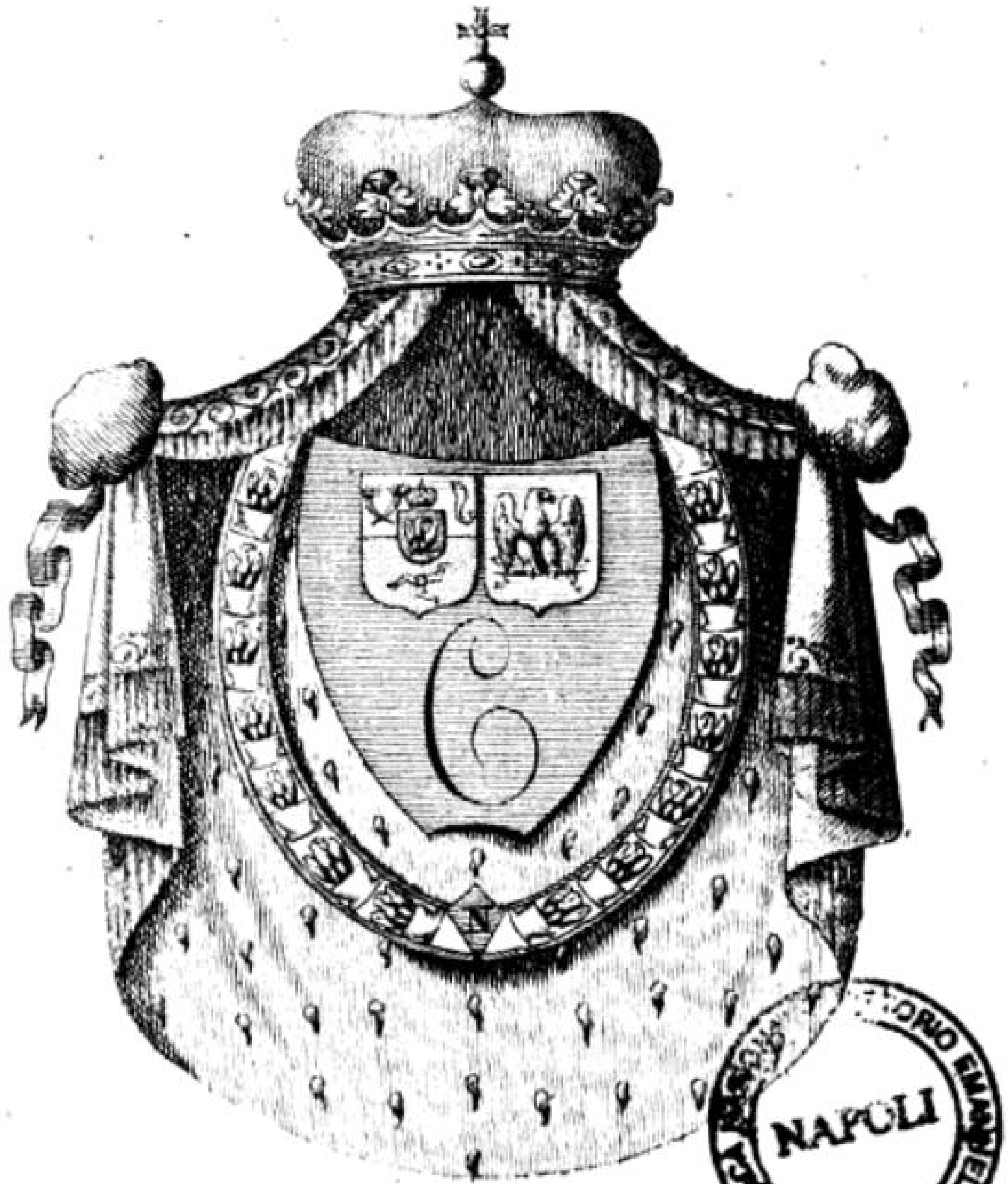


GLI ELEMENTI DELLA FISICA

DI

FILIPPO MARIA GUIDI

TOMO PRIMO.

IN NAPOLI MDCCXCIII.

Nella Stamperia di MICHELE MIGLIACCIO

Con licenza de' Superiori.

ELEMENTI
DI
FISICA

CAPITOLO I.

Nozioni Preliminari.

1. DEF.I. CHiamiamo *Fisica* la Scienza, che tratta de' corpi, che compongono l'universo, ed esamina i fenomeni, che da quelli dipendono.

2. DEF. II. Per *Fenomeno* intendiamo qualsisia movimento, o azione, o mutazione, o situazione, che accada ne' corpi, purchè tutto ciò possa da noi osservarsi per mezzo de'nostri organi sensorj, e non dipenda dalla immediata azione di qualche essere intelligente.

3. AVV. I. Bisogna quì avvertire, che essendo infiniti i corpi, che esistono nell' universo, e per conseguenza infiniti i fenomeni, che da quelli dipendono, non sarà mai possibil cosa, che la fisica arrivi al sommo grado della perfezione.

4. AVV. II. Non avendo noi de' corpi altra

idea, che quella, la quale ci viene per la via de' sensi, è chiaro, che le basi, su le quali può la fisica fondarsi, non possono ridursi ad altre, che a due solamente, e queste sono le *Osservazioni*, e le *Esperienze*, delle quali le prime ci fanno sapere ciò, che la natura da se medesima ci presenta; per mezzo delle seconde sappiamo ciò, che la natura ha di nascosto, la quale posta al cimento dalle nostre operazioni è obbligata ad isvelarcelo. Quindi le osservazioni ci somministrano i primi lumi, le esperienze li accrescono, e la Geometria combinando le cognizioni, che dalle une, e dalle altre derivano, giunge ad isnodare il meccanismo de' più complicati effetti, ed a determinare le vere grandezze di essi. Quindi si conosce, non potersi senza la Geometria fare gran progressi nella scienza, che da noi si tratta.

5. DEF. III. Sono ne' corpi alcune qualità talmente necessarie, che è impossibil cosa il separarle da essi, e queste qualità chiamansi *Attributi* de' corpi.

6. DEF. IV. Chiamansi poi *Proprietà* de' corpi quelle qualità, le quali non in tutti i corpi si ritrovano, ma in alcuni sì, ed in alcuni altri nò, e che in uno istesso corpo possono essere, e non essere, senza che la natura di quello soffra mutazione alcuna.

7. OS. Se sottoporremo ai nostri organi della vista, o del tatto qualunque corpo che si ritrova nella natura, noi rileveremo, che in quello ritrovansi la lunghezza, la larghezza, e

la

la profondità, quindi diremo, che ogni corpo è *Esteso*: conosceremo, che quello occupa un determinato spazio, e perciò diremo, che ogni corpo è *Figurato*: conosceremo, che non può occupare il luogo, che occupa un altro nel tempo istesso, quindi diremo, che ogni corpo è *Solido*, *ed Impenetrabile*: conosceremo ancora, che è capace di qualunque moto, e diremo, che ogni corpo è *Mobile*.

8. OSS. Ogni corpo è *divisibile* in picciolissime parti, o per le forze della natura, o per quelle degli uomini accresciute per mezzo degli istrumenti.

9. COR. Quindi tutti i corpi sono composti da picciolissime parti di materia unite insieme: e poichè per separarle vi bisogna una forza, è necessario, che esse parti per mezzo di qualche forza si mantengano unite.

10. ESP. Se si prendano due picciole palle di piombo, ciascheduna delle quali abbia una parte della sua superficie appianata, e ben levigata, indi si adatti l' un piano sopra dell' altro in maniera, che il piano dell' una vada a combaciare col piano dell' altra, ne avverrà, che le due palle resteranno talmente fra loro unite, che molte libbre di peso vi bisogneranno per separarle.

Se si faranno sopra una tavola ben levigata cadere alcune gocciole di acqua, o di mercurio, tosto osserverassi, che quelle prenderanno la figura sferica, e se si farà, che una di quelle si accosti all' altra, si vedrà, che l' una correrà verso l' altra, e tutte formeranno una sola sfera.

Se si prenda un picciolo tubo di vetro da ambe le parti aperto, di cui la cavità ſia così picciola, che non poſſa in eſſa entrare altro corpo, che maggior ſia di un capello, (il quale perciò chiamaſi capillare), e ſia queſto tubo immerſo, per una delle ſue aperture, in un fluido; il fluido ſalirà dentro il deſcritto tubo ad una notabile altezza, oltrepaſſando il livello di quello, che fuori del tubo ſi ritrova.

11. COR. Dalle eſperienze riferite ſi ricava, eſſere i corpi dotati della *forza di attrazione*, e queſta darſi tanto fra parte, e parte di uno iſteſſo corpo, quanto fra' corpi diverſi, cioè tra' corpi fluidi, e fluidi, tra' corpi ſolidi, e ſolidi, e finalmente ancora tra' corpi fluidi, e ſolidi.

12. AVV. I. Gli eſperimenti, che iſtituir poſſonſi per provare la ſcambievole attrazione de' corpi, poſſono da un ſagace fiſico accreſcerſi, e variarsi all' infinito.

13. AVV. II. Si vuole avvertire, che le eſperienze, che poſſon farſi ſu i corpi, fanno vedere, non eſſere la forza di attrazione eguale in tutti i corpi, poichè in alcuni di eſſi è maggiore, in altri è minore, in alcuni di eſſi fa ſentire li ſuoi effetti ſolamente allora quando eſſi ſono gli uni molto vicini agli altri, ed in alcuni li fa ſentire anche a grande diſtanza; del rimanente ſempre ſi oſſerva, che la deſcritta forza di attrazione nelle picciole diſtanze è più grande, e ſiccome le diſtanze vanno accreſcendoſi, così la forza di attrazione va diventando minore.

14. AVV. III. Si avverta, che ſe l' eſperimento

to del tubo capillare di ſopra deſcritto, si voleſſe fare nel mercurio, non produrrebbe l' effetto. Immerſo il tubo capillare nel mercurio, queſto non ſolamente non salirà a quella altezza, alla quale ſi è detto, che gli altri fluidi ſalgono, ma neppure giungerà al livello del fluido eſterno: imperciocchè la forza, con cui le particelle del mercurio fra loro ſi attraggono, è maggiore di quella, con la quale ſi attraggono le particelle del vetro con quelle del mercurio.

15. OSS. Ogni corpo terreſtre laſciato in libertà, e ſenza moto, in qualſivoglia ſito, tanto dello ſpazio, che circonda la terra, quanto degli ſpazj, che ritrovanſi dentro di eſſa, ne' quali ci è permeſſo di poterlo laſciare, si metterà in moto da ſe medeſimo, e diſcenderà per una linea retta perpendicolare alla ſuperficie della terra.

16. COR. Dunque è neceſſario, che i corpi terreſtri siano animati da una forza, che li ſpinga per rette perpendicolari alla ſuperficie della terra, e queſta forza chiamasi *Gravità* de' corpi

17. AVV. L' *Inerzia*, o ſia l' indifferenza de' corpi alla quiete, ed al moto, deve anche annoverarſi fra gli attributi de' corpi, ma di eſſa ſi parlerà appreſſo.

18. COR. I. Poichè noi oſſerviamo, che I. l' Eſtensione, II. la Figura, III. la Solidità, e la Impenetrabilità, IV. la Mobilità, V. la Divisibilita, VI. la forza di Attrazione, VII. la Gravità, VIII. e l' Inerzia si ritrovano in tutti i corpi, quindi conchiudiamo, che ſiano *Attributi* di eſſi.

19. COR. II. La Durezza, la Mollezza, la Fluidità, la Trasparenza, l'Opacità &c. in alcuni corpi ritrovansi, ed in alcuni altri non ritrovansi, ed in alcuni in un tempo ritrovansi, ed in un altro tempo non ritrovansi; quindi sono *Proprietà* de' corpi.

20. DEF. V. Si dice *Luogo* di un corpo la parte dello spazio mondano occupata da quello.

21. DEF. VI. Si dice *Moto* quella forza, la quale (qualora è in un corpo, e non viene distrutta da un'altra forza eguale, e contraria), obbliga il corpo a mutar luogo.

22. AVV. Si noti, che molti male definiscono il moto, essere il passaggio del corpo da un luogo ad un altro, imperciocchè confondono l'effetto con la cagione.

23. DEF. VII. Lo stato di un corpo privo di moto, dicesi *Quiete*.

24. COR. Non essendo la quiete una cosa positiva, ma una semplice privazione di moto, ne segue, che nella quiete non vi siano gradi, e che non possa dirsi, che un corpo sia più, o meno quieto di un altro.

25. AVV. Noi comprendiamo, che un corpo è in moto qualora vediamo, che quello muta luogo, e comprendiamo, che un corpo è in quiete, qualora vediamo, che quello si mantiene sempre nello stesso luogo: e pure spesse volte accade, che, sebbene un corpo realmente non muti luogo, pure muti sito per rispetto ad altri corpi, li quali hanno un moto, al quale noi non avvertiamo: ed alle volte realmente muti luogo, ma a siffat-

ſiffatta mutazione da noi non ſi avverta: quindi ne ſiegue, che alcune volte un corpo è nello ſtato di quiete, e da noi ſi crede in moto, ed alcune volte è nello ſtato di moto, e da noi ſi crede in quiete.

26. DEF. VIII. Si dice *Spazio corſo* da un corpo, quella linea, che un corpo, movendoſi, ha deſcritta.

27. DEF. IX. Due corpi, che ſi muovono, diconſi *egualmente veloci*, ſe in tempi eguali percorrono ſpazj eguali. Se poi due corpi ſi muovono, ed uno di eſſi cammina uno ſpazio doppio, triplo, quadruplo &c. di quello, che l' altro nello ſteſſo tempo cammina; o pure ſe percorrono lo ſteſſo ſpazio, ma uno di eſſi lo percorre nella metà, nella terza, o nella quarta parte del tempo, in cui lo percorre l' altro, diraſſi, il primo avere *velocità doppia, o tripla, o quadrupla dell' altro*.

