. *El. VI.*
(b) *Prop.* 28. *Lib. II. Con. Gienn.*
(c) *Pren. III.*

Digitalizzato da Google

come i corrispondenti raggi vettori, e direttamente come quelle rette, che da' medesimi luoghi conduconsi all' altro fuoco dell' Orbita.

§. 339. COR. VI. Ed i quadrati delle perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti di R ed A saranno come FR: FA, e come AC: CR (284).

§. 340. SCOL. Nello stesso modo può dimostrarsi, che volgendosi un corpo in un' Iperbole conica con forza tendente ad un dilei umbilico, debba esserne quivi ritenuto con forza reciprocamente proporzionale al quadrato del raggio vettore.

CAP. XIII.

SOLUZIONE DEL PROBLEMA INVERSO DELLE FORZE CENTRALI.

PROP. LXXII. PROBL.

§. 341. *Il Corpo A, che tende all' immobile centro S delle forze in ragion della sua distanza da esso centro, sia proiettato per la direzione AP con una data forza; determinare la Trajettoria, ch' ei descrive.* Fig. 46.

1. Si unisca la retta SA, e si prolunghi in R, finchè RA disegni l' altezza, onde con-

ver-

Digitalizzato da Google

verrebbe discendere il corpo per acquistarsi in A la velocità di proiezione. 2. Col centro S intervallo S R si descriva il quadrante circolare R L, e pel punto A gli si tiri l'ordinata A G. 3. Dal centro S conducasi S Q parallela ad A P, ed eguale ad A G. 4. Finalmente si descriva un' ellisse conica, che abbia S per centro, ed S A, ed S Q per semidiametri conjugati (a). *Sarà* A T Q N *l'orbita del projetto*,

Dim. Si prendano in questa ellisse due altri semidiametri tra lor conjugati S T, S N: e tagliata S D uguale ad S T, per D si ordini D F nel divisato quadrante, e poi si congiungano i raggi G S, F S. I due quadrati di T S, e di S N sono per la natura dell'Ellisse (a) uguali a' quadrati di S A, e di S Q, cioè a dire a' quadrati di S A, e di A G (essendo A G uguale ad S Q). E poi SA^2, ed AG^2 son pure uguali ad SD^2, e DF^2, per essere non men quelli, che questi uguali al quadrato del raggio. Dunque saranno ST^2, ed SN^2 uguali ad SD^2, e DF^2: e quindi tolti gli uguali ST^2, ed SD^2 rimarrà SN^2 uguale a DF^2, ed S N uguale a D F. Per la qual cosa essendo le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle tangenti de' punti A, e T inversamente come i semidiametri S Q, S N conjugati a que', che passano per A, e T

(a) *Cor. 2. Prop. 4. Lib. IV. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

(331); saran quelle inversamente come le ordinate AG, DF del quadrante circolare RL, cioè (161) inversamente come le velocità, che si acquisterebbe un grave discendendo per le altezze RA, RD. E quindi ATQN è il sentiero del proietto A (305). C. B. D.

§.342. Cor. I. Il Circolo LRE esibito nella cost. di questo Problema è la linea di sublimità dell'orbita ATN. Dunque o che si proietti il corpo A per la tangente AP colla velocità acquistatasi per l'altezza RA, o ch'ei si lanci da un'altro luogo T per la TM tangente di questo colla velocità conferitagli dall'altezza ET; dovrà descriver sempre la medesima Ellisse ATN.

§. 343. Cor. II. Se per avventura sia retto l'angolo RAP di proiezione; il luogo A, donde avventasi cotesto grave, sarà un'estremo dell'asse maggiore, o del minore dell Ellisse, ch'ei descrive.

§. 344. Cor. III. *E questo punto* A *sarà un'estremo dall'asse maggiore, quando sia retto l'angolo* SAP *di proiezione, e* $2SA^2$ *maggiore di* SR^2. Imperciocchè togliendosi in tal caso d'ambe le parti SA^2, resterebbe SA^2 maggiore della differenza di SR^2, e di SA^2, cioè di AG^2. Dunque sarebbe SA maggiore di AG, o di SQ: e con ciò SA il semiasse maggiore, ed SQ il minore della mentovata Ellisse.

§.345.

Digitalizzato da Google

§. 345. Cor. IV. Finalmente *qualor si ritrovi* $SR^2 = 2AS^2$; *l'orbita descritta dal corpo* A *coll'angolo retto di proiezione diverrà un circolo, il di cui raggio è* SA.

PROP. LXXIII. TEOR.

§. 346. *Il corpo* A, *che graviti al centro* F *in ragion inversa duplicata della distanza che glie-*
Fig. 47. *ne serba, sia proiettato dal luogo* A *per la retta* AS *con quella velocità, ch'ei s'acquisterebbe calando per* EA; *si domanda l'Orbita di tal proietto.*

Cost. I. Unita la retta FA, che dovrà giacersi a dirittura colla EA, si formi nel punto A della PA l'angolo CAP uguale al dato SAF, o al dilni verticale PAE. II. Si tagli la retta CA uguale alla data EA, e coi fuochi F, e C, e coll'asse maggiore uguale alla FE si descriva l'Ellisse conica (*a*) DAON. *Sarà questa curva l'Orbita addimandata.*

Dim. Si conducano ad un'altro punto R del perimetro di questa Ellissi i due rami FR, CR, e col centro F intervallo FE si descriva l'arco circolare TG, che seghi la retta FG in G. Sarà RC uguale ad RG: imperciocchè le due FR, RC son quanto la FG (*b*): dunque tolta la FR, dovrà rimanervi RC ugua-

(a) *Prop. 3. Lib. IV. Con. Gian.*
(b) *Prop. 29. Lib. II. dello stesso.*

Digitalizzato da Google

uguale ad R G. E poichè i quadrati delle velocità, che si acquisterebber due gravi liberamente calando dalle altezze E A, G R, sono (171) come E A : G R, e come F R : F A, cioè come C A : C R, e come F R : F A; essi saran pure come i quadrati delle perpendicolari, che dal fuoco F si calano sulle tangenti dell' Ellisse in R ed A (339). Dunque le dette velocità saranno come le perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti dell' Ellisse in R, ed A, cioè inversamente come le perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti della curva D A N ne' punti A, ed R. E quindi cotesta curva (305) sarà il sentiero del proietto, C. B. D. (*a*)

§. 347.

(a) La dignità di questa Ipotesi, ch' è la sola, onde Natura regge le gravitazioni de' corpi, m' impegna a soggiugnervi alcune cose a questo argomento adattate.

In primo luogo *la velocità, che si acquista un grave discendendo liberamente per* A M *metà di* A F, *è quanto quella, ch' egli otterrebbe calando per l' intera* A F *uniformemente animato dalla gravità iniziale in* A.

Imperocchè supponendo che la velocità acquistatasi da un grave per *A M* sia uguale a quella, ch' egli avrebbe in *A* discendendo per *E A*; sarà (175) *E A* : *A M* : : *E F* . *F A* : *F A* . *F M*, cioè (Prop. I. El. VI.) *E A* : *A M* : : *E F* : *F M*, e permutando *E A* : *E F* : : *AM*: *F M*. Dunque sarà la retta *E A* uguale ad *E F*, come *A M* pareggia la *F M*: e quindi *E A* sarà infinita. Ma la velocità, che riceve un grave nel luogo *A* calando dall'altezza *E A* infinita, è finita ed uguale a quella, ch'egli avrebbe calando per *A F* uniformemente animato dalla gravità del luogo *A* (182). Dunque la velocità, che si acqui-

Digitalizzato da Google

§. 347. COR. I. Descritto col centro F intervallo F E, (ch' è quanto l'asse maggiore dell'Ellisse D R N), il circolo T E H, si protragga F D in sin che incontri in T la sua circonferenza; sarà il circolo T E H la linea di sublimità (302) dell' Orbita D R N, e D C uguale a D T. Imperocchè F E, ovvero F T è uguale ad N D: dunque tolta la comune F D dee rimanervi N F, o C D uguale a D T. Similmente essendo F H uguale ad F T, tolte le uguali F N, e D T restan puranche uguali le N H, ed F D.

§. 348. COR. II. Dunque *il corpo* A *per acquista un grave* discendendo per *A M* metà di *A F*, è quanto quella, che conseguirebbe calando per l' intera *A F* uniformemente animato dalla gravità, ch' ei tiene in *A*.

2. La E A *dinoti quell' altezza, onde avrebbe a discendere un grave per acquistarsi in* A *tanta velocità, quanta gliene conferirebbe la discesa per una qualunque* A M; *sarà la retta* E A *finita, infinita, o piucchè infinita, secondo che sia* A M *minore, uguale, o maggiore della metà di* A F. Questo intendesi facilmente da ciò, che si è detto quì sopra.

3. *Data la velocità, che in* A *abbiasi acquistata un grave calando da una qualunque altezza, la magnitudine di questa può determinarsi nel seguente facilissimo modo.* Prendasi *E A* ad *E F* in duplicata ragione della velocità data a quella, che un grave si acquisterebbe calando per *A M* metà di *A F*; sarà *A E* la richiesta altezza. Imperocchè i quadrati di queste velocità sarebber fra loro (175) in ragion composta di *E A : A M*, e di *A F . F M : E F . A F*, cioè in ragion composta di *E A : A M*, e di *F M : E F*, cioè come *E A : E F*

Digitalizzato da Google

starsi la velocità, che ha nel suo Afelio, dovrebbene quivi discendere da un' altezza uguale alla distanza del Perielio dal centro delle forze. E per ottener quell' altra, ch' ei tiene nel Perielio, avrebbe a calarne da un' altezza uguale alla distanza dell' Afelio dal centro delle forze.

§. 349. COR. III. Se dal luogo D si proietti un grave per la direzione D U perpendicolare a D F, e con una velocità, ch' ei per acquistarsela in D dovrebbe discender dall' altezza D T uguale a D F; la sua orbita sarà un cerchio. Imperocchè essendo (348) D T uguale ad N F, e per supposizione la stessa D T uguale a D F; saranno le due N F, e D F tra se uguali; e l' Ellisse D R N si cangerà in cerchio.

§. 350. SCOL. I. In questa Ipotesi di accelerazione può succeder bene, che la velocità, onde si lanci un grave, sia finita; ma ch' ei per acquistarsela dovrebbene piombare al luogo della proiezione da un' infinita altezza (182). Come dunque, Voi mi direte, dovrà in tal caso regolarsi la rapportata costruzione? Eccolo. Sia P A la direzione del proietto, F il centro delle forze, e la retta F A passi pei punti F, ed A. Facciasi l' angolo C A P uguale al dato P A E, e tirata da F la parallela F N alla C A, si meni E S perpendicolare ad A S, e dal punto S la S N perpendicolare ad F N. Dipoi col vertice principale N, coll' asse N D, e col parametro quadruplo di F N si descriva la pa- *Fig. 48.*

Digitalizzato da Google

rabola conica N R A (*a*), la quale, com'è chiaro da' Conici, dee toccare in A la retta PAS, *e sarà l'orbita del proietto*. Imperocchè se dal luogo E infinitamente distante dal centro F delle forze s'intenda cadere un grave; i quadrati delle velocità, ond'ei perverrebbe in A, ed M, saranno (171) in ragion composta di E A ad E M, e di F M, o della sua uguale F R ad F A, cioè come F R ad F A: essendo i termini della prima ragione quasi uguali fra loro come grandezze infinite tra se differenti per la M A di magnitudine finita. Ma le due rette F R, ed F A son come i quadrati delle perpendicolari calate dal fuoco F sulle tangenti della parabola in R, ed A (*b*). Dunque i quadrati delle velocità, colle quali giugnerebbe lo stesso grave in A, ed M, sono inversamente come i quadrati delle mentovate perpendicolari: e quindi le semplici velocità nell' inversa ragione di queste perpendicolari. Or se suppongasi F G uguale ad F E; la velocità, che otterrebbe un grave calando dall'altezza G R, è quanto quella, ch'ei si acquisterebbe calando per E M. Dunque le velocità acquistatesi da un grave nelle discese per E A, G R, ec. sono inversamente come le perpendicolari abbassate da F sulle tangenti di A, di R, ec. E quin-

(a) *Prop. 6. Lib. IV. Con. Giunnat.*
(b) Vedi not. (a) pag. 196.

Digitalizzato da Google

quindi la parabola, che si è descritta, (305) è l' orbita addimandata (*a*).

§. 351. SCOL. II. L' orbita di un proietto, come si è mostrato qui sopra, l'è una para-

(a) Qualora un corpo è proiettato per la direzione *A S* con una velocità maggiore di quella, che potrebbe acquistarsela calando dall'altezza *A F* uniformemente animato dalla gravità iniziale; la sua Orbita nè sarà un' Ellisse, nè tampoco una Parabola, ma sì bene un' Iperbole: come può vedersi nel §. 247. *de motu Curvil. Corp.* del nostro Ab. Rolli, ed in altri Scrittori di Meccanica. Dunque *nell' Ipotesi della gravità decrescente come il quadrato della distanza, le Orbite de' Proietti non son, che le curve di primo genere, cioè a dire le sezioni coniche.*

L' acutissimo Gio. Bernulli in una lettera, che diresse a Giacomo Ermanno, e che or si legge nel *Vol. del. R. Acc. dell. Sc. di Parig. an.* 1710, dopo avergli mostrate certe di lui sconcezze nell' analitica soluzione del Problema Inverso delle forze centrali, e l' ottima condotta da tenersi nel risolverlo, si dolse, che il Gran Nevvton avea supposto senza dimostrarlo *esser le curve coniche le sole Orbite de' Corpi proiettati nel vero sistema della gravità decrescente come il quadrato della distanza.* I seguaci del Nevvton, e i dilui Commentatori han procurato toglier quest' onta dal Geometra Inglese: e 'l giudizioso Gio: Keil in un'Opuscolo *de Viribus centralibus*, ha dimostrato tra le altre cose, che la soluzione Bernulliana del Problema Inverso delle forze centrali sia identica a quella, che aveane recata l' Imm. Nevvton nella *Prop.* 41. *Lib. I. Princ. Mat.*, e che da identici principj entrambe sien derivate. Ciò è vero: ma l'è anche fuor di dubbio, che nella *I. Ediz. de' Princ. Mat.* non si ritrovi veruna formale dimostrazione della verità divisata, e che nelle posteriori edizioni ella esprimasi oscuramente nel *Cor. I. Prop.* 13. *Lib. I. con qu. parol.* „Ex tribus novissimis Pro-

„ po-

Digitalizzato da Google

bola conica, se la velocità di proiezione sia tale, ch'ei per acquistarsela dovrebbene quivi discendere da un'altezza infinita. Ma v'ha un' altro caso, e tutto opposto al precedente, in che

„ positionibus consequens est, quod si corpus quodvis se-
„ cundum quamvis lineam rectam quacumque cum velo-
„ citate exeat de loco dato, & vi centripeta, quæ sit
„ reciproce proportionalis quadrato distantiæ locorum a
„ centro simul agitetur, movebitur hoc corpus in aliqua
„ sectionum Conicarum umbilicum habente in centro vi-
„ rium, & contra. *Nam datis umbilico, & puncto*
„ *contactus, & positione tangentis describi potest se-*
„ *ctio conica, quæ curvaturam datam ad punctum illud*
„ *habebit. Datur autem curvatura ex data vi centri-*
„ *peta, & Orbes duo se mutuo tangentes eadem vi*
„ *centripeta describi non possunt.* „ Ma ecco, per quanto ne sembra, un distinto sviluppo di questa ristrettissima dimostrazione.

Un corpo, che graviti all' immobile centro *S* inversamente come il quadrato della distanza, sia proiettato dal luogo *A* per la direzione *AR* colla velocità *u*. Si elevi *AF* perpendicolare ad *AR*, si unisca *SA*: e poi si tiri ovunque la *GD* parallela ad *AR*. Sarà dato di specie il triangolo *DAC*, e quindi la ragione di *CA* ad *AD*, cioè della forza (Dim. Prop. 67.), che ritiene il proietto nella parte iniziale della sua Orbita a quella, che il riterrebbe nel dilei cerchio osculatore. Dunque se facciasi $CA : AD :: m : n$, e sia *g* la gravità del corpo nel luogo *A*, sarà $ng : m$ la forza centripeta nel cerchio osculatore, e 'l dilui raggio *AF* (316) sarà $muu : 2ng$. Intanto si descriva la sezione conica *ANa*, che abbia *S* per un suo fuoco, e che *FA* sia il raggio dell' oscolo nella sua parte *A* (Il qual problema è stato risoluto dal Keil nell. Transf. Anglic. an. 1708, da'Comment. del Newton, e da altri): sarà *questa curva l' Orbi-*

Fig. 40.

Digitalizzato da Google

che il proietto piegasi puranche in un sentiero parabolico: ed è quando l'altezza, dalla qua-

Orbita addimandata. Lo che si dimostra nel seguente modo.

Il proietto uscendo dal luogo A per la direzione AR colla velocità u puol esser ritenuto nella curva conica ANa da una forza sempre diretta al punto S. Di questa s' ignori l'intensità, e la legge di agire: si sa non di meno, ch' ella debba essere uguale a g nel principio del moto: imperocchè essendo per costruzione $FA = muu : 2gn$, e la velocità in $A = u$, sarà la forza centripeta nel circolo osculatore (314) uguale ad $uu : 2FA$, cioè uguale a $gn : m$. E facendo DA ad AC, cioè n ad m, così $gn : m$ ad un quarto, ch' è uguale g; la grandezza g dovrà dinotar la forza assoluta, con che il proietto nel principio del suo moto si piegherebbe nella curva conica ANa. Ma essendo lo stesso corpo continuamente ritenuto al fuoco S della sezione conica aNA, ch' ei descrive; la forza centripeta debb' essere nella duplicata ragion inversa della sua distanza dallo stesso fuoco (329, 332, 340). Dunque la sezione conica ANa è l' Orbita del Proietto, come quella, in che si rinvengono tutti e cinque i dilei determinanti (not. a. §. 297.).

Finalmente ecco una soluzione generale del Problema inverso delle forze centrali più agevole di quelle, che si potrebber ottenere colle formole D ed E, o F e G del n. 9., e 10. not. a. §. 328. Sia QAD l' Orbita di un corpo, che tendendo al dilui immobile centro S venga lanciato per la direzione QH colla velocità c. Il cerchio QRg sia descritto col centro S intervallo SQ: e preso nella stessa Orbita l' archetto AD infinitesimo vi si conducano i due raggi vettori SA, SD, i quali distendansi fino al cerchio descritto. E finalmente col centro S, e cogl' intervalli SA, SD si descrivan puranche gli archi circolari AB, DF. Intanto sia $SD = SF = x$, $SQ = a$, $Qg = z$; sarà $QF = a - x$, $AE = BF = -dx$, $Rg = dz$. La velocità, che ha il proietto *Fig. 36.*

Digitalizzato da Google

le ei ne dovrebbe discendere per ottenere la velocità di proiezione, sia infinitamente piccio-

la

ſetto nel luogo A, ſi chiami u, e dt il tempuſcolo, onde ſi deſcrive l'archetto AD; ſarà chiaro dal §. 300, che la ſteſſa velocità u dovrebbe in B acquiſtarſi il proietto ſe dal luogo Q colla velocità c ſi lanciaſſe in giù per QS. Dunque chiamando p la gravità, che ha lo ſteſſo corpo in B, ſarà (not.c.124) $uu = C + 2\theta\int p\,dx$:

M. Or perchè queſta formola ſi adatti al noſtro caſo, ſia $2\theta p$: M uguale ad X, ch'è una qualunque funzione di x; in luogo di dx vi ſi ponga $-dx$, perciocchè è tale l'elemento dello ſpazio $QB = a - x$; e la coſtante C (intendendoſi determinata dal ſupporre $u = c$, quando l'è $x = a$) ſia uguale ad a moltiplicata per una grandezza f; ſarà $uu = af - \int X\,dx$. Inoltre eſſendo $SR : Rg :: SE : ED$, cioè $a : dz :: x : ED$; ſarà $ED = x\,dz : a$, ed $SDA = xx\,dz : 2a$. Con che eſſendo (284) dt proporzionale al ſettore SDA, ſarà $dt = xx\,dz : aqq$, ove qq ſi è poſto per ſerbare l'omogeneità dell'eſpreſſione, che dev'eſſere un numero, e con ciò di niuna dimenſione. Ciò premeſſo a cagion del triangolo rettangolo AED è

$$AD^2 = dx^2 + xx\,dz^2 : aa \qquad A$$

E per eſſer lo ſpazietto $AD = u\,dt$ (vedi not. 2 §. 15), è $AD^2 = uu\,dt^2$. Dunque ſoſtituendo i valori di uu, e di dt^2 di già ritrovati, ſarà

$$AD^2 = (af - \int X\,dx)\ (x^4\,dz^2) : aaq^4 \qquad B$$

E quindi pareggiando i ſecondi membri dell'Equazioni A, e B, avraſſi

$$aa\,dx^2 + xx\,dz^2 = (af - \int X\,dx)\ (x^4\,dz^2) : q^4$$

$$\text{cioè} \quad dz = \frac{aqq\,dx}{x\sqrt{(afxx - xx\int X\,dx - q^4)}} \qquad C$$

Digitalizzato da Google

la rispetto alla sua distanza dal centro delle forze. L'utilità di questo argomento, e la di lui estensione m' induce a racchiuderlo nel capo seguente.

CAP. XIV.

DEL MOTO DE' GRAVI PROIETTATI DALLA SUPERFICIE TERRESTRE PER DIREZIONI NON VERTICALI.

PROP. LXXIV. TEOR.

§. 352. *Se dal luogo* A *della superficie terrestre si proietti un grave per la direzione* AP *non verticale, e colla velocità dovuta all' altezza* AE; *il suo sentiero sarà una Parabola conica, di cui la verticale condotta pe 'l luogo della proiezione n' è un diametro, che ha per parametro il quadruplo dell' altezza* AE, *e per ordinate le parallele alla direzione* AP. Fig. 47.

DIM. La gravità di questo proietto decresce come il quadrato della sua distanza dal centro F di nostra Terra (276). Dunque se facciasi l'angolo CAP uguale al dato PAE, ed AC uguale ad AE; i punti C, ed F saranno i fuochi del-

Digitalizzato da Google

dell' orbita ellittica, in ch' ei si muove, ed FA + AC il dilei asse maggiore (346). E poichè le rette, che da ciascun punto dell'arco DA conduconsi al centro F della Terra, sono altrettante linee verticali; esse saranno ad un di presso parallele fra loro.

Ciò premesso per due qualunque punti Q, q dell' arco, che descrive il proietto, si tirino all' asse DN le semiordinate QC, qc: egli è di per se chiaro, che le NC, Nc loro corrispondenti ascisse dal vertice rimoto N abbiansi ad avere per uguali; perciocchè non differiscon fra loro, che per la Cc evanescente riguardo ad NC. Dunque i quadrati di QC, e di qc, che son proporzionali (*a*) a' rettangoli di NC in CD, e di Nc in cD, saranno come le ascisse CD, cD (*b*). E quindi la curva ADQ sarà una Parabola conica (*c*), di cui la verticale condotta per A n' è un diametro, che ha per parametro il quadruplo di AC, o di AE (*d*), e le ordinate dello stesso diametro son le corde parallele alla PA. C. B. D.

§. 353. Cor. I. Da ciò che si è mostrato ben si rileva, che l'angolo TFE sia infinitesimo, e che l' arco circolare TE abbiasi ad avere qual

(a) *Prop.* 8. *Lib.* II. *Con. Giannat.*
(b) *Prop.* 1. *El. VI.*
(c) *Prop.* 7. *Lib.* I. *degli stessi Con.*
(d) *Prop.* 18. *Lib.* I. *dello stesso.*

Digitalizzato da Google

qual retta perpendicolare alla TN. Dunque *la linea di sublimità dell' Orbita parabolica* ADQ (302), *sarà la direttrice di essa curva* (a).

§. 354. Cor. II. I rami CA, CX della Parabola AXQ son quanto le perpendicolari (b) AE, XY condotte da' loro estremi sulla direttrice EP. Dunque *le velocità, che ha il proietto ne' luoghi* A, *ed* X, essendo in sudduplicata ragione delle altezze AE, XY, cui son dovute (153. n. 1.), *saranno ancora in sudduplicata ragion de' rami, che ad essi luoghi corrispondono.* *Fig. 49.*

PROP. LXXV. TEOR.

§. 355. *Poste le medesime cose della Proposizione precedente, tanto tempo v' impiega il proietto a descriver l' arco parabolico* CT, *quanto vi porrebbe a condursi equabilmente e colla velocità di proiezione per la semiordinata* TB, *che ad esso arco corrisponde, o a calar naturalmente per la di lui ascissa* CB. *Fig. 50.*

Dim. Part. I. Dinoti S il centro della nostra Terra, ed SÒ l'asse della Parabola COA, al quale sien ordinate le rette TN, CM. Congiunte le rette ST, SC s' intenderà di leggieri, che il settore parabolico STFO sia quan-

(a) *Def.* 8. *Lib.* I. *Con. Giann.*
(b) *Prop.* 19. *dello stesso.*

Digitalizzato da Google

quanto il triangolo rettilineo S T O: imperciocchè la loro differenza non è che il segmento parabolico TFO grandezza trascurabile rispetto a ciascun di essi. E quindi il settore S T F O al par del triangolo STO adeguerà il rettangolo di T N nella metà di S O. E dimostrando nella stessa guisa, che l'altro settore parabolico S C O pareggi il rettangolo di C M nella metà della medesima S O; saranno i due settori S C O, S T O nella ragion di C M a T N: onde sarà convertendo il settore S C O all'altro S C T, cioè il tempo per C O al tempo per C T (284), come C M a C M — T N, cioè (compiti i parallelogrammi M O K C, N O K L) come K O ad L T. Or per esser simili fra loro i due triangoli O K G, T L B sta K O: L T:: O G: T B: dunque sarà il tempo per C O a quello per C T, come O G a T B.

Suppongasi impertanto esser l'archetto C t infinitesimo, e si ordini t b al diametro C G; saran pure t b, T B semiordinate di questo nella ragion de' tempi, onde il proietto percorre gli archi parabolici C t, C T. E quindi siccome le rette t b, T B son come i tempi (11), ne' quali sarebbon esse descritte equabilmente colla velocità di proiezione; così questi tempi son come quelli, ne' quali si conduce il proietto per gli archi C t, C T. Ma tanto tempo ei ne impiega a trascorrer l'archetto C t, quanto nel girne equabilmente nella t b colla velo-

Digitalizzato da Google

velocità di proiezione (*a*) : dunque anche il tempo per C T sarà uguale a quello, che ci vorrebbe, affinchè un corpo equabilmente e colla velocità di proiezione descrivesse la semiordinata T B.

PART. II. Le ascisse C b, C B della Parabola C T O sono in duplicata ragione delle loro semiordinate b t, B T (*b*), cioè (Part. I.) de' tempi, in che il proietto descrive gli archi parabolici C t, C T. Ma le medesime rette C b, C B sono anche in ragion duplicata de'tempi, ne'quali un grave cadente le descriverebbe (153. n. 1.): dunque saranno quei tempi come questi. Laonde siccome il tempo della discesa libera del proietto per C b è uguale a quello, ch'ei v'impiega a descriver l'archetto C t; così il tempo per l'arco C T sarà uguale a quello, che vi porrebbe un grave a calar verticalmente per la di lui ascissa C B. C. B. D.

§. 356. COR. I. Da quel che si è recato in questa dimostrazione può inferirsene di leggieri, che, condotta la verticale T P sull'orizzontale C A, i tempi, ne' quali un proietto trascorre gli archi parabolici C T, T O, sien come le rette C P, P M. E quindi se la stessa C A dividasi nelle parti uguali C P, P M, M U, V A ec., e pei punti delle divisioni si ergan delle

(a) *Vedi la dim. dell. Prop. LIV.*
(b) *Prop. 7. Lib. I. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

delle verticali PT, MO, VD, ec.; saranno gli archi parabolici CT, TO, OD, DA, ec. descritti in tempi uguali.

§. 357. COR. II. Dunque *sebbene un corpo, che si lanci dalla nostra terra, non vada equabilmente pel suo sentiero parabolico; pur non di meno in tempi uguali passa al di sopra di uguali parti dell'orizzontale condotta dal luogo della proiezione.*

§. 358. DEF. XL. L'angolo EAP formato dalla PA direzion del proietto, e dalla verticale AE dicesi *angolo della proiezione*. E 'l suo complemento PAD, cioè quell'angolo, che formasi dalla direzion del proietto, e dall'orizzontale AD, suol dirsi *angolo di elevazione*, o semplicemente *elevazione*.

Fig. 49.

§. 359. DEF. XLI. L'*Ampiezza* della Parabola AQD è quella dilei corda AD, che dal luogo della proiezione orizzontalmente si distende.

§. 360. DEF. XLII. La retta AQ, che unisce il luogo della proiezione col bersaglio Q, chiamasi *lunghezza del tiro*.

§. 361. DEF. XLIII. La velocità *iniziale*, o *di proiezione* è quella, onde vien lanciato un grave.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXVI. TEOR.

§. 362. *L' ampiezza della Parabola, la velocità iniziale, e l' angolo d' elevazione, hanno un tal nesso fra loro, che ciascuna di esse può dalle altre due agevolmente rilevarsi.*

DIM. Un grave proiettato dal luogo A per la direzione A T descriva la Parabola A M O. *Fig. 51.* La retta B A sia l' altezza dovuta alla velocità iniziale, l' angolo P A T sia quello d'elevazione, l' altro B A T di proiezione, ed A O l' ampiezza della Parabola A M O. Si tiri la retta F A dal fuoco F di questa curva al luogo della proiezione, e si calino F H, F P respettivamente perpendicolari sulle rette B A, A O. Sarà la retta F H uguale alla P A, cioè ad un mezzo dell' ampiezza A O della Parabola; e s' intenderà dai conici (a), che il ramo F A sia quanto la B A altezza dovuta alla velocità di proiezione, e che l'angolo F A B sia duplo dell'angolo di proiezione T A B. Per la qual cosa siccome il cateto F H, l' ipotenusa F A, e l'angolo acuto F A H son tre parti del triangolo rettangolo F A H, da due delle quali può sempre l' altra rilevarsi; così l' ampiezza della Parabola, la velocità iniziale, e l' angolo d' elevazione, ch' è complemento di quello della

(a) *Prop. 19. Lib. I. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

della proiezione, hanno tal nesso fra loro; che ciascuna di esse può agevolmente rilevarsi dalle altre due. C. B. D.

§. 363. DEF. XLIV. Quel triangolo rettangolo, che ha per ipotenusa l'altezza dovuta alla velocità di proiezione, per un de' suoi cateti la metà dell' ampiezza della Parabola, e l' angolo acuto, che sottende tal cateto, è duplo dell' angolo di proiezione, può chiamarsi *Triangolo Balistico*.

§. 364. COR. I. Da' punti M, e B conducansi le rette MG, BQ parallele alla FH; sarà BG uguale a GH, com' è QM uguale ad MF (*a*). Dunque AG è media aritmetica tra BA, ed AH.

§. 365. COR. II. Vale a dire *l' altezza massima, cui ascende il proietto, è la semisomma dell' altezza dovuta alla velocità iniziale, e del rimanente cateto del triangolo balistico*.

§. 366. COR. III. Congiunta la BF, sarà BT: TF:: BG: GH, e quindi BT uguale a TF. Dunque i due triangoli ATB, ATF, che hanno le condizioni dell. 8. El. I., dovranno aver uguali gli angoli ATB, ATF, ed esser rettangoli. Laonde per la Prop. 8. El. VI. sarà AB: AT:: AT: AG: e quindi AB: AG:: AB^2: AT^2.

§. 367. COR. IV. L'*altezza dovuta alla velocità iniziale sta alla massima altezza, cui ascende il pro-*

(a) *Cor. I. Def. 8. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

proietto, in duplicata ragione del raggio al coseno dell' angolo di proiezione.

PROP. LXXVII. TEOR.

§. 368. Poste le medesime cose dell. prec. prop. l'ampiezza della Parabola è quanto l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno del doppio angolo di proiezione.

E l'altezza massima, cui ascende il proietto, adegua l'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel quadrato del coseno dell' angolo di proiezione.

DIM. PART. I. Nel triangolo balistico F A H, (ove il cateto F H dinoti la metà dell' ampiezza della Parabola, l'angolo F A H il duplo di quello della proiezione (363), ed F A l'altezza dovuta alla velocità iniziale), sta F H ad F A, come il seno dell' angolo F A H al raggio, che si ponga 1. Dunque sarà F H uguale alla F A moltiplicata pel seno di F A H: e quindi prendendo i doppj, sarà A O, cioè l'ampiezza della Parabola, uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel doppio seno di F A M, ch'è duplo dell'angolo di proiezione.

PART. II. E poichè (367) l'altezza massima, cui ascende il proietto, sta all'altezza dovuta alla velocità iniziale, come il quadrato del coseno dell' angolo di proiezione al quadrato del

Digitalizzato da Google

del raggio; sarà l'altezza massima del proietto uguale all' altezza dovuta alla velocità iniziale, moltiplicata pel quadrato del coseno dell'angolo di proiezione. C. B. D.

§. 369. Cor. I. Dunque *le ampiezze delle Parabole, che descrivonsi da'gravi lanciati con uguali velocità di proiezione, sono fra di loro come i seni de' doppj angoli di proiezione. E le altezze massime, alle quali ascendon cotesti gravi, sono in duplicata ragion de'coseni degli angoli di proiezione.*

§. 370. Cor. II. Suppongasi esser semiretto l' angolo B A T di proiezione; il fuoco della Parabola, che descrive il proietto, dovrà cadere nel punto medio della dilei ampiezza, cioè in P. E dovrà in tal caso, come appare da' conici, essere A P metà di A O, ed M P di AP. Dunque *l' ampiezza della Parabola descritta da un corpo lanciato sotto l' angolo semiretto, l' altezza dovuta alla velocità iniziale, e la massima altezza, cui ascende il proietto, son come* 4, 2, 1.

§. 371. Scol. In un solo tiro di Mortaro, o di Cannone, che facciasi per saggio in un campo ben ampio, ed orizzontale, si misuri l' ampiezza della Parabola descritta dal proietto, e dall' ampiezza se ne calcoli l' altezza dovuta alla velocità iniziale. Conosciuta in tal modo quest' altezza si potranno coi principj di questa Prop. determinar le ampiezze delle Para-

Digitalizzato da Google

rabole, e le loro massime altezze in qualunque altra elevazione, che voglia darsi al pezzo.

PROP. LXXVIII. TEOR.

§. 372. Di tutte le Parabole, che descrivonsi da' gravi proiettati con velocità uguali, e con diverse elevazioni, quella terrà la massima ampiezza, che ha semiretto l' angolo d' elevazione.

E saranno uguali le ampiezze di due Parabole descritte da' gravi proiettati con velocità uguali, se i loro angoli di proiezione sieno equidifferenti dal semiretto.

DIM. PART. I. Essendo semiretto l' angolo d' elevazione, e con ciò anche quello di proiezione; il duplo di questo sarà retto, ed avrà il massimo seno. Dunque l' ampiezza della Parabola descritta coll' angolo semiretto d' elevazione sarà la massima in parità di altre circostanze (369).

PART. II. I due angoli di proiezione B A T, B A t differiscano ugualmente dal semiretto, quello però per difetto, questo per eccesso; i loro doppj dovran pure differire ugualmente dal retto, ed avranno uguali seni. Dunque le ampiezze delle Parabole descritte coi mentovati angoli di proiezione, e con pari velocità iniziali, essendo nella ragion de' seni di questi angoli (369), saranno tra loro uguali. C. B. D.

Digitalizzato da Google

§. 373. Cor. I. Sia l'angolo BAT di 15°; e l'altro BAt di 75°, i quali angoli sono dal mezzo retto equidifferenti; saranno uguali le ampiezze delle Parabole, che con questi angoli di proiezione, e con uguali velocità iniziali descrivonsi da' proietti.

§. 374. Cor. II. Ma poichè il duplo di BAT è in tal caso di 30°, il di cui seno è una metà del raggio; sarà l'ampiezza della Parabola descritta da un corpo, che avventasi sotto l'angolo di proiezione di 15°, o di 75°, uguale all'altezza dovuta alla velocità iniziale.

PROP. LXXIX. PROBL.

Fig. 52.

§. 375. *Data la velocità iniziale, e lo scopo* I, *che vuol ferirsi dal luogo* A, *ritrovare il convenevole angolo di proiezione.*

Costr. Sia RA l'altezza dovuta alla velocità iniziale, AI la retta, che unisce il luogo della proiezione con quella del bersaglio, ed AG sia perpendicolare ad AI. Ciò posto 1. si bisechi in C la linea della velocità, di dove le si erga la perpendicolare CG, che incontri in G la retta AG. 2. Col centro G intervallo GA si descriva il circolo APQR. 3. Si tagli AB quarta parte di AI, e per B si conduca BQ parallela ad RA.

Se questa non incontri il circolo di già descritto; il problema sarà impossibile, cioè la velocità di proiezione non sarà sufficiente per con-

Digitalizzato da Google

condurre il proietto dal luogo A nell' altro I. E se tal retta incontri il circolo ne' punti P, e Q; congiunte le rette, AP, AQ, *gli angoli* RAP, RAQ *saranno quelli della proiezione*.

Dim. Si distenda la retta AP, in sin che incontri la IF condotta per I parallela ad AR, e si compia il parallelogrammo AFIT. E poichè l' angolo PAB è uguale a PRA (*a*), e son poi tra se uguali gli angoli alterni APB, PAR delle parallele PB, RA; sarà il triangolo APR equiangolo, e con ciò simile al triangolo APB, o all' altro AFI. E quindi starà RA: AP:: AF: FI, e 'l rettangolo di RA in FI pareggerà quello di AP in AF. Dunque prendendo i loro quadrupli sarà 4RA in FI, o in AT uguale al quadrato di FA, o di TI: imperciocchè essendo dalla costruzione AB quarta parte di AI, l' è pure AP quarta parte di AF; e con ciò AF in 4AP è lo stesso, che AF^2, o TI^2. Ma la Parabola descritta dal corpo A lanciato per AP colla velocità dovuta all' altezza RA tien per parametro di AT il quadruplo di essa altezza, le sue ordinate son parallele ad AP, e le ascisse son le parti della verticale TA. Dunque essendosi mostrato essere il quadrato di TI uguale al rettangolo di AT in 4AR, fia mestiere, che IT sia una semiordinata della curva del proietto, e che questa passi per lo scopo

(a) *Prop.* 32. *El. III.*

Digitalizzato da Google

I. In simil modo proverassi, che il corpo A, qualor si proietti colla medesima velocità per l'altra direzione A Q, ancor ne debba pervenire allo scopo I, sebbene per un'altra Parabola. C. B. D.

§. 376. Cor. I. Dunque volendo colla velocità dovuta all'altezza R A lanciare una palla da A ad I, tanto è incamminarla per A P, che per A Q. Ma il primo sentiero è più basso del secondo: onde qualor si voglia sfondare un piano orizzontale converrà servirsi di questo, e per abbattere un muro verticale gioverà usar quello.

§. 377. Cor. II. Intendasi lanciato il corpo A per una qualunque direzione A P, e la Parabola, ch'ei descrive, tagli la linea del tiro A I in un punto qualunque I. Per I conducasi la verticale I F, che incontri la retta A P in F, e si compia il parallelogrammo T F, e per P si tiri B P Q parallela ad A R: sarà il rettangolo F A P uguale all'altro R A T (lo che mostrerassi come nella propos. pres.): e con ciò al par di questo sarà suqquadruplo del quadrato di A F. Dunque A P l'è quarta parte di A F, e pe'triangoli simili A B P, A I F, il sarà benanche A B quarta parte di A I.

§. 378. Cor. III. Dunque *proiettandosi un corpo per una corda qualunque* A P *del segmento circolare* A P Q R, *e colla velocità dovuta all'altezza* R A; *la lunghezza del tiro sarà quadrupla del-*

Digitalizzato da Google

della retta AB, *che sulla linea del tiro ne ascinde la verticale* PB *condotta per l'estremo di essa corda.*

PROP. LXXX. TEOR.

§. 379. *Il più ampio tiro, che può farsi sulla retta* AI, *lanciando un corpo dal luogo* A *colla velocità dovuta all'altezza* RA, *è quando l'angolo di proiezione* RAN *è metà dell'altro* RAI *fatto dalla linea del tiro, e dalla verticale* RA.

E gli angoli di proiezione RAP, RAQ *sotto de' quali deesi spingere un grave colla velocità dovuta alla* RA, *affinchè dal luogo* A *ei possa girne a colpire uno stesso punto della retta* AI, *sono equidifferenti dall'angolo* RAN *del massimo tiro.*

DIM. PART. I. La retta CG protraggasi, finchè tagli l'arco ANR in N, e per N poi si conduca la verticale Nb: l'angolo bNC sarà retto al par del suo esterno ACG, e quindi Nb sarà (*a*) tangente del circolo in N. E poichè la retta Ab è il massimo de' segmenti, che possono ascindere sulla retta AI le verticali condotte pe' punti dell'arco ANR; unita la ret-

(a) *Prop.* 18. *El. III.*

Digitalizzato da Google

ta AN, l'angolo di proiezione RAN sarà quello, che converrà dare ad un corpo, perchè lanciato colla velocità dovuta all' altezza RA vada a ferirne un punto della retta AI il più distante dal luogo A. Or la retta GCN perpendicolare ad AR biseca l'arco RNA: dunque sarà l'angolo NAR uguale ad NRA, o ad NAB, che a questo è uguale (*a*). È quindi nel caso del massimo tiro l' angolo della proiezione RAN sarà metà di RAB, che vien formato dalla linea del tiro, e dalla verticale.

PART. II. Ed essendo per la medesima ragione l'arco QN uguale ad NP; sarà l'angolo QAN uguale ad NAP: e quindi l' eccesso di RAP su di RAN pareggerà il difetto di RAQ dallo stesso RAN. Dunque gli angoli di proiezione RAP, RAQ, sotto cui deesi spignere un corpo colla velocità dovuta all'altezza RA, perchè ne colpisca dal luogo A lo stesso bersaglio I, sono equidifferenti dall' angolo RAN del massimo tiro. C. B. D.

(a) *Prop.* 32. *El.* III.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXXI. PROBL.

§. 380. *Data di posizione la linea* A I *del tiro, e di grandezza l'angolo* P A R *di proiezione, determinare la lunghezza* A I *del tiro dalla velocità iniziale: e vicendevolmente determinar questa dalla lunghezza* A I *del tiro.* Fig. 52.

DIM. PART. I. Essendo dato nel triangolo RAP tanto l'angolo della proiezione P A R, che l'altro A P R uguale al dato B A T, sarà data la ragione di R A ad A P. E quindi essendo data di lunghezza la R A altezza dovuta alla velocità di proiezione; sarà benanche data di magnitudine la retta A P. Ma il triangolo APB l'è ancor esso dato di specie: dunque determinata la grandezza del lato A P, si potrà determinare agevolmente la retta A B, il dicui quadruplo sarà la A I lunghezza del tiro.

PART. II. E volendosi determinare dalla lunghezza A I del tiro la retta R A, s'invertirà la rapportata soluzione, cioè si prenderà 1. A B quarta parte di A I. 2. Si determinerà A P essendo dato di specie il triangolo A B P e di grandezza il lato A B. 3. dalla retta A P di già determinata si farà noto l'altro lato A R del triangolo R A P dato di specie, cioè a dire l'altezza dovuta alla velocità iniziale. C. B. D.

§. 381.

Digitalizzato da Google

§. 381. COR. I. Qualor ne aggrada cogli artifizj trigonometrici snodar questo problema; dovrà riguardo alla prima parte farsi 1. RA ad AP come il seno di RPA, o del suo uguale BAT al seno di PRA, o di PAB. 2. si farà come AP ad AB, così il seno di PBA o di BAT al seno dell'angolo BPA. Sarà il *quadruplo di* AB *la desiderata lunghezza del tiro.* E nello stesso modo si guiderà la soluzione della seconda parte di questo problema, qualora ella si voglia trigonometricamente effettuare.

§. 382. COR. II. *Dunque essendo noto l'angolo* RAB, *che fa la linea del tiro colla verticale; l'angolo della proiezione* RAP, *l'altezza* RA *dovuta alla velocità iniziale, e la lunghezza* AI *del tiro son pure tre cose talmente fra loro unite, che ciascuna di esse può dall'altre due determinarsi agevolmente.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXXII. TEOR.

§. 383. *I tempi, ne' quali il corpo* A *lanciato con una stessa forza, e per le direzioni* AP, AQ *va a ferirne la stessa retta* AI *condotta pel luogo della proiezione, son come i seni degli angoli* PAB, QAB, *che questa linea forma con quelle direzioni.*

DIM. Il corpo A lanciato per AP colla velocità dovuta all' altezza RA tanto tempo v' impiega a percorrere il sentiero parabolico AMI (intendendosi praticata la costruzione del Probl. LXXIX.), quanto nel correre equabilmente la retta AF, cioè il quadruplo di AP colla velocità iniziale (355). E s' ei verrebbe colla medesima velocità proiettato per AQ, tanto tempo v' impiegherebbe a discendere per un sentiero parabolico sulla retta AI, quanto vi spenderebbe nel descrivere equabilmente il quadruplo di AQ colla velocità di proiezione. Dunque i tempi, onde un corpo lanciatosi colla mentovata celerità, ora per la direzione AP, ed ora per l'altra AQ, cade per due sentieri parabolici sulla retta AI, son come i tempi ne' quali equabilmente e con una stessa velocità percorronsi i quadrupli di AP, e di AQ (11), cioè come 4 AP a 4 AQ, o come $\frac{1}{2}$ AP ad $\frac{1}{2}$ AQ. Ma $\frac{1}{2}$ AP, ed $\frac{1}{2}$ AQ sono i seni delle

Digitalizzato da Google

delle metà degli archi A P, ed A P Q, cioè degli angoli A R P, A R Q, di cui coteste metà ne son misure, o pur degli angoli B A P, B A Q ad essi uguali. Dunque i seni degli angoli B A P, B A Q son proporzionali ai tempi, onde un corpo proiettato per le direzioni A P, ed A Q discende per due sentieri parabolici sulla retta A I. C. B. D.

§. 384. Cor. Se mai la retta A I sia orizzontale, gli angoli P A B, Q A B saranno quelli d'elevazione. Dunque *i tempi, ne' quali un corpo lanciato da uno stesso luogo, e con una medesima forza, ma per diverse direzioni discende al piano orizzontale che passa per esso luogo, saran fra di loro, come i seni degli angoli di elevazione.*

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. XV.

De' Movimenti eseguiti in Orbite Ellittiche con forze centripete tendenti ad un comune di loro umbilico.

PROP. LXXXIII. TEOR.

§. 385. *Se i corpi* D, *e* d *si aggirino nelle Orbite Ellittiche* DRA, dra *con forze centripete tendenti al diloro comune umbilico* S; *i parametri principali di quest' Ellissi saranno direttamente come i quadrati delle velocità, ond' essi muovonsi ne' loro Afelj, o pur ne' Perielj, ed inversamente come le forze acceleratrici negli stessi assidi.* Fig. 53.

Dim. Prendansi accanto agli Afelj D, e d, o a' Perielj, i due archetti infinitesimi DT, dt descritti in uguali tempuscoli: egli è chiaro, che ordinate le retticciuole TN, tn agli assi maggiori DA, da debbano essere le ascisse DN, dn come le forze acceleratrici negli Afelj D, e d: ed esse ordinate come le velocità, con cui si muovono i corpi D, e d ne' loro Afelj. E poichè la retta DN è infinitesima, il rettangolo AND confonderassi coll' al-

Digitalizzato da Google

altro ADN: dunque siccome quello (a) così questo starà al quadrato di TN, come AD a DQ, o come ADN a QDN, vale a dire sarà ADN: TN^2:: ADN: QDN: e quindi TN^2 uguale a QDN. Similmente dimostrandosi, che il rettangolo qdn pareggi tn^2, sarà QDN: qdn:: TN^2: tn^2, e perciò (b) QD starà a qd in ragion composta di TN^2 a tn^2, e di dn a DN. Val quanto dire i parametri principali di queste Orbite Ellittiche sono fra loro come i quadrati delle velocità, onde muovonsi i corpi negli Afelj, o pur ne' Perielj, ed inversamente come le forze, che quivi li ritengono. C. B. D.

§. 386. COR. I. Ed essendo le forze acceleratrici ne' luoghi D, e d come Sd^2 ad SD^2, sarà DQ a dq in ragion composta di TN^2 a tn^2, e di SD^2 ad Sd^2, cioè DQ a dq in duplicata ragione dell'aja SDT all'altra Sdt.

§. 387. COR. II. Dunque *i parametri principali delle riferite Orbite sono in duplicata ragione di due aje, che in esse descrivono i raggi vettori in uguali tempuscoli. E queste aje in sudduplicata ragione de' medesimi parametri.*

§. 388. COR. III. Prendansi nelle Orbite DRA, dra le due aje infinitesime SRO, Sro descritte in tempi uguali, e si calino le perpendico-

(a) *Prop. 9. Lib. II. Conic. di Giannat.*
(b) *Pren. IV.*

Digitalizzato da Google

dicolari SM, Sm sulle loro tangenti in R ed r; saranno questi triangoletti SRO, Sro in ragion composta di SM ad Sm, e di RO ad ro, cioè del perpendicolo SM all'altro Sm, e della velocità in R a quella in r.

§. 389. Cor. IV. Dunque *i parametri principali di queste Orbite Ellittiche sono come i quadrati delle velocità, onde i corpi si muovono in due qualunque punti di esse, e come i quadrati delle perpendicolari calate dal centro delle forze sulle tangenti, che loro conduconsi per gli stessi punti.*

§. 390. Cor. V. Si tagli DL uguale a DQ; il quadrato di TN, che si è mostrato uguale al rettangolo QDN, sarà puranche uguale all'altro LDN, ovvero ad LND. Dunque *il diametro del circolo osculatore dell'ellisse nel di lei Afelio, o nel Perielio pareggia* DQ *parametro principale di tal curva.*

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXXIV. TEOR.

§. 391. *La velocità colla quale un corpo si muove in un luogo qualunque* N *dell'Orbita Ellittica* A N B *descritta intorno all' immobile umbilico* S, *sta alla velocità, con cui un'altro mobile si volgerebbe circolarmente alla medesima distanza* SN *intorno al centro* S, *in sudduplicata ragione dell' altro ramo* N Q *al semiasse maggiore* B C.

Fig. 54.

DIM. Le proposte velocità de' mobili son quanto quelle, ch'essi potrebbonsi acquistare calando per le altezze R N, e P N respettivamente uguali (342) ad N Q, ed N S. Dunque (175) i quadrati di queste velocità saranno fra loro in ragion composta di R N a P N, e di SP ad SR, (intendendosi nella composizione di queste ragioni omessa la terza ragione di S N ad S N, perchè di uguaglianza): cioè in ragion composta di 2 R N a P S, e di P S ad S R, vale a dire come 2 R N prima ad S R terza, o sia (prendendo le metà di questi termini), come R N, o la sua uguale N Q a B C. Dunque la velocità, con cui quel corpo che aggirandosi nell' ellisse A N B perviene al punto N, sta a quella onde nel circolo del raggio S N si volgerebbe intorno ad S, in sudduplicata ragione di N Q a B C, C. B. D.

§. 392.

Digitalizzato da Google

§. 392. COR. I. Che se il punto M sia un' estremo dell' asse minore, l' inclinata Q M sarà uguale al semiasse maggiore (*a*). Dunque *in tal luogo la velocità del mobile, che aggirasi nell' Orbita ellittica, sarà uguale a quella, con cui il medesimo si volgerebbe circolarmente intorno allo stesso centro* S *alla medesima distanza* S M.

§. 393. COR. II. Ed essendo le velocità, onde quel corpo, che volgendosi nell' Ellisse B M A a' luoghi M ed A ne perviene, come le perpendicolari calate dal centro S delle forze sulle tangenti de' punti A, ed M (284), cioè come S A ad M C; *anche in questa ragione sarà la velocità, con cui un corpo circolarmente intorno ad* S *si aggira nella distanza* S M, *a quella, onde un' altro corpo volgendosi nell' Ellisse* B N A *ne giugne all' Afelio* A.

PROP. LXXXV. TEOR.

§. 394. *Tanto tempo v' impiega un corpo a volgersi nella semiellisse* B M A *con forza centripeta tendente all' immobile umbilico* S, *quanto nel discendervi per l' altezza* D S *uguale al di lei asse maggiore.* Fig. 55.

DIM. Passi la retta S D per un' estremo M dell'asse minore, e s' intenda volgersi un cor-

(a) *Prop. 25. Lib. II. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

po intorno al centro S delle forze nel circolo M T V. Si prendano i due archetti M m, A a descritti in uguali tempuscoli, e si congiungano i raggi vettori S M, S m, S A, S a. Sarà, come l'è chiaro da' conici, S M metà di B A, o della sua uguale S D.

Or i due triangoletti M S m, A S a potendosi aver come rettilinei sono fra loro in ragion composta di S M ad S A, e di M m ad A a. Ma la seconda di queste due ragioni componenti (8) è uguale alla ragione della velocità, colla quale un corpo aggirasi nel circolo M T V intorno ad S, a quella, con cui il mobile ne arriva all'Afelio A dell'Orbita B M A, cioè (393) nella ragione di S A ad M C: dunque i medesimi triangoletti saran fra di loro in ragion composta di S M ad S A, e di S A ad M C, val quanto dire come la prima S M alla terza M C. Ed essendo i tempi periodici pel semicircolo M T V, e per la semiellisse B M A direttamente come il semicircolo M T V alla semiellisse B M A, ed inversamente come le aje M S m, A S a (287); essi saranno come S M ad M C (la qual ragione (*a*) pareggia quella del semicircolo alla semiellisse), e come M C ad S M, vale a dire in ragion di uguaglianza. Ma il tempo, in che si descrive il semicircolo M T V, è uguale a quello della discesa verticale per D S (177). Dunque tanto

(a) *Prop. 35. Lib. II. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

to tempo v'impiega il mobile A nel discendere per la semiellisse A M B dall'Afelio al Perielio, quanto nel calare al centro S delle forze per la retta D S uguale all' asse maggiore . C.B.D.

PROP. LXXXVI. TEOR.

§. 395. *I quadrati de' tempi periodici, onde rivolgonsi i corpi* D, *e* d *nelle Orbite ellittiche* D R A, d r a *intorno al comune umbilico* S, *sono in triplicata ragione de' loro Assi maggiori* D A, d a. Fig. 56.

E se i corpi D *ed* M *si volgessero nelle Orbite ellittiche* D R A, M Q L *intorno a diversi umbilichi* S *ed* F; *i quadrati de' tempi periodici saranno come i cubi degli assi maggiori, ed inversamente come le forze assolute degli stessi centri.* Fig. 56. e 60.

Dim. Part. I. Si prolunghino le rette S D, S d, sinchè S G, ed S g pareggino respettivamente gli assi A D, a d delle proposte Ellissi. Ei sarà chiaro da ciò, che si è dimostrato nel Teor. precedente, che i tempi delle rivoluzioni de' corpi D, e d nelle semiellissi D R A, d r a sien quanto quelli, ch' essi corpi v' impiegherebbero a discendere per le rispettive altezze G S, g s al centro S delle forze. E quindi siccome i quadrati di questi tempi sono in triplicata ragione delle altezze GS, gS (181); così i quadrati de' tempi, onde i corpi D, e d si volgono nelle semiellissi D R A, d r a, o

Digitalizzato da Google

nelle intere Ellissi, saranno come i cubi delle altezze GS, g S, o degli assi maggiori AD, a d.

PART. II. Si tirino da' fuochi S, ed F le inclinate SR, FQ uguali a' semiassi maggiori dell'Ellissi ANRD, LQMV: saranno i tempi delle rivoluzioni de' corpi D, ed M nelle intere Ellissi ANRD, LQMV uguali a que' tempi, ch' essi vi porrebbero a descrivere intorno a' centri S, ed F i circoli de'raggi SR, FQ (*a*). Or i quadrati di questi tempi sono fra loro direttamente come i raggi SR, FQ de' mentovati circoli, ed inversamente come le forze (*b*) centripete, onde i corpi R e Q quivi ne vengon ritenuti (*c*): e queste forze centripete son direttamente come le forze assolute de' centri, ed inversamente come i quadrati delle distanze (per Ipot.). Dunque i quadrati de' tempi, onde ne' circoli de'raggi SR, FQ volgonsi essi corpi intorno ad S ed F, sono fra loro come SR ad FQ, come SR^2 ad FQ^2, e come la forza assoluta del centro F a quella del centro S, cioè come SR^3 ad FQ^3, e come la forza del centro F a quella del cen-

(a) Vedi la dim. del Teor. prec. verso la fine.

(b) Cioè come le quantità acceleratrici delle forze centripete.

(c) Niente osta, che quì si prendan corpi disuguali: perciocchè le forze acceleratrici di due uguali elementi di materia (*93*) pareggian quelle di due masse comunque grandi, e disuguali fra loro, poste però ne' luoghi ove sieno quegli elementi.

Digitalizzato da Google

centro S. Dunque anche i quadrati de' tempi delle rivoluzioni nelle Orbite ellittiche ANRD, LQMV saranno come SR³ ad FQ³, e come la forza assoluta del centro F a quella del centro S: cioè come AD³ ad LM³, e come la forza del centro F a quella del centro S. C. B. D.

§. 396. Cor. I. Dunque *se più corpi si volgano in Orbite ellittiche intorno al un loro comune umbilico; i tempi periodici saranno in sesquiplicata* (180) *ragione degli assi maggiori di queste Orbite, o delle medie distanze* (a) *di essi corpi dal comun centro delle forze.*

§. 397. Cor. II. Questa è quella famosa legge armonica Kepleriana, onde Natura tempera mirabilmente i moti de' Pianeti intorno al Sole. Ella fu conosciuta *a posteriori* dal sagacissimo Keplero: e deesi la gloria al Gran Newton d'averla dimostrata *a priori*, come si è praticato qui sopra.

§. 398. Cor. III. Dalla II. Parte di questo Teor. rilevasi, che nel vero sistema d' attrazione *le forze assolute di più centri, intorno a cui girino altrettanti corpi, sono nella ragion diretta triplicata delle medie distanze di questi da quelli, e nell' inversa duplicata de' tempi periodici degli stessi corpi.*

§. 399. Cor. IV. Dunque sapendosi per le

(a) *Prop. 25. Lib. II. Con. Giann.*

Digitalizzato da Google

osservazioni Astronomiche i tempi delle respettive rivoluzioni di Venere, e della Terra intorno al Sole, dell' estimo Satellite Gioviale intorno a Giove, e del Satellite Ugeniano intorno a Saturno, e conoscendosi eziandio le loro medie distanze dai centri del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno; agevolmente si potran ritrovare le forze assolute de' centri del Sole, della Terra, di Giove, di Saturno: dividendo i cubi di queste medie distanze pe' quadrati de' respettivi tempi periodici.

§. 400. COR. V. E poichè le forze assolute di questi centri (96) son que' pesi, che avrebbero masse uguali a distanze uguali da' medesimi centri, cioè alla distanza 1; colla sola regola aurea potran rilevarsi i pesi di queste masse allogate nelle superficie del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno. Imperocchè se facciasi come il quadrato del semidiametro del Sole ad 1, così la forza centripeta, o il peso di una di tali masse nella distanza 1 dal centro del Sole, ad un quarto proporzionale; questo indicherà il peso di tal massa in sulla superficie del Sole. Similmente facendosi come il quadrato del semidiametro terrestre ad 1, così il peso di una delle divisate masse nella distanza 1 dal centro di nostra Terra ad un quarto; tal quarto proporzionale darà il di lei peso nella superficie terrestre (143). E così degli altri.

§. 401. SCOL. I. Questi sono i principj, onde il Cavalier Newton, ed altri Geometri seguen-

Digitalizzato da Google

guendo le di lui orme han ritrovato i pesi, che terrebbe uno stesso corpo in sulle superficie del Sole, della Terra, di Giove, e di Saturno. La loro proporzione è quella de' numeri 10000, 104, 835, 525, qual si è indicata dal Newton nel Cor. I. prop. VIII. Lib. III, o altra, che le si approssima.

§. 402. Scol. II. Il Sole (per dir qualche cosa del sistema mondano, le cui irregolarità vo' qui appresso esaminare) è il massimo corpo del nostro Planetario sistema, e la più fulgida Fissa di quante irradiino sulla nostra Terra. Egli n' è come impiantato in un luogo entro le Orbite di que' Pianeti, che gli giran d' intorno in diversi tempi periodici: e quivi senza aver moto progressivo si volge in 27. giorni intorno al suo asse, che al piano dell' Ecclittica, cioè dell' Orbita della nostra Terra, è sotto l'angolo di 7. gradi inclinato. Le Orbite de'Pianeti non sono circolari, come il si credea ne' tempi anteriori al gran Keplero; ma altrettante Ellissi fra loro diverse nella grandezza, nella specie, nella posizione, e sotto disuguali angoli inclinate al piano dell'Ecclitica. Intorno al Sole, che sta in un comune umbilico di tali Orbite, l'è così temperato il movimento di questi corpi celesti, che i tempi in ciascuna di esse son come que' settori ellittici, che intorno al Sole descrivonsi dai loro raggi vettori. Ed in diverse Orbite i quadrati de' tempi periodici son come i cubi de' loro

Digitalizzato da Google

assi maggiori: o, che torna allo stesso, i tempi periodici seguono la sesquiplicata ragion delle distanze medie de'Pianeti dal Sole. Tutti questi corpi celesti si muovon sempre in conseguenza de'segni: i nodi delle Orbite, cioè que' punti, ove queste tagliano la nostra Eclittica, progrediscono lentissimamente, come il fan pure i loro Afelj, ed i Perielj. Ed intorno ad alcuni di questi Pianeti vi girano altri corpi opachi, che diconsi Pianeti secondarj: serbando nelle loro rivoluzioni quelle stesse leggi, che a'primarj competono intorno al Sole. Premesse queste cose è di bene, ch'io vi dichiari coi principj della Meccanica certe irregolarità, che han luogo nelle divisate rivoluzioni.

CAP. XVI.

DELLE ANOMALIE DE' PIANETI.

§. 403. DEF. XLV. L' *Eccentricità* dell' Orbita di un Pianeta è la distanza del centro del Sole da quello dell' Orbita.

§. 404. COR. Dunque l' Eccentricità dell'Orbita di un Pianeta è una metà della distanza de' di lei fuochi: imperocchè tali Orbite non sono, che altrettante Ellissi, ed in un comune diloro umbilico n'è impiantato il Sole (402).

§. 405. DEF. XLVI. *Circolo Eccentrico* è un circolo

Digitalizzato da Google

colo circoscritto ad un' Orbita ellittica, cioè che ha per un diametro l' asse maggiore della medesima Ellisse.

§.406. DEF. XLVII. *Anomalia Vera*, o *Coequata* è l' angolo formato al centro del Sole dal massimo raggio vettore di un' Orbita, e da quell' altro, che passa per lo centro del Pianeta, che la percorre.

§. 407. DEF. XLVIII. *Anomalia Eccentrica* è l' angolo formato al centro dell' Orbita dal semiasse maggiore, che va all'Afelio, e dal raggio del cerchio eccentrico, che congiunge l' estremità della di lui semiordinata condotta per lo centro del Pianeta.

§. 408. DEF. XLIX. L' *Anomalia Media* o *Equabile* è un settore ellittico compreso dal raggio vettore che va all'Afelio, da quell'altro che passa per lo centro del Pianeta, e dall'arco ellittico ch' è in mezzo ad essi, e che in conseguenza de' segni misurasi dall' Afelio insino al centro del Pianeta.