28. OSS. Se un corpo ſi muove, tutte le parti ſue percorrono lo ſteſſo ſpazio nello ſteſſo tempo.

29. COR. Quindi tutte le parti eguali di materia, che compongono un corpo in moto, ſono egualmente veloci, e perciò ſono animate da forze eguali; ed il moto, che anima un corpo, è egualmente diſtribuito in tutte le eguali parti di materia, che compongono la maſſa del corpo.

30. AVV. I. Le continue oſſervazioni, ed eſperienze ci fanno vedere, che tutti i corpi, ne' loro movimenti, ſeguono certe regole generali, le quali eſſi non laſciano giammai, purchè ſi ri-

trovino nelle medesime circostanze. Ora sì fatte regole generali, secondo le quali si eseguiscono li movimenti de' corpi, chiamansi col nome di *Leggi della Natura*.

31. AVV. II. Newtone nel principio del libro terzo della sua filosofia naturale prescrive alcune regole, che devono sempre essere tenute avanti gli occhi da' fisici per potere scuoprire gli andamenti della natura, e da noi saranno esposte nel seguente capitolo.

CAPITOLO II.

Delle Regole di filosofare.

REGOLA I.

32. *Nella spiegazione de' fenomeni della natura non debbonsi ammettere altre cagioni, che quelle, le quali son vere, e son bastanti a spiegarli.*

33. AVV. QUesta Regola ha due parti: nella prima siamo avvertiti, che volendo noi indagare le cagioni de' fenomeni, dobbiamo ricercarle fra quelle cose, che a noi costa, per mezzo delle osservazioni, e delle esperienze, essere nella natura, e per conseguenza non debbono nella vera fisica aver luogo i sistemi, e le ipotesi: nella seconda poi siamo avvertiti, a non prendere per cagione de' fenomeni se non che quelle, che bastanti sono a spie-

a ſpiegarli: e queſta parte è appoggiata ſu la economia della natura, la quale non fà alcuna coſa inutilmente: dunque qualora ſi è ritrovata la vera cagione di un fenomeno con l'ajuto delle oſſervazioni, e delle eſperienze, e per mezzo delle matematiche ſi è dimoſtrato, eſſa avere tanta forza quanto baſti per produrre quel tale effetto, biſogna tenerla per certa, e perciò ributtare tutte le altre.

REGOLA II.

34. *Gli effetti dello ſteſſo genere debbono eſſere attribuiti alle ſteſſe cagioni.*

35. AVV. Queſta regola è fondata ſopra la elegante ſemplicità della natura, la quale ſe per la produzione di effetti ſimili adoperaſſe cagioni diverſe, farebbe per più quello, che potrebbe fare per meno.

REGOLA III.

36. *Le qualità de' corpi, che non poſſono ricevere accreſcimento, o diminuzione, e che appartengono a tutti i corpi, ſu li quali ſi poſſono fare le eſperienze, meritano di eſſere tenute per qualità communi a tutti i corpi: communi anche a quelli, ſu de' quali non poſſono farſi le eſperienze.*

37. AVV. La ragione di queſta regola dipende dalla regolare uniformità della natura, quindi

di, per l'analogia, giungiamo ad essere tanto sicuri di quello, che cade sotto i nostri sensi, quanto di quello, che non vi cade.

REGOLA IV.

38. *Se noi da' conosciuti fenomeni avremo, per mezzo della induzione, ricavate le corrispondenti proposizioni, dovremo queste proposizioni tenere per vere, o pure vicine alle vere, fin tanto che non ci si presentino altri fenomeni, che maggiormente ce ne assicurino, o pure ci facciano fare a quelle alcuna modificazione. E di ciò dovremo esser tanto persuasi, che se da alcuno si stabilisse in contrario una Ipotesi, noi non dovremo a quella dare orecchio in modo alcuno.*

39. AVV. Imperciocchè l'argomento di Induzione essendo fondato sopra la esperienza, e la Ipotesi essendo fondata sopra la fantasia, ognun vede, che quello debba a questa essere preferito.

CAPITOLO III.

Della divisibilità della estensione, e della maravigliosa picciolezza delle particelle della materia.

40. TEOR. I. *L'estensione è divisibile all' infinito.*

Tre casi possono darsi. 1. che l'estensione abbia la sola lunghezza, 2. che abbia la lunghezza, e

la

la larghezza, 3. che abbia la lunghezza, la larghezza, e la profondità.

DIM. Sia EB una parte infinitamente picciola della retta AB, della quale, se è possibile, la mente non possa immaginare un altra minore. Sopra AB si intenda fatto il mezzo cerhio ACB, nel quale si adatti BC = BE. Indi dal punto C sopra AB si cali la perpendicolare CD, e si unisca AC. *Fig.* 1.

I. L' angolo ACB è fatto nel mezzo cerchio, e perciò è retto; quindi AB: BC = BC: BD; ma BE = BC, dunque AB: BE = BE: BD; Ma BE è infinitamente picciola per rispetto di BA; Dunque anche BD è infinitamente picciola per rispetto di BE. Sicchè &c.

II. Rappresenti ABCD un rettangolo. Se AB si concepisca divisa in qualsivoglia numero di parti, e per li punti delle divisioni si tirino delle rette parallele ad AD; in tante parti verrà diviso il rettangolo AC, quante sono quelle, nelle quali si può intendere divisa la retta AB; ma AB è divisibile all' infinito; dunque anche il rettangolo AC è divisibile all' infinito. *Fig.* 2.

III. Sopra il rettangolo AC si intenda fatto un parallelepipedo. Se si intenda il rettangolo AC diviso da rette parallele ad AD; e per tali rette si intendano tirati de' piani paralleli al piano, che passa per AD, verrà il parallelepipedo diviso in tante parti, in quante è stato diviso il rettangolo AC: ma il tettangolo AC è divisibile all' infinito per mezzo delle rette parallele ad AD, dunque anche il parallelepipedo, il quale ha per base AC, è divisibile all' infinito, Sicchè &c.

41.

41. AVV. I. Volendo esaminare l'articolo: se la materia sia *Settibile all' infinito*, bisognerebbe ricorrere alle osservazioni, ed alle esperienze, ma essendo i nostri sensi imperfetti, ed imperfetti ancora gli istrumenti, de' quali possiam servirci, e di limitata forza, quindi non deve sperarsi, che possa il presente articolo ricevere quel punto di perfezione, che si vorrebbe; pure non lasceremo di rapportare alcune pruove, che ci dimostreranno la maravigliosa picciolezza delle parti della materia.

I battitori d'oro mettono fra due pelli un picciol pezzo d'oro del peso di un granello, indi battendolo, lo riducono in una lamina, la quale ha cinquanta pollici quadrati di superficie, ma la lunghezza di un pollice si può commodamente dividere in 200 parti visibili, dunque un pollice quadrato si può dividere in 40, 000 parti; e perciò 50 pollici quadrati si possono dividere in 2, 000, 000 di parti, e per conseguenza una laminetta d'oro del peso di un granello è divisibile in 2, 000, 000 di parti visibili.

Si prenda un picciol pezzo di rame anche del peso di un granello, e si metta in una sufficiente quantità di spirito volatile di sale ammoniaco, sì che possa eseguirsene la soluzione: il fluido del colore azzurro, che ne risulterà, si versi dentro un cilindro di vetro, il quale abbia per base un cerchio di cinque pollici di diametro, e l'altezza di 20 pollici: si riempia il cilindro di acqua, e si osserverà, tutto il fluido con-

contenuto nel vaso esserſi ſenſibilmente colorato; quindi non vi sarà parte alcuna ſenſibile di eſſo, che non contenga qualche particella di rame, come ce lo dimoſtra, non ſolo il colore di eſſo, ma ancora il ſapore: Or un pollice cubico può contenere 1, 000, 000 di granelli di arena non molto ſottili, dunque il nominato cilindro, il quale ha la capacità di pollici $39\frac{1}{2}$, potrebbe contenere 292, 500, 000 parti, ciaſcheduna delle quali eguaglierebbe un granello di arena: quindi l' acqua nel cilindro contenuta ſi può concepire diviſa in altrettante parti: e poicchè non vi è parte di acqua, che non contenga una picciola parte di rame, ne ſegue, che un picciol pezzo di rame del peſo di un granello ſi poſſa dividere in 292, 500, 000 parti. Or ſebbene queſto numero ſembri grande, pure è minore di quello, che ſi ha allora quando, con il deſcritto proceſſo, il rame ſi divide. Ma a noi baſta, di aver data una idea del maraviglioſo grado di picciolezza, a cui può giungerſi, dividendo il rame.

42. AVV. II. Molti altri argomenti potrebbero rapportarſi in confermazione della ſteſſa verità, ma ognuno può farlo da ſe molto facilmente: baſta riflettere ai vapori infiniti, che ſollevanſi da una eolipila fortemente riſcaldata per mezzo de' carboni ardenti; agli odori, che eſalano da' corpi, e ſpandonſi a gran diſtanza, ſenza che ricevano nel loro peſo ſenſibile diminuzione; all' olio, al ſevo, ed alla cera, che bruciandosi, diffondono a grandiſsima diſtanza la loro luce. Da tutte le quali

quali cose si conchiude, che la sottigliezza delle particelle della materia supera ogni nostra immaginazione.

CAPITOLO IV.

Del volume, della massa, della porosità, e della densità de' corpi.

43. DEF. I. Si dice *Volume*, o *Mole* di un corpo, la estenzione, che il corpo ha in lunghezza, larghezza, e profondità.

44. DEF. II. Si dice *Massa* di un corpo, la somma delle parti della materia, dalla quale il corpo è composto.

45. ESP. Si prenda una palla d'oro, la quale sia vuota al di dentro, si riempia di acqua, ed esattamenre si chiuda, indi si metta sotto di un torchio, e si comprima, si osserverà su la esterna superficie della palla, una specie di rugiada, ivi passata a traverso dell'oro.

46. COR.I. Le parti della materia, che compongono un corpo, sono impenetrabili, ma a traverso dell'oro vi passa l'acqua, dunque tra parte e parte dell'oro esser debbonvi degli interstizj: se dunque fra le parti dell'oro, che è il corpo, che ha le parti sue più ristrette di tutti gli altri, vi sono degli interstizj, ne segue, che debbano essere ancora in tutti i corpi della natura. Or questi interstizj da noi chiamansi *Pori* de'

de' corpi, li quali in alcuni corpi ſono di maggiore, in altri di minor numero, in alcuni ſono di maggiore, in altri di minore eſtenſione.

47. COR. II. Quindi il volume di un corpo ſempre ſupera il volume della ſua maſſa di tanto, quanto è la ſomma de' ſuoi pori, e non tutti i corpi, ſotto lo ſteſſo volume, hanno la ſteſſa quatità di materia.

48. AVV. I pori, li quali ſi ritrovano ne' corpi, ſono la cagione, per cui alcuni di eſſi, come ſono le ſpugne, la bambagia, l' aria &c., qualora vengono premuti, veggonſi diminuiti nel loro volume, giacchè le parti di eſſi corpi introduconſi ne' loro pori, e quando non ritrovano più pori così grandi, che gli concedano il luogo, allora, ſe si proſegue a premerli, non ſarà più poſſibile di ridurli in minore volume, ancorchè eſsi vengano premuti con grandiſſima forza.

49. DEF. III. Due corpi ſi dicono *della ſteſſa denſità, o rarità*, ſe ſotto volumi eguali hanno maſſe eguali. Si dice poi, un corpo eſſere due, tre, quattro volte più denſo di un altro, ſe ſotto volumi eguali, l' uno contenga maſſa doppia, tripla, quadrupla della maſſa dell' altro: o ſe contenendo maſſe eguali, il volume dell' uno è metà, terza, quarta parte del volume dell' altro.

50. COR. I. Eſſendo la densità di un corpo il doppio, il triplo, il quadruplo della densità di un altro corpo, ſe sotto eguali volumi l'uno con-

contenga maſsa doppia, tripla, quadrupla della maſsa dell'altro, ne segue, che ne' corpi di eguale volume le densità siano in ragione delle maſse.

51. COR. II. Eſsendo, ne' corpi di eguali maſse, la densità dell'uno, doppia, tripla, quadrupla della densità dell' altro ſe il volume dell' uno è $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ del volume dell' altro, ne segue, che ne' corpi di eguali maſse le densità siano in ragione reciproca de' volumi.

52. TEOR. I. *Ne' corpi, i quali hanno diſuguali maſſe, e diſuguali volumi, le denſità ſono in ragione compoſta dalla diretta delle maſſe, e dalla reciproca de' volumi.*

Fig. 3. DIM. Abbiano i corpi A, e B diſuguali maſſe, e diſuguali volumi. Si concepiſca il corpo C, il quale abbia il volume eguale al volume del corpo A, e la maſſa eguale alla maſſa del corpo B. Le denſità di A, C, B ſono tre grandezze omogenee, dunque la denſità di A ſta alla densità di B, in ragione compoſta dalle ragioni della denſità di A alla denſità di C, e della denſità di C alla denſità di B. Ma A, e C hanno eguali volumi, dunque la ragione delle loro denſità è eguale alla ragione delle loro maſſe. C, e B hanno eguali maſſe, dunque la ragione delle loro denſità è eguale alla ragione reciproca de' loro volumi, ſicchè eſſendo il volume di A eguale al volume di C, e la maſsa di C, eguale alla maſſa di B, la denſità di A ſta alla denſità di B in ragione compoſta dalle ragioni, diretta delle loro maſſe,

e re-e reciproca de' loro volumi.

53. COR. I. Quindi se con M, m si disegnino le masse di due corpi, con D, d le densità, e con V, v li volumi, sarà D : d in ragione composta dalle ragioni di M : m, e di v : V; ma la ragione composta si ha moltiplicando gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro; dunque D : d = M v : m V.