§. 409. Sia A M P l' Orbita di un Pianeta, per cagion di esempio della nostra Terra, che dal suo Afelio A conducasi per A M P al suo Perielio P: P A sia l' asse maggiore di questa Ellisse: ANP dinoti il dilei circolo eccentrico: il Sole stiane impiantato nell' umbilico S, e la Terra si ritrovi nel punto M della sua trajettoria in un qualche tempo. Per M conducasi nel circolo eccentrico la semiordinata RN, e si uniscano le rette S N, S M, C N, C M. *Fig.* 57.

L'An-

Digitalizzato da Google

L'Angolo ASM dirassi l'Anomalia vera, o coequata della Terra, ch'è in M.

L'angolo NCA è l'Anomalia eccentrica.

E l'aja ellittica ASMr è poi l'anomalia media.

§. 410. Cor. I. Or essendo, come apparisce da'conici, l'aja ellittica ASMr alla corrispondente aja circolare ASN nella costante ragione dell'asse minore al maggiore; anche l'aja circolare ASN potrà prendersi per l'anomalia media della Terra, che si ritrovi nel luogo M della sua Orbita.

§. 411. Cor. II. Ed essendo il settore ellittico ASMr proporzionale al tempo, che v'impiega la Terra nel trasferirsi dall'Afelio A al luogo M; a questo stesso tempo sarà pur anche proporzionale il settore circolare ASN.

§. 412. Cor. III. Quindi perchè la Terra v'impiega 6. mesi nel condursi dall'Afelio al Perielio della sua Orbita; alla fine di un mese sarà di 30° la sua anomalia media, di 60° alla fine di due mesi, ec. E generalmente il tempo periodico, in che un Pianeta si volge nella sua Orbita AMP, suol dividersi in 360 parti uguali, e la di lui Anomalia media, quando ei si trovi in M, sarà di tanti gradi, quante son le parti 360^me di esso tempo periodico, nelle quali vi è giunto dall'Afelio A.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXXVII. PROBL.

§. 413. *Data l'eccentricità* SC *di un Pianeta, che volgesi nell'Orbita* ADP *intorno al Sole* S, *e la di lui Anomalia eccentrica* NCA, *ritrovare l'Anomalia media* MSAr, *e la vera* MSA, *che le corrispondono*.

1. Si moltiplichi il dato arco NA per la metà del raggio del circolo eccentrico, e 'l suo seno per la metà della data eccentricità. 2. Si uniscano insieme siffatti prodotti: onde avrassi il settore circolare NCA, e 'l triangolo NCS, cioè l'aja circolare NSA. 3. Facciasi come l'asse maggiore dell'Ellisse ADP al minore, così l'aja NSA ad un quarto: che sarà l'aja ellittica MSA, cioè l'anomalia media del Pianeta, corrispondente alla data eccentrica.

Ma per aversi l'anomalia vera si determini 1. l'angolo NSC del triangolo NSC, di cui son dati i due lati SC, e CN, e l'angolo SCN conseguente al dato NCA. 2. Facciasi come l'asse maggiore dell'Orbita al minore, così la tangente di questo angolo di già determinato ad un quarto proporzionale: che sarà la tangente dell'angolo MSR, cioè dell'addimandata Anomalia vera corrispondente alla data eccentrica NCA.

La dimostrazione di questo Problema immantinente si rileva dalla medesima costruzione.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. LXXXVIII. PROBL.

§. 414. *Data l' Eccentricità dell' Orbita, in che si volga un Pianeta, e la di lui Anomalia media, calcolarne la corrispondente Anomalia vera.*

Fig. 58.

Costr. Premesse le cose dianzi esposte, nel fuoco F dell' orbita A L B ne stia il Sole, e sien date di magnitudine la F C eccentricità di lei, e la C A ch' è un semiasse maggiore di essa.

1. Prendasi nel cerchio eccentrico A M B l'arco A D M di tanti gradi, e minuti, quanti se ne contengono nella data anomalia media (412). 2. Si unisca la retta F M, e dal centro C dell'Orbita le si conduca la parallela C D. 3. Si tiri la corda D M, e poi si faccia il settore D F d uguale al segmento circolare D d M. 4. Si cali DQ perpendicolare su di BA, e si unisca F L: Sarà *l' angolo* A F L *l' anomalia coequata, che alla data media corrisponde* (a).

Dim.

(a) Uno de' più preclari, ed utili Problemi, che suol proporsi in Astronomia, è quello di *ritrovare il luogo di un Pianeta, dato il tempo, da ch' ei s' è partito dall' Afelio*. Questo Problema nell'Ipotesi, che i Pianeti si rivolgano in Orbite ellittiche intorno al Sole impiantato in un comune umbilico di esse, riducesi ad *indagarne dall' Anomalia media la coequata*, o (convertendolo in geometrico) *a dividere una semiellisse in una data ragione per una retta, che passi per un dilei fuoco*, o final-

Digitalizzato da Google

DIM. I due triangoli D M C, D F C posti sulla comun base C D, e rinchiusi tra le stesse parallele C D, F M sono tra se uguali. Dunque aggiungendo al primo di essi il segmen-

finalmente *a dividere nella stessa ragione il dilei semicerchio eccentrico per mezzo di una retta, che passi per quel fuoco.* Or non potete Voi immaginarvi quai ſmarrimenti non abbia nello ſpirito degli Aſtronomi un tal Problema cagionati! Il ſagace Keplero per l'*eterogeneità*, com' ei dicea, degli archi, e de'ſeni, o piuttoſto pel traſcendente rapporto, ch'evvi tra eſſi, non ſi fidando ſcioglierlo a *priori* andò a tentoni riſolvendolo con della regola del falſo. Altri Aſtronomi dal non ſaperlo ſcioglier direttamente conchiuſer male, ch'ei non ſi poteſſe geometricamente diſnodare: e più ſtranamente ne inferirono, che l'Ipoteſi Kepleriana, avvegnacchè poco favorita dalla Geometria, doveſſe proſcriverſi dal ſiſtema de' Pianeti. Infatti Iſmaele Bulialdo, e Set Wardo due famoſi Aſtronomi Oltramontani ſuppoſero, che ciaſcun Pianeta ſi volgeſſe in un' orbita ellittica intorno al Sole poſto in un dilei umbilico, e che gli angoli deſcritti intorno all'altro fuoco, e non le aje intorno al Sole, foſſero proporzionali ai tempi. Ed in tal modo con un metodo agevole, ed approſſimante riſolvean eſſi coteſto Problema delle Anomalie. Ma il Gran Nevvton avendo dimoſtrata a *priori* l'Ipoteſi Kepleriana, pensò di ſcioglier lo ſteſſo Problema compiutamente: onde dopo averlo coſtruito colla combinazione del Circolo, e della Cicloide, come avealo anteriormente riſoluto l'Illuſtre Cavalier Wren, propoſe *nell. Scol. del Probl.* 22. *del I. Lib. de' Princ. Mat.* una ſerie d'angoli convergente, che ſu dai Signori David Gregori, e Gio. Keil illuſtrata. Dopo di ciò i valentiſſimi Aſtronomi Filippo de la Hire, il Signor Caſſini, e Pietro Horrebovv ne diedero delle altre ſoluzioni *nell. Mem. dell' Acc. di Par. ann.* 1710, 1719, *e nel volum. VI. Suppl. di Lips.* E Giacomo Er-

Digitalizzato da Google

mento D d M, ed al secondo il settore D F d, dee risultarne il settore D C M d uguale al trapezio mistilineo D C F d. Ed aggiungendo a questi spazj il comun settore circolare D C A, n'e-

Ermanno *nel I. Vol. degl. Att. Ant. Pietr.* non pure volle risolverlo geometricamente insiem combinando il cerchio, e la quadratrice di Tschirnhausen; ma con un' approssimazione adattata agli usi Astronomici, (qual è quella, che ho quassù rapportata) ne guidò a fine una facilissima soluzione. Finalmente i sommi Analisti Leonardo Eulero, e Luigi de la Grange si sono ancor essi ingegnati risolver tutti i Problemi delle Anomalie per mezzo dell' equazioni differenziali, che le dinotano.

Ma quì da ultimo giova esibirvi quella formola proposta dal Dottor Machin nelle *Trans. Angl. an.* 1738., ond' ei dall' Anomalia media raccoglieane la coequata tanto nelle orbite di poca eccentricità, che nelle molto eccentriche. Eccone i risultati. Il semiasse di un' orbita, la di lei eccentricità, e la differenza di quello e di questa dicansi t, f, e, p: e sia $n = \sqrt{(5 + \sqrt{(25 + p : f)})}$, la qual grandezza nelle orbite assai eccentriche, come son quelle delle Comete, è ad un di presso uguale a $\sqrt{10}$. Inoltre sieno T, e P respettivamente uguali a $2t : (nnt - (nn - 1)p)$, ed a $pT : t$; ed M esprima il numero de' grad. dell' Anomalia media computata dal Perielio, e sia $R = 57°$, 2937, ed $N = \sqrt[3]{(3TM : nR)}$, e finalmente sia

$$Q = N\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2} + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + P^3 : N^6)}\right)} + N\sqrt[3]{\left(\tfrac{1}{2} - \sqrt{(\tfrac{1}{4} + P^3 : N^6)}\right)}$$

ed $A =$ Arc. sen. Q

sarà ad un dipresso nA la ricercata Anomalia eccentrica.

Egli stabilisce certe limitazioni, ed illustra questa formola con molti esempli, che quì per brevità ometto.

Digitalizzato da Google

n' emergerà il settore MCA uguale all'aja dFA. Dunque il semicerchio BMA starà al settore ACM, come lo stesso semicerchio all'aja AFd. Ma il semicerchio BMA sta al settore ACM, come 180 grad. al num. de' grad. dell' arco AM: e lo stesso semicerchio sta all'aja dFA, come la semiellisse BLA all'aja AFL. Dunque saranno 180 gr. al num. de' gr. dell' arco AM, come la semiellisse BLA all'aja AFL: e quindi essendo l' aja AFL l' anomalia media (408), l'angolo AFL (406) sarà la coequata, che si chiedea. C. B. D.

§. 415. Cor. I. Sapendosi i gradi dell' arco ADM, e con ciò dell' angolo ACM, si saprà l' angolo MCF conseguente ad ACM. Ma son puranche noti i suoi lati CF, CM respettivamente uguali all' eccentricità dell'Orbita, ed al dilei semiasse maggiore. Dunque per le regole della Trigonometria potrà determinarsi l' angolo MFC, e quindi il suo uguale DCA. Per la qual cosa conosciuto l'angolo DCF conseguente di DCA, ed essendo noti i lati FC, CD, che il contengono, potrà collo stesso artificio sapersi l'angolo CFD; il quale nelle Orbite de' Pianeti, che non son molto eccentriche, pareggerà ad un di presso l' anomalia coequata: senza praticar il resto della costruzion del Problema.

§. 416. Cor. II. Questo Problema s' intenderà risoluto, sol che dall'Anomalia media si raccol-

Digitalizzato da Google

colga l'eccentrica: imperciocchè da questa facilmente ritrovasi la coequata (413).

§. 417. Esemp. A L B rappresenti l' Orbita di Marte, e nel dilei fuoco F siavi posto il Sole. La F C eccentricità di essa contenga 1410 di quelle parti, delle quali il semiasse C A ne tiene 15237: e l'Anomalia media suppongasi esser di 45°. Dunque preso l' arco A M, e quindi l'angolo A C M di 45°, e condotta la C D parallela alla retta F M, che unisce i punti F, ed M; sarà l' angolo D C A di 41°, 29' come può saggiarlo talun di Voi, risolvendo il triangolo D C A, di cui son dati i lati M C, C F, e l'angolo M C F, ch' essi comprendono. Or quest'angolo è pressochè uguale all' Anomalia eccentrica, e 'l di lui valore è quanto quello, che il Sig. Keil con una serie Newtoniana ha rinvenuto per l'Anomalia media di 45° (*a*).

CAP.

(a) *Vedi Keil Introd. ad Astr. Lect.25. Exemp.4. e not.* (a) §. 414.

Digitalizzato da Google

CAP. XVII.

SAGGIO DI ALCUNE TURBAZIONI NEL MOTO DE' PIANETI SECONDARJ, E DEL MOVIMENTO DEGLI ASSIDI.

PROP. LXXXIX. PROBL.

§. 418. *Muovasi il corpo* L *nell' Orbita ellittica* L Q E *con forza centripeta tendente ad un di lei umbilico* T; *abbozzare il metodo Nevvtoniano, onde valutansi le turbazioni quivi prodotte da un' altro corpo* S. Fig. 59.

COSTR. Esprima la retta L C quella forza, con cui il corpo L tende ad S: si congiunga la L T, e per L distesa la retta L B parallela a T S, si conducano dal punto C le altre due C B, C A respettivamente parallele ad L A, e T S. E finalmente la forza L C risolvasi nelle due laterali L A, L B, le quali si dicano f', ed F': e quell' altra, onde il corpo L tende a T, si chiami f.

E poichè le due forze f, ed f' tendono amendue al punto T; il corpo L, che da esse n'è investito, descriverà benanche intorno a T le aje proporzionali ai tempi (284). Dunque l'accessione, che fassi al corpo L della forza laterale f', non turba mica l' equabilità delle

Digitalizzato da Google

aje intorno a T; ma sol ne induce una deformità nella figura ellittica: conciossiachè l' aggregato delle forze f, ed f' non è in ragion inversa duplicata della distanza L T, qual dovrebb' essere, affinchè la Trajettoria del corpo L sia un'Ellisse conica avente il punto T per un dilei umbilico (346).

2. Ma quai cangiamenti la forza L B, o F' a tal Orbita non arreca? Primieramente la forza, che si compone da F', e da f + f', non tende al punto T, com'è chiaro di per se stesso. Dunque la forza F' turba l' equabilità delle aje descritte intorno a T. II. La direzione media, che prende il corpo L animato dalle forze F' ed f + f', non è, che in qualche caso, coincidente coll'archetto, che sta il mobile descrivendo. Dunque a cagion della forza F' deformasi grandemente cotesta figura ellittica. III. E se la T S, o la L B non istia sempre nel pian dell' orbita D Q E; le infinite diverse direzioni medie, che il mobile sarà obbligato a prendere successivamente, comporranno una linea a doppia curvatura.

3. Supponete, che in T siavi un'altro corpo, anche attratto da S, ma colla forza Φ; sarà chiaro, che niuna perturbazione debba produrre la forza L B sul moto del corpo L, qualora Φ uguagli F'. Imperocchè in tal caso i corpi L e T sarebbero da uguali forze agitati, e per le direzioni parallele L B, T S. Dunque L dovrebbesi muovere intorno a T, come se

la

Digitalizzato da Google

la forza F' punto non lo investisse. E non essendo la forza Φ uguale all' altra F', dalla differenza di queste dovran ripetersi quelle turbazioni, che nel numero II.° indicai addivenire all' orbita L Q D.

4. Il corpo T sia un Pianeta, che giri intorno al Sole S, ed intorno a T vi si rivolga l' altro Pianeta L, che suol dirsi *Satellite* del primo, o *Secondario* di esso, e T *Primario* di L. Il punto Q dell' orbita di questo Satellite, ov'ei dal Primario T vedrebbesi in congiunzione col Sole S, e l' altro punto P nel quale giunto il Satellite si vedrebbe opposto al Sole, diconsi *Sizigie*. E i due punti D, ed E di questa Orbita del Satellite equidistanti dalle Sizigie appellansi *Quadrature*.

5. Dunque *un Satellite dee descrivere intorno al suo Pianeta le aje tanto più proporzionali ai tempi, ed un' Orbita, che vie più si approssima ad un' Ellisse avente* T *per un di lei umbilico, quanto più in parità di altre circostanze si minori la differenza delle forze* Φ *ed* F'.

§. 419. Scol. I. Di quì si potrebbero raccorre tante altre verità insigni, che a questo argomento si appartengono: ma il dimostrarvele adeguatamente farebbemi eccèder la meta, che mi son proposto. Dunque sarà convenevole, che ve ne indichi solamente le principali: cioè *il Satellite va più veloce nelle Sizigie, che nelle Quadrature: la sua Orbita è più curva nelle Quadrature, che nelle Sizigie: l' asse di quest'*

Digitalizzato da Google

Ellisse, o la linea degli Assidi, ha un vecendevole progresso, e regresso angolare: i dilei nodi muovonsi in antecedentia, cioè a parte contraria di quella per cui ne progredisce il Satellite: ed altre, che potrete leggerle ne' 22. *Corolll. dell. Prop. 66. Lib. 1. Princ. Mat. del Nevvt. e nell' Astron. di David Gregori nell. Sect. de Error. quos sol produc. in motu satell.* (a)

§. 420. SCOL. II. Da ciò, che han dimostrato questi due Valentuomini, ed altri, ben si rileva, che *mentre un Satellite va descrivendo la sua orbita eccentrica intorno al suo primario, il dilei asse con moto angolare aggirasi intorno al centro del primario ora in antecedentia ed ora in consequentia*. Dunque è ragionevole, ch' io quì intraprenda la disamina del moto degli Assidi.

Fig. 61. §. 421. DEF. L. L' Orbita A B E, in quel tempo, che il mobile avrebbevi descritto un qual-

(a) Questo argomento considerato nel più grande aspetto forma il famoso Problema *de' tre corpi*, che come dicea il dottissimo Lambert, l'è oramai divenuto serioſa occupazione de' Sagaci Astronomi, e degli Acuti Analisti: e si è lasciato ai Tironi delle Mattematiche, che si rodano il cervello sulla quadratura del cerchio. Or molti Geometri in varie guise si sono distinti nel risolverlo, e specialmente l'acutissimo de la Grange ne ha dati diversi Opuscoli *nel Vol. II. Miscell. Taurin. nel Probl. 3. dell'Applic. del suo Nuovo Metodo de' Massimi, e Minimi delle formole integrali indefinite: negli Atti di Berlin. an.* 1777.: *e finalmente nella pag.* 286. *della Mechanic. Analyt.*

Digitalizzato da Google

qualche arco A B, intendasi con moto angolare aggirarsi intorno al centro C delle forze, e con tal legge, che l' angolo A C a descritto dalla C A linea degli assidi stia sempre all'angolo ACB in una costante ragione (*a*): un tal movimento dell'asse AE si dirà *moto degli Assidi*. L'Orbita A B E dirassi *Immobile*, o *Quiescente*, e l'altra a b e *Mobile*, o *Rivolvente*. E dirò *Pianeta* il corpo, che la percorre, perciocchè nei Pianeti Secondarj si è dimostrato aver luogo un tal moto.

§. 422. Cor. I. Dinoti a b e la situazione, che abbiasi presa l'orbita del Pianeta alla fine del divisato tempo: e si descriva col centro C intervallo C B l'arco circolare B b, che incontri l' orbita mobile a b e nel punto b; saranno uguali e simili gli archi ellittici A B, a b, e sotterranno gli angoli uguali A C B, a C b. Imperciocchè nelle due Ellissi A B E, a b e perfettamente uguali, i rami uguali C B, C b debbon troncarvi d'accanto ai vertici prin-

(a) Il Cavalier Nevvton *nell. Prop.* 43. *Lib. I. Princ. Mat.* e David Gregori *nell. Prop.* 3. *Sez. II. Lib. IV. El. Astron.* dimostrano, che il moto angolare dell' asse di un' Orbita mobile debba serbar questa legge, affinchè il Pianeta quivi si muova nello stesso modo, che nell' Orbita immobile: vale a dire perchè ei descriva gli archi dell' Orbita mobile in que' tempi, in che avrebbeli percorsi nella immobile. Ma quì ho supposto possibile un tal movimento: e da questa nozione ho voluto indagarne le sue leggi, e risolvere i principali Problemi, che su tale argomento soglion proporsi.

Digitalizzato da Google

cipali A, ed a gli archi AB, ab uguali; e simili: e questi deggion sottendere gli angoli uguali ACB, aCb.

§. 423. Cor. II. Essendo costante la ragion dell'angolo ACa all'angolo ACB, o al dilui uguale aCb; sarà componendo l'angolo ACb all'altro aCb in una costante ragione.

§. 424. Def. LI. La ragion dell'angolo ACb all'altro aCb suol indicarsi per quella di G ad F.

§. 425. Cor. III. Se dopo un dato tempo il Pianeta nell' Orbita immobile avrebbe percorso l'arco AB, potrà rinvenirsi il luogo b, ov' ei si ritrovi nell'orbita mobile; se facciasi l'angolo ACb ad ACB come G ad F, e poi Cb uguale a CB.

§. 426. Def. LII. La curva APb, che risulta dal moto proprio del Pianeta, e da quello della dilui orbita, chiamerassi *la vera Trajettoria del Pianeta*.

§. 427. Cor. IV. Essendo sempre l'aja ACb all'altra ACB nella costante ragione di G ad F, e Cb uguale a CB; la vera Trajettoria del Pianeta potrà agevolmente descriversi coll'assegnazione de' punti, pei quali ne passa. Ma la dilei natura può anche analiticamente definirsi per mezzo di quella equazione differenziale, che le appartiene: come lo ha eseguito il Sig. Varignonio negli Atti dell' Acc. delle Scienze di Parigi 1705.

Digitalizzato da Google

PROP. XC. TEOR.

§. 428. *Il corpo* A, *col suo moto proprio nell'orbita quiescente* A B E, *e col moto della medesima orbita intorno al centro* C *delle forze, puranche descrive le aje proporzionali a' tempi intorno allo stesso punto* C.

Dim. Preso ovunque nell' Orbita quiescente l' archetto infinitesimo B D, si congiungano le rette C B, C D. Dipoi intendasi fatto l'angolo A C b all'altro A C B come G ad F, e nella stessa ragione di G ad F sia pure l'angolo A C d all' altro A C D; sarà (*a*) il rimanente angolo b C d al rimanente B C D nella stessa ragione di G ad F. E se i lati dell' angolo b C d si concepiscano distesi, finchè incontrino in b, e d la vera Trajettoria del Pianeta; l'archetto b d sarà descritto nello stesso tempo, che l'altro B D nell' orbita quiescente (425).

S' intendano col centro C e cogl' intervalli C B, C D descritti gli archi circolari B b, D d; saranno le due aje b C d, B C D pressochè uguali ai settori circolari m C d, M C D: e quindi quelle al par di questi (*b*) saranno come gli angoli m C d, M C D, cioè come G ad F.

(a) *Prop.* 19. *El. V.*
(b) *Prop.* 33. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

Dunque sarà (Prop.12. El.V.) l'intera aja ACdP nella vera Trajettoria, alla corrispondente aja ACD nell'orbita quiescente, anche come G ad F. Per la qual cosa essendo le aje, che nella vera Trajettoria del Pianeta ne taglian sempre i di lei raggi vettori, come le corrispondenti nell'orbita quiescente; siccome queste son proporzionali ai tempi, ne' quali vengon descritte (284), così il saranno ancora quelle. C.B.D.

§.429. Cor. I. Dunque la forza centripeta, onde il Pianeta n'è incessantemente ritenuto nella sua vera Trajettoria, tende (293) pur-anche all'immobile centro C.

§.430. Cor.II. E quindi, per definire la quantità di questa forza centripeta, converrebbe tagliare nella vera Trajettoria del Pianeta due archetti minimi contemporaneamente descritti, e poi saggiarne la ragione delle loro saette (288).

§.431. Scol. Ma questa ragion delle saette difficilmente si rileva dalla genesi della vera Trajettoria, o dalla dilei equazione; perciò ho stimato dimostrarvi in un nuovo modo il seguente Teorema Newtoniano, donde di leggieri comprenderete il rapporto delle forze centripete, con cui il Pianeta in questa curva incessantemente n'è ritenuto.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. XCI. TEOR.

§. 432. *La differenza delle forze, onde il Pianeta nè luoghi equealti* b, e B *della sua orbita mobile* a b e, *e dell' immobile* A B E *vien ritenuto in giro, sta alla forza centripeta nell' Afelio* A *dell' orbita immobile, come* $G^2 - F^2$ *ad* F^2, *e come* AC^2 *in* AO, *prodotto del quadrato del raggio vettore nel raggio dell'oscolo nell' Afelio, a* BC^3, *cubo del raggio vettore nel luogo* B (*a*). Fig. 62.

Dim. I due punti b, e B della Trajettoria mobile a b e, e della immobile A B E sieno ugualmente distanti dal centro C delle forze: e su de' raggi vettori b C, e B C, che passino pe' medesimi punti, si tronchino le due retticciuole uguali ed infinitesime b m, B M, le quali suppongansi dinotar l'energie di quelle forze centripete, onde il Pianeta ne' luoghi

(a) L' acutiſſimo Gio. Bernulli in una ſua diſſertazione inſerita nel X. *Vol. degli Att. Ant. di Pietrob.* ſi dolſe, che queſta Verità eraſi oſcuramente dimoſtrata dal Nevvton *Prop.* 44. *Lib. I. Princ. Mat.* e che Giacomo Ermanno aveane alla dimoſtrazione del Nevvton ſoſtituita un' altra, cui v' eran de' ſofiſmi. Or che che ne ſia del giudizio del Sig. Bernulli, ho ſtimato conveniente illuſtrarvi queſta verità con una dimoſtrazione, ch' è immune, per quanto ne ſembra, da' riferiti nei.

Digitalizzato da Google

ghi b, e B dell'orbita mobile, e della immobile tenderebbe al centro C. Da' punti m, ed M si ergano su de' medesimi raggi le perpendicolari m r, M D proporzionali alle velocità angolari de' raggi vettori C b, C B, cioè a dire agli angoli A C b, A C B, ovvero a G ed F (424): e s'intendano compiti due parallelogrammi dalle rette b m, m r, e dalle altre B M, M D. Egli è chiaro, che il Pianeta b secondando al moto centrale b m, ed all'angolare m r debbasi trasferire da b in r per la diagonale del primo parallelogrammo in tanto tempo, in quanto si (212) sarebbe condotto da B in D per la diagonale dell'altro, secondando al moto centrale B M, ed al trasversale M D. Ma descritto col centro C intervallo C D l'arco circolare g D T, il Pianeta b alla fine di questo tempo trovasi effettivamente in g (425), e non in r. Dunque le forze centrali, onde il Pianeta sarebbe animato ne' luoghi equealti b, e B verso C, non sono uguali, come si è supposto: e lo spazietto g r è dovuto alla loro differenza, e l'è benanche proporzionale.

E poichè si è fatta r m a D M, o alla sua uguale d m, come G ad F: sarà $rm^2 : dm^2 :: G^2 : F^2$; e dividendo $rm^2 - dm^2 : dm^2 :: G^2 - F^2 : F^2$. Ma $rm^2 - dm^2$ è uguale (a) a T r g, cioè al rettangolo di 2 C g in g r; es-

(a) *Prop. 36. El. III.*

Digitalizzato da Google

essendo g r infinitesima rispetto a T g: e dm² l'è pure uguale a d C² — C m², cioè a dire al rettangolo di 2 C t in t m. Dunque sarà 2 C g. g r a 2 C t. t m, cioè (per essere 2 C g, e 2 C t uguali fra loro) g r a t m, come G² — F² ad F².

Prendasi di vantaggio il settore A C p uguale all' altro t C d, o a quest' altro b C d; saranno le basi t C, C A di questi due triangoletti t C d, A C p rettangoli in t ed A nella reciproca ragione delle diloro altezze d t, A p. Dunque sarà ancora d t² : A p² :: C A² : C t². Ma d t², ed A p² son respettivamente uguali a' rettangoli 2 C t. t m, (*a*) e 2 A O. A v (intendendosi calata p v perpendicolare su di C A). Dunque sarà 2 C t. t m : 2 A O. A v :: C A² : C t², e quindi (*b*) t m : A v, come C A² a C t², e come A O a C t: val quanto dire t m: A v :: C A². A O: C t¹.

Ciò premesso, perchè lo spazietto r g è dovuto alla differenza delle forze centripete, che animerebbero il Pianeta ne' luoghi equealti b, e B dell' orbita mobile, e dell' immobile, ed A v esprime la forza centripeta nell' Asside A; sarà la differenza di quelle forze a questa forza centripeta come r g ad A v (288), o in ragion composta di r g a t m, e di t m ad A v (*c*). Ma, come si è dimostrato ne' due paragra-

(a) *Prop.* 31. *El. III. e Cor. Prop.* 8. *El. VI.*
(b) *Prop. IV.*
(c) *Prop. I.*

Digitalizzato da Google

grafi antecedenti, sta r g a t m come $G^2 - F^2$ ad F^2, e t m ad A v come $C A^2 . AO$ a $C t^3$, o a BC^3. Dunque sostituendo queste ragioni in luogo di quelle di r g a t m, e di t m ad A v; avrassi la differenza delle forze centripete ne' luoghi b, e B dell'orbita mobile, e dell' immobile equidistanti dal centro delle forze, alla forza centripeta nell' Afelio A, come $G^2 - F^2$ ad F^2, e come $AO . AC^2$ a BC^3. C. B. D.

§. 433. Cor. I. Dunque ritrovandosi il Pianeta in un luogo b della sua orbita mobile, la cui distanza dal centro delle forze si dica x; sarà la divisata differenza delle forze nel luogo b a quella, che il ritiene nell' Asside, ove il raggio vettore sia 1, ed r quello dell' oscolo, come $(G^2 - F^2)$ r ad $F^2 . x^3$.

§. 434. Cor. II. Similmente la forza centripeta, che ritiene cotesto Pianeta nell' Asside medesimo starebbe alla differenza delle forze per un'altro luogo P, come $F^2 X^3 : (G^2 - F^2)$ r. (supposto, che si chiami X la distanza del luogo P dal centro delle forze). Dunque per uguaglianza perturbata sarebbero ne' luoghi b, e P tali differenze delle forze, come $F^2 X^3$ ad $F^2 x^3$, o come X^3 ad x^3, cioè in triplicata ragion inversa delle distanze de' luoghi b, e P dal centro delle forze.

§. 435. Cor. III. Con che chiamando A la forza centripeta, che ritiene il Pianeta nell' Afelio della di lui orbita immobile; sarà la divi-

Digitalizzato da Google

visata differenza delle forze, qualora ei si ritrovi in b, uguale ad $Ar.(G^2 - F^2) : F^2 x^3$. E supposto che A B E sia un'Ellisse, facciasi x^2 ad 1, così A ad un quarto, ch'è $A : x^2$, questo dovrà dinotare la forza centripeta del Pianeta nel luogo B della dilui Orbita immobile. E quindi sarà $A : x^2 + Ar (G^2 - F^2) : F^2 x^3$ *quella, che il ritiene nel punto equealto* b *dell' Orbita mobile.*

§. 436. Cor. IV. E se l' orbita A B E sia un' Ellisse, e la forza in B pongasi uguale ad $F^2 : x^2$, sarà la forza nell' Asside A a quella nel luogo B, come BC^2 a CA^2, cioè $A : \frac{F^2}{x^2} :: x^2 : 1$, ed $A = F^2$. Dunque in tal caso la differenza delle forze, che avrebbe il Pianeta ne' luoghi equealti B, e b, sarà $F^2 r (G^2 - F^2) : F^2 x^3$, cioè uguale ad $r (G^2 - F^2) : x^3$. E l'intera forza, che il ritiene nel luogo b dell' orbita mobile, come quella, ch'è uguale alla mentovata differenza, ed alla forza centripeta nel luogo B, sarà

$$\frac{F^2}{x^2} + \frac{r G^2 - r F^2}{x^3} = \frac{F^2 x + r G^2 - r F^2}{x^3}$$

§. 437. Cor. V. E ponendo $x = 1 - y$ nel solo numeratore di quest' ultima frazione; sarà la forza centripeta, che ritiene il Pianeta nel luogo b della sua orbita mobile, uguale ad

$$\frac{F^2 - F^2 y + r G^2 - r F^2}{x^3}$$

§. 438.

Digitalizzato da Google

§. 438. SCOL. Su questo argomento soglionsi proporre due principali Problemi, uno inverso dell' altro, ch'esigon de' metodi particolari per risolversi. Il primo propone a *rinvenir dal moto degli Assidi la forza, con cui un Pianeta è nella sua orbita mobile ritenuto*: e questo Problema dalle cose sin quì dette sembra esser adequatamente risoluto. Ma l' altro, di cui quaggiù ne arreco due analitiche soluzioni, *vuol calcolare il moto degli Assidi data la legge, onde il Pianeta nella sua orbita mobile incessantemente al centro delle forze è ritenuto.*

PROP. XCII. PROBL.

§. 439. *Data la forza, colla quale è ritenuto in giro un Pianeta in un' Ellisse mobile, che abbia un' eccentricità picciolissima, calcolarne il movimento degli Assidi.*

SOLUZ. Premesse le verità, e gli artifizj del Teor. prec., e de' suoi Corollarj, ecco la Sol.

1. Si chiami P la forza, onde il Pianeta è ritenuto in giro nel punto b dell'orbita mobile a b e. Questa si riduca ad un fratto, che abbia per denominatore x^1, e 'l di cui numeratore, che dee essere una funzione della variabile x, si chiami X.

2. Si sostituisca in X il binomio $x - y$ in luogo della variabile x; onde ne diventi X uguale ad $a + by + cy^2 + ey^3 + ec.$ qualunque

Digitalizzato da Google

que sieno le grandezze a, b, c, e, ec. Sarà $G^2 = a$, ed $F^2 = -b$.

DIM. La forza, ond' è ritenuto il Pianeta nel luogo b della sua orbita mobile abe, è uguale ad $\frac{F^2 - F^2 y + r G^2 - r F^2}{x^3}$ (437). Ma ella si è puranche espressa per $X : x^3$, cioè per $\frac{a + by + cy^2 + ey^3 \text{ ec.}}{x^3}$. Dunque sarà $F^2 - F^2 y + r G^2 - r F^2$ uguale ad $a + by + cy^2 + ey^3 + \text{ec.}$ Ma essendo quest'orbita quasi un cerchio, il raggio r dell'oscolo, che nell'Afelio è uguale (390) al semiparametro principale, diventa 1: dunque $F^2 - r F^2$ è zero. E poi per essere y una grandezza picciolissima, come quella, che dinota l'insensibile differenza di CA, e di CB, le grandezze cy^2, ey^3, ec. sono trascurabili rispetto agli altri termini, che si adunano nel II. membro dell'Equazione. Dunque sarà $- F^2 y + r G^2 = a + by$. E quindi sarà $G^2 = a$, ed $F^2 = - b$, Imperciocchè contenendosi in quest'equazione la variabile y, debbon esser tra se uguali non pur le grandezze costanti, che in ambe le dilei parti si contengono; ma benanche que' termini di lei, ove la variabile trovasi ascendere ad una stessa dimensione. Altrimenti ne addiverrebbe $r G^2 - a = F^2 y + by$, cioè una grandezza costante uguale ad una parte variabile: lo che ripugna. Dunque sarà $G^2 = a$, ed $F^2 = - b$. C. B. D.

§. 440.

Digitalizzato da Google

§. 440. ESEMP. I. Suppongasi esser costante la forza, che ritiene il Pianeta nella sua orbita mobile a b e. Ella dunque sarà $\frac{x^3}{x'}$, , cioè $(1 - y)^3 : x'$, o finalmente $(1 - 3y + 3y^2 - y^3) : x'$. E quindi sarà $1 - 3y = G^2 - F^2 y$, cioè $G = 1$, ed $F = \sqrt{3}$.

§. 441. ESEMP. II. E se la forza sia come x^{n-3}, cioè come $\frac{x^n}{x^3}$, o come $\frac{(1-y)^n}{x^3}$: o finalmente come $(1 - ny + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^2 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^3$ ec.) : x^3. Sarà $1 - ny = G^3 - F^3 y$, e quindi $G = 1$, $F = \sqrt{n}$. E questi risultati sono identici a quei, che con un metodo alquanto più lungo il Cavalier Newton, ha esposti negli Esemp. 1. e 2. Prop. 45. Princ. Mat.

§. 442. *Altro metodo più agevole del Newtoniano, onde risolvesi lo stesso Problema.*

Questo metodo, che vo' proporvi, è diverso dal Newtoniano, che si è quì sopra esposto e dimostrato, ed è affine a quello, che ha rapportato Giacomo Ermanno nella sua Foronomia §. 195.

La forza del Pianeta nel punto b *della sua orbita mobile* a b e *esprimasi*, come si è fatto nel princ. del. prec. sol., per $X : x^3$: Sarà $G : F :: \sqrt{X} : \sqrt{(dX : dx)}$.

DIM.

Digitalizzato da Google

DIM. Imperocchè essendo $\frac{X}{x^3} =$

$$\frac{A\,x + A\,(G^2 - F^2) : F^2}{x^3} \quad (435);$$

sarà $X = A\,x + A\,(G^2 - F^2) : F^2$ L

e quindi $\frac{X - A\,x}{A} = \frac{G^2 - F^2}{F^2}$, cioè

$X - A\,x : A :: G^2 - F^2 : F^2$

e componendo $X : A :: G^2 : F^2$: imperocchè essendo $x = 1$, sarà $A\,x$ quanto A, ed $X - Ax + A = X$.

Ma l' equazione L differenziata ne somministra $d\,X = A\,d\,x$, ed $A = d\,X : d\,x$.

Dunque sarà $X : \frac{d\,X}{d\,x} :: G^2 : F^2$

e perciò $G : F :: \sqrt{X} : \sqrt{(d\,X : dx)}$.

§. 443. ESEMP. I. Sia la forza in b costante, ond' ella debbasi esprimere per $x^3 : x^3$; sarà $X = x^3$, e $\frac{d\,X}{d\,x} = 3\,x^2$. Dunque sarà $G^2 : F^2 :: x^3 : 3\,x^2 :: x : 3 :: 1 : 3$: essendo $x = 1$: e quindi $G : F :: 1 : \sqrt{3}$

§. 444. ESEMP. II. Che se la forza in b si dinoti per x^{n-3}, cioè per $\frac{x^n}{x^3}$; dovrà essere $X = x^n$, e $\frac{d\,X}{d\,x} = n\,x^{n-1}$. Dunque starà $G^2 :$

Digitalizzato da Google

$F^2 :: x^n : nx^{n-1}$, cioè per essere $x = 1$;
$G^2 : F^2 :: 1 : n$, e $G : F :: 1 : \sqrt{n}$ (a).

CAP. XVIII.

DELLA DISCESA DE' GRAVI PER LE CONCAVITA' DI QUELLE CURVE, I DI CUI ASSI SON POSTI VERTICALMENTE; E DELLE CURVE ISOCRONE.

PROP. XCIII. TEOR.

§. 445. *Se un grave si lasci discendere liberamente per la curva* BER; *la forza, che lo accelera in un punto qualunque* B *del suo cammino, starà al suo peso, come* BD *semiordinata dell'asse* CE *a* BC *normale della curva in* B.

Fig. 63.

DIM. Per B conducasi la verticale BF, che rap-

(a) I principj di questo secondo metodo, che quì ho dimostrato, sono del chiariss. Ermanno §. 195. Foron; e gli artifizj euristici del primo sono del Gran Nevvton oscuramente da lui esposti nell. Prop. 45. Lib. I. Princ. Mat., e colle parole stesse da'Nevvtoniani esibiti: eccole. *Reducenda similiter est vis alia quævis centripeta ad fractionem cujus denominator sit* x^3, *& numeratores, facta homologorum terminorum collatione, statuendi sunt analogi*. Cioè (come spiega negli esempli) *collatis numeratorum terminis correspondentibus, nimirum datis cum datis, & non datis cum non datis*.

Digitalizzato da Google

rappresenti il peso del corpo B: e tirata per B la retta BA, che tocchi in B la curva BER, si cali dal punto F la retta FA perpendicolare a BA. Saranno simili fra loro (*a*) i due triangoli rettangoli FBA, DBC; e quindi sarà BA: BF:: BD: BC.

E poichè il peso del corpo B equivale alle due forze laterali FA, BA (212), e di queste la prima elidesi interamente dai pareti della curva BER, che si suppone ben rigida, ed immobile; l'altra BA ne rimarrà sola ad accelerare il medesimo corpo. Dunque l'energia di una tal forza acceleratrice sarà al peso del corpo B, come BA a BF, cioè come BD a BC. C. B. D.

§. 446. Cor. I. Suppongasi essere un circolo la curva BER; sarà la mentovata forza acceleratrice al peso del corpo B, come la semiordinata BD al raggio BC. Ma sta il peso del corpo B a quella forza, che lo accelera nell'altro luogo R, come il raggio CR ad RP. Dunque per uguaglianza ordinata saranno le forze, che accelerano il medesimo grave, qualor si ritrovi ne'luoghi B, ed R del circolo BER, come le semiordinate BD, RP di questa curva, cioè come i seni degli archi da descriversi BE, RE.

§. 447. Cor. II. Dunque, *lasciatosi cadere li-*

(a) *Prem. IX. n. 1.*

Digitalizzato da Google

beramente un grave nella parte concava della periferia di un circolo, le sue forze acceleratrici saranno come i seni degli archi da descriversi insino al punto infimo: e quindi in minor ragione de' medesimi archi.

§. 448. COR. III. E se la curva BMR, entro di cui facciasi liberamente discendere il corpo B, sia una Cicloide volgare; sarà la forza, che accelera in B il medesimo corpo, al dilui peso, come RC corda corrispondente nel circolo generatore ad RE asse della Cicloide; (essendo per la natura di questa curva (*a*) il triangolo BAF simile ad ERC). Ed essendo per un simile ragionamento il peso dello stesso corpo alla forza, che lo accelera in M, come ER ad RN; saranno per uguaglianza ordinata le forze acceleratrici di esso grave ne' luoghi B ed M, come RC ed RN.

Fig. 64.

§. 449. COR. IV. Or le corde RC, ed RN del circolo generatore sono metà de' corrispondenti (*b*) archi Cicloidali RB, RM; dunque *saran le forze acceleratrici del grave ne' luoghi* B, *ed* M *della Cicloide* BMR, *entro di cui ne discende, come gli archi* BR, MR, *che si stendono in sino al punto infimo* R.

Fig. 65.

§. 450. DEF. LIII. La curva ABF, dicesi *Tautocrona*, o *Isocrona*, se un grave nel discendere per gli archi disuguali AF, BF in sino al punto-

(a) *Prop. XIX. n. 1.*
(b) *Prop. XVIII.*

Digitalizzato da Google

punto infimo F v' impieghi lo stesso tempo.

§.451. DEF.LIV. Cotesta uguaglianza di tempi dicesi *Isocronismo*, che si distingue in *semplice*, e *perfetto*. Il primo si verifica, quando i tempi totali per le discese A F, a F sono solamente tra se uguali. E l'altro è quando sien pure tra se uguali i tempi, onde percorronsi le parti A B, a b proporzionali ai tutti A F, a F.

PROP. XCIV. TEOR.

§.452. *Se il diãmetro del semicircolo* A B F *sia posto verticalmente, un grave v'impiegherà più tempo a discendere al punto infimo* F *per l' arco maggiore* A F, *che pel minore* a F. Fig. 65.

DIM. Si prendano i due archi A B, a b proporzionali agl'interi A F, a F, e da' medesimi sene tronchino le parti infinitesime B C, b c proporzionali agli stessi archi A F, ed a F, o agli altri A B, a b. Si ordinino al diametro G F le rette B E, b e, cui conducansi parallele le rette C D, c d, e su di queste si calino le perpendicolari B D, b d.

Ciò posto pe' triangoli simili G E B, B D C sta B E : B G :: B D : B C : dunque sarà il rettangolo di B G in B D uguale all' altro di B E in B C. E dimostrando per simil modo, che il rettangolo di b G in b d pareggi quest' altro di b e in b c; sarà la ragione de' rettan-

Digitalizzato da Google

goli di BG in BD, e di bG in bd uguale a quella, che il rettangolo di BE in BC serba all'altro di be in bc: cioè, prendendo due ragioni respettivamente identiche ad esse, sarà (a) BD a bd in ragion composta di BC a bc, o sia di BF a bE, e di BE seno del primo arco a be seno dell'altro. Or la ragione de' seni è minore di quella degli archi, cui appartengono: dunque la ragion composta di BE a bF, e di BE a be sarà minore della duplicata di BF a bF, o della duplicata di AF ad aE. Laonde distendendo le due BD, e bd in sin che incontrino in P, e p le orizzontali AP, ap, sarà (b) BP a bp (le quali rette sono le respettive somme di tutte le BD, e delle altre bd) anche in minor ragione di AF^2 ad aF^2, val quanto dire come AF^2 ad N^2 maggiore di aF^2. Or lasciandosi cader due gravi da' luoghi A ed a su per gli archi AB, ab, i quadrati delle velocità, ond'essi pervengono in B, e b, essendo fra loro come BP a bp (153.n.1), saran pure come AF^2 ad N^2. E quindi i quadrati de' tempi, ne' quali i medesimi corpi avran percorsi gli archetti BC, bc, saranno fra loro (15) come BC^2 a bc^2, cioè come AF^2 ad aF^2, e come N^2 ad AF^2, cioè come N^2 ad aF^2 (c): e 'l tempo per BC al tempo

(a) *Pren. VII.*
(b) *Prop. 1. El. VI.*
(c) *Pren. II.*

Digitalizzato da Google

po per b c, come N ad a F. Dunque il tempo per B C sarà maggiore di quello per b c: e quindi (Prop. 12. El. V.) il tempo della discesa di un grave per l'arco maggiore AF sarà maggiore del tempo, ch' egli stesso, o un' altro v' impiegherebbe a discendere per l' altro minore a F. C. B. D.

§. 453. Cor. Dunque il circolo nell' ipotesi della gravità costante non può essere una curva isocrona.

§. 454. Scol. Dal Cor. II. della Prop. CXIII. può concludersi, che nell' ipotesi della gravità costante il circolo non sia una curva perfettamente isocrona: perciocchè in essa non si ritrova quel criterio del perfetto isocronismo, che fu stabilito nel Cor. Prop. XXVII. Restavami a dimostrare, che nemmeno al circolo competesse il semplice isocronismo. E questo nel presente Teorema ho procurato eseguire.

PROP. XCV. TEOR.

§. 455. *Se due gravi calino per gli archi circolari simili* B T, P S *ai loro punti infimi* T, *ed* S; *i tempi di tali discese saranno in sudduplicata ragione de' loro raggi* A T, A S. Fig. 66.

Dim. S' intendano i mentovati archi posti d'intorno ad un comun centro A, e che i loro punti infimi T ed S giacciano in una medesi-

Digitalizzato da Google

ma verticale. Si ritrovi AL media proporzionale tra AT, ed AS: e presa nell'arco BT una qualunque parte BQ si congiungano i raggi AB, AQ, e le corde BQ, PR: e poi condotte per B, e P le orizzontali BG, PO, si calino su di esse le perpendicolari QG, RO.

Essendo AP: PB:: AR: RQ, saran parallele le due rette QB, ed RP. Laonde essendo simili i triangoli ABQ, APR, sarà QB: RP:: AQ: AR. Ma BG è parallela a PO, e QG ad RO; dunque anche i triangoli QBG, RPO saranno simili fra loro, e sarà QG: RO:: QB: RP:: QA: AR: E quindi, la sudduplicata ragione di QG ad RO, cioè quella che ha la velocità di un grave disceso per l'arco BQ alla velocità di un'altro disceso per l'altro PR (153. n.1), sarà uguale alla sudduplicata ragione de'raggi QA, AR, cioè a quella di AL ad AS. Si prendano inpertanto gli archetti infinitesimi Qq, Rr proporzionali a BQ, e PR, e con ciò ai raggi AT, AS: saranno i tempi, ne' quali vengon essi descritti dai gravi, che si lasciano cadere da B, e P, come AT ad AS, e come AS ad AL (essendo la prima ragione uguale a quella degli spazietti descritti, e la seconda inversa di quella delle velocità), cioè a dire come AT ad AL (a), o in sudduplicata ragione di AT ad AS. E ciò sempre dimostrandosi sarà il tempo della discesa per l'arco BT

(a) *Pten. I.*

Digitalizzato da Google

BT a quello per PS anche in sudduplicata ragione di AT ad AS (*a*). C. B. D.

PROP. XCVI. TEOR.

§. 456. *Se intorno all'asse* RA, *che passi per lo centro* S *delle forze, descrivasi la scala* QG *delle forze centripete, e l'altra curva* CBA *di tal natura, che il quadrato di un qualunque suo arco* CA, *tagliato dal circolo descritto col centro* S *intervallo* SC, *stia alla corrispondente aja* ARQG *nella costante ragione di* P *a* Q; *la curva* CBA *sarà perfettamente isocrona.* Fig. 67.

E se la curva CBA *sia perfettamente isocrona; i quadrati degli archi* AB, Ab *saran come le corrispondenti aje* ATPG, AtpG:

DIM. PART. I. Si prendano i due archi CB, cb proporzionali agl'interi CA, cA: e col centro S e cogl'intervalli SC, SB, Sc, Sb si descrivano gli archi circolari CR, BT, cr, bt; e poi da' punti R, T, r, t si ordinino RQ, TP, rq, tp nella scala delle forze centripete. E poichè dalla costruzione sta $CA^2 : AB^2 :: cA^2 : Ab^2$, sarà convertendo $CA^2 : CA^2 - AB^2 :: cA^2 : cA^2 - Ab^2$. Ma sta $CA^2 : AB^2 ::$ ARQG : ATPG. Imperocchè essendo per supposizione $CA^2 :$ ARQG :: P : Q, ed

$AB^2 :$

(a) *Prop. XII. El. V.*

Digitalizzato da Google

AB²: ATPG:: P: Q, sarà CA²: ARQG:: AB²: ATPG, e quindi CA²: AB²:: ARQG: ATPG. Dunque di nuovo convertendo sarà CA²: CA²— AB²:: ARQG: RTPQ. E dimostrandosi nello stesso modo, che stia cA²: cA²— Ab²:: ArqG: rtpq; siccome, da quel che si è dimostrato, sono tra se uguali le due prime ragioni di queste analogie, cioè quelle di CA² a CA²— AB², e di cA² a cA²— Ab²; così sarà parimenti ARQG: RTPQ:: ArqG: rtpq, e permutando ARQG: ArqG:: RTPQ: rtpq. Ma le due aje ARQG, ArqG sono fra loro come i quadrati degli archi CA, cA, o degli altri CB, cb, che ad essi son proporzionali: e le altre aje RTPQ, rtpq son come i quadrati delle velocità (124), che si acquisterebbero due gravi calando per le altezze RT, rt, o per gli archi CB (*a*), cb. Dunque i quadrati di queste velocità saran fra loro come i quadrati degli archi CB, cb: e quindi le velocità acquistatesi per CB, e cb da due gravi, che vi si lascino cadere da' luoghi C, e c, saranno tra di essi come i medesimi archi. Dunque non solamente gli archi CB, cb, ma gl'interi CA, cA dovranno essere (32) contemporaneamente descritti, e la curva CBA (451) sarà perfettamente isocrona.

PART. II. Prendansi gli archetti BH, bh infini-

(a) Questa verità può dimostrarsi come la Prop. LX, di cui n'è un caso.

Digitalizzato da Google

finitesimi, e proporzionali agli archi CB, cb, o agl'interi CA, cA. Saranno, a cagion del perfetto isocronismo (451) della curva CBA, descritti in tempi uguali tanto gli archi CB, cb, che gli altri CH, ch da due gravi, che da' luoghi C, e c si lascino calar giù per la concavità di lei. Dunque anche gli archetti BH, bh saranno percorsi in uguali tempuscoli: il perchè dovrà stare (14.n.5) BH a bh, come la velocità per CB all'altra per cb: e BH^2 a bh^2, come il quadrato di quella velocità al quadrato di questa. E prendendo due ragioni, che le pareggino respettivamente, sarà $CB^2 : cb^2 :: RTPQ : rtpq$ (a). Ma sta benanche $CA^2 : cA^2 :: RAGQ : rAGq$, come può arguirsi collo stesso filo della dimostrazione. Dunque essendo per costruzione $CB^2 : cb^2 :: CA^2 : cA^2$, sarà ancora RTPQ: rtpq :: RAGQ : rAGq: e quindi (b) TAGP a tAGp come RAGQ ad rAGq, cioè come CA^2 a cA^2, o come BA^2 a bA^2. Vale a dire TAGP : tAGp :: BA^2 : bA^2. C. B. D.

PROP.

(a) Per supposizione, e pel §. 124.
(b) *Prop. 19. El. V.*

Digitalizzato da Google

PROP. XCVII. PROBL.

§. 457. *Poste le medesime cose della Prop. prec. ritrovar la ragione di* P a Q.

Sol. Suppongasi esser l'arco bA di una grandezza infinitesima, e si descriva col centro S intervallo S b l'archetto circolare b t. Si cali b o perpendicolare su di S t, e s'intenda essere AF il raggio dell'oscolo nel vertice A della curva B A.

Ciò premesso essendo le saette t o, A o degli archi minimi t b, b A grandezze infinitesime rispetto a' medesimi archetti (*a*), sarà la diloro somma benanche un'infinitesimo rispetto all'archetto A b, ipotenusa del triangolo Abt rettangolo in t. Dunque il quadrato di A b superando il quadrato del cateto b t per lo quadrato dell'altro cateto A t, (che si è detto essere rispetto ad essi un'infinitesimo), il sarà uguale. Ma i due quadrati di A b, e di b t son respettivamente uguali a' rettangoli di 2 F A in A o, e di 2 S t in t o (*b*). Dunque questi rettangoli al par di que' quadrati saranno tra se uguali. E reciprocando le loro basi

(a) Imperocchè essendo $\doteq A\,o, A\,b, 2A\,F$; ed $A\,b$ infinitesima rispetto a $2\,A\,F$; sarà pure $A\,o$ infinitesima riguardo ad $A\,b$. E così ancora $t\,o$ infinitesima rispetto a $t\,b$.

(b) *Prop.* 31. *Elem. III.*, e *Cor. Prop.* 8. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

basi colle altezze sarà A o : t o, come S t, o S A ad F A, e quindi A o : A t :: S A : S F. E poichè P sta a Q come a b² a GAtp (456): ed a b², e G A t p son respettivamente uguali a' rettangoli di 2 F A in A o, e di G A in A t; sarà P a Q in ragion composta di A o ad A t, e di 2 F A a G A, cioè in ragion composta di S A ad S F, e di 2 F A a G A (sostituendo la ragione di S A ad S F invece di quella di A o ad A t): val quanto dire P a Q, come 2 F A in A S a G A in S F.

§. 458. Cor. I. Qualor si voglia dimostrare, che la curva A c C sia isocrona, converrà concludere che stia A B² : A T P G :: 2 F A . AS: G A . S F.

§. 459. Cor. II. Se il centro S delle forze disti infinitamente dal vertice A della curva isocrona; la ragione di P a Q restringesi a quella di 2 F A a G A : imperciocchè in tal caso le rette A S, ed S F differendo per la grandezza finita F A si possono avere per uguali, e la ragione di 2 F A . A S a G A . S F si fa uguale a quella di 2 F A a G A.

§. 460. Cor. III. Data la magnitudine di F A raggio dell'oscolo nell'apice A della curva isocrona A B C, e data la distanza A S, ch'è tra il divisato apice, e 'l centro delle forze, sarà data la ragione di 2 F A . A S : G A . S F, e quindi la sua uguale di P a Q.

§. 461. Cor. IV. E vicendevolmente data

la

Digitalizzato da Google

la ragione di P a Q, e la distanza del vertice della curva isocrona dal centro delle forze, potrà facilmente rinvenirsi il raggio dell' osculo in tal punto. Facciasi a tal uopo Q: P:: GA: AM: (457) sarà 2FA. AS; FS. GA:: AM: AG:: AM. FS: AG. FS; e quindi il rettangolo (*a*) di 2FA in AS sarà quanto quello di AM in SF, e sarà poi 2AS: AM:: SF: FA. Con che dividendo otterrassi 2AS — AM: AM:: SA: FA.

PROP. XCVIII. TEOR.

§. 462. Nell' ipotesi della gravità costante la Cicloide volgare è una curva perfettamente isocrona. Nè v' ha altra curva, che sia tale (b).

Fig. 68.

DIM. PART. I. A e C sia una semicicloide volgare, il di cui asse AB giaccia verticalmente col-

(a) *Prop. 9. El. V.*

(b) Cristiano Ugenio sottilmente ragionando scoverse, che la Cicloide volgare tra le belle proprietà, ond'è fregiata, abbiane ancor quella dell' isocronismo. Il Gran Newton, e 'l Chiarissimo Ermanno stabilirono, *dover essere isocrona una curva, se le forze acceleratrici del grave, che si fa liberamente discendere entro la cavità di lei, seguano la ragion di quegli archi, che gli restano fino al punto infimo a descrivere*: e quindi questi Geometri dimostrarono lo stesso assunto Ugeniano, e vi aggiunsero altresì, che l' *Epicicloide inferiore* era la Tautocrona nell' Ipotesi della gravità decrescente come la distanza dal centro. Or il Sommo Eule-

Digitalizzato da Google

coll' apice in giù, ed intorno ad esso stiavi il di lei cerchio generatore A P B, e 'l rettangolo R A G Q scala della gravità costante (87).

Si

lero speculando tali cose seco dicea sovente: chi mai resterà pago senza punto dubitarne, che la sola Cicloide, e niun' altra curva sia la Tautocrona nell' Ipotesi della gravità costante? E perchè mai con un principio meccanico diverso dal Newtoniano non potrà l' isocronismo in altre curve rilevarsi? Per la qual cosa il Valentuomo si pose a rintracciar la curve isocrone con un metodo diretto ed universale, derivandole col calcolo integrale dalla sola natura dell' isocronismo, e non già da qualche proprietà di questo, o di quelle: e ne somministrò su questo argomento alcune dotte Disertazioni *negli Att. Ant. Pietrob. Vol. IV. e V.* e sciolse parecchi problemi affini *nel II. Vol. dell. sua Meccan.* Ma da questi scientifici lavori raccogliesi, I. *che nell' Ipotesi della gravità costante si possan dare infinite Tautocrone, i di cui rami di qua, e di là dal punto infimo sien diversi fra loro.* II. *Che data una curva, le si possa aggiungere dalla stessa parte un' altra da lei diversa, sicchè discendendo un grave per questa, e per quella arrivi sempre nello stesso tempo all' infimo punto di loro.* III. *Ma qualor si chiegga una curva isocrona, i di cui rami d' ambe le parti dell' asse verticale sieno simili fra loro, e ciascheduno di una continua curvatura, non può concepirsi altra curva, che la* Cicloide.

Il Signor Giovanni Bernulli nell' an. 1730 avea comunicato all' Acc. dell. Scien. di Par. un' elegante dissertazione sulle Tautocrone investigandole col metodo diretto; siccome il fecer poi i Chiarisi. Signori d'Alembert, e de la Fontaine. E da ultimo gl'insigni Analisti Luigi de la Grange negli Att. di Berlin. 1770, e Leonardo Eulero *negli Att. Nuov. di Pietr. Vol. X.* hanno avuto il coraggio di rinvenir le isocrone ne' mezzi resistenti, ed hanno altresì risoluti alcuni Problemi inversi di tal genere.

Digitalizzato da Google

Si tiri sull' asse AB la semiordinata CR, ovunque ne piaccia, e si congiunga la PA. Sarà AP^2 uguale a BAR, e con ciò $4PA^2$ uguale a 4BAR. Ma l'arco cicloidale AC (*a*) è duplo della corda AP, che gli corrisponde nel circolo generatore; e quindi $4PA^2$ è quanto CA^2. Dunque sarà CA^2 uguale a 4BA in AR, e con ciò $CA^2 : ARQG :: 4BAR : ARQG :: 4BA : AG$. Ma 4BA è uguale al doppio di FA raggio dell' oscolo nel vertice della Cicloide (*b*): dunque sarà CA^2 ad ARQG, come 2FA ad AG. E quindi la Cicloide AcC sarà (459) la curva isocrona nell' Ipotesi della gravità costante (*c*).

PART. II. Suppongasi, s' è possibile, che la curva AcC diversa dalla Cicloide volgare sia la Tautocrona nell'ipotesi della gravità costante: ed FA dinoti il raggio dell' oscolo nel di lei vertice A. Si prenda nella stessa curva l' archetto Ac infinitesimo, e l'altro AC di una finita grandezza, e si conducano sul di lei asse verticale AB le semiordinate CR, cr. Sarà manifesto dalla seconda Par. della Prop. XCVI. che debba essere $Ac^2 : AC^2 :: Arq G : ARQG :: Ar : AR$. Ma stà $Ar : AR :: 2FA . Ar : 2FA . AR$. Dunque sarà $Ac^2 : AC^2 :: 2FA . Ar : 2FA . AR$: e quindi (*d*) siccome Ac^2 è ugua-

(a) *Pren. XVII.* (b) *Pren. XIX. n.* 1.
(c) Questa dimostr. potea anche trarsi da' soli §§. 170, 449.
(d) *Prop.* 31. *El. III. e Cor. Prop.* 8. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

è uguale a 2 F A. Ar, così dovrà essere anche A C' uguale 2 F A . A R. Ciò premesso si descriva il semicerchio A P B sul diametro A B metà di A F, e si congiunga A P: sarà il quadrato di tal corda uguale al rettangolo di B A in A R, e quello al par di questo sarà quarta parte del rettangolo di 2 F A in A R. Dunque sarà anche P A² quarta parte di C A², e P A metà di C A: cioè a dire l'arco A C, qualunque ei sia, è sempre duplo della corda A P, che gli corrisponde nel semicircolo APB: e quindi la curva A c C sarà una Cicloide (*a*): contro di quello, che si era supposto. C.B.D.

PROP. XCIX. TEOR.

§.463. *L'asse* AB *della Semicicloide* CPB *sia posto verticalmente, e'l dilei vertice* B *siane il punto infimo; io dico che il tempo della discesa di un grave per l'asse* A B *stia a quel tempo, che dee spendervi un' altro a calare per la semicicloide* C P B *al punto infimo, come il diametro di un circolo alla sua semicircon-* Fig. 69.
ferenza.

Dim. Si prenda ovunque in questa semicicloide l'archetto minimo P p, ed ordinate all'asse A B le rette P E, p e, si tirino da' di lui estremi, e dal punto medio le tre rette A M, B M,

(a) *Prem. XVIII.*

Digitalizzato da Google

BM, DM al punto M. Dai punti p ed M si tirino pi, ed ML parallele all'istesso asse. Ed in fine si concepisca un corpo muoversi per AB equabilmente, e colla velocità dovuta all'altezza AB; sarà il tempo, in ch'ei percorrerebbe con tal moto la AB, metà di quello, che v'impiegherebbe un grave a discender per esso (153.n.3) col suo moto naturale.

Ciò posto la velocità, onde il corpo A muovesi per AB equabilmente, sta a quell'altra, che si acquisterebbe un grave dopo di aver percorso l'arco cicloidale CP, in sudduplicata ragione di AB ad AE (imperocchè la prima velocità si è supposto doversi all'altezza AB, e l'altra alla PN, ovvero ad AE); cioè a dire per la natura del circolo AMB come AB ad AM. E per la natura della Cicloide CPB il triangoletto Ppi è simile al triangolo AME (*a*): dunque sarà pi, o la sua uguale Ee a Pp, come ME ad AM. Dunque il tempo, in che percorresi dal mobile A lo spazietto Ee colla velocità dovuta all'altezza AB, sarà a quello, che v'impiega un grave a discendere per l'archetto Pp colla velocità dovuta all'altezza PN, in ragion composta di ME ad AM, e di AM ad AB (15), cioè a dire come ME ad AB (*b*), o a 2DM. Ma il triangolo DME è ancor esso simile al triangoletto MSL.

(a) *Pren. XIX. n.* 1.
(b) *Pren. I.*

Digitalizzato da Google

MSL. Dunque sarà ME: 2DM:: ML: 2SM. E quindi i divisati tempuscoli saranno fra loro come ML, ovvero E e a 2MS: e (*a*) sarà poi il tempo, nel quale il corpo A equabilmente muovesi per AB colla velocità dovuta all'altezza AB, al tempo della discesa di un grave per la semicicloide CPB, come il diametro AB alla sua circonferenza. Sicchè duplicando gli antecedenti sarà il tempo, nel quale un grave naturalmente discende per AB (153.n.3), al tempo, che un'altro v'impiegherebbe a calare per la semicicloide CPB, come il doppio diametro di un cerchio alla sua circonferenza, o come il diametro alla semicirconferenza. C. B. D.