54. COR. II. Si sa, che se quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle grandezze estreme è eguale al prodotto delle grandezze medie, quindi essendosi dimostrato (§ 52) D : d = M v : m V, sarà D m V = d M v: Or se questi prodotti eguali si scompongano in quattro altre grandezze, in maniera, che il prodotto delle estreme sia eguale al prodotto delle medie, le quattro grandezze, che ne risultano saranno proporzionali, e perciò sarà V : v = d M : D m; e sarà ancora M : m = DV : d v, cioè in due corpi, che hanno disuguali masse, e disuguali densità, li volumi sono in ragione composta dalla ragione diretta delle masse, e dalla ragione reciproca delle densità, ed in due corpi, che hanno disuguali densità, e disuguali volumi, le masse sono in ragione composta dalle ragioni dirette delle densità, e de' volumi.

55. COR. III. La ragione composta da una diretta, e da una reciproca si ha, dividendo i termini della ragione diretta per li termini di quella, di cui deve prendersi la reciproca: ma si è dimostrato (§ 54), che in due corpi di disuguali masse, e di disuguali densità, li vo-

lumi ſono in ragione compoſta dalla diretta delle maſſe, e dalla reciproca delle denſità, e le denſità ſono in ragione compoſta dalla diretta delle maſſe, e dalla reproca de' volumi: dunque li volumi di due corpi ſaranno fra loro nella ragione delle maſſe diviſe per le denſità, e le denſità in ragione delle maſſe diviſe per li volumi.

56. COR. IV. E' noto, che qualora una ragione è compoſta da due altre ragioni, e la ragione compoſta è di eguaglianza, una delle ragioni componenti è eguale all' altra preſa reciprocamente; e ſe una delle due ragioni componenti è eguale all'altra preſa reciprocamente, la ragione compoſta è di eguaglianza: or eſſendo le maſſe in ragione compoſta dalla ragione de' volumi, e dalla ragione delle denſità (§ 54), le denſità ſaranno in ragione reciproca de' volumi, ſe le maſſe ſaranno eguali: e le maſſe ſaranno eguali ſe le denſità ſaranno in ragione reciproca de' volumi.

57. AVV. E' facile coſa conoſcere il rapporto, che paſſa fra le maſſe di due corpi, allora quando ſi ſaranno conoſciute le denſità di eſſi per mezzo de' metodi, che da noi appreſſo ſi daranno, e determinati che ſi ſaranno li volumi di eſſi per mezzo della geometria pratica.

CA-

CAPITOLO V.

Della Inerzia, della Forza di Inerzia, e delle Leggi del Moto.

58. OSS. Ogni corpo, che si ritrova nello stato di quiete, non può da se mettersi in moto.

59. ESP. Se un corpo venga spinto dentro dell' acqua, vedrassi, che quello si muoverà in maniera, che il moto ricevuto si distruggerà in un dato tempo: se questo istesso corpo sarà spinto dentro dell' aria con la stessa forza, vedrassi, che quello si muoverà in maniera, che il moto ricevuto si distruggerà in un tempo maggiore: e se con la stessa forza sarà spinto nel vuoto boileano, si vedrà, che il moto ricevuto durerà per lunghissimo tempo.

60. COR. I. Sicchè ogni corpo, che si ritrova in moto, tanto più persiste nel moto, quanto meno incontra resistenza.

61. COR. II. Sicchè se un corpo potesse muoversi in uno spazio perfettamente libero, e senza che il suo moto venisse da resistenza alcuna disturbato, si muoverebbe perpetuamente.

62. TEOR. I. *Tutti i corpi sono inerti.*

DIM. Ogni corpo da se non può mettersi in moto, se è in quiete (§ 58), onde se è in quiete, persisterà sempre nello stesso stato di quiete: similmente, se è in moto, non può da se paſſare nello ſtato di quiete, (§ 61) onde reſterà ſempre in moto: ſicchè i corpi ſono indifferenti al moto, ed alla quiete: dunque tutti i corpi ſono inerti.

63. OSS. Se un corpo fa azione ſu di un altro, che è in quiete, o in moto, non ſi muta lo ſtato di quiete, o di moto del ſecondo, ſenza che il primo perda della ſua forza tanto, quanto ne communica al ſecondo, per lo cambiamento dello ſtato.

64. COR. I. Quindi ne viene, che il primo corpo agendo communica una quantità di forza al ſecondo, ed il ſecondo reſiſtendo fa, che il primo ne perda altrettanta: sicchè ognun vede, che tutti i corpi hanno una forza, per cui reſiſtono alle cagioni, che vogliono produrre cambiamento nel loro ſtato: e queſta chiamaſi *Forza di inerzia*.

65. COR. II. Dunque nel cambiamento dello ſtato di un corpo, non ſolo vi interviene l'azione del corpo agente ſu 'l paziente, ma ancora l'azione del corpo paziente ſu 'l corpo agente: e queſta azione è da noi chiamata *Reazione*.

66. TEOR. II. *Ogni cambiamento, che accade nello ſtato di un corpo è proporzionale alla cagione, che lo produce.*

Queſta propoſizione non ha biſogno di formale dimoſtrazione, imperciocchè ciaſcheduno da ſe ſteſſo comprende, che ogni effetto è proporzionale alla cagione, che lo produce, dunque ogni

ogni cambimento di ſtato de' corpi è proporzionale alla cagione, che lo produce.

67. TEOR. III. *La reazione è eguale all' azione*.

DIM. Il cambiamento, che accade in un corpo, che riceve l'azione è eguale al cambiamento, che accade nel corpo, che fa l' azione (§ 63): ma il cambiamento, che accade nel corpo, che riceve l' azione è effetto dell' azione, il cambiamento, che accade nel corpo, che fa l' azione è effetto della reazione: dunque l'effetto dell' azione è eguale all' effetto della reazione: Ma ſe gli effetti ſono eguali, eguali eſſer debbono le loro cagioni: Dunque la reazione eſſer deve eguale all' azione.

68. TEOR. IV. *La forza di inerzia di uno intiero corpo è egualmente distribuita in tutte le parti eguali di materia, dalle quali ſi concepiſce il corpo compoſto*.

DIM. Eguali effetti ſono prodotti da eguali cagioni; ma la reſiſtenza, che i corpi fanno a quelli, che vogliono diſturbarli dal loro ſtato, è effetto della forza di inerzia (§ 64): dunque eguali reſiſtenze vengono prodotte da eguali forze di inerzia: ma le parti de' corpi tutte egualmente reſiſtono (§ 29); dunque tutte ſono dotate di eguale forza d' inerzia.

69. COR. Dunque la forza di inerzia di uno intiero corpo è eguale alla ſomma delle eguali forze di inerzia delle ſue parti.

70. AVV. Dalle verità dimoſtrate di ſopra, poſſono ricavarſi le tre ſeguenti leggi del moto, cioè

LEGGE I.

71. *Ogni corpo persevera nello stato suo di quiete, o di moto, senza che quello si accresca, o si diminuisca, e per la medesima direzione, purchè non venga da qualche esterna cagione disturbato.*

LEGGE II.

72. *Ogni cambiamento, che accade nello stato di un corpo è sempre proporzionale alla cagione, che lo produce, e si fa per quella direzione istessa, per la quale la cagione ha fatta la sua azione.*

LEGGE III.

73. *Ad ogni azione corrisponde una reazione eguale, e contraria.*

CAPITOLO VI.

Delle forze motrici, e delle varie specie di moto, che da quelle sono prodotte.

74. DEF. I. Diconsi *Forze motrici* quelle forze, le quali comunicano il moto a' corpi.

75. DEF. II. Si chiamano *Forze motrici istan-*

istantanee quelle, che in uno istante fanno azione su 'l corpo, senza più replicarla.

76. DEF. III. Si dicono *Forze motrici continuate* quelle, le quali in ogni istante replicano la loro azione su'l corpo.

77. AVV. La forza, che da noi si è chiamata continuata, si deve distinguere in *costante*, e *variabile*. La *costante* è quella, che in ogni istante replica la medesima azione. La *variabile* poi è quella, che in ogni istante varia la sua azione.

78. COR. Sicchè i moti comunicati a' corpi dalle forze motrici continuate costanti sono nella ragione de' tempi; quelli poi, che comunicati sono dalle forze variabili, variano col variar del tempo, e delle azioni.

79. DEF. IV. Dicesi *Direzione di una forza, o di un moto* quella linea retta, per la quale la forza fa la sua azione, o per la quale il corpo riceve il moto.

80. DEF. V. Si chiamano *Forze cospiranti* quelle, che spingono un corpo per la medesima direzione.

81. DEF. VI. Si dicono *Forze opposte* quelle, che spingono un corpo per direzioni contrarie.

82. DEF. VII. Si dicono *Forze di mezzana cospirazione, ed opposizione* quelle, le quali insieme spingono un corpo per direzioni, che formano angoli fra loro.

83. DEF. VIII. Se vi sono varie forze, le quali facendo azione in uno istesso istante su di un corpo, gli comunicano il moto per una dire-

zione, e vi è un altra forza capace di produrre nello ſteſſo corpo il medeſimo moto, e per la medeſima direzione, queſta forza ſi dirà *Forza composta* per riſpetto di quelle, e quelle *componenti* per riſpetto di queſta.

84. DEF. IX. Diceſi *Moto ſemplice* il moto comunicato al corpo da una ſola forza motrice; e diceſi *Moto composto* il moto comunicato al corpo da varie forze motrici, che inſieme operano.

85. DEF. X. Un corpo ſi dice muoverſi con *Moto equabile*, qualora conſerva ſempre la medeſima velocità; si dice poi muoverſi con *Moto variabile*, qualora ſoffre mutazione nella ſua velocità.

86. DEF. XI. Il moto variabile diceſi *accelerato*, qualora ſi va continuamente accreſcendo; diceſi *ritardato*, qualora ſi va continuamente diminuendo.

87. COR. Quindi nel corpo, che ſi muove con moto accelerato, la velocità va continuamente accreſcendoſi; in quello poi, che ſi muove con moto ritardato, la velocità va continuamente diminuendoſi.

88. DEF. XII. Un corpo ſi dice, muoverſi con *Moto uniformemente, o equabilmente accelerato*, qualora in eguali tempi fa eguali acquiſti di velocità; si dice, muoverſi con *Moto uniformemente, o equabilmente ritardato*, ſe in eguali tempi fa eguali perdite di velocità.

89. COR. Quindi nel moto equabilmente accelerato, gli acquiſti di velocità, e nel moto equa-

equabilmente ritardato, le perdite di velocità, ſono nella ragione de' tempi.

90. TEOR.I. *I moti prodotti da due forze iſtantanee ſono ad eſſe proporzionali.*

DIM. Gli effetti ſono proporzionali alle loro cagioni: ma i moti prodotti dalle forze motrici iſtantanee ſono effetti di eſſe: dunque i moti prodotti da due forze motrici iſtantanee ſono ad eſſe proporzionali.

91. TEOR. II. *I moti prodotti da due forze continuate coſtanti ſono nella ragione compoſta dalla ragione delle forze, e dalla ragione de' tempi, ne' quali eſſe hanno fatta l' azione.*

DIM. I moti prodotti dalle forze continuate coſtanti, nel primo iſtante, ſono proporzionali alle forze che li producono (§ 90), e siccome paſſa il tempo, così i moti prodotti dalle medeſime forze, creſcono, imperciocchè le forze continuamente operando, replicano ſempre eguali azioni: dunque i moti prodotti da forze continuate coſtanti ſono in ragione compoſta dalla ragione delle forze, e dalla ragione del numero delle volte, che le forze hanno operato, o ſia in ragione compoſta dalla ragione delle forze, e dalla ragione de' tempi.

92. COR.I. Se con F, f ſi diſegnino le forze, con T, t i tempi, con M, m i moti, ſarà M : m in ragione compoſta dalle ragioni di F : f, e di T : t: ma la ragione compoſta ſi ha moltiplicando gli antecedenti fra loro, ed i conſeguenti fra loro: dunque M : m = FT : ft.

93. COR. II. E' noto, che ſe quattro grandezze

dezze ſono proporzionali, il prodotto delle grandezze eſtreme è eguale al prodotto delle grandezze medie: quindi eſſendoſi dimoſtrato (§ 91), che M : m = FT : ft, sarà Mft = mFT. Or ſe queſti prodotti eguali ſi ſcompongano in quattro altre grandezze, in maniera, che il prodotto delle eſtreme ſia eguale al prodotto delle medie, le quattro grandezze, che ne riſultano, ſaranno proporzionali: dunque ſarà F : f = Mt : mT cioè ſe due forze continuate, e coſtanti operino ſu due corpi in tempi diſuguali, ſaranno fra loro nella ragione compoſta dalla diretta de' moti da eſſe prodotti, e dalla reciproca de' tempi, ne' quali eſſe hanno operato.

94. COR. III. La ragione compoſta da una diretta, e da una reciproca ſi ha, dividendo i termini della diretta per li termini di quella ragione, della quale ſi deve prendere la reciproca. Ma ſi è dimoſtrato (§ 93), che ſe due forze continuate e coſtanti operano ſu due corpi in tempi diſuguali, queſte ſono fra loro in ragione compoſta dalla diretta de' moti da eſſe prodotti, e dalla reciproca de' tempi, nelli quali eſſe hanno operato: dunque le dette forze ancora ſaranno in ragione de' moti da eſſe prodotti diviſi per li tempi.

95. COR. IV. Si ſa, che qualora una ragione è compoſta da due altre ragioni, e la ragione compoſta è di eguaglianza, una delle ragioni componenti è eguale all' altra, preſa reciprocamente; e ſe una delle ragioni componenti è eguale all' altra preſa reciprocamente, la ragione com-

composta è di eguaglianza: ora essendo i moti in ragione composta dalla ragione delle forze, e dalla ragione de' tempi (§ 92), le forze saranno nella ragione reciproca de' tempi, se i moti sono eguali, ed i moti saranno eguali, se le forze sono nella ragione reciproca de' tempi.