PROP. C. TEOR.

§. 464. *Se la gravità di un corpo sia come la distanza dal centro* S, *e dal rotolamento del circolo* DCH *entro la concavità dell'altro* MHP, *che abbia* S *per centro, descrivasi l'Epicicloide inferiore* MCA (*b*): *questa curva sarà la isocrona in tal ipotesi di gravità.* Fig. 70.

Dim. A sia il vertice di questa Epicicloide, ed S il centro delle forze. Sulla retta SA, che unisce cotesti punti, siavi descritto nel

T 2 pia-

(a) *Pren. VI.*
(b) Vedi *Pren. XVI.*

Digitalizzato da Google

piano S P M il triangolo rettangolo SRQ scala delle forze centripete per la proposta ipotesi (87). Nel perimetro della stessa curva A C M si prenda ovunque il punto C, e il dilei cerchio generatore si trovi nel sito HCD, quando il suo punto *descrivente* cada in C. Si unisca il centro S delle forze col centro E di questo cerchio, e si meni da C la C K perpendicolare sulla S E. Ed in fine congiunta la retta S C si descriva col centro S intervallo S C il cerchio C R.

Ciò premesso, essendo (*a*) SC^2 uguale ad SD^2, a DC^2, ed al rettangolo di 2 S D in DK; sarà (tolto SD^2 d'ambe le parti) $SC^2 - SD^2$ uguale a DC^2 una col rettangolo di 2 S D in DK. Ma le rette S C, S D sono respettivamente uguali ad S R, ed S A (*b*): ed è poi DC^2 uguale a 2 D E in D K. Dunque sarà $SR^2 - SA^2$ uguale ai due rettangoli di 2 D E in DK, e di 2 S D in D K, cioè al solo rettangolo di 2 S E in D K (*c*). E sarà $DC^2 : SR^2 - SA^2 :: DE : SE :: 4SE . DE : 4SE^2$.

Si prenda S F terza proporzionale in ordine ad S A, ed S P; sarà $SF : SA :: SP^2 : SA^2$, e convertendo $SF : FA :: SP^2 : SP^2 - SA^2$. Ma distesa la retta S E, finchè tocchi il cerchio

(a) *Prop.* 11. *El. II.*
(b) Com'è chiaro dalla genesi di tal curva.
(c) *Prop.* 1. *El. II.*

Digitalizzato da Google

chio MP in H, le due SP, SA pareggiano queste altre SH, SD: dunque sarà $SP^2 - SA^2$ uguale ad $SH^2 - SD^2$, cioè a 4SE in ED (a). E quindi sarà 4SE in DE ad SP^2, o ad SH^2, come FA ad SF.

E poichè dalla natura dell'Epicicloide ACM (b) sta $CA^2 : CD^2 :: 4SE^2 : SH^2$; e si è poi dimostrato esser $CD^2 : SR^2 - SA^2 :: 4SE . DE : 4SE^2$, sarà per equalità perturbata $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: 4SE . DE : SH^2$, cioè $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: FA : SF$. Ma i quadrati di SR, e di SA, lati omologhi de' triangoli simili SRQ, SAG, son come le aje di questi: dunque sarà dividendo $SR^2 - SA^2$ ad SA^2, come il trapezio ARQG al triangolo SAG, o al rettangolo di SA in $\frac{1}{2}$AG: e sarà permutando $SR^2 - SA^2 : ARQG :: SA^2 : SA . \frac{1}{2} AG :: 2SA : AG$. Per la qual cosa essendosi dianzi mostrato essere $CA^2 : SR^2 - SA^2 :: FA : SF$, e qui finalmente conchiuso, che sia $SR^2 - SA^2 : ARQG :: 2SA : AG$; sarà (c) $CA^2 : ARQG :: FA . 2SA : SF . AG$: e quindi (456) la curva MCA sarà isocrona. C. B. D.

§.465. DEF. LV. La linea AMB posta verticalmente dicesi *Brachistocrona*, cioè di celere discesa, se quivi fattovi liberamente cadere un grave, ne pervenga dal luogo A all'altro B in minor tempo, che per qualunque altra linea contermine ACB. *Fig. 71.*

(a) *Prop. 8. El. II.* (b) *Pren. XVI.*
(c) *Pren. I.*

Digitalizzato da Google

§. 466. SCOL. Quì si richiede, che i punti dati A, e B non giacciano in una stessa retta verticale: poichè in tal caso quella retta, che gli unisce, sarebbe la linea Brachistocrona.

PROP. CI. TEOR.

§. 467. *La Cicloide volgare è la curva Brachistocrona nell' ipotesi della gravità costante* (a).

Fig. 71.

DIM. Sia A M B una semicicloide volgare, il di cui asse sia posto verticalmente col verti-

(a) Il Gran Galilei avendo rigidamente dimostrato (*Scol. Prop.* 36. *Dial. III. sul moto*), che un grave nel discendere per un' arco di cerchio v' impieghi meno tempo, che a calarne per la dilui corda, ne trasse incauto una conseguenza delle premesse più generale: cioè *lationem omnium velocissimam* (avrebbe dovuto dire *velociorem*) *ex termino ad terminum non per brevissimam lineam, nempe per rectam, sed per circuli portionem fieri*. E quindi non pure da' contemporanei del Galilei, ma da que' Geometri ancora, che possedeano il calcolo degl' infiniti, come dal Leibnitz, da Giacomo Bernulli, e forse dallo stesso Gio. Bernulli (se si fosse imbattuto in questo Teorema del Galilei), teneasi per certo, che il cerchio fosse la Brachistocrona nell' ipotesi della gravità costante. Intanto Gio. Bernulli, ignorando, com' ei scrisse al Dottor Basnage, che la Brachistocrona erasi tentata dal Galilei, ne propose a' Geometri la di lei investigazione, come di una cosa nuova, e che un nuovo metodo esigea nel rinvenirsi. Egli accordò loro il termine di sei mesi da potervisi applicare, spirato il quale avrebbene pubblicate le sue soluzioni. Ma poi in grazia del Leibnitz il prorogò per sei altri mesi, vale a dire in fino a Pa-

Digitalizzato da Google

tice in giù: io dico, che la discesa libera di un grave per l'arco A B compiasi in meno di tempo, che per l'arco A C B di una qualunque altra linea contermine. Suppongasi, che la

a Pasqua dell'an. 1697. ed in questo tempo compironsi tre altre soluzioni dai sublimi Geometri Isacco Nevvton, Giacomo Bernulli, e 'l Marchese de l' Hospital, che ornavano la Gran Brettagna, la Germania, e la Francia. Delle quali cose eccone breve narrazione.

L' Immortale Nevvton non sì tosto ebbe contezza di questo Problema Bernulliano, (lo che accadde nel princ. dell' an. 1697), che lo sciolse nella più semplice, ed elegante maniera: esibendone la sola costruzione *nel* n. 224 *delle Filosof. Trans.* E sebbene questo Geometra avesse quivi per eccesso di modestia celato il suo nome; pur nondimeno Gio. Bernulli al percepirne il merito della soluzione il riconobbe.

L' Eruditissimo Leibnitz sciolse ancor egli il rammentato Problema con pari eleganza, e rinvenne, come il Nevvton, che la Brachistocrona nell'Ipotesi della gravità costante era la Cicloide volgare. Ma in risolvendolo scoverse alcune belle verità, tra le quali giova rapportarvi la seguente. *I due falli* (dicea Libnitz), *ne' quali incorse il Galilei pel difetto del calcolo degl' Infiniti, cioè l' aver ei creduto esser la Brachistocrona un Cerchio, ed una Parabola la Catenaria, non furono in realtà, che due divinazioni di cose prossime al vero.* Imperocchè la Brachistocrona, che non è un Cerchio, cogli archi di cerchio si costruisce: e la Catenaria sebben diversa dalla Parabola deesi cogli archi parabolici determinare.

La soluzione del Marchese de l'Hospital, che apparve nel Maggio dell' an. 1697 *negli Act. di Lips.* accordavasi perfettamente con quella, che tenea nascosta Gio: Bernulli. Egli al par del Nevvton, e del Leibnitz non vi recò l' Analisi, ed i principj, coi quali aveala determi-

Digitalizzato da Google

retta A L sia la base della Cicloide: e prendasi in essa curva l'archetto infinitesimo M m: e condotte in M, ed m le normali alla curva M K, m K, che si uniscono in K, si prolunghi-

minata; ma in una lettera, che direſse a Gio: Bernulli, gli confeſsò ſinceramente, che il metodo della ſoluzione era identico a quello, che dianzi per le *Funicularie* aveane da lui appreſo.

Giacomo Bernulli ſciolſe ancora queſto Problema, ma con un metodo, che ne' principj perfettamente combaciavaſi con quello del Leibnitz, e che nell'orditura era più inviluppato del Leibniziano.

Finalmente Gio: Bernulli, che avea propoſto a' Geometri il Problema della Brachiſtocrona, il tenea preſso di ſe riſoluto in due maniere, una diretta, indiretta l'altra. Egli col metodo indiretto dimoſtrò che la Brachiſtocrona era identica *alla curva della rifrazione*; onde quella al par di queſta eſser dovea la Cicloide volgare. Ma la ſoluzione diretta era guidata da queſto principio, „ che non ſolo l'intera Brachiſtocrona era traſcorſa in un „ tempo breviſſimo dal grave, che vi ſi láſciava cader den„ tro; ma che ancora ogni dilei elemento dovea della „ ſteſsa proprietà eſser fregiato „. Intanto queſto Geometra non pubblicò, che la ſoluzione indiretta: e contentandoſi di comunicar privatamente la diretta al Leibnitz, ed all'Hoſpital (perciocchè temea, che i ſuoi rivali non gli aveſsero involati i ſtami di un metodo nuovo) la diede finalmente in luce nell'an. 1718.

Il Problema della Brachiſtocrona ſe fu chiaro per quel che proponea, e pe' tanti Valentuomini, che vi ſi applicarono a riſolverlo; il ſarà mai ſempre alla poſterità dotta memorando per aver data l'occaſione agli Analiſti di ritrovar l'inſigne metodo de' Maſſimi, e de' Minimi delle formole integrali indefinite. Queſto metodo non è identico a quello che ſuol proporſi nel calcolo differenziale: ove ſi vuol determinare la magnitudine

Digitalizzato da Google

ghino, in sin che incontrino l'altra linea ACB in C, e c. Col centro K intervallo KC si descriva l' archetto circolare Ce, e da' punti C, ed M si calino CG, MD perpendicolari su

dine della variabile x, affinchè una di lei funzione X ottenga il massimo, o il minimo valore; ma a questa più sublime investigazione si destina. „ Una formola „ integrale indefinita sia dinotata per $\int X$, (ove X com-

„ prenda le variabili x, y, z, &c. ed i loro differen- „ ziali dx, dy, dz, &c. ddx, ddy, ddz, &c.) „ si dee ritrovare il rapporto delle variabili, affinchè $\int X$ „ diventi un Massimo, o un Minimo.

Dalla Brachistocrona si presero le primizie di questo metodo; ma una più ubertosa ricolta ne arrecarono le ingegnose ricerche sugl' Isoperimetri fatte dai Geometri Fratelli, e rivali Giacomo, e Giovanni Bernulli. Il Sommo Eulero nel *Vol.VI. Att. Ant. Pietrob.*; *e nell' opera, che ha per tit. Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes* cercò di sistemare le regole di questo metodo, e di dar loro la più grande estensione: pur nondimeno, com' egli stesso lo agognava, un tal metodo avea bisogno di esser vie più semplificato, e generalizzato. Dunque l' acutissimo Signor Luigi de la Grange soddisfacendo a' voti degli Analisti diede nel *Vol. II. dell'Acc. di Turin.* la massima nettezza ed universalità al divisato metodo, com'ei suol fare in tutte le sue produzioni. Sicchè lo stesso Eulero, quasi ripudiando l' orditura del suo metodo, non ha isdegnato d' illustrar quello del Sig. de la Grange: pubblicando *gli Elementi del Calcolo delle variazioni nel III. Vol. del suo Calc. Integr. e nel X. Vol. degli Att. Nuov. Pietrob.* E quindi (fiemi lecito quì alquanto digredire) se l'Italia ne' tempi vetusti vide nascervi nelle regioni Meridionali il Principe de' Geometri Archimede, ed al rinascer delle Scienze ammirò nell' Etruria il Galilei Padre de' Contempla-

tori

Digitalizzato da Google

su di AL. Sarà NM metà di KM (*a*): onde bisecata la MC in O, sarà eziandio NO metà di KC. E finalmente se prendasi Nf media proporzionale tra NM, ed NC; questa sarà minore di NO, (ch'è metà di KC), o ch' è la semisomma di NM, ed NC (*b*).

Ciò posto pe' triangoli simili KMm, KCe sta Mm : Ce come KM : KC, o come NM: NO. Ma la ragione di NM ad NO è minore di quella di NM ad Nf, cioè della sudduplicata ragione di NM ad NC, o della sudduplicata di MD a CG (essendo tra se simili i due triangoli NMD, NCG). Dunque sarà Mm a Ce, o alla sua uguale Cc in minor ragione della sudduplicata di DM a GC, cioè della velocità acquistatasi da un grave nella libera discesa per AM, a quella ch'ei si acquisterebbe per AC. Facciasi intanto come la prima di queste velocità alla seconda così Mm a Cq, che sarà minore di Cc. Dunque (15) sarà il tempo per Mm a quello per Cc come Mm a Cc, e come Cq ad Mm, cioè come Cq minore a Cc maggiore. Sic-

tori della Natura; or ne gioisce, che il Principe degli Analisti il Sig. de la Grange nato nella dilei parte Settentrionale, dopo aver sostenute le Accademie Reali di Turino, e di Berlino, l' è ormai divenuto ornamento dell' Accademia delle Scienze di Parigi.

(a) *Pren. XIX. n.* 1.

(b) Questo è chiaro dalla sola maniera, onde si ritrova la media proporzionale. *Prop.* 13. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

Sicchè il tempo per M m l'è minore di quello per C c, e 'l tempo intero per A M B il sarà ben anche minore di quello per A C B. C. B. D.

CAP. XIX.

DELL'OSCILLAZIONE DE' PENDOLI.

§.468. DEF. LVI. *Pendolo* o *corpo funependolo* appellasi il grave R C, che in forza del suo peso può reciprocare le sue discese, e salite intorno al punto C, ov' è sospeso. *Fig. 72.*

§.469. DEF. LVII. Il punto immobile C dicesi *centro di rotazione*, o *punto di sospensione*.

§. 470. DEF. LVIII. La discesa del Pendolo C R per l'arco N R, e la di lui salita per l'altro R O, dicesi *Vibrazione*, ovvero *Oscillazione del Pendolo*.

§. 471. DEF. LIX. *Pendolo semplice* è quello, che si concepisce come una verga sottilissima, diritta, rigida, e priva di gravità, e che nel solo estremo inferiore abbia concentrato un peso.

Tal è per appunto il pendolo C R, ove si consideri la sua asta come una retta geometrica, e che nel suo estremo R abbia rammassato un peso.

§. 472.

Digitalizzato da Google

§. 472. DEF. LX. Ogni Pendolo, che non è semplice, dicesi *composto*.

§. 473. DEF. LXI. Quella retta orizzontale, che dal punto di sospensione di un Pendolo conducesi nel piano, ov' egli oscilli, si chiama *Asse di Oscillazione*.

§. 474. DEF. LXII. Quel punto di un Pendolo composto, che tanto disti dall' asse d'oscillazione, quant'è la lunghezza di un pendolo semplice isocrono ad esso pendolo composto, si dice *Centro d'oscillazione*.

§. 475. Vale a dire le vibrazioni di un pendolo composto sono isocrone a quelle, ch' ei farebbe, se l'intera gravità delle sue parti s' intendesse riunita nel suo centro di oscillazione. Ed in questo modo potrebbesi anche formare quest' ultima definizione.

§. 476. SCOL. De' Pendoli semplici solamente io quì ragiono: e nella seconda parte della Statica mi riserbo a trattar de' Pendoli Composti, de' loro centri di oscillazione, e di altre cose affini.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CII. TEOR.

§. 477. *Il Pendolo* CR *se mai si rimuova dal sito verticale, e poi si lasci cadere; dee vibrar circolarmente intorno al punto* C *di sospensione.*

DIM. Cotesto pendolo rimosso dal suo perpendicolo all'angolo RCN, se mai si lasci a se stesso, dee piombare per l'arco NR al punto infimo R: acquistando in siffatta discesa tanta velocità, ond'è obbligato a risalire per l'arco circolare RO al punto O tant'alto sull'orizzonte, che l'altro L. Arrivato in O ei fermerassi poch'istanti, e quindi forzato dal suo peso ricaderà per l'arco OR: e nel punto infimo di questo acquisterà tanta forza, sicchè dovrà ascendere per l'arco RN. Dal punto N il pendolo di bel nuovo discenderà in R, e da R monterà ad O. E perpetuerebbe eternamente coteste oscillazioni, se la frizione del filo intorno al perno C, e la resistenza dell'aria affievolendo il suo moto nol riducessero alla quiete. C. B. D.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CIII. TEOR.

§. 478. *Le forze acceleratrici di un pendolo, che vibra in archi circolari, sono come i seni degli archi, che gli restano a descrivere in sino al punto infimo.*

Fig. 63.

E le velocità, ch' esso pendolo acquista nel punto infimo, sono come le corde degli archi, dond' è disceso.

DIM. PART. I. La dimostrazione della prima parte rilevasi immediatamente dal Cor. II. Prop. XCIII; ond'ella può qui omettersi.

PART. II. E poichè tanta velocità acquista il pendolo calando per l'arco R E, quanta ne otterrebbe discendendo per l'altezza di esso P E: e tant'altra ne acquisterebbe nella discesa per B E, quanta gliene verrebbe in calando verticalmente per D E (262); saranno queste velocità in sudduplicata ragione delle riferite PE, DE (153.n.1); cioè per la natura del circolo B E R, come le corde R E, B E degli archi descritti R E, B E (*a*). C. B. D.

PROP.

(a) *Prop.* 31. *El. III. e Cor. Prop.* 8. *El. VI.*

Digitalizzato da Google

PROP. CIV. TEOR.

§. 479. *Se due Pendoli oscillino in archi circolari simili, le durate delle loro vibrazioni saranno in ragion sudduplicata delle lunghezze di essi.*

La Dim. di questo Teorema è identica a quella della Prop. XCV.

PROP. CV. TEOR.

§. 480. *I numeri delle Oscillazioni, che due Pendoli vibrando in archi circolari simili compiono in un dato tempo, sono in sudduplicata ragion inversa delle loro lunghezze.*

DIM. Il numero delle Oscillazioni, che fa un Pendolo in un dato tempo, sta al numero delle vibrazioni, che un' altro ne compie nello stesso tempo, come la durata di una di queste alla durata di una di quelle. Ma queste durazioni, avvegnachè i Pendoli supponsi vibrare in archi circolari simili, sono (455) nella sudduplicata ragione delle lunghezze de' medesimi Pendoli. Dunque i numeri delle oscillazioni, ch' essi Pendoli compiono in uno stesso tempo, sono in sudduplicata ragione inversa delle loro lunghezze, quando gli archi descritti sieno simili fra loro. C.B.D.

§. 481.

Digitalizzato da Google

§. 481. Cor. Per la qual cosa se mai un Pendolo della lunghezza di 4 palmi compia in un minuto 60 oscillazioni; un' altro di un palmo, vibrando in un' arco circolare simile a quello del primo, dovrà farne 120 in un minuto: imperocchè 60, numero delle oscillazioni del primo, sta a 120, numero delle oscillazioni dell' altro, come 1 a 2, cioè come la radice quadrata della lunghezza di questo pendolo alla radice quadrata della lunghezza di quello.

PROP. CVI. TEOR.

§. 482. *Le Oscillazioni, ch' esegue un Pendolo per archi Cicloidali, sono isocrone.*

La Dimostr. di ques. Teor. è una conseguenza immediata di ciò, che si è detto nella Prop. XCVIII.

§. 483. Scol. I. L' ingegnosissimo Cristiano Ugenio, cui deesi la gloria di aver caricati di pendolo gli oriuoli, si avvide, che le vibrazioni per archi cicloidali erano le sole isocrone nell' ipotesi della gravità costante; e che conveniva determinare il modo, onde un pendolo potesse girne nel perimetro della Cicloide, affinchè il tempo venisse con esattezza misurato. Or questa ricerca, come il potete intendere di leggieri, non era più meccanica, ma geometrica. Con che postosi il Valentuomo a spe-

Digitalizzato da Google

speculare le insigni proprietà, di cui va fregiata la Cicloide, vi rinvenne, ch' ella può generarsi dall' evoluzione di un' altra a lei simile ed uguale (*a*): ond' ei per riuscir nel suo intento guidossi nel seguente modo.

„ Prese due lamine semicicloidali C N A, „ C M B scanalate nelle parti convesse, e *Fig.* 74. „ ch' eran simili fra loro, ed uguali: le „ adattò poi, che si toccassero ne' punti estremi delle loro basi, cioè in C: e che la „ loro comun tangente in questi punti giacesse verticalmente. In fine ei sospese in „ mezzo ad esse il filo flessibile C N F uguale „ a ciascuna lamina, ed avente all' estremo „ il peso F „. Egli è chiaro da siffatta costruzione, che il pendolo C N F spinto dall'oriuolo, cui l' è raccomandato, debba implicarsi alla lamina C N A, qualora ei sale per l'arco R A, e svilupparsene nel discendere. E che salendo per l'arco R G B debba avvolgersi all'altra lamina C M B, e da questa svilupparsene in discendendo: e così segnar la Cicloide A R B.

§. 484. Scol. II. Quantunque la Cicloide volgare, come si è dimostrato nella Prop. XCVIII., sia una curva perfettamente isocrona; pur nondimeno le vibrazioni de' Pendoli per archi cicloidali non sono equidiuturne, nè quindi all' esatta misura del tempo adattate. Imperocchè l' aria, che offre sensibile resistenza al pendo-

(a) *Pren. XIX.*

Digitalizzato da Google

lo mosso velocemente per la Cicloide, la frizione di esso intorno al perno, da cui è sospeso, il continuo stropicciamento del filo colle divisate lamine, alle quali in ciascuna oscillazione or se ne svolge, or si avviluppa, ed altre cagioni esterne turbano grandemente l'isocronismo. Onde i Meccanici per l' esatta misura del tempo han dovuto prevalersi delle oscillazioni per archi minimi di cerchio, delle quali fa mestiere, ch' io quì v' esponga compiutamente, ed in brieve la Teoria.

PROP. CVII. TEOR.

§. 485. *Le oscillazioni, ch' esegue il Pendolo* C B *negli archi circolari minimi* BAQ, bAq, *sono isocrone* (a). *E'l tempo di ciascheduna oscillazione sta a quello della discesa di un grave per la doppia lunghezza di esso Pendolo, come la semicirconferenza di un cerchio al suo diametro.*

Fig. 73.

Dim. Part. I. Gli archi circolari minimi BA, bA, pe' quali discenda il Pendolo C B, son proporzionali ai loro seni B D, b d, cioè a dire

(a) L' oscillazion delle catene, e de' corpi legati a fili flessibili l' è stata una degna occupazione de' Sublimi Geometri di questo Secolo. Il Sig. Daniele Bernulli, e Leonardo Eulero ne han date più dissertazioni *negl. Att. Ant. di Pietrob.* e 'l Sig. de la Grange *nell. pag.* 241. *Mech. Analyt.* ha scritto con pari eleganza sullo stesso soggetto.

Digitalizzato da Google

dire (447) alle forze, che lo accelerano ne' punti B, e b. Dunque queste forze son come gli archi, che deve il pendolo descrivere in sino all'infimo punto A. E quindi tanto le discese del pendolo per gli archetti minimi BA, bA, che le vibrazioni di esso pe' loro dupli BAQ, bAq saranno (170) isocrone.

PART. II. Supponete, che un grave discenda naturalmente per la RA diametro del cerchio BAQ, e che un' altro corpo si muova per la metà dell' archetto BbA costantemente animato dalla forza, che accelera il pendolo in B. Saranno (445) le forze acceleratrici di quel corpo, e di questo, come BC a BD, o come RA a 2BD. Ed i quadrati dei tempi, ne' quali essi descrivono RA, ed $\frac{1}{2}$ BbA coi divisati moti, essendo (110.4) direttamente come gli spazj, ed inversamente come le forze, saranno come RA ad $\frac{1}{2}$ BbA, e come 2BD ad RA: cioè (*a*) come RA ad RA, e come 2BD ad $\frac{1}{2}$ BbA, vale a dire come 2BD ad $\frac{1}{2}$ BbA, o come 2 ad $\frac{1}{2}$ (essendo l'archetto BbA per la sua picciolezza uguale al seno BD), o finalmente come 4 ad 1. Dunque il tempo della discesa libera di un grave per la RA sta al tempo, che v'impiegherebbe un corpo a descrivere $\frac{1}{2}$ BbA, uniformemente animato dalla forza acceleratrice del pendolo in B, come 2 ad 1. Or il tempo, nel

 quale

(a) *Prem. II.*

Digitalizzato da Google

quale percorresi $\frac{1}{2}$ B b A colla costante forza; che muove il pendolo in B, sta á quell'altro tempo, ch'esso pendolo, accelerato nella ragion degli archi da descriversi, impiega a discendere per l'archetto B A, (*a*) come il diametro di un cerchio alla semicirconferenza. Dunque per uguaglianza ordinata sarà il tempo della discesa libera di un grave per la doppia lunghezza del pendolo al tempo di una mezza oscillazione di esso, come 2 ad 1, e come il diametro alla semicirconferenza, cioè come il diametro al quadrante. E quindi duplicando i conseguenti sarà il tempo della libera discesa di un grave per la doppia lunghezza di quel pendolo, che vibra in archi circolari minimi, ad un' intera oscillazione di esso, come il diametro alla semicirconferenza. C. B. D.

§. 486. Cor. I. Essendo costante la ragione della semicirconferenza di un circolo al suo diametro; sarà anche costante quella del tempo di una oscillazione al tempo della caduta verticale di un grave per la doppia lunghezza del pendolo.

§. 487. Cor. II. E quindi se in due regioni della nostra Terra i tempi delle oscillazioni di uno stesso pendolo sieno fra loro come m ad n; questa stessa ragione dovran serbare i tem-

(a) Questa verità fluisce dalla Propos. XCIX.

Digitalizzato da Google

tempi, ne' quali un grave quivi discenderebbe da un' altezza dupla della lunghezza del pendolo. Or, quando le altezze sono uguali, le forze acceleratrici deggion esser fra loro nell' inversa duplicata ragion de' tempi (110.n.3). Dunque in queste regioni della Terra le forze acceleratrici dovranno essere nell' inversa duplicata ragione di m ad n, cioè come n^2 ad m^2.

§. 488. Scol. Il Sig. Richerio volendo osservare nel mese di Agosto del 1672. il passaggio delle Fisse per lo meridiano della Cajenna, isola distante per 5. gr. dall' Equatore terrestre, si avvide, che il suo oriuolo a pendolo quivi givane più lento del moto medio del Sole, cui erasi temperato a Parigi, e che la differenza di tempo montava in ogni giorno a 2', 28". Ei dunque colla guida di replicate osservazioni fu obbligato ad accorciar di una linea ed un quarto la lunghezza di cotesto pendolo, ch'era pied. 3. lin. $8\frac{3}{5}$. Il Sig. Hallei nel 1677 ritrovò, che il suo oriuolo, il quale a Londra oscillava a secondi, più lentamente vibrava nell' isola di S. Elena. Nel 1682 i Signori Varin, e des Hayes rinvennero, che nell' isola Gorea un pendolo dovea esser lungo pied. 3, e lin. $6\frac{5}{9}$ per essere sincrono a quello di 3. piedi, ed $8\frac{5}{7}$ lin., che nell' Osservatorio Reale di Parigi oscillava a secondi: e che nella Guadalupa, e nella Martinicca cotesto pendolo dovea essere di pied. 3. lin. $6\frac{1}{2}$. Altri Astronomi in altri tempi, ed in altre regioni del-

Digitalizzato da Google

della nostra Terra osservarono lo stesso: onde da tante osservazioni siam sicuri, che la gravità sotto dell' Equatore terrestre sia minore di quella, ch' è sotto a' Poli di nostra Terra, e nelle regioni intermedie.

PROP. CVIII. TEOR.

§. 489. *Qualora due Pendoli semplici ugualmente lunghi vibrino in archi minimi di cerchio; i quadrati de' tempi delle loro oscillazioni son direttamente come le masse, ed inversamente come i pesi degli stessi Pendoli.*

DIM. Le masse di questi pendoli dicansi respettivamente M ed m, P e p i loro pesi, L la lunghezza di ciascheduno di essi, ed entrambi oscillino in archi circolari minimi nelle regioni R, ed r della nostra Terra; sarà la durata di una vibrazione del primo pendolo (486) alla durata di una vibrazione dell' altro, come il tempo della discesa naturale del grave P per L nel luogo R al tempo della discesa di p per la stessa L nell' altro r. Ed i quadrati di quelle durazioni saranno come i quadrati de' tempi, onde i corpi P, e p quivi discenderebbero naturalmente per la stessa altezza L. Ma i quadrati di questi tempi sono (110. n.3) inversamente come le forze acceleratrici de' pesi P, e p, cioè (91) come M ad m, e come p a P. Dunque sarà pure il quadra-

Digitalizzato da Google

drato del tempo di una vibrazione di P al quadrato del tempo di un' altra vibrazione di p (quella però fatta nel luogo R, questa in r) come M ad m; e come p a P: cioè direttamente come le masse de' pendoli, ed inversamente come i loro pesi. C. B. D.

§. 490. Cor. I. E verificandosi per esperienza, che in una stessa regione della Terra questi pendoli P, e p sempre oscillino in tempi uguali; potrà concludersi, che le loro masse M, ed m seguano la ragione de' pesi P, e p. E questa è la dimostrazione di ciò, che v'indicai nel §. 149.

§. 491. Cor. II. Questa proposizione può generalizzarsi nel seguente modo: *i quadrati delle vibrazioni, che in archi circolari minimi eseguon due pendoli, i cui centri di oscillazione equidistino da quei di sospensione, son direttamente come le loro masse, ed inversamente come i pesi.*

§. 492. Def. LXIII. *Piede orario* è la terza parte di un pendolo semplice, che compie in un secondo una minima oscillazione.

Digitalizzato da Google

PROP. CIX. PROBL.

§. 493. *Determinare il piede orario in una data Regione della Terra.*

SOL. In questa data regione della Terra un pendolo semplice della lunghezza L (*a*) oscillando in archi circolari minimi compia in un' ora il numero n di vibrazioni : cioè sia n il numero delle vibrazioni da esso eseguite in 3600". Sarà la durata di ciascheduna di lui oscillazione uguale a (3600"): n. Sia intanto x la lunghezza di quel pendolo semplice , che quivi oscilli a secondi , cioè che faccia una minima oscillazione circolare in un secondo ; sarà (479) $\sqrt{L} : \sqrt{x} :: \frac{3600''}{n} : 1''$. Ed $x = (n\,n\,L) : 12960000$. Dunque un piede orario , ch'è $\frac{x}{3}$, sarà (n n L): 38880000.

§. 494. SCOL. I. Niuna cosa dovrebbesi tanto preservare dall' alterazione, quanto le unità delle misure , che ciascun popolo suole adottarsi per

(a) Il centro di oscillazione di una palla ponderosa , che penda da un sottilissimo filo , si rinviene nel seguente modo. Facciasi come la distanza del centro di sospenzione e del centro della sfera al raggio della sfera , così questo raggio, ad un quarto; e di questo se ne prendano due quinti . Sarà il centro di oscillazione per questi due quinti più depresso del centro della sfera.