CAPITOLO VII.

Del moto equabile.

96. TEOR. I. *SE due corpi si muovono con moto equabile, ed in tempi disuguali percorrono spazj disuguali, le velocità saranno in ragione composta dalle ragioni diretta de' spazj, e reciproca de' tempi.*

DIM. Ne'moti equabili la velocità di un corpo è doppia, tripla, quadrupla della velocità di un altro corpo, qualora nello stesso tempo l'uno percorre spazio doppio, triplo, quadruplo di quello che percorre l'altro; o pure qualora l'uno percorre lo stesso spazio, che percorre l'altro, impiegando $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ del tempo, che impiega l'altro (§ 27): quindi se i corpi percorrono spazj eguali, le velocità saranno in ragione reciproca de' tempi, e se i tempi sono eguali, le velocità saranno nella ragione diretta de' spazj: dunque qualora due corpi percorrono spazj disuguali in tempi disuguali, le velocità saranno in ragione composta dalle ragioni, diretta de' spazj, e reciproca de' tempi.

97.

97. COR. I. Se con V, v si disegnino le velocità di due corpi, con S, s gli spazj, con T, t i tempi, sarà V : v in ragione composta dalle ragioni di S : s, e di t : T; ma la ragione composta si ha moltiplicando gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro: dunque V : v = St : sT.

98. COR. II. E' noto, che se quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle grandezze estreme è eguale al prodotto delle grandezze medie, quindi essendosi dimostrato (§ 96), che V : v = St : sT, sarà VTs = vtS. Or se questi prodotti eguali si scompongano in quattro altre grandezze, in maniera, che il prodotto delle estreme sia eguale al prodotto delle medie, le quattro grandezze saranno proporzionali, quindi sarà T : t = vS : Vs, e sarà ancora S : s = VT : vt. Cioè in due corpi, che si muovono con moto equabile, i tempi sono fra loro in ragione composta dalla diretta de' spazj, e dalla reciproca delle velocità, ed i spazj sono fra loro in ragione composta dalla diretta delle velocità, e dalla diretta de' tempi.

99. COR. III. La ragione composta da una diretta, e da una reciproca si ha dividendo li termini della diretta per li termini di quella, della quale si deve prendere la reciproca: ma si è dimostrato (§ 96), che ne' corpi, i quali si muovono con moto equabile in tempi disuguali, le velocità sono in ragione composta dalla diretta de' spazj percorsi, e dalla reciproca de' tempi impiegati a percorrerli, e li tempi sono nella ragione composta

dalla

dalla diretta de' ſpazj percorſi, e dalla reciproca delle velocità: dunque le velocità ſaranno nella ragione de' ſpazj diviſi per li tempi, e li tempi ſaranno nella ragione de' ſpazj diviſi per le velocità.

100. COR. IV. Si ſa, che qualora una ragione compoſta è di eguaglianza, una delle ragione componenti è eguale all' altra preſa reciprocamente, e ſe una delle ragioni componenti è eguale all' altra preſa reciprocamente, la ragione compoſta è di eguaglianza: Or eſſendo gli ſpazj nella ragione compoſta dalla ragione diretta de' tempi, e dalla diretta delle velocità (§ 98), ne ſegue, che ſe gli ſpazj ſono eguali, i tempi ſaranno in ragione reciproca delle velocità, e ſe i tempi ſono in ragione reciproca delle velocità, gli ſpazj ſaranno eguali.

101. TEOR. II. *Se due corpi ſi muovono con moto equabile, le quantità de' loro moti ſaranno in ragione compoſta dalla ragione delle loro maſſe, e dalla ragione delle loro velocità.*

DIM. Si è dimoſtrato, che il moto in qualunque corpo è egualmente diſtribuito fra le parti della materia, che lo compongono (§ 29), quindi ſe due corpi ſi muovono la quantità del moto di uno ſta alla quantità del moto dell'altro in ragione compoſta dalla ragione della forza, che anima una particella dell'uno alla forza, che anima una particella dell' altro, e dalla ragione del numero delle parti di materia, che compongono l' uno al numero delle parti di materia, che compongono l' altro: ma la ragione della quantità del

del moto che anima una particella di un corpo alla quantità del moto, che anima una particella dell' altro è eguale alla ragione delle velocità di essa particella, e per conseguenza è eguale alla ragione della velocità de' corpi medesimi; e la ragione del numero delle parti di materia di un corpo al numero delle parti di materia dell' altro corpo è eguale alla ragione delle loro masse: dunque le quantità de' moti di due corpi sono in ragione composta dalla ragione delle loro velocità e dalla ragione delle loro masse.

102. COR. I. Se con Q, q si disegnino le quantità di moto, che animano due corpi, con M, m le masse, con U, u le velocità, sarà Q: q in ragione composta dalle ragioni di M: m, e di U: u; ma la ragione composta si ha moltiplicando gli antecedenti fra loro, ed i conseguenti fra loro: dunque Q: q = MU: mu.

103. COR. II. E noto, che se quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, quindi essendosi dimostrato (§ 101), che Q: q = MU: mu, sarà Qmu = q MU: or se questi prodotti eguali si scompongano in quattro altre grandezze, in maniera, che il prodotto delle estreme sia eguale al prodotto delle medie, le quattro grandezze saranno proporzionali, quindi sarà M: m = Qu: qU, ed U: u = Qm: qM; cioè ne' corpi, che si muovono con moto equabile, le masse sono in ragione composta dalla diretta delle quantità di moto, e dalla reciproca delle velocità, e le volocità sono in ragione composta dalla diretta delle quantità di moto, e dalla reciproca delle masse.

104.

104. COR. III. Si sà, che quando una ragione è composta da una ragione diretta, e da un'altra reciproca, la ragione composta si ha dividendo i termini della diretta per i termini di quella, di cui si dovrebbe prendere la reciproca: quindi essendosi dimostrato (§ 103), che in due corpi, che si muovono con moto equabile le masse sono in ragione composta dalla diretta delle quantità di moto, che le animano, e dalla reciproca delle velocità, e che le velocità sono in ragione composta dalla diretta delle stesse quantità di moto, e dalla reciproca delle masse, ne segue, che le masse siano nella ragione delle quantità di moto divise per le rispettive velocità, e le velocità siano in ragione delle quantità di moto divise per le respettive masse.

105. COR. IV. E' noto, che se una ragione composta è di eguaglianza, una delle ragioni componenti è eguale all' altra presa reciprocamente, e se una delle ragioni componenti è eguale all' altra presa reciprocamente, la ragione composta è di eguaglianza: or essendo le quantità di moto in ragione composta dalla ragione delle masse, e dalla ragione delle velocità (§ 101), ne segue, che se le quantità di moto sono eguali, le masse saranno in ragione reciproca delle velocità, e se le masse sono in ragione reciproca delle velocità, le quantità di moto saranno eguali.

CA-

CAPITOLO VIII.

Del moto composto equabile, e rettilineo, e della composizione, e risoluzione delle forze motrici.

106. TEOR. I. *SE un corpo una volta sola, e nello stesso istante sia spinto da due forze determinate, e di mezzana cospirazione, ed opposizione, questo dovrà percorrere una retta, la quale sarà la diagonale di un parallelogrammo, di cui due lati disegnano le direzioni delle forze, e lo spazio, che il corpo percorrerebbe in un dato tempo, se ubbidisse a ciascheduna forza separatamente, e percorrerà questa diagonale nel tempo istesso, nel quale percorrerebbe un lato solo del parallelogrammo, se ubbidisse ad una sola delle due forze.*

Fig. 4. Due forze motrici P, e Q di mezzana cospirazione, ed opposizione, e proporzionali alle rette PA, QA facciano azione nel medesimo istante, ed una sola volta sopra del corpo A, e si prolunghino PA, QA verso B, e C in maniera, che BA, ed AC siano gli spazj, che A correrebbe in tempi eguali, se le due forze separatamente facessero le loro azioni, indi sia compito il parallelogrammo BC, in cui sia tirata la diagonale AD: Dico, che il corpo A col suo moto composto percorrerà la diagonale AD, e lo farà nello stesso tempo, che egli impiegherebbe be a percorrere AB, se fosse spinto dalla sola forza P, o AC, se fosse spinto dalla sola forza Q.

DIM. Si supponga, che lo spazio, che percorrerebbe il corpo A in un istante venendo spinto dalla sola forza P, sia AE, e quello, che percorrerebbe nello stesso tempo spinto dalla sola forza Q, sia AF; facendo insieme azione le due forze P, Q, e non potendo l'una impedire l'effetto dell'altra, non essendo fra loro opposte, in un istante si dovrà A ritrovare, per una forza, allontanato da QC di tanto, quanto ne è lontano il punto E, e per l'altra, allontanato da PB di tanto, quanto ne è lontano il punto F: ma in qualsivoglia momento il corpo si deve ritrovare in un solo punto: dunque nella fine del primo istante si deve quello ritrovare nel solo punto O, che è distante da QC, e PB di tanto, quanto ne sono respettivamente distanti i punti F, E. Or essendo i moti per AC, AB equabili, saranno gli spazj AC, AB descritti nello stesso tempo, proporzionali alle velocità, che le forze P, Q separatamente operando comunicherebbero al corpo A (§ 96.). Similmente essendo AE, AF gli spazj, che nello stesso tempo percorrerebbe il corpo spinto dalle forze P, Q separatamente; saranno AE, AF proporzionali alle velocità, che le stesse forze P, Q separatamente operando, comunicano al corpo: ma le ragioni eguali ad una terza sono fra loro eguali, dunque AB : AC = AE : AF, onde i due parellelogrammi BC, EF avendo un angolo comune, ed i lati intorno ad esso proporzionali,

 sono

sono simili: ma i parallelogrammi simili, che hanno un angolo comune, sono intorno alla stessa diagonale: dunque il punto O è nella diagonale AD del parallelogrammo BC. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che in qualsivoglia altro momento il corpo A, per lo moto composto, si deve ritrovare nella medesima diagonale AD, e che nel tempo, che si dovrebbe ritrovare nel punto B spinto dalla sola forza P, o nel punto C spinto dalla sola forza Q, si deve ritrovare nel punto D. Dunque il corpo A spinto dalle forze P, Q percorre la diagonale AD, e lo fa nello stesso tempo, in cui percorrerebbe AC, se fosse spinto dalla sola forza Q, o AB, se fosse spinto dalla sola forza P. Sicchè &c.

107. AVV. In ogni forza noi consideriamo la efficacia, e la direzione: per la efficacia la forza ritrovasi nello stato di produrre l'effetto: per la direzione ritrovasi nello stato di produrre l'effetto per una data linea; quindi qualora di una forza è determinata la efficacia, e la direzione, ritrovasi determinata ancora la quantità della medesima.

108. COR. I. Quindi se con i lati di un parallelogrammo si esprimano le velocità, o i moti, che due forze di mezzana cospirazione, ed opposizione separatamente operando comunicano ad un corpo, la diagonale di esso esprimerà la velocità, ed il moto, che insieme operando producono; e la somma delle velocità, o de' moti, che separatamente operando produrrebbero, è maggiore della velocità, e del moto, che insieme

ſieme operando producono. Tutto ciò ſi comprenderà facilmente, ſe ſi farà il ſeguente raziocinio: le velocità ſono nella ragione de' ſpazj, qualora i tempi ſono eguali (§ 96), quindi ſarà la velocità del corpo A ſpinto dalle due forze P, Q inſieme operanti, ed iſtantanee, alla velocità del corpo medeſimo ſpinto dalla ſola forza P, o dalla ſola forza Q, come lo ſpazio AD allo ſpazio AB, o allo ſpazio AC; e la velocità del corpo A ſpinto dalle due forze P, Q inſieme, ſta alla ſomma delle due velocità del corpo medeſimo ſpinto dalle medeſime forze ſeparatamente, come lo ſpazio AD alla ſomma degli ſpazj AB, AC, overo AB, BD. In oltre la ſomma degli ſpazj AB, BD è maggiore dello ſpazio AD (perchè due lati di un triangolo ſono maggiori del terzo), dunque la ſomma delle velocità, che le due forze ſeparatamente operando produrrebbero è maggiore della velocità, che inſieme operando producono. Di più i moti ſono nella ragione delle velocità quando le maſſe ſono eguali (§ 101): dunque ciò, che ſi è detto per le velocità deve intenderſi detto anche per li moti.

109. COR. II. Se le due forze ſudette (conſervando la ſteſſa efficacia) mutino direzione in maniera, che facciano un angolo maggiore di quello, che prima avevano fatto, allora il corpo dovrà nel medeſimo tempo percorrere la diagonale di un altro parallelogrammo, e queſta ſarà minore di quella diagonale, che il corpo aveva percorſa prima; e ſe le forze divengano oppoſte, allora il corpo camminerà per la direzione

della forza maggiore percorrendo nello stesso tempo uno spazio eguale alla differenza de' spazj, che avrebbe percorsi se le forze separatamente avessero operato. La forza p operi per la direzione di Ab, e faccia con la forza Q l' angolo pAQ maggiore dell' angolo PAQ,
Fig. 5. si prolunghi pA verso b, e si tagli Ab = AB, si compisca il parallelogrammo AbdC, ed in esso si tiri la diagonale Ad. Le rette bd, AC sono parallele, vengono tagliate da bA, e formano gli angoli interni posti dalla medesima parte dbA, bAC presi insieme eguali a due retti; similmente le due rette DB, AC sono parallele, vengono tagliate dalla terza BA, e formano gli angoli interni posti dalla medesima parte DBA, BAC presi insieme eguali a due retti; dunque la somma degli angoli DBA, BAC è eguale alla somma degli angoli dbA, bAC; ma l' angolo bAC è maggiore dell' angolo BAC; quindi l' angolo dbA è minore dell' angolo DBA; di più i lati di questi angoli sono respettivamente fra loro eguali; dunque la retta A d, che è base dell' angolo minore, sarà minore della retta AD, che è base dell' angolo maggiore. Se le due forze p, Q divengano opposte, la retta bd combacerà con le rette bA, Ad, e perciò la retta Ad sarà eguale alla retta bd, toltane la retta Ab. Dunque se le due forze p, Q divengano opposte, il corpo A percorerrà per la direzione della forza maggiore uno spazio eguale alla differenza de' spazj AC, AB, che avrebbe percorsi se le forze avessero separatamente operato.

110.

110. COR. III. Se le medesime forze (conservando la stessa efficacia) mutino la direzione, che avevano, in maniera, che facciano un angolo minore di quello, che prima avevano fatto, allora il corpo dovrà nello stesso tempo percorrere la diagonale di un altro parallelogrammo, e questa sarà maggiore di quella, che aveva percorsa prima; e se le forze divengano cospiranti, allora il corpo camminerà per la direzione medesima, per cui le forze operano, e descriverà uno spazio eguale alla somma di quelli, che avrebbe percorsi se le forze avessero separatamente operato. La forza p operi per la direzione pA, e faccia con la forza Q l'angolo pAQ minore dell'angolo PAQ, si prolunghi pA verso b, si tagli Ab = AB, si compisca il parallelogrammo AbdC, si tiri la diagonale Ad. Le due rette AC, BD sono parallele, vengono tagliate dalla terza AB, e formano gli angoli interni posti dalla medesima parte DBA, BAC presi insieme, eguali a due retti; similmente le due rette parallele bd, AC vengono tagliate dalla terza bA, e formano gli angoli interni posti dalla medesima parte dbA, bAC presi insieme eguali a due retti, dunque la somma degli angoli DBA, BAC è eguale alla somma degli angoli dbA, bAC; ma l' angolo bAC è minore dell' angolo BAC quindi l' angolo dbA è maggiore dell' angolo DBA; di più i due lati DB, BA di un angolo sono respettivamente eguali ai due lati db, bA dell' altro; dunque la base Ad dell' angolo maggiore è mag- *Fig. 6.*

 giore

giore della base AD dell'angolo minore. Se le due forze divengano cospiranti la retta Ad combacerà con le rette Ab, bd, e perciò la retta Ad sarà eguale alla somma delle rette Ab, bd; quindi il corpo camminerà per la direzione, per cui le forze operano, uno spazio eguale alla somma de' spazj, che percorrerebbe se le forze separatamente operassero.

111. COR. IV. Se con due rette, che espirmano le direzioni, e le efficacie delle forze sudette, si compisca un parallelogrammo, ed in esso si tiri la diagonale, questa dovrà esprimere la direzione, e la efficacia della forza composta dalle due prime. *Fig.* 7. Con le due rette PA, QA, che esprimono le direzioni, e le efficacie delle forze P, Q si compisca il parallelogrammo PRQA, ed in esso si tiri la diagonale RA, la quale esprima la direzione, e la efficacia della forza R. 1. Il corpo A spinto dalla forza R camminerà per la direzione AD, per la quale avrebbe camminato spinto dalle due forze P, Q operanti nel medesimo istante, 2. La forza R spingendo il corpo A gli comunicherà lo stesso moto, che gli avrebbero comunicato le stesse forze P, Q insieme operanti.

1. Che il corpo A spinto dalla forza R per la direzione RA, cammini per la direzione della retta AD, è chiaro; imperciocchè BA : AC = PA : AQ (§ 90), ma PA = QR, AB = DC; dunque RQ : QA = DC : CA; di più le rette DC, RQ sono parallele, e vengono tagliate dalla terza QC, dunque gli angoli alterni RQA, ACD sono eguali, quindi i triangoli RQA, ACD sono

sono simili, ma i triangoli simili sono equiangoli, dunque l'angolo QAR = DAC; e perciò RA, AD formano una retta continuata.

2. Che il corpo A spinto dalla sola forza R riceva tanto moto, quanto ne avrebbe ricevuto se fosse stato spinto nel medesimo istante dalle due forze P, Q, facilmente si dimostra; imperciocchè essendo simili i due triangoli RAP, DAB, sarà RA : AP = AD : AB, o vero R : P = DA : AB, ma le forze istantanee sono nella ragione de' moti, che esse producono (§ 90), dunque sarà il moto, prodotto dalla forza R al moto prodotto dalla forza P = DA : AB, ma DA dinota il moto, che ha il corpo qualora è spinto nel medesimo istante dalle forze P, Q; ed AB dinota il moto, che ha il corpo, qualora è spinto dalla sola forza P, dunque il moto prodotto dalla forza R sta al moto prodotto dalla forza P, come il moto prodotto dalle forze P, Q insieme operanti, allo stesso moto prodotto dalla forza P. Quindi il moto prodotto dalla forza R è eguale al moto prodotto dalle due forze P, Q insieme operanti, e perciò RA dinota la direzione, e la efficacia della forza composta dalle altre due, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da PA, QA.

112. COR. V. Qualora siano date le direzioni, e le efficacie di due forze componenti, una sola potrà essere la direzione, e la efficacia della forza composta da loro, e qualora sia data la direzione, e la efficacia di una forza composta, si potranno all'infinito variare le direzioni, e le

efficacie delle forze componenti; questo accade, perchè essendo dati due lati, ed un angolo di un parallelogrammo, questo non può avere più, che una sola diagonale, ed essendo data per lo contrario una diagonale, si possono intorno ad essa costruire infiniti parallelogrammi.

113. COR. VI. Dunque alle direzioni, ed alle efficacie di due forze componenti, si può sostituire la direzione, e la efficacia della forza composta da esse; e la direzione, e la efficacia di una sola forza può risolversi in due altre, e queste possono variarsi all' infinito, senza che si induca cambiamento di moto nel corpo da esse animato, purchè esse forze formino due lati di un parallelogrammo, di cui la diagonale esprima la direzione, e la efficacia della forza sudetta.

114. AVV. La ragione, per cui le forze di mezzana cospirazione, ed opposizione producono un effetto minore di quello, che produrrebbero se separatamente operassero, è la seguente.
Fig. 8. Rappresenti APRQ qualunque parallelogrammo, in cui sia tirata la diagonale AR, e rappresentino i suoi lati PA, QA le direzioni, e le efficacie di due forze di mezzana cospirazione, ed opposizione, esprimerà RA la direzione, e la efficacia della forza composta da esse (§111). Da' punti P, Q siano sopra di AR calate le perpendicolari PC, QB, e siano compiti i rettangoli ADPC, ABQE. Le due rette AP, RQ sono parallele, vengono tagliate dalla terza AR, quindi gli angoli alterni PAR, ARQ sono eguali, e perciò i due triangoli PAC, QBR hanno gli

gli angoli PAC, BRQ eguali, gli altri due angoli ACP, RBQ anche eguali perchè retti, quindi sono equiangoli; hanno di più AP = QR, dunque sono perfettamente eguali, e perciò PC = QB, o vero DA = AE, ed AB = CR. Di più gli angoli DAB, EAB sono retti, dunque le due rette eguali DA, AE formano una retta continuata. In oltre la forza P, di cui la direzione e la efficacia è espressa da PA, equivale a due altre, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da DA, AC (§ 113); la forza Q, di cui la direzione, e la efficacia è espressa da QA, equivale a due altre, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da BA, AE, dunque tanto sarà dire le due forze, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da PA, QA, quanto sarà dire le quattro, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da DA, AC, AB, AE; ma quelle, che sono espresse da DA, AE sono eguali, e contrarie, e perciò si distruggono, dunque le sole espresse da AC, AB, o vero da AC, CR producono l' effetto.

115. PROBL. *Date più forze di mezzana cospirazione, ed opposizione, e date le direzioni, e le efficacie loro, determinare la direzione, e la efficacia della forza composta da esse.*

SOL. Le rette AB, AC, AD, AE, esprimano le direzioni, e le efficacie delle forze date. *Fig. 9.*

1. Con AB, AC si compisca il parallelogrammo ABFC, ed in esso si tiri la diagonale AF.

2. Con AF, AD si compisca il parallelogrammo AFGD, ed in esso si tiri la diagonale AG.

3. Con

3. Con AG, AE si compisca il parallelogrammo AEHG, ed in esso si tiri la diagonale AH.

Dico, che AH esprime la direzione, e la efficacia della forza composta.

DIM. Essendo AF diagonale del parallelogrammo CB, esprimerà la direzione, e la efficacia della forza composta dalle due forze, delle quali AB, AC esprimono le direzioni, e le efficacie (§113). Similmente essendo AG diagonale del parallelogrammo DF, esprimerà la direzione, e la efficacia della forza composta dalle due forze, di cui le direzioni, e le efficacie sono espresse da AF, AD, ma AF esprime la direzione, e la efficacia della forza composta dalle due, delle quali AB, AC esprimono le direzioni, e le efficacie, dunque AG esprime la direzione, e la efficacia della forza composta dalle tre, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da AB, AC, AD. Finalmente AH essendo diagonale del parallelogrammo EG, disegnerà la direzione, e la efficacia della forza composta dalle due, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da AG, AE, ma AG esprime la direzione, e la efficacia della forza composta dalle tre forze, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da AB, AC, AD; dunque AH esprimerà la direzione, e la efficacia della forza composta dalle forze, delle quali le direzioni, e le efficacie sono espresse da AB, AC, AD, AE.

CA-

CAPITOLO IX.

Dell' urto diretto de' corpi.

116. DEF. I. Si dice *urto*, o *percossa* l'azione, che un corpo in moto fa su di un altro corpo, che egli incontra.

117. AVV. Tre casi possono accadere nell' urto 1. Può un corpo, che è in moto urtare in un altro, che è in quiete, e questo chiameremo *primo caso dell' urto*. 2. Può un corpo urtare in un altro amendue movendosi per la stessa direzione, e questo diremo *secondo caso dell' urto*. 3. Può finalmente un corpo urtare in un altro ambidue movendosi per direzioni opposte, e questo chiameremo *terzo caso dell' urto*.

118. DEF. II. Si dice, che un corpo *urta direttamente* in un altro corpo, se si muove per una retta perpendicolare al piano tangente di ambidue i corpi nel luogo dell' urto.

119. DEF. III. Si dice un corpo *urtare* in un altro *obbliquamente* se si muove per una retta obliqua al piano tangente di ambidue i corpi nel luogo dell' urto.

120. DEF. IV. Si dicono *corpi elastici*, quelli, nelli quali le parti si piegano nell' urto, e cessato l'urto, le parti si spiegano.

121. DEF. V. Si dice forza *elastica*, o *elasticità* la forza, con cui si spiegano le parti de' corpi, le quali si erano piegate nell' urto.

122. DEF. VI. Un corpo si dice *perfettamen-*

te

te elastico, se le sue parti piegate nell' urto, con tanta forza si spiegano, con quanta si erano piegate.

123. DEF. VII. Un corpo si chiama *imperfettamente elastico*, qualora le sue parti piegate nell' urto, si spiegano con forza minore di quella, con cui si erano piegate.

124. DEF. VIII. Un corpo si dice *perfettamente duro*, quando le parti sue, ricevendo qualunque urto, non si piegano.

125. DEF. IX. Un corpo si dice *perfettamente molle*, quando le parti sue, a qualunque debole urto, si piegano.

126. DEF. X. Si dicono corpi *imperfettamente duri*, o *imperfettamente molli* quelli, le parti de' quali non manifestano sensibile piegamento, se non ricevono un urto molto gagliardo.

Fig. 13. 127. DEF. XI. Se un corpo camminando per AB urta nell' ostacolo DF, e ritorna in dietro per qualunque direzione BC, si dirà *angolo dell' incidenza* l' angolo ABD, ed *angolo della riflessione* l' angolo CBF.

128. OSS. Se due corpi si muovono per la stessa direzione, si osserva, che se quello, che precede è più veloce di quello, che segue, o se tutti due sono egualmente veloci, non può quello, che precede essere spinto da quello, che segue. Se poi quello, che segue ha maggiore velocità di quello, che precede, quello, che segue deve urtare quello, che precede.

129. COR. I. Sicchè movendosi due corpi per la stessa direzione, allora l' uno urta nell'
al-

altro, quando quello, che precede si muove con velocità minore di quella, con cui si muove quello, che segue. E subito, che essi sono diventati egualmente veloci, la loro azione finisce.

130. COR. II. Sicchè qualora un corpo agisce contro di un altro, l'agente comunica all' altro tanto del moto suo, quanto ne bisogna per fare, che dopo dell'azione essi divengano egualmente veloci, ma quando due corpi sono egualmente veloci, è necessario, che le eguali particelle di materia di essi siano animate da eguali quantità di moto (§. 29.); quindi tutto il moto, che dopo dell' azione è ne' corpi, è distribuito egualmente a tutte le particelle di materia di ambidue, e perciò la quantità di moto, che avrà l'uno sarà a quella, che avrà l'altro, come il numero delle eguali particelle di materia dell' uno, al numero delle eguali particelle di materia dell' altro, e per conseguenza il moto, che dopo dell' urto si ritroverà ne' due corpi, sarà diviso in essi proporzionatamente alle loro masse.