Digitalizzato da Google

per valutar le altre, e ch' ei sovente è obligato a quelle delle straniere nazioni rapportare. Ma come mai ella può garantirsi dal tempo edace, e da tante segrete potentissime cagioni, onde frequentemente ne viene alterata? Il solo mezzo dovuto alla perspicacia di Cristiano Ugenio è di regolar queste unità delle misure col piede orario, ch' è una grandezza costante, ed universale presso tutte le nazioni.

§. 495. SCOL. II. Oltre a' questo vantaggio, che ritragghiamo da' pendoli, evvi quell' altro di conoscere quanto spazio in un secondo trascorrasi da un grave, che si lasci giù cadere nelle vicinanze di nostra Terra. Per intenderne l' artifizio basta por mente alla verità della Propos. CVII. Infatti essendo di 881 $\frac{1}{5}$ lin. parig. la doppia lunghezza del pendolo; che oscilla a secondi (488); sarà 1" al tempo della discesa di un grave per 881 $\frac{1}{5}$ lin. parig., come la semicirconferenza di un cerchio (485) al suo diametro, cioè ad un di presso come 11 a 7. E quindi il tempo della natural discesa di un grave per 881 $\frac{1}{5}$ lin. parig. sarà (7") : 11. E facendosi come il quadrato di questo tempo al quadrato di un secondo, così 881 $\frac{1}{5}$ lin: par. allo spazio trascorso in un secondo (153. n,1); questo sarà pied.par. 15 $\frac{1}{2}$.

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. XX.

Della Collisione de' Corpi.

§. 496. Le forze motrici de' corpi, che si percuotono, con certe leggi vengonsi a modificare: Dunque è ragionevole, che da' principj Meccanici io le ritragga, e distintamente ve le dimostri.

§. 497. Def. LXIV. Un corpo dicesi *duro*, se comunque premuto, o percosso non cangi di figura (*a*).

§. 498. Def. LXV. Chiamasi corpo *molle* quell' altro, che ad ogni urto, o pressione, che gli si arrechi, comprimesi agevolmente, senza che tenti di racquistare la sua prima figura.

§. 499. Def. LXVI. Un corpo dicesi *elastico*, se per mezzo della percossa, o della pressione gli si cangi la figura; ma ei può racquistarsela, tosto che l'azion del corpo premente, o percuziente sia cessata: Ed un corpo si dirà *perfettamente elastico*, se la restituzione della

(a) I corpi duri son protetti in Inghilterra, tollerati in Francia, proscritti dalla Germania. E v' è ancora chi dimostra, come il Sign. Beguelin, che ammettendosi de'corpi duri, la legge di *Continuità* non si venga ad alterare.

Digitalizzato da Google

la figura eseguasi con forza uguale a quella, che gli s' impresse.

§. 500. DEF. LXVII. I corpi duri, ed i molli sogliosi chiamare *Corpi inerti*: e que', che sono perfettamente elastici, si dicono semplicemente *elastici*, o *attuosi*.

§. 501. SCOL. In questa disamina i corpi, che si percuotono, si sogliono da' Meccanici considerare come tante sfere, ciascuna delle quali abbia la materia uniformemente nel suo volume distribuita; affinchè il centro di gravità cada in quello della figura.

§.502. DEF.LXVIII. Un corpo si dice imbattere *direttamente* in un' altro, qualora quello solamente, o tutti e due muovansi nella retta, che attraversi i loro centri, e poi si urtino. Ed in ogni altro caso l' urto sarà *obbliquo*.

§.503. DEF. LXIX. Il corpo A *incorre* nell'altre B, se questo stia in quiete, o pur si muova lentamente per la stessa direzione di A, che direttamente lo investe.

§. 504. DEF. LXX. Due corpi *incontransi* fra loro, se venendo da parti opposte si urtino direttamente.

§. 505. DEF. LXXI. L' impressione, che fa un corpo su di un' altro, è quanto il moto, che si acquista da uno, o che perdesi dall' altro.

§. 506. DEF. LXXII. Dirò *Potenza immateriale* quel principio motore, che si concepisce risedere in un soggetto sgombro d'inerzia.

§.507.

Digitalizzato da Google

§. 507. Scol. I vapori rammassati in angusto luogo hanno una forza quasi infinita rispetto all' inerzia della materia, ch' essi racchiudono. Un poco d' aria assai condensata, o assai rarefatta acquista un' elatere ben mille volte maggiore dell' inerzia di lei. Ed in simil guisa su di certi altri corpi ragionando può concludersi, che in Natura vi sieno delle Potenze, spingenti pressochè immateriali; sicchè queste tali Potenze, che qui ho definite, e delle quali quaggiù mi avvalgo per dimostrarvi con un metodo diretto le leggi della collisione de' corpi, non sono meri concetti della mia mente, ma sembrano aver fondamento in Natura.

§. 508. Ass. La quantità di moto di un corpo è quanto la Potenza immateriale, che quivi varrebbe a produrla.

§. 509. Cor. Se il momento del corpo C esprimasi per M, e per P l' energia di quella Potenza immateriale, che avrebbelo prodotto in esso corpo; la velocità di C sarà il quoto, che nasce dividendo P per la massa di C. Imperocchè (70) il momento diviso per la massa ne reca la velocità del mobile.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CX. PROBL.

§. 510. *Esporre un Metodo genuino, onde nell'urto diretto de'Corpi* A, *e* B *si possano definire i loro moti dopo dell' urto, dati quelli, che ne avean prima.*

Soluz. Il momento del corpo A prima dell' urto è quanto una Potenza immateriale P, che quivi potrebbelo produrre: e 'l momento dell' altro B prima dell' urto è anche uguale (508) alla Potenza immateriale p, che varrebbe a produrlo in questo altro corpo. Dunque sostituendo le Potenze immateriali P, e p in luogo delle quantità de' moti de' corpi A, e B prima dell' urto; potrem supporre, che la somma de' corpi A, e B, i quali nell' atto del conflitto tengonsi fermi per poch'istanti, e come uniti fra loro, sia spinta dalla somma, o dalla differenza delle Potenze P, e p, secondochè i medesimi corpi si urtino dalla stessa parte, o a parti opposte (190, 191). Ma, qualora la Potenza $P \pm p$ spinge la massa de' corpi A, e B congiunti fra loro, la velocità che ciascuno di essi ne riceve, è quanto il quoto, che nasce dividendo $P \pm p$ per $A + B$ (70). Dunque la medesima velocità otterrassi ne' corpi A, e B dopo dell' urto, dividendo per l'aggregato di essi la somma, o la differenza de' loro

Digitalizzato da Google

loro momenti prima dell' urto, secondochè vadano entrambi in ver la stessa parte, o a parti opposte. E di qui poi, moltiplicando la massa di A per questa velocità comune, avrassi il momento di A dopo dell' urto: e moltiplicando la massa di B per la stessa velocità comune, si otterrà il momento di B dopo dell'urto.

Or questo l'è vero ne' soli corpi inerti; ma ne' corpi attuosi oltre a questo moto, che per l' inerzia della materia in siffatto modo loro si distribuisce, un' altro per lo spiegamento delle loro parti ad essi pur si arreca: la di cui quantità, e direzione sarà quaggiù divisata (a).

§. 511.

(a) Gio: Alfonso Borelli insigne Geometra Napolitano fu il primo, che nella sua Opera *de vi percussionis* legò a' principj della Geometria il moto emergente dalla collision de' corpi. Ma le nozioni fisiche, ch' egli ebbe su questa Teoria, non furono interamente gradevoli a' Dotti. Sicchè il Dottor Wallis, il Cavalier Wren, e Cristiano Ugenio tre preclarissimi Geometri del secolo trascorso, soddisfacendo ai desiderj della Società Reale di Londra, dimostrarono compiutamente colla Geometria, e co' veri principj della Fisica le regole, onde collidonsi i corpi inerti, e gli attuosi, e le confermaron poi colla sperienza. Ma ciò non ostante il Sommo Eulero *nel Vol. V. Act. Ant. Petrob.* stimò non esser genuine cotestе loro Teorie, perciocchè da' principj stranieri son derivate: oltre a che, com' ei soggiunse, vorrebbesi quivi additare la cagion vera dell' alterazione de' moti de' corpi percuzienti, ed esprimerne distintamente il modo, ond' essi agiscono fra loro. Dunque parmi convenevole, ch' io chiaramente quì vi spieghi come ciò vada.

Im-

Digitalizzato da Google

§.511. DEF. LXXIII. Il centro di gravità de' due corpi A, e B è il punto C nella distanza AB de' loro centri, ove i dilei segmenti sieno inversamente come le masse di quelli: cioè ove stia AC: CB:: B: A.

PROP. CXI. PROBL.

§. 512. *Date prima dell' urto le velocità, e le masse di due corpi inerti, de' quali uno direttamente incorre nell' altro; ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.* Fig. 79. n. 1.

SOLUZ. Muovansi equabilmente i due corpi A, e B per la medesima direzione AO, e 'l cor-

Immaginatevi, che il corpo *A* movendosi per dritto vada ad urtar direttamente nell'altro *B*, ch' è in quiete. In tal rincontro la solidità di questi corpi non permetterà, che si abbiano essi a compenetrare, sicchè di due un sol ne risulti di entrambi minore. Nè sarà poi possibile, che quello perseveri nel moto, questo nella quiete, come l' inerzia della loro materia l' esigerebbe. Che ne dovrà dunque addivenire? Eccolo. „ La forza motrice del cor-
„ po *A* è quanto una potenza immateriale *P*, che quivi
„ varrebbe a produrla. Dunque potendosi questa a quella
„ sostituire, potrà supporsi senza traviar dal vero, che
„ nel momento della collisione de' corpi *A*, e *B*, (i
„ quali tengonsi in questo mentre fermi, e come con-
„ giunti fra loro), la Potenza *P* ne spingesse la som-
„ ma delle loro masse. Or, com'è chiaro di per se stesso,
„ l' entità motrice della potenza *P* dovrebbe in tal caso
„ diffondersi nella somma delle masse de' corpi *A*, e *B*:
„ rimanendone una parte in *A*, ed un' altra trasfonden-
„ dosi in *B*. Dunque sarà anche vero, che incorrendo il

„ cor-

Digitalizzato da Google

corpo A inseguendo con maggior velocità il corpo B, lo raggiunga nel luogo O, e quivi lo urti; saranno le loro velocità prima dell'urto come AO, BO. Si prenda de'medesimi corpi il centro di gravità, e sia il punto C. Io dico, *che la velocità, ond' essi unitamente si moveranno dopo dell' urto, debbasi esprimere dalla* CO.

DIM. Gli spazj AO, BO insiem descritti da' corpi A, e B, che muovonsi equabilmente, son proporzionali alle loro velocità. Ma per costruzione BC, ed AC disegnano le masse de'corpi A, e B: dunque i due rettangoli di AO in BC, e di BO in AC dovran dinotare le loro quantità

„ corpo *A* nell' altro *B* quieſcente, una parte della ſua
„ forza motrice, quaſi ſtaccandoſi da eſſo abbiane ad in-
„ veſtire l'altro *B*, ch'è in quiete. Se non che, quan-
„ do la potenza immateriale *P* ſpinge le due maſse *A*,
„ e *B* realmente congiunte, e quieſcenti, il ripartimento
„ della forza motrice ſi fa in eſſi con una quieta traſfu-
„ ſione, ſenza che in verun modo ſi alteri delle loro par-
„ ti il ſito: laddove all' imbattere del corpo *A* nell' al-
„ tro *B* lo ſteſso ſcompartimento di forze tra lor ſi eſegue,
„ ma con una viva impreſſione, la quale cangia le figure
„ de' corpi percuzienti, ſe per avventura ſieno eſſi molli,
„ o elaſtici. Or le parti premute de' corpi elaſtici hanno
„ un natio potere di reſtituirſi, e d' imprimerſi una
„ nuova forza. Dunque in tali corpi dovrà benanche
„ tenerſi conto della forza, con cui riprendono la primie-
„ ra figura, e convenevolmente combinarla con quella,
„ che aveano come inerti. Che ſe il corpo *A* imbatta
„ nell' altro *B*, che ancor ſi muova, ſarà facile da ciò
„ che ſi è detto indagarne i loro moti dopo dell' urto.

Digitalizzato da Google



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

tità di moto prima dell' urto (72): e quindi anche il rettangolo di AB in CO, che ad essi (*a*) è uguale, esporrà la somma delle loro quantità di moto prima dell' urto. Ma i mentovati corpi, avvegnachè inerti, non han forza di risaltare dopo dell' urto: dunque dovran di poi muoversi congiuntamente, come se formassero un sol corpo, e fossero investiti da una sola Potenza immateriale espressa dal rettangolo di AB in CO. Per la qual cosa dinotando AB la somma delle medesime masse; la CO dovrà esporre la loro comune velocità dopo dell' urto (509). C. B. D.

§. 513. Cor. I. Se il corpo B fosse in riposo, e l'altro A venisse ad urtarlo direttamente per AB; la loro quantità di moto dopo dell' urto sarà disegnata dal rettangolo di AB in CB; e quindi la comune velocità, che avran tai corpi dopo dell' urto, sarà espressa da BC. Val quanto dire, *cotesta velocità dopo del conflitto sarà ad* AB *velocità del corpo incorrente, come la massa di questo alla massa di entrambi i corpi*.

§. 514. Cor. II. Se i corpi A, e B sieno di uguali masse; il centro di gravità di essi dovrà cadere in mezzo alla retta AB: e saranno aritmeticamente proporzionali le tre rette AO, CO, BO. Onde la CO *velocità comune de' corpi*

(a) *Pren. XX.*

Digitalizzato da Google

dopo del conflitto sarà la semisomma delle velocità, ch' essi aveano prima di urtarsi.

§. 515. Cor. III. Se il corpo B, ove A ne incorra, sia d' infinita mole rispetto ad esso incorrente; sarà B C di una infinitesima grandezza riguardo ad A C. Dunque in questo caso *non vi sarà moto dopo dell' urto.*

§. 516. Cor. IV. Il rettangolo di A O in B C (come si è veduto in questa proposizione) disegna la quantità di moto del corpo A prima di urtar B; e l'altro di C O in B C è quella, che gliene rimane dopo dell' urto. Dunque la differenza di essi rettangoli, val quanto dire il rettangolo di A C in C B esporrà la quantità di moto, che si è perduta dal corpo A, ed acquistata da B.

§. 517. Cor. V. E quindi il rettangolo di A C in C B dinoterà l' energia della percossa recata dal corpo A all' altro B (505).

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CXII. PROBL.

§. 518. *Date le velocità, e le masse de' due corpi inerti* A, *e* B, *che direttamente incontrinsi l' un l' altro; ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.* Fig. 79. n. 2.

SOLUZ. Sia C il centro di gravità de' due corpi A, e B, i quali venendo equabilmente dai luoghi A, e B s' incontrino in O, e quivi collidansi: *sarà* C O *la comune velocità, ond' essi dopo dell' urto si dovran muovere per la direzione del moto prevalente.*

DIM. Imperocchè il rettangolo di AB in CO, ch' è (*a*) la differenza degli altri due di A C in B O, e di BC in A O, cioè delle quantità di moto de' corpi A, e B prima del loro incontro, può dinotar l' energia di una potenza immateriale, che spinga la somma delle loro masse congiunte fra loro nell' atto della collisione, ed incapaci di risaltare (510). Ma A B rappresenta la somma delle masse de'medesimi corpi: dunque C O dovrà esporre la velocità, onde si moveranno dopo l' urto per la direzione di quel corpo, che ha più quantità di moto dell' altro. C. B. D.

§. 519. COR. I. Se i corpi, A, e B sieno uguali; il centro di gravità di loro dovrà giacerne

(a) *Pren. XX. e cost. Probl. prec.*

Digitalizzato da Google

cerne in mezzo ad essi, come è il punto c: Dunque *la velocità di questi corpi dopo del loro incontro sarà la semidifferenza delle velocità, ch'essi ne avean prima*. Imperocchè la c O, come appare dalla Geometria, è la semidifferenza delle due A O, B O.

§. 520. COR. II. Se i due corpi s'incontrino nel centro di gravità C; non vi resterà moto dopo dell'urto, ed essi corpi quivi si fermeranno. E perchè in tal caso le velocità prima dell'urto esser debbono inversamente come le masse de' corpi, che s'incontrano; ne seguirà *la quiete in due corpi, che direttamente s'incontrino con uguali quantità di moto.*

§. 521. COR. III. Suppongasi il momento del corpo A maggiore di quello dell'altro B, sic-
Fig. 77. n. 2. chè dopo l'urto si abbiano essi a muovere colla velocità C O per A O; sarà il rettangolo di B C in A O, ch'è il momento del primo, maggiore del rettangolo di A C in B O, ch'è il momento dell'altro. Dunque sarà BC ad AC in maggior ragione di BO ad A O: e 'l punto O cascherà tra C, e B. Ed esprimendo i rettangoli di B C in A O, e di B C in C O i momenti del corpo A prima, e dopo dell'urto; *la differenza di questi momenti, cioè l'impressione, che* (505) *arrecasi al corpo* A *incontrando* B, *sarà espressa dal rettangolo di* B C *in* A C.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CXIII. PROBL.

§. 522. *Date le velocità, e le masse de due corpi* A, *e* B *perfettamente elastici, di cui il primo incorra nell' altro ; si addimandano i loro moti dopo dell' urto.*

Fig. 77. n. 1.

SOLUZ. I corpi A, e B perfettamente elastici si partano da' luoghi A, e B per la direzione AO: e 'l primo di essi, che dell'altro sia più veloce, lo raggiunga in O: ed in C cada il centro di gravità di questi due corpi nel principio del lor cammino. Ciò posto si prenda 1. la retta CT, o Ct differenza delle due CO, e CA, e questa si segni a destra del punto C, se mai CO sia maggiore di CA; ed a sinistra, se quella di questa sia minore. 2. Protraggasi CO in Q, fintantochè sia OQ uguale a CB. *Sarà dopo l' urto* CQ *la velocità del corpo* B *per la direzione* CQ; *e* CT, *o* Ct *la velocità dell' altro* A *mosso per la direzione* CT, *o* Ct.

DIM. I due corpi A, e B nel momento, che si urtano, sono come non elastici: onde il primo avrà la quantità di moto espressa dal rettangolo di CO in CB, e l' altro per quantità di moto il rettangolo AC in CO. Ma appena fatta l' impressione della forza dal corpo A nel corpo B, mutansi le diloro figure con tanta forza, con quanta il corpo A ha agito nell'altro B, cioè (517) colla forza espres-

Digitalizzato da Google

sa dal rettangolo A C B. Dunque, per la perfetta elasticità di essi corpi, colla medesima forza si dovran restituire le loro figure dopo dell'urto (499). Or dopo l'urto questi due corpi non si possono spiegare verso quella parte, ove si toccano: poichè ivi per le uguali e contrarie azioni e reazioni si tengono quasi fermi, ed immobili. Dunque le parti del corpo A debbonsi spiegare per O A, e quelle del corpo B per O Q: e la forza, onde in entrambi i corpi si esegue un tale spiegamento, sarà proporzionale ad A C in C B. Per la qual cosa il moto che avrà il corpo A dopo dell' urto, sarà come C O in C B meno A C in C B, cioè come C B in C T. Ed essendo C B la sua massa, sarà C T la velocità, ond' ei si moverà per C O, se la differenza di C O, e di C A sia positiva, e per C A, s' ella sia negativa. E 'l corpo B avrà per quantità di moto dopo dell' urto la somma de' due rettangoli di A C in C O, e di A C in C B, cioè il rettangolo di A C in C O + C B, o finalmente il rettangolo di A C in C Q: e sarà C Q la velocità, ond' ei dovrà muoversi per B O dopo l' urto. C. B. D.

§. 523. Cor. I. Sieno i due corpi A, e B uguali fra loro; sarà A C uguale a C B, e quindi la differenza di A C, e C O sarà la stessa, che la differenza di C B, e di C O, cioè quanto la B O: e la somma di C B, e di C O pa-

Digitalizzato da Google

pareggerà AO, ch'è somma delle due AC, e CO. Dunque essendo uguali i corpi A, e B, si moveranno dopo l'urto colle velocità BO, ed AO. Cioè *quando due corpi sono uguali, ed elastici, ed uno di essi nell'altro incorra, amendue si moveranno dopo l'urto per la comune direzione, iscambiandosi fra loro quelle velocità, che ne avean prima.*

§. 524. Cor. II. Laonde se il corpo B sia quiescente; dopo dell'urto l'incorrente A resterà in quiete, e 'l corpo B muoverassi colla velocità del corpo A, e per la medesima direzione di esso.

§. 525. Cor. III. Sia AC maggiore di CO, sarà il rettangolo di AC in AB eziandio maggiore del rettangolo di CO in AB. Ma questo rettangolo nella Pren. XX. si è mostrato uguale ai due rettangoli di BC in AO, e di AC in BO: dunque questi sono minori del rettangolo di AC in AB. E quindi togliendo da essi il medesimo rettangolo di AC in BO, rimarrà il rettangolo di BC in AO minore della differenza dei rettangoli di AB in AC, e di BO in AC; cioè del rettangolo di AC nella differenza di AB e BO, ovvero di AC nella differenza di AO e 2BO. Per la qual cosa, essendo il rettangolo di BC in AO minore del rettangolo di AC nella differenza di AO e 2BO, starà AC a CB in maggior ragione di AO alla differenza di AO e 2BO.

§. 526. Cor. IV. Dunque *perchè il corpo* A

Digitalizzato da Google

dopo dell'urto risalti per la parte opposta, dee stare la massa del corpo B *a quella di* A *in maggior ragione della velocità di* A *a questa velocità diminuita della doppia velocità del corpo* B.

§. 527. Cor. V. L'impressione, che fa il corpo A nell'altro B, allorchè si muovono tutti e due verso la medesima parte colle velocità AO, e BO, si è mostrata proporzionale al rettangolo di BC in AC, cioè al rettangolo della massa del corpo A nella differenza delle velocità AO, e CO, ch'egli ne ha prima, e dopo dell'urto.

PROP. CXIV. PROBL.

§. 528. *Date le velocità* AO, BO *de' corpi elastici* A, *e* B, *che partendo dai luoghi* A, *e* B, *direttamente s' incontrino in* O; *ritrovare le loro velocità dopo dell' urto.*

Fig. 77. n. 2.

Soluz. Sia C il centro di gravità de' corpi A, e B, ed O il luogo del loro incontro; saranno AO, e BO le loro velocità prima dell' urto, e CO la velocità, ond' essi congiuntamente si moverebbero, se fossero inerti. Prendasi CE uguale a CO. Io dico, *che la retta* EA *dinoti la velocità del corpo* A *da* E *verso* A, *ed* EB *quella di* B *da* E *verso* B.

Dim. Da ciocchè si è detto nel §. 521 il moto perduto sì dal corpo A, che dall'altro B nell' affrontarsi in O colle velocità AO, BO, vien

Digitalizzato da Google

vien espresso dal rettangolo di A C in B C. Onde a questo sarà ben anche proporzionale la forza, che ciascuno all' altro imprime; e quindi ancora quella, colla quale cercano di riacquistare le loro primitive figure. Per la qual cosa essendo B C in C O il moto, che per O B avrebbe dopo l' urto il corpo A come inerte; ed A C in B C quello che dal riprender la primiera figura gli si communica per O A; sarà la differenza di questi rettangoli, cioè il rettangolo di A E in C B il moto del corpo A per la direzione E A, e la velocità di esso sarà disegnata dalla retta E A (509).

Similmente aggiungendosi al moto del corpo B come inerte, cioè al rettangolo di A C in C O, quello di A C in B C, nato dello spiegamento delle dilui parti per C B, ne risulterà il rettangolo di A C in B E, che disegna il moto del corpo B per la direzione E B. Ma A C rappresenta la massa del medesimo corpo. Dunque E B disegnerà la velocità, ond'ei dopo dell' urto camminerà per E B. C. B. D.

§. 529. Cor. I. Se i due corpi A, e B siano tra se uguali, il loro centro di gravità dovrà cadere nel punto medio della loro distanza A B. E quindi E A, ch' è differenza delle due A C, e C E, sarà pur anche differenza delle altre B C, e C O, che a quelle respettivamente sono uguali: vale a dire, sarà E A uguale a B O. Dippiù la retta B E, che adegua la som-

Digitalizzato da Google

somma di BC ; e CE, sarà uguale ad AO; somma delle due AC, e CO.

§. 530. COR. II. Dunque ; *se due corpi elastici, ed uguali ; s' incontrino direttamente ; dopo dell' urto dovran risaltare con iscambiarsi le velocità, ch' essi ne avean prima.*

§. 531. COR. III. Se le velocità di cotesti corpi, che s'incontrano ; sieno inversamente come le loro masse ; il punto O dell' incontro caderà nel diloro comun centro di gravità C. Onde sarà OA la velocità del corpo A, che dopo l'urto diriggesi per OA: ed OB quella, colla quale il corpo B muovesi per OB.

§. 532. COR. IV. Dunque *se le masse de' corpi elastici, che direttamente incontrinsi ; sieno inversamente come le loro velocità ; dopo dell'urto dovran discostarsi l' un l' altro colle medesime velocità, onde prima si erano accostati.*

§. 533. SCOL. I. In questa proposizione ho omessi alcuni casi: poichè agevolmente si posson supplire da chi porrà mente alla di lei costruzione.

§. 534. SCOL. II. Se i moti de' corpi A, e B si vogliano esprimere analiticamente, ne sarà agevole conoscere le velocità, e le direzioni de' corpi A, e B dopo dell'urto, date le masse, e le velocità di loro prima dell' urto. E questa cosa si vuol intender ben anche per l'urto obbliquo, ch' esporrò qui appresso.

PROP.

Digitalizzato da Google

PROP. CXV. PROBL.

§. 535. *Ridurre l'urto obbliquo di due corpi all'urto diretto* (a).

SOLUZ. I due corpi E, e D muovendosi dai luoghi E, e D per le direzioni e colle velocità E B, D A si percuotano obbliquamente in A; si vuol ridurre quest' urto al diretto, perchè si possano conoscere le velocità, e le direzioni di essi dopo l' urto. *Fig.* 78.

Sia G A g un piano, che tocchi i medesimi corpi, ov' essi percuotonsi in A, e su di esso si calino da D, ed E le perpendicolari DG, E F, e si compiano i parallelogrammi GDRA, EFBC. Saranno dati di specie i due triangoli A D R, E B C, poichè son date le direzioni, per cui si muovono i dati corpi prima dell'urto rispetto a G A g. Ma son date eziandio le ipotenuse A D, B E de' medesimi triangoli, come quelle che disegnano le velocità de' dati corpi prima dell'urto: dunque saran dati ben anche i cateti R A, C B di questi triangoli.

Ciò

(a) Varj Opuscoli su argomenti analoghi a questo, che ho per le mani, sono stati scritti da valenti Geometri. Per non riferirli tutti v' indico solamente due Dissert. di Daniele Bernulli *de Corporibus oscillando se se percutientibus*, & *de Percussione excentrica Vol. VII.* & *IX. Att. Ant. Petr.* ed un'altra di Eulero *de communicatione motuum in collisione corporum se se non directe percutientium. Vol. IX. Att. Ant. Petrob.*

Digitalizzato da Google

Ciò premesso, la forza D A si scinda nelle due laterali G A, A R: e la B E, forza dell'altro corpo, ancor si risolva nelle sue laterali F A, A C; saranno R A, A C quelle forze, onde direttamente percuotonsi: e le altre due G A, F A esercitate per direzioni tra se parallele non si comunicheranno in verun modo ai corpi nel momento, in che si urtano. Sicchè l'urto obbliquo per le direzioni D A, E B ridurrassi al diretto per R A, C B colle velocità R A, C B. Si ritrovino dunque (pei probl. prec.) le velocità di questi corpi dopo tal urto diretto, e sieno queste Ar, Bc. Si prendano A g, ed A f rispettivamente uguali ad A G, ed A F. Si compiano i parallelogrammi A r d g, B c e f, e si tirino le due diagonali A d, B e. *Queste dinoteranno le velocità, e le direzioni de' dati corpi* A, *e* B *dopo dell' urto obbliquo*.

La dimostrazione intendesi dalla ~~medesima~~ costruzione.

BIBLIOTH DE LA VILLE DE LYON

IN.

Digitalizzato da Google

INDICE DE' CAPITOLI.

Prefazione dell' Autore . pag. V
Prenozioni Geometriche . VII

DELLA MECCANICA.

CAP. I. *Del Moto Equabile.* pag. 1
CAP. II. *Teoria Generale del Moto Variabile* . 10
CAP. III. *Delle Forze* . 24
CAP. IV. *Nozioni delle Forze Centripete.* 47
CAP. V. *Rapporto delle forze Centripete ai moti de' Gravi* . 54
CAP. VI. *Delle vere Ipotesi di Gravità, che han luogo nella nostra Terra, e de' Moti rettilinei, che ne son determinati.* 76
CAP. VII. *Della Composizione delle forze.* 102
CAP. VIII. *Principj, che si derivano dalla composizion delle forze* . 115
CAP. IX. *Della libera discesa de' Gravi per Piani declivi* . 132
CAP. X. *Dell' attrazione de' Corpi sferici.* 145
CAP. XI. *Generali considerazioni sul moto de' Corpi, che ne' mezzi liberi si aggiruno intorno ad immobili centri delle forze.* 157

CAP.

Digitalizzato da Google

CAP. XII. *Risoluzione del Problema diretto delle forze Centrali per le Sezioni Coniche.* 180

CAP. XIII. *Soluzione del Problema inverso delle forze Centrali.* 205

CAP. XIV. *Del moto de' gravi proiettati dalla superficie terrestre per direzioni non verticali.* 217

CAP. XV. *De' movimenti eseguiti in Orbite Ellittiche con forze centripete tendenti ad un comune di loro Umbilico.* 237

CAP. XVI. *Delle Anomalie de' Pianeti.* 248

CAP. XVII. *Saggio di alcune turbazioni nel Moto de' Pianeti Secondarj, e del movimento degli Assidi.* 257

CAP. XVIII. *Della discesa de' gravi per le concavità di quelle curve, i di cui assi son posti verticalmente: e delle Curve Isocrone.* 274

CAP. XIX. *Dell' Oscillazione de' Pendoli.* 299

CAP. XX. *Della Collisione de' Corpi.* 314

ER-

Digitalizzato da Google

ERRORI

Pag.	*vers.*	CORREZ.
17	8	Lasciatisi
20	4	La qual cosa
24	16	della
72	11	in A, e B.
85	30	è esattamente 125
122	17	le direzioni delle
128	21	l' adegui, e
151	16	Si calino D F
190	19	all' altro q r S
194	24	forza centripeta in A.
208	6	PROBL.
246	2	di Venere intorno al Sole, della Luna intorno alla Terra;
256	13	il triangolo M C F.
262	21	l' angolo A c b all' altro
319	13	i due corpi di A, e B

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Fig. 4.