131. COR. III. Nel primo caso dell' urto, il corpo, che riceve l'azione, prima dell' urto è senza moto, quindi dopo dell' urto, il moto, che ambidue i corpi hanno è quello istesso, che avea prima dell' urto il corpo agente, il quale moto è ne' due corpi diviso proporzionatamente alle masse di essi. Nel secondo caso dell' urto, il corpo agente ha una quantità di moto maggiore di quella, che gli sarebbe necessaria per farlo essere eguale in velocità all' altro, la quale quantità di moto è quella, che si distri-

bui-

buisce egualmente a tutte le parti di materia di ambidue i corpi, poichè dopo dell' azione tutta l' altra quantità di moto resta ne' medesimi corpi, ne' quali era prima, onde nel secondo caso dell' urto la somma de' moti, che hanno i corpi dopo dell' urto è eguale alla somma de' moti, che avevano prima, e questa somma de' moti si ritrova distribuita in essi in proporzione delle loro masse. Nel terzo caso dell' urto, movendosi due corpi per direzioni opposte, e con diverse quantità di moto, in quel corpo, in cui ritroverassi maggiore quantità di moto, tanto moto dovrà distruggersi, quanto si ritroverà averne l' altro, e quello, che ne aveva minore quantità dovrà rimanerne affatto privo; il moto poi, che resterà al primo corpo, cioè a quello, che ne aveva maggiore quantità, dovrà distribuirsi ad ambidue proporzionatamente alle loro masse, e questo farà sì, che il secondo si muova insieme col primo per la stessa direzione, per cui si muoveva il primo.

132. PROBL. *Date le masse, e le velocità, che hanno due corpi non elastici prima dell' urto diretto, determinare la velocità comune, che avranno dopo dell' urto.*

SOL. Si esprimano con M, m le masse de' due corpi, con U, u le velocità, che hanno prima dell' urto, e con X la velocità, che avranno in comune dopo dell' urto.

Il corpo M urtando contro m perde una porzione della sua velocità, ed m fa un acquisto di velocità. La velocità, che M ha perduta è egua-

eguale a quella, che prima dell'urto aveva, toltane quella, che ritiene dopo dell' urto, quindi sarà espressa da $U - X$; quella poi, che m ha acquistata nell' urto è eguale a quella, che ha dopo dell' urto, toltane quella, che prima dell' urto aveva, e perciò sarà espressa da $X - U$; ma i moti sono in ragione composta dalle ragioni delle masse, e delle velocità (§ 101), quindi il moto perduto dal primo sarà $M(U - X) = MU - MX$, il moto acquistato dal secondo sarà $m(X - u) = mX - mu$; ma questi moti sono effetti dell' azione dell' uno, e della reazione dell' altro, e perciò sono eguali (§ 73), dunque $MU - MX = mX - mu$ e trasferendo i termini, sarà $MU + mu = MX + mX$; e dividendo queste grandezze eguali per $M + m$, sarà $X = \frac{MU + mu}{M + m}$

133. COR. I. Quindi nel primo caso dell' urto essendo $u = o$, sarà anche $mu = o$, e perciò $X = \frac{MU}{M + m}$ 2. Nel secondo caso dell' urto essendo u di valore positivo, sarà $X = \frac{MU + mu}{M + m}$. 3. Nel terzo caso dell' urto essendo u di valore negativo, sarà anche mu negativo, e perciò sarà $X = \frac{MU - mu}{M + m}$.

134. COR. II. In oltre poichè la quantità di moto di un corpo si ha moltiplicando la massa del corpo per la sua velocità, il moto del cor-

corpo di massa M, dopo dell' urto sarà espresso, nel caso dell' urto

$$1^\circ.\ \text{Da}\ \frac{M^2 U}{M+m}$$

$$2^\circ.\ \text{Da}\ \frac{M^2 U + Mmu}{M+m}$$

$$3^\circ.\ \text{Da}\ \frac{M^2 U - M mu}{M+m}$$

Il moto del corpo di massa m sarà espresso nel caso dell' urto

$$1.^\circ\ \text{Da}\ \frac{mMU}{M+m}$$

$$2.^\circ\ \text{Da}\ \frac{mMU + m^2 u}{M+m}$$

$$3.^\circ\ \text{Da}\ \frac{mMU - m^2 u}{M+m}$$

135. COR. III. Di più se dal moto, che il corpo di massa m ha dopo dell' urto, si toglie quello, che esso aveva prima dell' urto, il residuo esprimerà il moto, che il corpo di massa M con la sua azione ha comunicato al corpo di massa m, e per conseguenza il moto, che questo con la sua reazione ha distrutto in quello.

136. COR. IV. Quindi se $M = m$, sarà nel caso dell' urto.

$$1.^\circ\ X = \frac{MU}{2m} = \frac{U}{2} = \frac{1}{2}U$$

$$2.^\circ\ X = \frac{MU + Mu}{2M} = \frac{U+u}{2} = \frac{1}{2}(U+u)$$

3.°

3.° $X = \frac{MU - Mu}{2M} = \frac{U - u}{2} = \frac{1}{2}(U - u)$

E perciò quando due corpi di eguali masse si urtano, la velocità comune, che essi avranno dopo dell'urto, nel primo caso dell' urto sarà eguale alla metà di quella, che il corpo agente aveva prima dell'urto, nel secondo caso dell' urto sarà eguale alla metà della somma delle velocità, che essi avevano prima dell'urto, nel terzo caso dell'urto sarà eguale alla metà della differenza delle velocità, che essi avevano prima dell' urto.

137. COR. V. Se $m = \infty$, sarà nel primo caso dell'urto $X = \frac{MU}{M + \infty} = \frac{1}{\infty}$. Quindi se un corpo finito con velocità finita urta in un ostacolo invincibile, dopo dell' urto tutti due resteranno immobili.

138. COR. VI. Finalmente nel terzo caso dell' urto sia $M : m = u : U$. Essendo nella proporzione il prodotto delle grandezze estreme eguale al prodotto delle medie, sarà $MU = mu$; ma nel terzo caso dell' urto $X = \frac{MU - mu}{M + m}$; dunque $X = \frac{0}{M + m} = 0$. Quindi se nel terzo caso dell' urto i due corpi prima dell' urto hanno le masse nella ragione reciproca delle velocità, essi dopo dell' urto resteranno immobili.

139. AVV. Sin ora nell' urto de' corpi

abbiamo considerato non intervenire altro, che l'azione dell'uno, e la reazione dell'altro, questo però accade ne' corpi, i quali sono privi di elasticità; ma se i corpi sono elastici, le loro elasticità devono alterare le quantità di moto, che in essi corpi resterebbero dopo dell'urto se fossero privi di elasticità, quindi per potere esse alterazioni calcolare, è necessario considerare come dalla elasticità vengono prodotte.

Fig. 10. Rappresentino A, B due corpi dotati di eguali forze elastiche, ed A urti in B spingendolo verso C. Il corpo A spinge il corpo B, e comunicandogli una porzione del suo moto, fa sì, che le parti di B vengano a piegarsi, il corpo B con la sua reazione togliendo ad A quanto moto A gli aveva comunicato, fa sì, che si pieghino le parti di A*; seguite sì fatte reciproche azioni, la elasticità di B sforza le parti sue piegate a spiegarsi egualmente verso D, e verso C; similmente la elasticità di A sforza le parti sue piegate a spiegarsi egualmente verso D, e verso C, ma per ipotesi, essi corpi sono dotati di eguali elasticità, dunque le parti di A volendosi spiegare verso di B fanno un'azione eguale a quella, che le parti di B per ispiegarsi fanno contro di A; ma lo spiegamento delle parti per cagione di queste forze eguali, e contrarie viene impedito, quindi le parti di A debbono spiegarsi da A verso D, e quelle di B da B verso C, e perciò il moto di A deve essere dalla sua elasticità diminuito di tanto, quanto è l'intiero moto, che può produrre la elasticità sua, ed ed il moto di B deve essere dalla elasticità sua accresciuto di tanto, quanto è il moto, che può produrre la intiera elasticità sua.

140. LEM. *Se un corpo perfettamente elastico urta direttamente in un altro anche perfettamente elastico, il primo per la sua elasticità perde del suo moto tanto, quanto ne ha perduto per la reazione del secondo; ed il secondo per la sua elasticità acquista tanto di moto, quanto glie ne è stato comunicato per l'azione del primo.*

DIM. Si è dimostrato (§.73), che qualora nell' urto de' corpi non vi interviene altro, che l'azione dell' uno, e la reazione dell' altro, il primo perde tanto del suo moto, quanto il secondo ne acquista; in oltre allorchè vi interviene la perfetta elasticità di essi, il primo spiegando le sue parti per direzione contraria a quella, per la quale egli si moveva, fa sì, che il suo moto venga a diminuirsi di tanto, quanto è la forza, con la quale le sue parti si spiegano, ma la forza, con la quale le parti si spiegano è eguale alla forza, per la quale le parti si sono piegate, e le parti si sono piegate per la reazione, che il secondo ha fatta contro del primo, dunque il moto, che si distrugge nel primo per la elasticità, è eguale al moto, che nel medesimo si era distrutto per la reazione. Con simile raziocinio si dimostra, che nel corpo, il quale viene urtato, la elasticità, che in lui ritrovasi, operando sopra di lui, lo spinge per la stessa direzione, per la quale andava movendosi, e lo spinge con tanta forza, quanta è stata la forza, con cui le parti si sono piegate nel ricevere l'urto, e perciò la elasticità deve aggiungere al corpo tanto moto, quanto glie ne è stato comunicato per l' azione nell' atto dell' urto.

141. PROBL. *Date le masse, e le velocità, che hanno due corpi perfettamente elastici prima dell' urto diretto, determinare le velocità, che ciascheduno di essi avrà dopo dell' urto.*

SOL. Siano A, B due corpi perfettamente elastici, i quali si urtino direttamente, ed il moto, che avrebbero dopo dell' urto (se non fossero elastici) sia verso C.

Se i corpi A, B non fossero elastici, nel momento dell' urto il corpo A spingendo B, tanto moto gli comunicherebbe per la sua azione, quanto moto B distruggerebbe in A per la sua reazione, ma essendo i corpi A, B perfettamente elastici, il moto del corpo A deve essere diminuito per l' azione della forza elastica di tanto, quanta è stata la diminuzione prodotta dalla reazione del corpo B, ed il moto del corpo B deve essere accresciuto per l'azione della sua forza elastica di tanto, quanto è stato il moto comunicatogli per l' azione del corpo A; quindi se si determinano i moti, che i corpi A, B avrebbero dopo dell' urto se fossero stati privi di elasticità, (§134) ed il moto, che per le loro reciproche azioni, da A sarebbe passato in B, (§135) si determinerà il moto, che A tiene dopo dell'urto, togliendo dal moto, che A avrebbe avuto, non essendo elastico, quello, che da A è passato in B, e si determinerà il moto di B aggiungendo al moto, che B avrebbe be avuto, non essendo elastico, lo stesso moto, che da A è passato in B; ma le velocità sono nella ragione de' moti divisi per le masse (§104); quindi si determineranno le velocità, che essi avranno dopo dell' urto, dividendo i moti determinati per le respettive masse de' corpi.

142. AVV. Bisogna avvertire, che se i detti corpi sono dotati di una elasticità imperfetta, i moti, che essi hanno dopo dell'urto, si devono determinare con accrescere, o diminuire respettivamente i moti, che essi avrebbero avuto dopo dell' urto, se non fossero stati elastici, di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. del moto, che uno di essi comunica all' altro nell' istante dell' urto, secondo che la elasticità di essi è $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ della perfetta elasticità.

143. COR. I. Quindi se uno solamente de' detti corpi è elastico, in tale caso le parti del corpo elastico piegate nel momento dell' urto non trovando forza opposta, la quale possa impedire il loro spiegamento verso del non elastico, debbono spiegarsi con la metà della loro forza verso del non elastico, e con l'altra metà per la direzione opposta; onde dopo dell' urto, il moto del non elastico deve essere alterato della metà di quello, che potrebbe comunicargli la intiera forza elastica dell' altro corpo; ed il moto, che avrebbe l' elastico dopo dell' urto, considerato come non elastico, deve ricevere una eguale alte-

razione, imperciocchè la metà della forza elaſtica ſi perde per la reazione del non elaſtico, e l' altra metà, la quale fà lo sforzo per la direzione contraria, ſi impiega a produrre la detta alterazione di moto.

144. COR. II. Di più ſe un corpo elaſtico urta in un oſtacolo invincibile, e perfettamente duro; non potendo le parti del corpo elaſtico ſpiegarſi verſo del corpo duro, ſi ſpiegheranno intieramente verſo la parte oppoſta; ed eſſendo il corpo perfettamente elaſtico la elaſticità comunica al corpo l' intiero moto, che aveva prima dell' urto, e per direzione oppoſta; ſe poi è imperfettamente elaſtico, gli comunicherà $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. dell'intiero moto, ſecondo che la elaſticità è $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ della elaſticità perfetta.

145. COR. III. Se in ultimo luogo un corpo elaſtico urta direttamente in un altro corpo molle, quieto, ed incapace di eſſer moſſo con l' urto, che riceve, allora ſe le parti piegate del molle non poſſono ricevere ulteriore piegamento dalla forza, con cui le parti del corpo elaſtico cercano di ſpiegarſi verſo del molle, l' elaſtico ritorna in dietro come ſe aveſſe urtato in un oſtacolo invincibile perfettamente duro; ma ſe le parti del molle ricevono ulteriore piegamento dalla elaſticità dell' altro, in tale caſo le parti dell' elaſtico ſi ſpiegano in parte verſo del molle, onde l' elaſtico torna in dietro con una porzione del moto, che la intiera elaſticità gli

gli avrebbe comunicata, e questa porzione è maggiore, o minore, secondochè minore, o maggiore è lo spiegamento delle parti dell' elastico verso del molle.

CAPITOLO X.

Dell' urto obliquo de' corpi.

146. D*Ate le masse, le velocità, e le direzioni di due corpi prima dell' urto obliquo, determinare le direzioni, e le velocità di essi dopo dell' urto.*

SOL. La palla A si muova equabilmente *Fig.* 11. per AC, la palla B si muova equabilmente per BD, e la velocità di A sia espressa da AC, e la velocità di B sia espressa da BD, e quando i loro centri sono giunti ne' punti C, D, la palla A urti nella palla B; si uniscano i centri C, D con la retta CD, la quale si prolunghi verso F, e verso K, e per li punti C, D si tirino le rette EQ, HI parallele alla retta tangente de' due corpi nel luogo dell' urto; indi dalli punti A, B si calino sopra di FK le perpendicolari AF, BK, e si compiscano i rettangoli KH, EF.