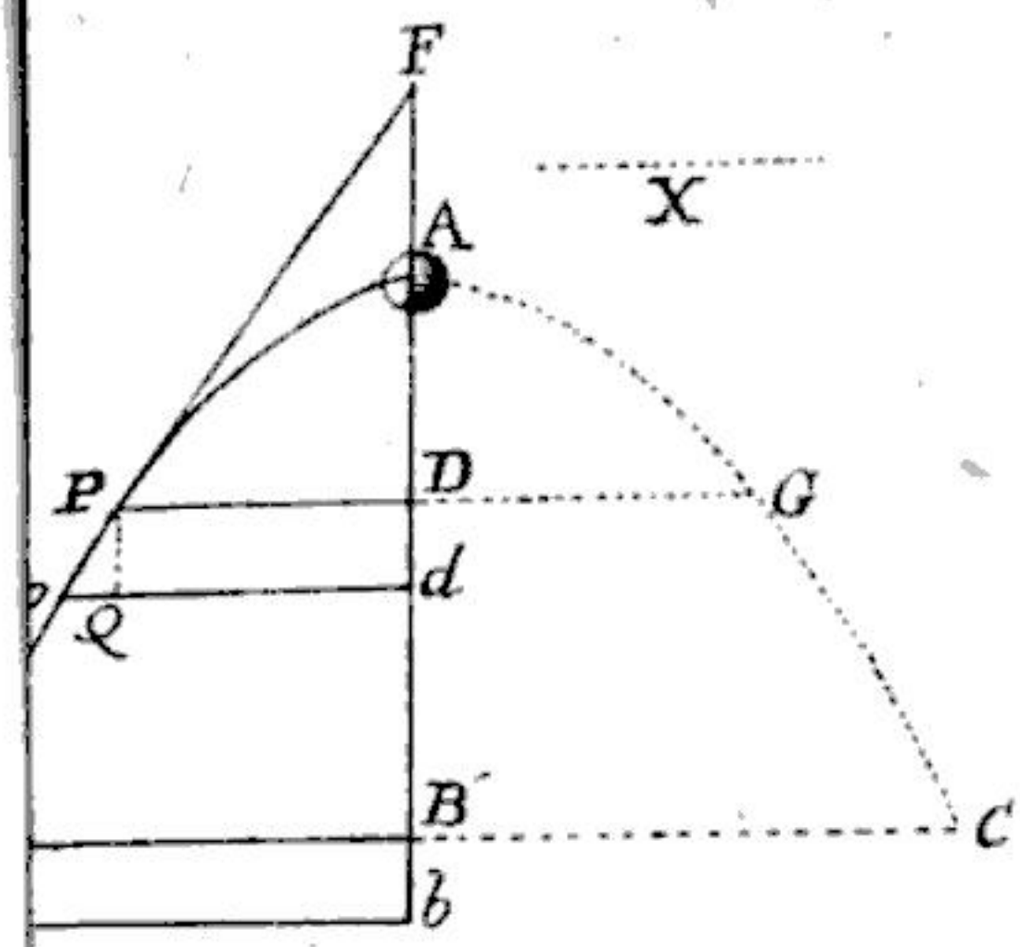


Fig. 8.

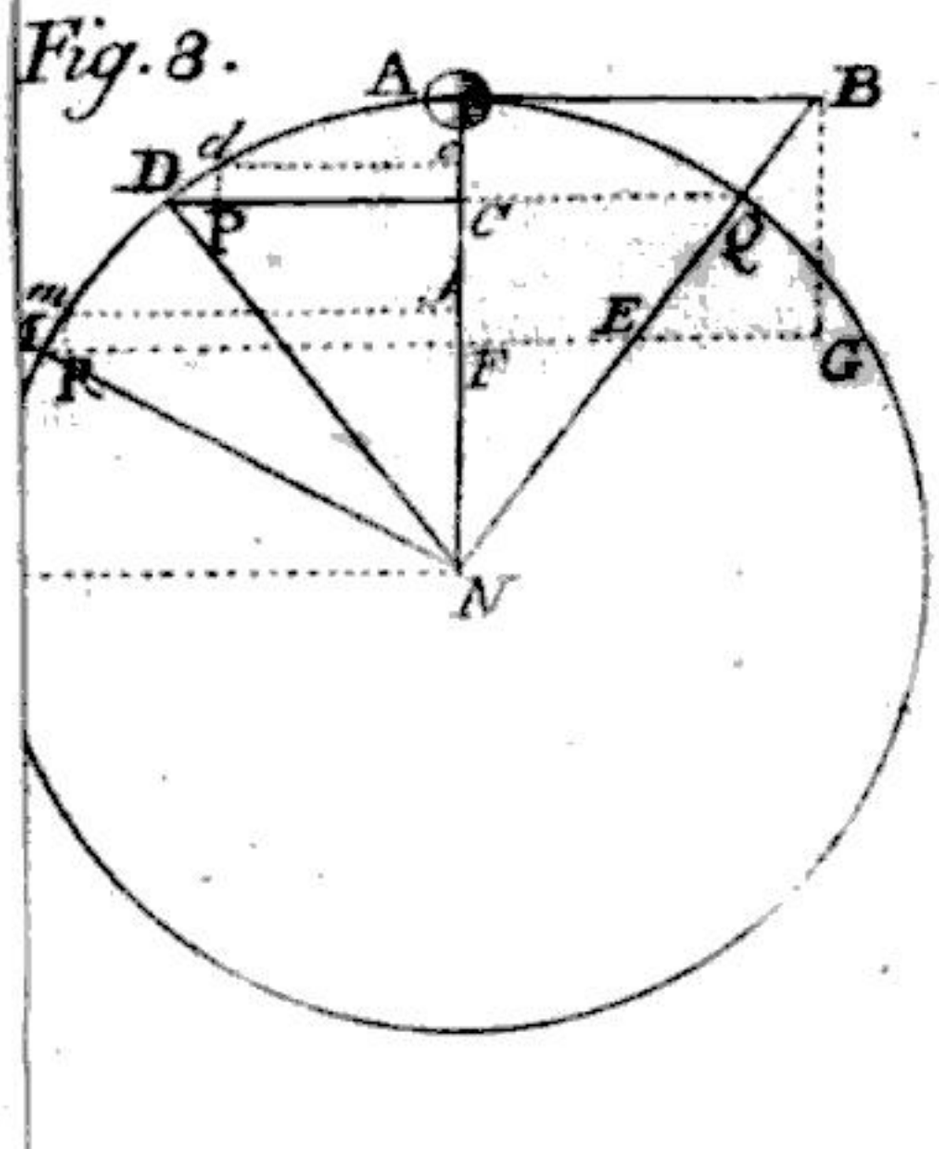
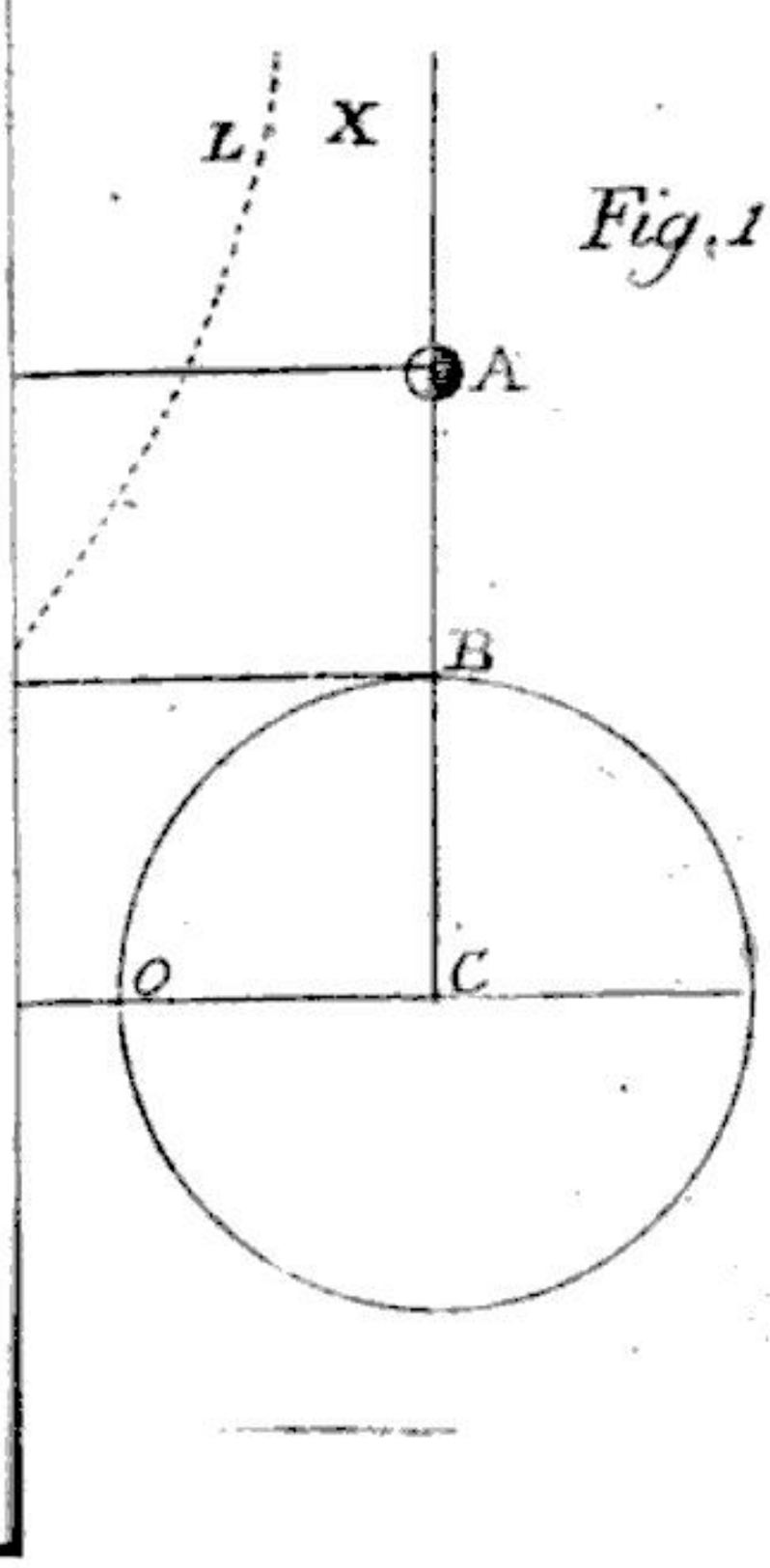


Fig. 12.



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. II.

y. 15.

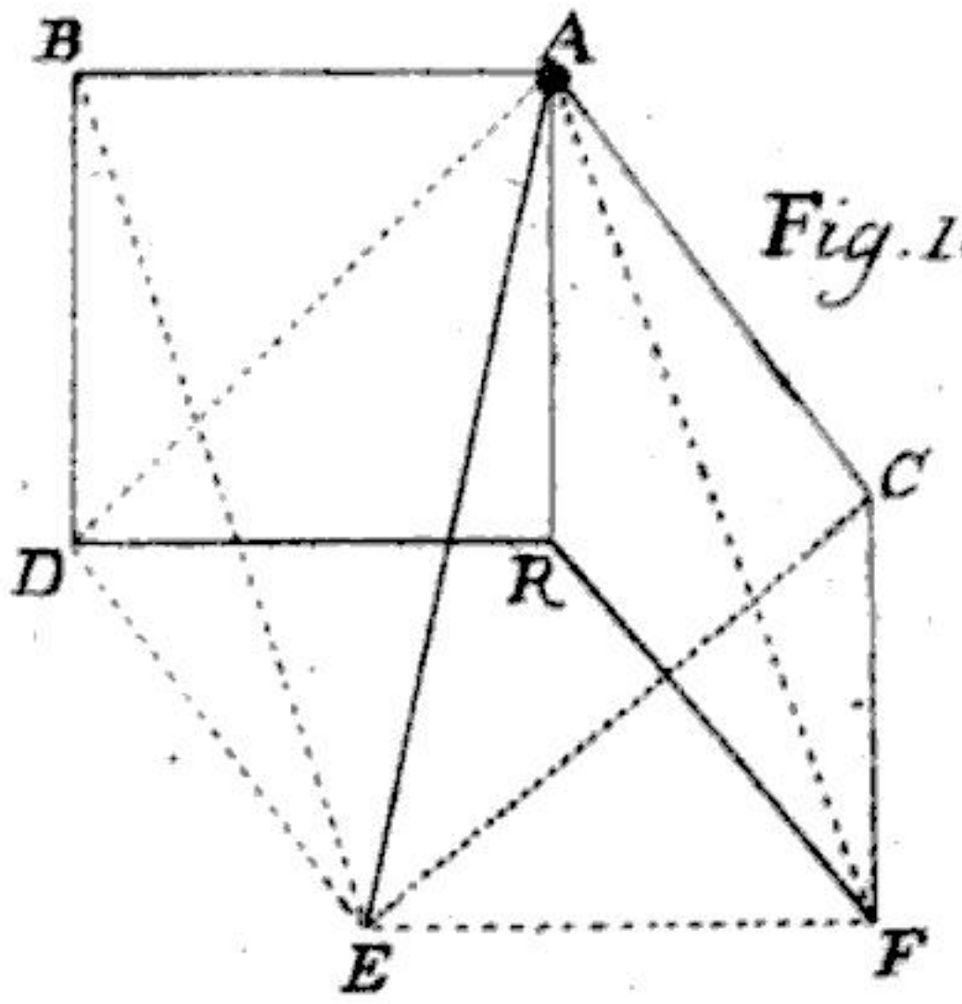
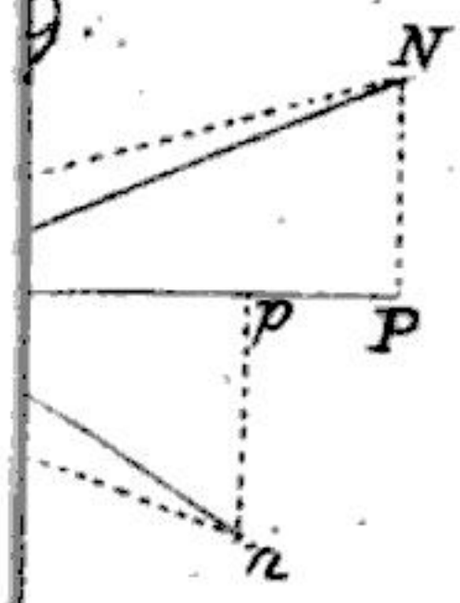


Fig. 16.

z

g.



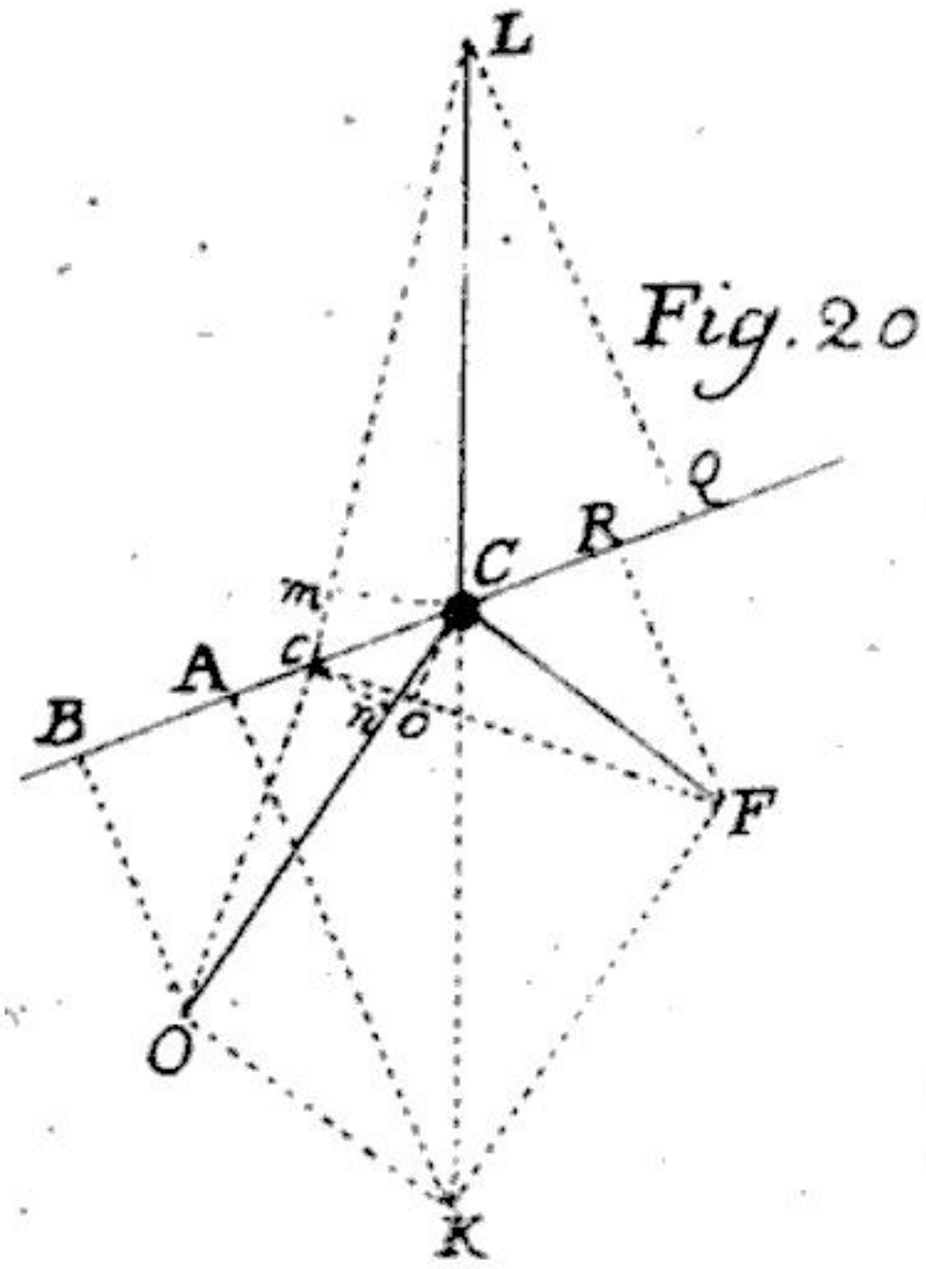


Fig. 20

A

BIBL
LYON

. 23.

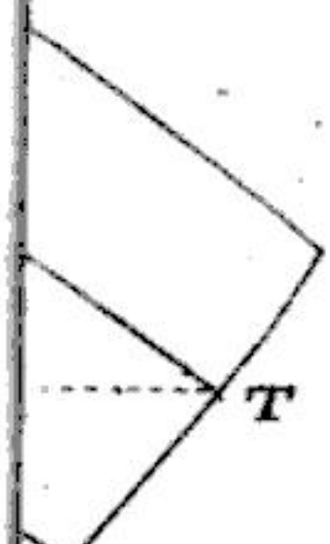
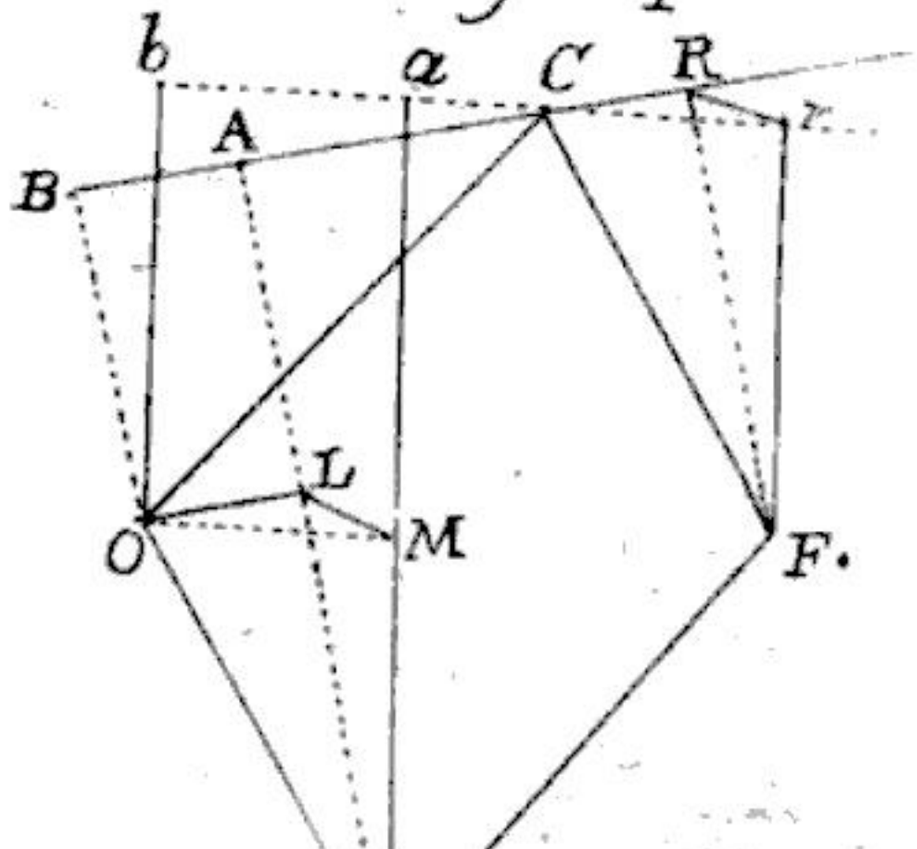


Fig. 24



Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

n.1.

Fig. 25

n.2.

Fig.

Fig. 28.

Fig. 32.

Fig.

Fig. 36

BIBL LYON

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. IV.

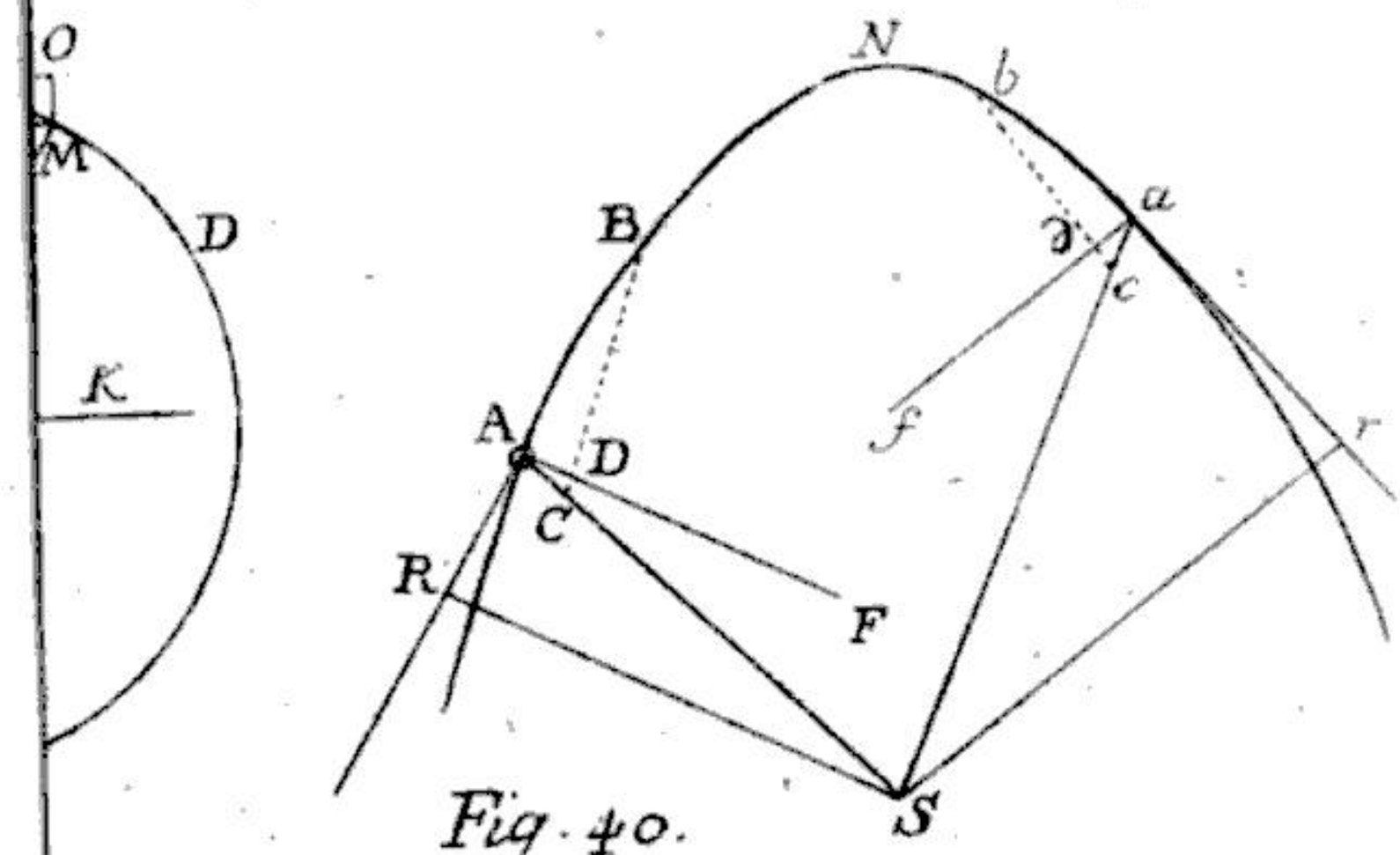


Fig. 40.

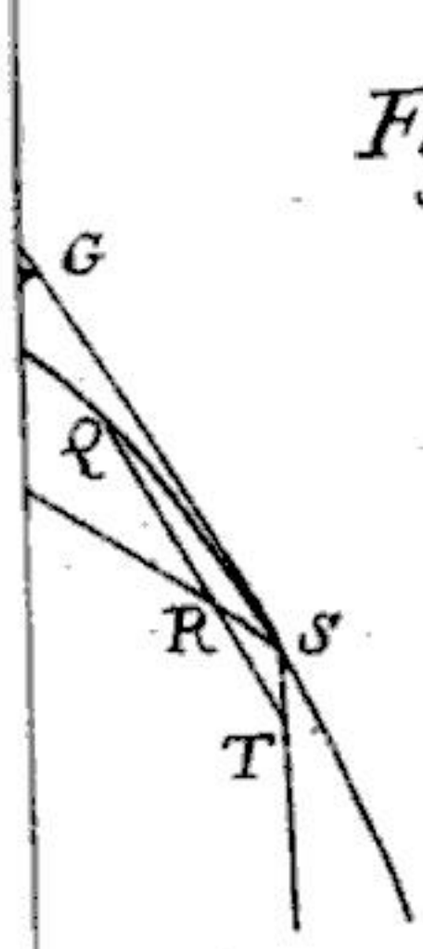
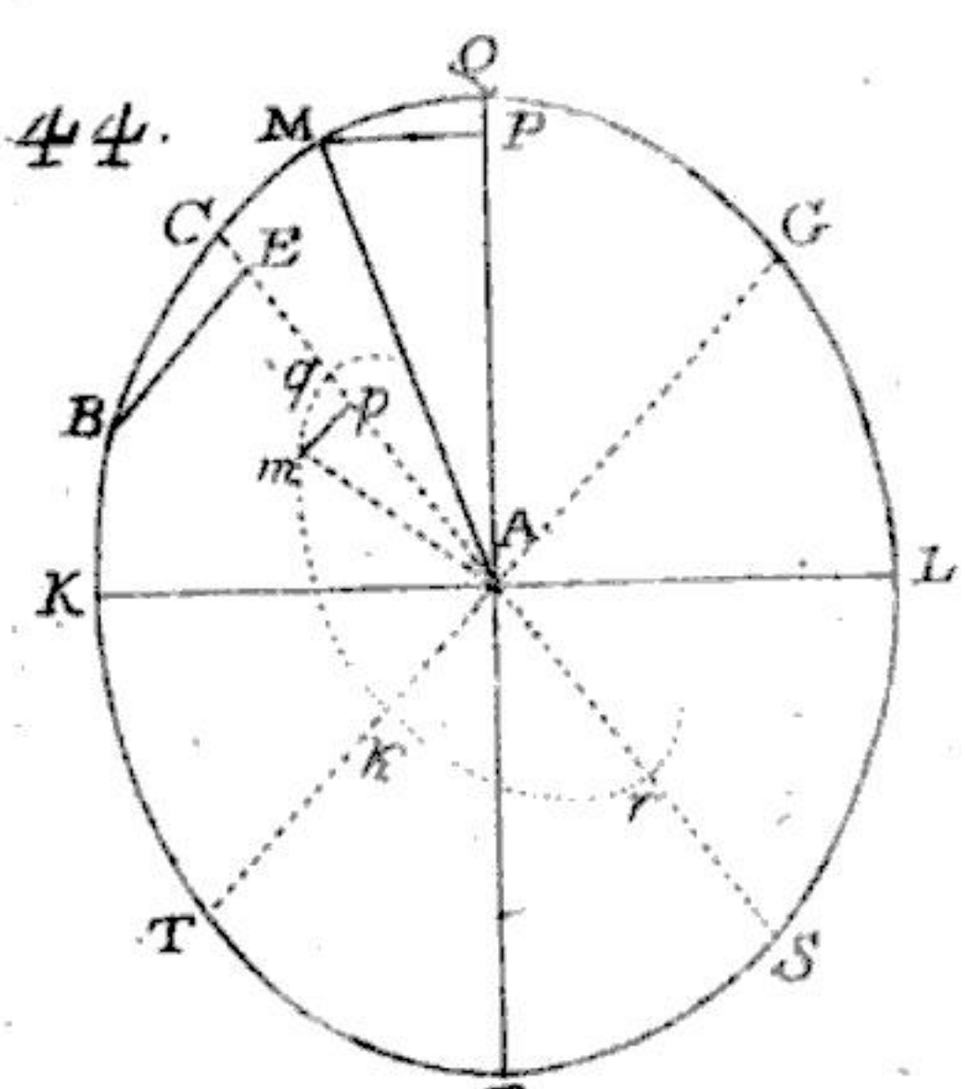
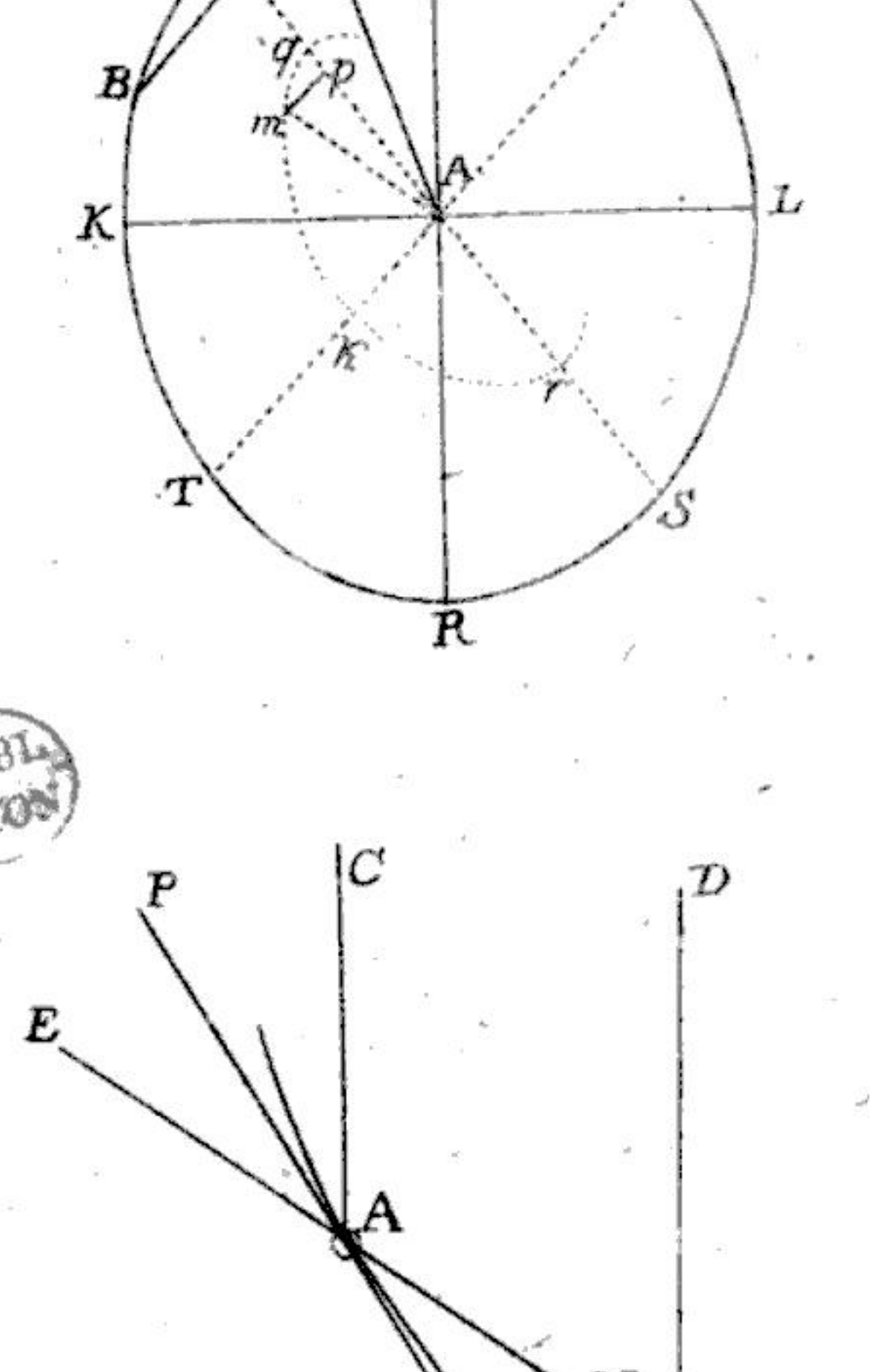


Fig. 44.