Di poi si determinino le velocità, che i corpi C, D avrebbero se si urtassero direttamente con le velocità espresse da FC, KD, e siano CR la velocità, che avrebbe C dopo dell' urto, DG quella, che avrebbe D; si prolunghi EC verso Q, e si tagli CQ = CE, si compisca il parallelogrammo RQ, ed in esso si tiri la diagonale CO.

Similmente prolungata HD verſo I, e tagliata DI = DH, ſi compiſca il parallelogrammo GI, ed in eſſo ſi tiri la diagonale DN. Dico, che CO, DN diſegnano le direzioni, e le velocità de' due corpi dopo dell'urto.

DIM. Il moto, che il corpo A tiene prima dell'urto è eſpreſſo da AC, e queſto moto ſi riſolve nelli due eſpreſſi da EC, CF; ſimilmente il moto, che il corpo B tiene prima dell' urto è eſpreſſo da BD, e ſi riſolve nelli due eſpreſſi da HD, DK. (§.108). Dunque i due corpi ſi urtano come ſe foſſero animati dalli quattro moti eſpreſſi da FC, EC, HD, KD, e le rette EC, CF, HD, DK diſegneranno le velocità ad essi moti corriſpondenti; ma eſſendo le rette EC, HD per coſtruzione, parallele, i moti, e per conſeguenza, le velocità eſpreſſe da EC, HD non ſi alterano; formando FC, DK una retta continuata, i corpi ſi urtano con le velocità eſpreſſe da FC, DK, come ſe ſi urtaſſero con urto diretto; quindi determinate le velocità CR, DG, che per queſto urto i corpi avrebbero (§.132, 141, 142), ſi ritroverà il corpo C animato dalli due moti eſpreſſi da CQ, CR, ed il corpo D dalli due eſpreſſi da DI, DG; dunque il corpo C ſi muoverà per la direzione di CO, ed il corpo D per la direzione di DN (§.106). In oltre li corpi C, D percorrono le rette CO, DN nel medeſimo tempo, in cui il corpo C animato dal moto eſpreſſo da EC avrebbe percorſo CQ = CE, ed il corpo D animato dal ſolo moto eſpreſſo da HD avrebbe percorſo

corso DI = DH, ma i corpi C, D avrebbero percorse le rette EC, DH in tempo eguale a quello nel quale prima dell' urto avevano percorse le rette AC, BD; dunque il corpo C percorse CO nel medesimo tempo, che prima dell' urto aveva impiegato a percorrere AC, ed il corpo D percorre DN, nel medesimo tempo, che prima dell' urto aveva impiegato a percorrere BD; ma prima dell'urto, AC, BD si percorrevano in tempi eguali, giacchè, per ipotesi esse disegnavano le velocità de' corpi A, B, dunque CO, DN dopo dell'urto si percorrono ancora in tempi eguali; ma ne' moti equabili le velocità sono espresse dagli spazj descritti in tempi eguali (§ 96). Dunque CO, DN disegnano le velocità, che i corpi D, N hanno dopo dell' urto.

147. AVV. E' da notare, che se i corpi A, B sono privi di elasticità, CR sarà eguale a DG (§129); se poi sono elastici, CR, DG saranno disuguali; (§139) E se, nel caso de' corpi elastici, CR sarà di valore negativo, allora in CF tagliata Cr = CR, e compito il parallelogrammo r Q, la direzione, e la velocità del corpo C verrà disegnata dalla diagonale Co del rettangolo r Q.

148. TEOR. I. *La forza intiera di un corpo, che urta obliquamente in un ostacolo invincibile sta alla forza, con cui esso corpo opera su lo stesso ostacolo come il seno massimo al seno dell' angolo della incidenza.*

DIM. Il corpo A urti obliquamente sopra dell' ostacolo invincibile DC. Dal punto A sopra DC si ca- *Fig.* 12.

si cali la perpendicolare AD, e si compisca il rettangolo BD.

La forza, con la quale il corpo A urta in DC operando per la direzione AC si potrà esprimere con la retta AC, ma la forza espressa da AC si risolve nelle due espresse da DC, CB, dunque il corpo A urta in DC come se fosse animato dalle due forze espresse da BC, CD; ma la forza espressa da DC opera parallelamente all' ostacolo, e perciò non agisce sopra di esso, dunque la forza, con la quale il corpo opera su di DC è espressa da BC; quindi la forza intiera sta a quella, che opera nell' urto come AC : CB; o vero come AC : AD; ma nel triangolo rettangolo l' ipotenusa sta ad un cateto, come il seno massimo al seno dell' angolo opposto allo stesso cateto, dunque la forza intiera, con la quale il corpo urta nell' ostacolo DC sta a quella, che opera nell' urto, come il seno massimo al seno dell' angolo della incidenza ACD.

149. TEOR. II. *Se un corpo perfettamente elastico urta obliquamente in un altro, il quale sia ostacolo invincibile perfettamente duro, esso ritornerà in dietro facendo l' angolo della incidenza eguale all' angolo della riflessione, e con velocità eguale a quella, che aveva prima dell' urto.*

Fig. 13. DIM. Il corpo A perfettamente elastico urti obliquamente per la direzione AB nell' ostacolo invincibile perfettamente duro DF. Dal punto A sopra DF si cali la perpendicolare AD, e si compisca il rettangolo DE, indi si tagli BF = BD, e con EB, BF si formi il rettangolo EF, nel quale si tiri la diagonale BC. Mo-

Movendosi il corpo per la direzione AB si potrà con AB esprimere la forza, con cui il corpo A urta in DF, ma questa forza si risolve nelle due espresse da DB, BE (§113); dunque il corpo urtando contro DF, urta come se fosse animato dalle due forze espresse da DB, BE, ma la forza espressa da DB non si altera perchè non opera contro dell' ostacolo, dunque il corpo urta come se fosse animato dalla sola forza espressa da EB; ma il corpo A essendo perfettamente elastico, ed urtando in un ostacolo invincibile riceve dalla sua elasticità per direzione opposta una forza eguale a quella, con cui aveva fatto l' urto, dunque il corpo dalla forza elastica riceve per la direzione di BE una forza, la quale è espressa dalla stessa BE; ma si è dimostrato, che la forza espressa da BD resta nel corpo, dunque il corpo dopo dell' urto è animato dalle due forze espresse da BE, BF, e perciò camminerà la diagonale BC del parallelogrammo EF, in un tempo eguale a quello nel quale prima dell' urto ha camminato AB. In oltre i due triangoli ADB, CFB hanno AD = CF, DB = BF, e gli angoli ADB, CFB retti, e perciò eguali, dunque sono perfettamente eguali, e perciò l' angolo ABD della incidenza è eguale all' angolo CBF della riflessione. Finalmente essendo i triangoli ADB, CFB perfettamente eguali, sarà anche AB = BC, ma dal corpo si percorrono AB, BC in eguali tempi; dunque AB, BC disegnano le velocità, che ha il corpo A prima, e dopo dell' urto, e perciò il corpo prima, e dopo dell' urto si muove con eguali velocità. 150.

150. AVV. I. Con lo stesso raziocinio si può dimostrare, che se un corpo perfettamente duro urta obliquamente in un ostacolo invincibile perfettamente elastico, o pure se un corpo perfettamente elastico urta in un ostacolo invincibile anche perfettamente elastico, dopo dell'urto il corpo ritornerà in dietro facendo l'angolo della riflessione eguale all' angolo della incidenza, e si muoverà dopo dell' urto con velocità eguale a quella, che aveva prima dell' urto.

151. AVV. II. Si noti, che se i corpi sono imperfettamente elastici, e DF è ostacolo invincibile, la forza elastica non può comunicare al corpo tutta la forza espressa da BE, ma bensì una minore, la quale sia espressa da qualunque porzione di BE, e sia BG, e compiscasi il rettangolo GF: il corpo camminerà la diagonale BH, la quale è minore di BC, e farà l'angolo della riflessione HBF minore di CBF, e perciò anche minore dell' angolo della incidenza ABD.

CAPITOLO XI.

Del moto equabilmente accelerato, ed equabilmente ritardato.

152. TEOR. I. *SE un corpo si muova con moto uniformemente accelerato partendosi dalla quiete, gli spazj percorsi dal principio del moto sono fra loro nella ragione de' quadrati de' tempi, ne' quali essi sono percorsi.*

Fig. 14. DIM. Rappresenti AB il tempo, nel quale le un corpo partendosi dalla quiete si muove con moto uniformemente accelerato, il quale si concepisca diviso nelle parti AD, DE, EF, FG, GH &c. infinitamente picciole: dal punto B sopra di AB si inalzi la perpendicolare BC, la quale disegni la velocità acquistata dal corpo nella fine del suo moto, e si unisca AC, indi per li punti D, E, F, G, H &c. si concepiscano tirate le rette DN, EO, FP, GQ, HR &c. parallele alla retta BC. Essendo per la costruzione DN, EO, FP, GQ &c. parallele, saranno i triangoli ADN, AEO, AFP, AGQ &c. tutti simili, ma ne' triangoli simili i lati, che sono intorno agli angoli eguali sono proporzionali, dunque AD, AE, AF, AG, AH, AI, AK, AL, AM, AB, sono proporzionali alle rette DN, EO, FP, GQ, HR, IS, KT, LU, MX, BC; ma nel moto equabilmente accelerato i tempi sono nella ragione delle corrispondenti velocità (§ 89). Dunque DN, EO, FP, GQ &c. sono proporzionali alle velocità acquistate ne' tempi espressi da AD, AE, AF, AG &c. ma BC per ipotesi esprime la velocità aquistata nel tempo espresso da AB, dunque DN, EO, FP, GQ, HR &c. disegnano le velocità acquistate ne' tempi espressi da AD, AE, AF, AG &c. In oltre sebbene nel moto equabilmente accelerato le velocità vadano continuamente crescendo, pure in un tempo infinitamente picciolo la velocità si può considerare come costante, quindi il corpo ne' tempi espressi da FG, KL si può considerare come se si muovesse

veſſe con moto equabile con le velocità diſegnate da FP, KT, ma gli ſpazj deſcritti con moto equabile ſono in ragione compoſta dalla ragione de' tempi, e dalla ragione delle velocità, (§ 98) ed i tempi ſono eſpreſſi da FG, KL, le velocità ſono eſpreſſe da FP, KT, dunque gli ſpazj ſono in ragione compoſta da quella di FG : KL, e da quella di FP : KT, o vero in ragione del rettangolo fatto da FG, FP, al rettangolo fatto da LK, KT; ma gli ſpazietti FGQP, KLUT ſi poſſono ſenza ſenſibile errore conſiderare come rettangoli fatti da FG, FP, e da KL, KT, dunque gli ſpazietti deſcritti negli elementi infinitamente piccioli di tempo eſpreſſi da FG, KL ſono nella ragione degli elementi corriſpondenti del triangolo ABC. Con lo ſteſſo raziocinio ſi dimoſtra, gli altri elementi del triangolo ABC eſſere nella ragione degli ſpazj descritti ne' tempi corrispondenti, quindi ſarà lo ſpazio deſcritto nel tempo eſpreſſo da AG allo ſpazio deſcritto nel tempo eſpreſſo da AB come la ſomma degli elementi del triangolo AGQ alla ſomma degli elementi del triangolo ABC, o vero come il triangolo AGQ al triangolo ABC; ma queſti triangoli ſono ſimili, e perciò nella ragione de' quadrati de' lati omologhi AG, AB, dunque gli ſpazj deſcritti ne' tempi diſegnati da AG, AB, ſono nella ragione de' quadrati de' medeſimi tempi; ſicchè, &c.

153. COR. I. Nel moto equabilmente accelerato le velocità ſono nella ragione de' tempi, ne' quali i corpi le acquiſtano (§ 89), dunque i cor-

i corpi, che si muovono con moto equabilmente accelerato descrivono spazj, i quali sono nella ragione de' quadrati delle velocità, che hanno acquistate in percorrerli.

153. COR. II. Quindi se si divida in qualunque numero di parti eguali il tempo, nel quale un corpo partendosi dalla quiete, descrive con moto uniformemente accelerato qualsivoglia spazio, gli spazj, che il corpo avrà descritti nella fine del tempo 1°, 2°, 3°, 4°, &c. saranno nella ragione de' numeri 1, 4, 9, 16 &c. e perciò gli spazj descritti ne' tempi 1°, 2°, 3°, 4° &c. separatamente saranno nelle ragioni di 1, 4 – 1, 9 – 4, 16 – 9 &c. o vero nella ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7, &c.

154. TEOR. II. *Se un corpo partendosi dalla quiete si muova con moto equabilmente accelerato, lo spazio, che descrive in qualsivoglia tempo, è la metà dello spazio, che descriverebbe con moto equabile nel medesimo tempo, e con la velocità acquistata nella fine del moto.*

DIM. Disegni AB il tempo, nel quale un corpo partendosi dalla quiete si muove con moto uniformemente accelerato, e dal punto B su di AB s'intenda alzata la perpendicolare BC, la quale disegni la velocità, che il corpo ha acquistata nella fine del moto, si unisca AC, e si compisca il rettangolo BD. In AB s' intenda presa ad arbitrio la particella infinitamente picciola EG, la quale disegni un elemento del tempo, nel quale il corpo si muove, e per li *Fig.* 15.
pun-

punti E, G s' intendano tirate le rette EF, GH parallele a BC, le quali incontrano AC ne' punti I, K; disegneranno EI, GK le velocità corrispondenti ai tempi AE, AG (§.89) Potendosi il moto equabilmente accelerato nel tempo infinitamente picciolo considerare come equabile, lo spazio descritto nel tempo EG con moto equabilmente accelerato si potrà considerare come descritto con moto equabile con la velocità costante espressa da EI; quindi sarà lo spazio descritto nel tempo EG con la velocità espressa da EI a quello descritto nel medesimo tempo con la velocità costante espressa da BC o vero da EF, come EI : EF, ma i due spazj EGKI, EGHF si possono considerare come due rettangoli, i quali hanno la stessa altezza EG, e perciò sarà EI : EF = EGKI : EGHF, dunque lo spazio descritto in un elemento di tempo con moto equabilmente accelerato sarà allo spazio descritto nello stesso tempo con la velocità acquistata nella fine del moto come l' elemento del triangolo BAC al corrispondente elemento del rettangolo BD. Similmente si dimostra, che in ogni altro istante del tempo, lo spazio descritto con moto equabilmente accelerato sta allo spazio descritto con moto equabile con la velocità acquistata nella fine del moto, come l' elemento del triangolo ABC al corrispondente elemento del rettangolo BD. Dunque l' intiero spazio descritto con moto equabilmente accelerato nel tempo AB sta allo spazio descritto nello stesso tempo con moto equabile con la velocità costan-

costante acquistata nella fine del moto espressa da BC come il triangolo ABC al rettangolo BD, ma il triangolo ABC è la metà del rettangolo BD, dunque &c.