BIBL. LYON



v. 47.

Fig. 48.

Concurelli Incise

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

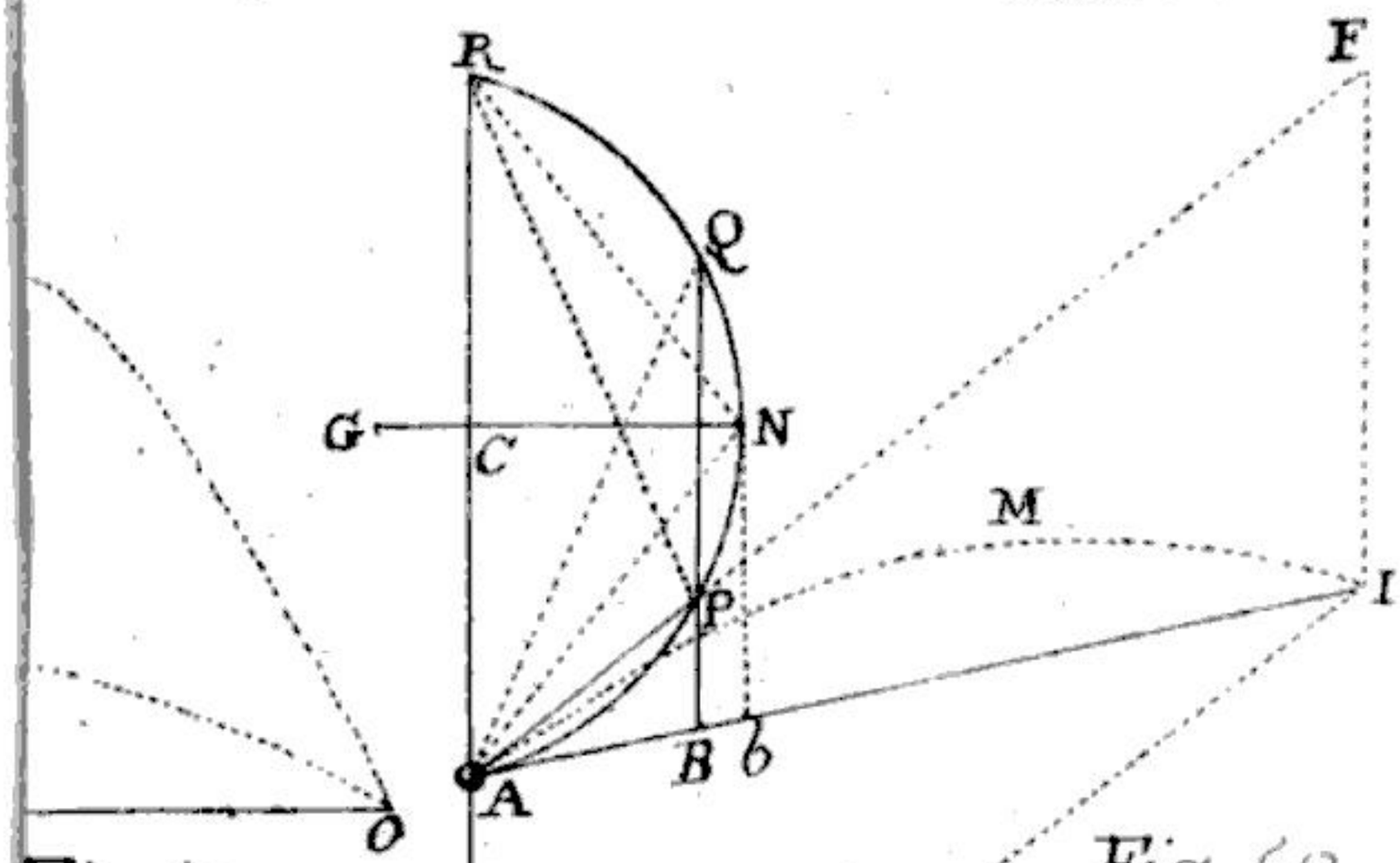


Fig. 51.

Fig. 52.

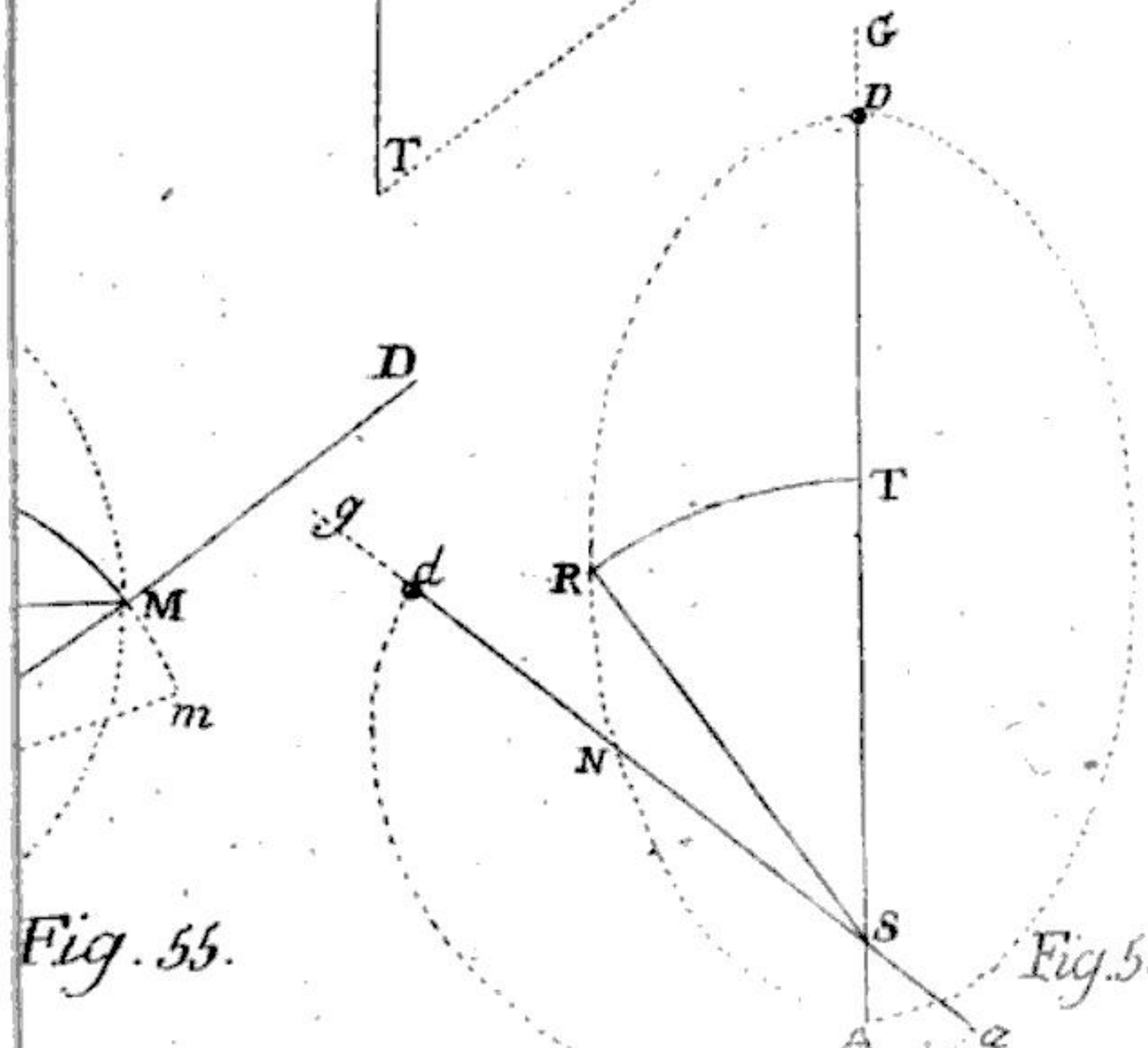


Fig. 55.

Fig. 56.

Fig. 59.

Fig. 60.

BIBL LYON

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Fig. 63.

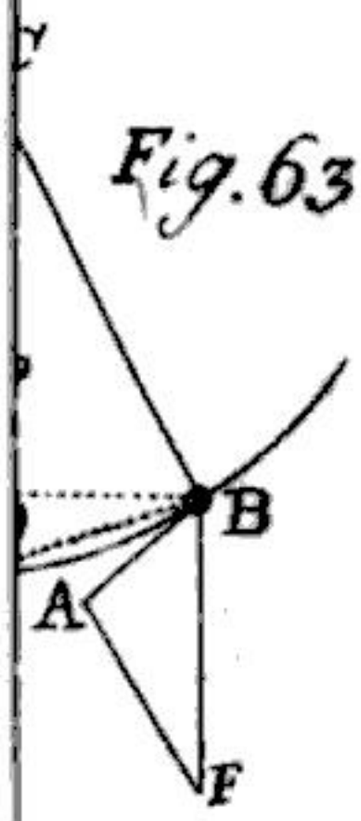
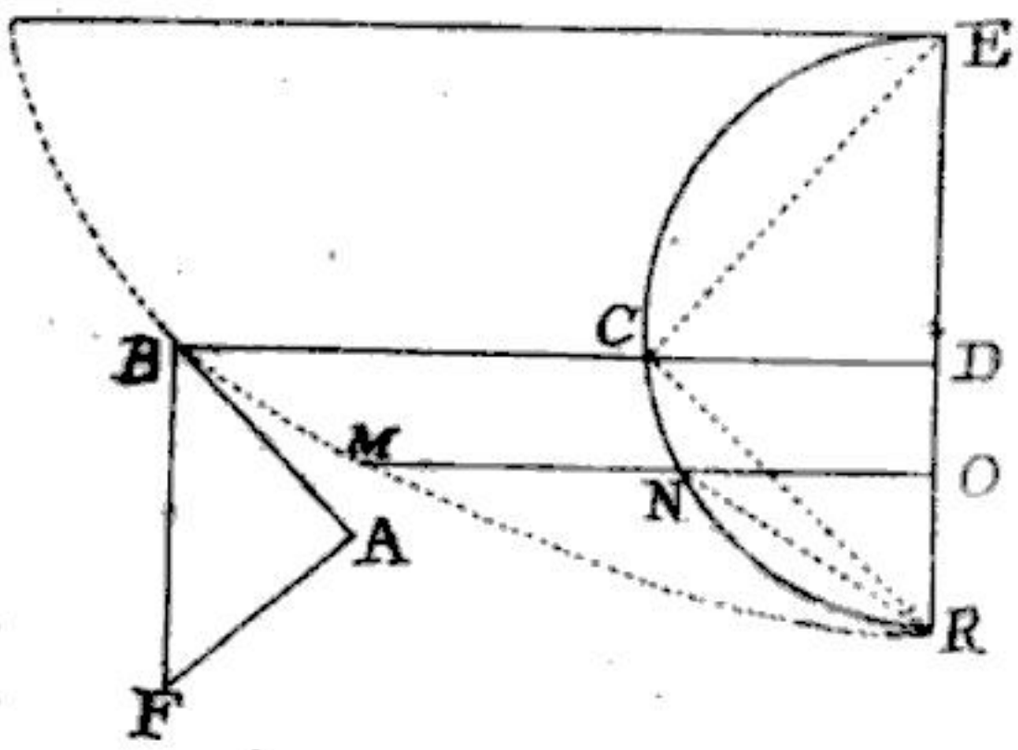


Fig. 64.



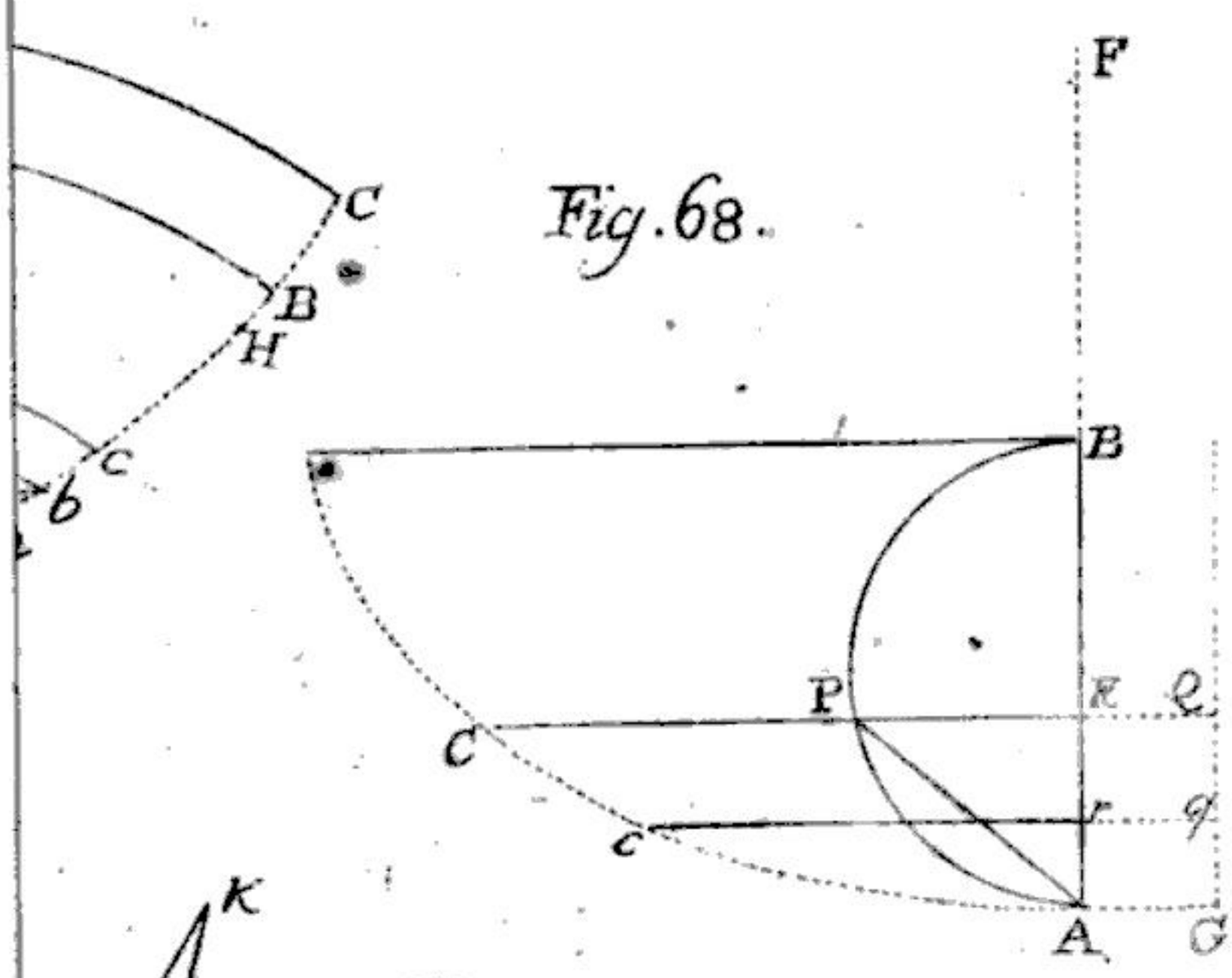


Fig. 68.

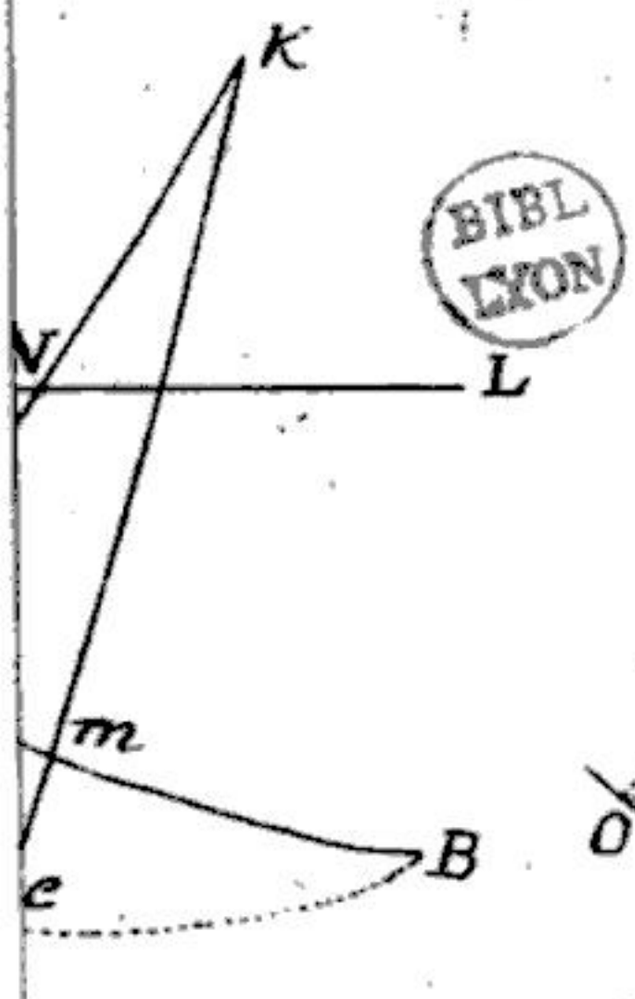


Fig. 71.

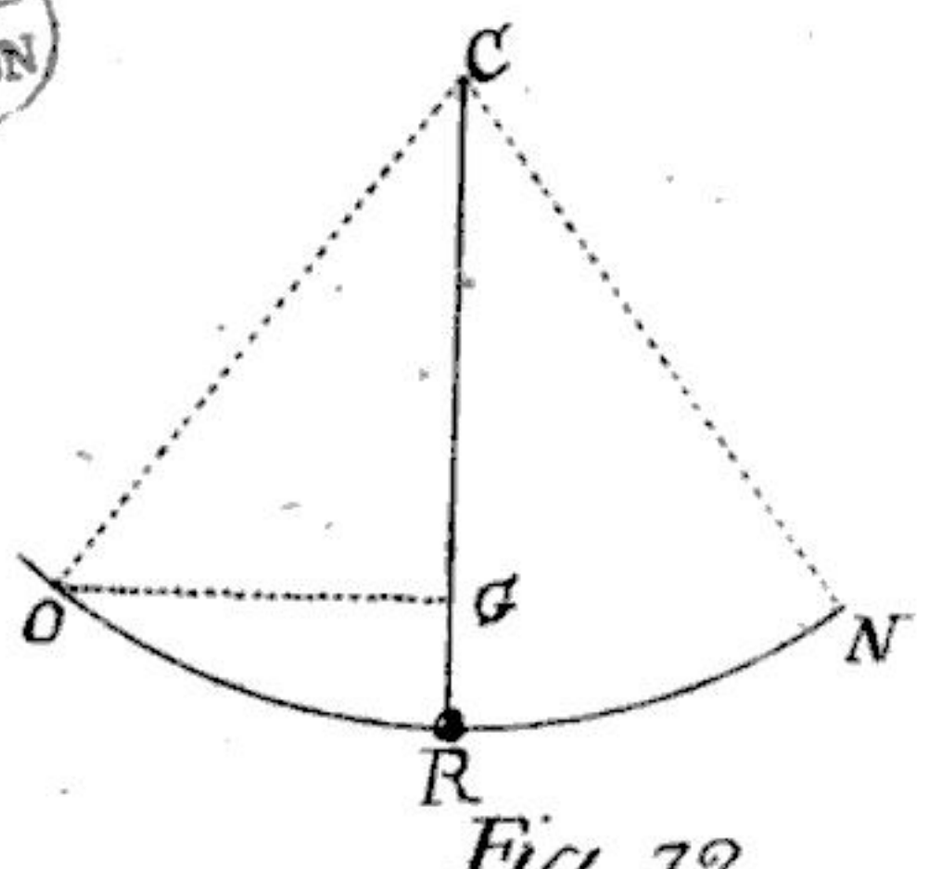


Fig. 72.

BIBL LYON

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Tav. I.

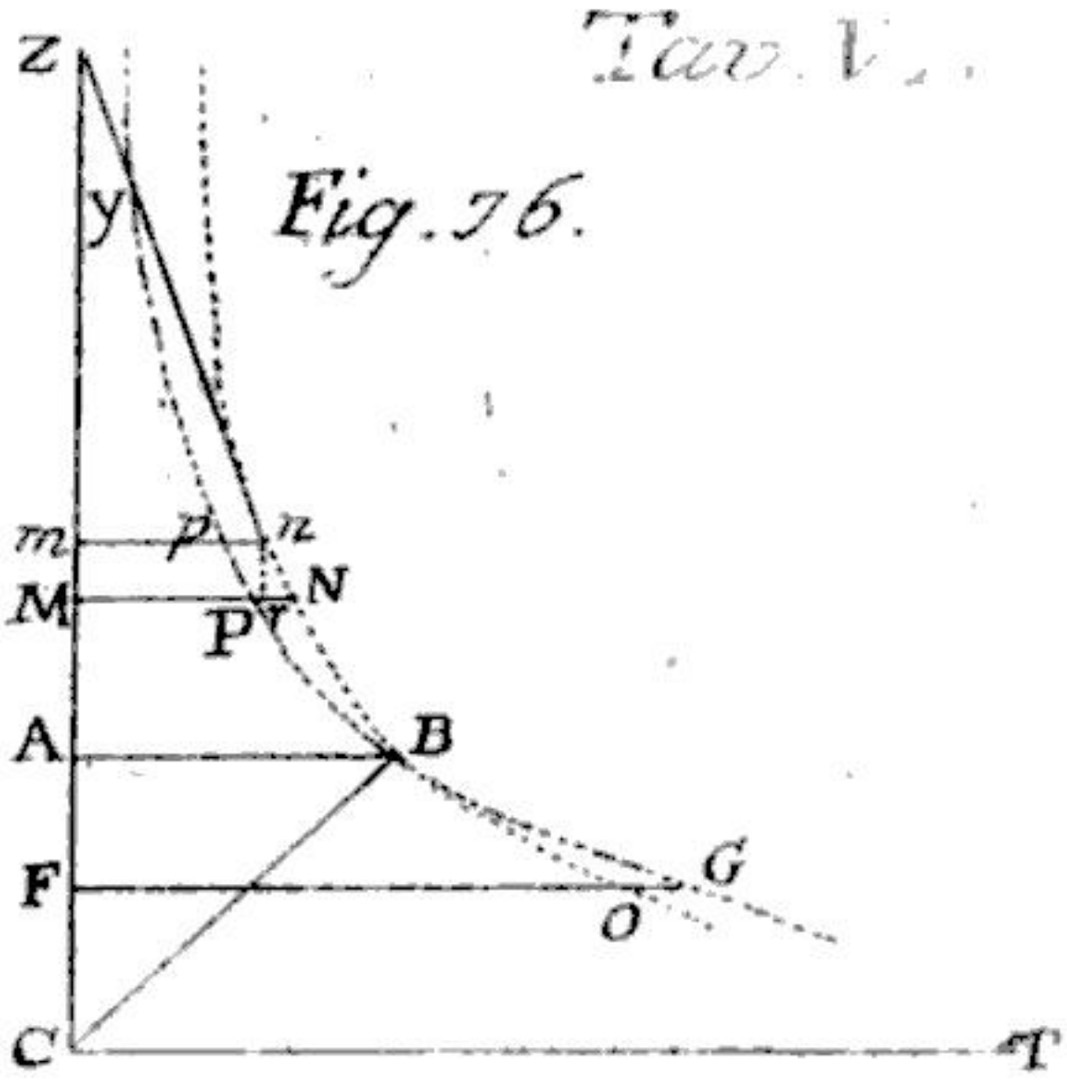
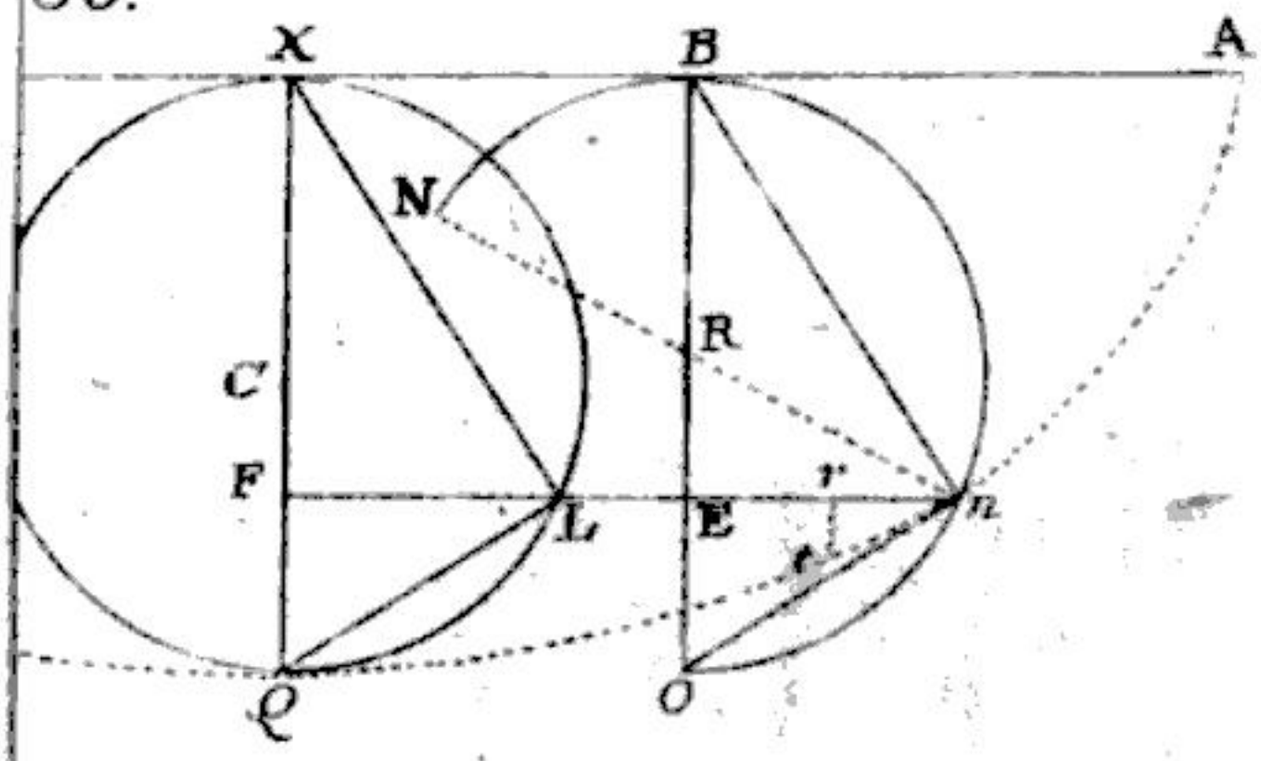


Fig. 76.

80.



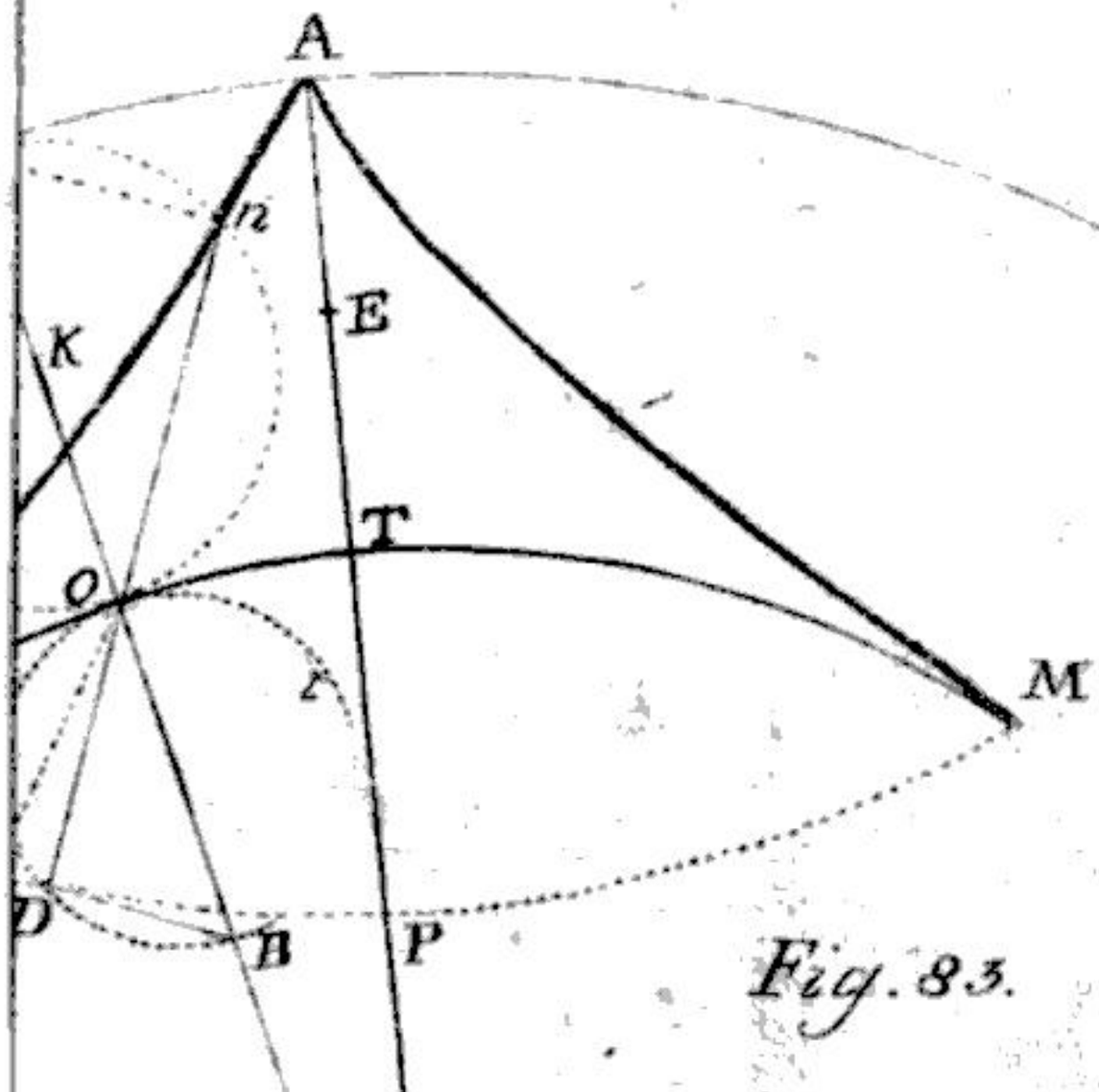
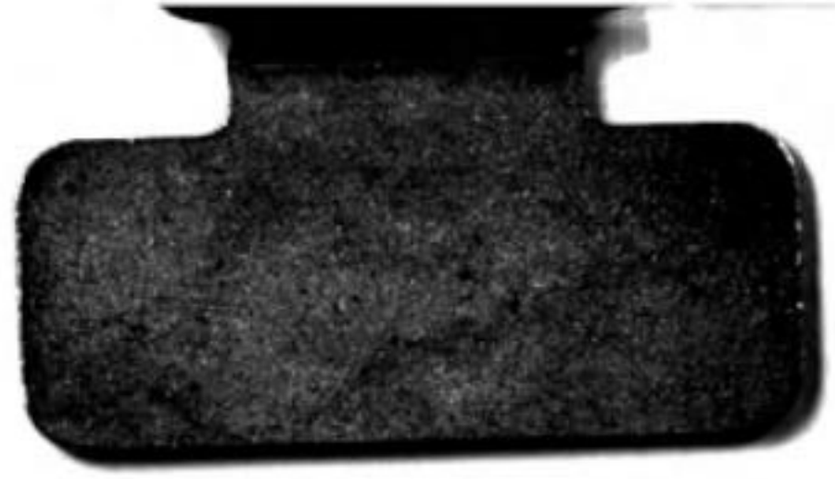


Fig. 83.

Digitalizzato da Google

Digitalizzato da Google

Digitized by Google





Digitized by Google

Digitalizzato da Google