156. TEOR.III. *Se un corpo si muove con moto uniformemente ritardato, insino a tanto, che si distrugge l'intiero suo moto, descriverà uno spazio, il quale sarà la metà di quello, che avrebbe descritto nello stesso tempo, se si fosse mosso con moto equabile, e con velocità costante, eguale a quella comunicatagli nel principio del moto.*

DIM. Con AB si disegni il tempo, nel quale il corpo si muove con moto equabilmente ritardato, e dal punto B sopra AB sia alzata la perpendicolare BC, la quale disegni la velocità, con cui il corpo si parte; si unisca AC, e si compisca il rettangolo BD; in AB si prenda una parte infinitamente picciola EG, e per E, G si tirino le rette EF, GH parallele a BC, che incontrino AC ne' punti I, K.

Essendo EG una porzione infinitamente picciola del tempo, nel quale il corpo si muove con moto equabilmente ritardato, si potrà considerare, che il corpo in questo picciolo tempo si muova con moto equabile, e che GK esprima la velocità costante, la quale è eguale a quella, che il corpo ritiene dopo di essersi mosso con moto equabilmente ritardato nel tempo BG, e perciò sarà lo spazio percorso nel tempo EG con la velocità BC a quello percorso nello stesso tempo con la velocità

GK = BC : GK (§ 98) = GH : GK; ma potendosi li due spazj EGHF, EGKI considerare come due rettangoli, i quali hanno la stessa altezza EG, essi saranno nella ragione di GH : GK; dunque anche l' elemento dello spazio descritto con moto equabile con la velocità BC sta a quello descritto con moto uniformemente ritardato nello stesso elemento di tempo espresso da EG come l'elemento EGHF del rettangolo BD al corrispondente elemênto EGKI del triangolo ABC. Così si dimostra, che ogni altro elemento dello spazio descritto con moto equabile, e con la velocità BC sta al corrispondente elemento dello spazio descritto con moto equabilmente ritardato come l' elemento del rettangolo BD al corrispondente elemento del triangolo BAC. Dunque l' intiero spazio descritto con moto equabile sta a quello descritto nello stesso tempo con moto equabilmente ritardato come il rettangolo BD al triangolo ABC, ma il rettangolo BD è il doppio del triangolo ABC. Dunque &c.

157. COR. I. Quindi 1.° lo spazio percorso da un corpo, che si parte dalla quiete con moto uniformemente accelerato, è eguale allo spazio, che nel medesimo tempo dal medesimo corpo sarebbe percorso con moto equabile, e con la metà della velocità acquistata nella fine del moto 2.° lo spazio percorso da un corpo con moto uniformemente ritardato infino a tanto, che il moto si estingua, è eguale allo spazio, che con moto equabile dal medesimo corpo sarebbe percorso nello stesso

stesso tempo con velocità eguale alla metà di quella, che gli era stata comunicata nel principio del moto.

158. COR. II. Quindi il corpo partendosi dalla quiete con la velocità espressa da BC, nel tempo disegnato da AB, descrive con moto equabilmente ritardato uno spazio, il quale sta a quello, che il medesimo corpo con la velocità GK descriverebbe nel tempo AG, nella ragione de' spazj, che con moto equabile descriverebbe ne' medesimi tempi con le metà delle corrispondenti velocità espresse da BC, GK; ma gli spazj descritti con moto equabile, sono in ragione composta da quella de' tempi, e da quella delle velocità (§98); dunque gli spazj descritti con moto equabilmente ritardato ne' tempi AB, AG sono nella ragione composta da quella di AB : AG, che esprimono i tempi, e da quella di $\frac{1}{2}$ BC : $\frac{1}{2}$ GK, o vero di BC : GK, che esprimono le velocità; ma AB : AG = BC : GK, dunque questi spazj sono nella ragione de' quadrati di AB, AG, o pure de' quadrati di BC, GK. Sicchè se un corpo si muove con moto equabilmente ritardato, gli spazj, che restano a percorrere fino alla estinzione del moto, sono nella ragione de' quadrati de' tempi, che si impiegano a percorrerli, o pure nella ragione de' quadrati delle velocità, che il corpo ha quando incomincia a descriverli.

159. COR. III. Quindi se con AD si disegna il tempo, nel quale un corpo partendosi con *Fig.16.*

qualunque velocità si muove con moto uniformemente ritardato, insino a tanto che il suo moto si estingue, e questo tempo si divide in qualsivoglia numero di parti eguali AB, BC, CE, ED, &c., gli spazj percorsi ne' successivi tempi eguali saranno come i numeri dispari presi in ordine contrario, incominciando da quello, che verrà determinato dal numero delle parti, nelle quali sarà diviso il tempo; così se si intende il tempo, che è espresso da AD, diviso in quattro parti eguali AB, BC, CE, ED, saranno gli spazj da percorrere ne' tempi AD, BD, CD, ED nella ragione de' quadrati di 4, 3, 2, 1, o vero nella ragione di 16, 9, 4, 1 (§ 158); e perciò gli spazj descritti ne' tempi AB, BC, CE, ED saranno nella ragione di 16 — 9, 9 — 4, 4 — 1, o vero nella ragione di 7, 5, 3, 1.

160. TEOR. IV. *Se un corpo si muove con moto equabilmente ritardato, gli spazj percorsi dal principio del moto sono fra loro in ragione composta da quella de' tempi, che si impiegano a percorrerli, e da quella de' residui, che si hanno qualora dal doppio del tempo, che vi bisogna per estinguersi il moto, si sottraggono i tempi impiegati a percorrere gli stessi spazj.*

DIM. Partasi il corpo dal punto A con moto equabilmente ritardato, e descriva la retta AD in maniera, che giunto il corpo in D, il moto si ritrovi estinto. Con T, t, r si disegnino i tempi, che il corpo impiega ga a descrivere gli spazj AD, BD, CD. Si è dimostrato (§ 158.) $AD : BD = T^2 : t^2$

$$AD : CD = T^2 : r^2.$$

Quindi sarà convertendo $AD : AB = T^2 : T^2 - t^2$

$$AD : AC = T^2 : T^2 - r^2$$

E invertendo la prima di queste ragioni sarà

$$AB : AD = T^2 - t^2 : T^2$$
$$AD : AC = T^2 : T^2 - r^2$$

Quindi le tre grandezze AB, AD, AC hanno ragione ordinata alle tre altre $T^2 - t^2$, T^2, $T^2 - r^2$, onde ordinando sarà $AB : AC = T^2 - t^2 : T^2 - r^2$; ma la differenza de'quadrati di due grandezze è eguale al prodotto fatto dalla somma, e dalla differenza delle stesse grandezze, dunque $AB : AC = (T + t)(T - t) : (T + r)(T - r)$, o vero AB sta ad AC in ragione composta da quella di $T + t : T + r$, e da quella di $T - t : T - r$; ma $T - t$, $T - r$ disegnano i tempi, che il corpo impiega a percorrere AB, AC, e $T + t$, $T + r$ disegnano i residui, che si hanno qualora da $2T$ si sottraggono successivamente $T - t$, $T - r$. Dunque &c.

CAPITOLO XII.

Delle salita, e discesa libera de' corpi per la verticale, e per qualunque piano inclinato.

161. DEF. I. Si dice *piano inclinato* quello, che fa con lo piano orizzontale qualunque angolo obliquo.

Fig. 18. 162. DEF. II. Se con AB si disegna qualunque piano inclinato, con CB il piano orizzontale, ed AC è la perpendicolare calata dal punto A sopra l' orizzontale CB, del piano inclinato si diranno AB *la lunghezza*, AC *l'altezza*. ed ABC *l' angolo della inclinazione*.

163. DEF. III. Di qualunque corpo si dice *gravità assoluta* quella, che lo spinge per la verticale, e *gravità respettiva* quella porzione della gravità assoluta, che l'obbliga a discendere per lo piano inclinato.

164. TEOR. I. *Supposta la Terra di figura sferica le direzioni della gravità sono al centro di essa.*

Fig. 17. DIM. La sfera BEF disegni la terra, AB la direzione, per cui un corpo animato dalla forza di gravità cade, e CD una retta la quale sia tirata nel piano tangente della terra in B, e passi per lo stesso punto B, e sia congiunto il raggio OB.

La direzione, per cui i corpi cadono, qualora sono animati dalla gravità, è perpendicolare alla superficie della terra (§ 15), dunque AB è perpendicolare alla superficie EBF nel punto B; ma ma l' elemento della superficie si confonde con l' elemento corrispondente del piano tangente nel luogo del contatto, dunque AB è perpendicolare al piano tangente della terra nel punto B, e perciò è perpendicolare alla retta CD tirata per lo punto B nel medesimo piano, onde l'angolo ABC è retto; ma l'angolo CBO fatto dalla tangente, e dal raggio è anche retto, dunque dall' estremo B della retta CB sono tirate per direzioni opposte due rette BA, BO, che formano con la retta CB i due angoli ABC, CBO presi insieme eguali a due retti, dunque le due rette OB, BA formano una retta continuata. Sicchè &c.

165. AVV. Bisogna avvertire, che le direzioni, per cui i corpi animati dalla gravità tendono alla superficie della terra, sarebbero verso il centro di essa, se la terra, fosse perfettamente sferica, ma perchè la terra è alquanto schiacciata a' poli, ed elevata all' equatore (come a suo luogo dimostreremo), perciò le dette direzioni della gravità non sono esattamente verso il centro della terra, ma ad un di presso.

166. OSS. I. Allora si sente il peso di un corpo qualora si impedisce la sua discesa verso il centro della terra.

167. COR. Quindi il peso di un corpo è effetto dello sforzo, che la gravità fa, spingendolo verso il centro della terra.

168. OSS. II. Ogni corpo terrestre conserva sempre lo stesso peso sebbene talvolta la sua figura si alteri, anzi il suo peso resta sempre lo stesso, sebbene il corpo sia trasportato a

qualunque altezza, o a qualunque profondità accessibile; ma il peso è effetto della gravità, dunque anche la gravità è sempre la stessa, sebbene il corpo sia trasportato a qualsivoglia altezza, o a qualsivoglia profondità accessibile.

169. AVV. I. Se noi paragoniamo le altezze, e le profondità, alle quali possiamo giungere per osservare gli effetti della gravità, col raggio della terra, vedremo, che quelle sono molto picciole, quindi le chiameremo *distanze non molto grandi dalla surpeficie della terra*.

Di più allor che in questo trattato verremo a parlare degli effetti della gravità nella salita, e discesa libera de' corpi, supporremo sempre i corpi situati a distanze non molto grandi dalla superficie della terra, e finalmente allor che diremo *un corpo salire, o discendere liberamente*, intenderemo, che in questi movimenti esso non incontri alcuna resistenza estrinseca.

170. AVV. II. Nel trattato della Cosmografia dimostreremo 1.° , che la gravità, nel corpo, il quale si ritrova situato nel centro della terra, è nulla, 2.° , che nel corpo, il quale si ritrova situato nelle viscere della terra, varia in ragione delle distanze, che quello tiene dal centro di essa 3.° , che nel corpo, il quale è situato fuori della superficie della terra, varia in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, che il corpo ha dal centro di essa 4.° , che questa gravità è quella, che mantiene la luna nella sua orbita intorno alla terra 5.° , che essa non differisce dalle forze centripete, che continuamente fanno

azione

azione sopra li pianeti per ritenerli nelle loro orbite, qualora esse si combinano con la forza a' pianeti comunicata nel principio della creazione, per la quale sola essi anderebbero per la tangente della curva, che descrivono.

171. TEOR. II. *Ogni corpo lasciato in libertà cade con moto equabilmente accelerato.*

DIM. Un corpo muovesi con moto equabilmente accelerato, qualora in ogni istante fa eguali aumenti di velocità (§ 88), ma il corpo, che si muove liberamente per la forza di gravità, fa in ogni istante eguali aumenti di velocità (§ 168), dunque il corpo, il quale si muove per la forza di gravità, si muove con moto equabilmente accelerato. Sicchè &c.

172. TEOR. III. *Se un corpo sale liberamente per la verticale, si muove con moto equabilmente ritardato.*

DIM. Un corpo muovesi con moto equabilmente ritardato, qualora esso in ogni istante fa eguali perdite di velocità (§88), ma il corpo, che sale liberamente per la verticale, in ogni istante fa eguali perdite di velocità (§ 168), dunque il corpo, che liberamente sale per la verticale, muovesi con moto equabilmente ritardato.

173. AVV. Si noti, che se un corpo spinto da qualunque forza sale per una verticale con moto equabilmente ritardato, allora finisce di salire quando la gravità con le replicate sue azioni eguali ha estinta la intiera forza, con cui il corpo aveva incominciata la salita, cioè quando il corpo si è mosso per tanto tempo, quanto ne

ne ha bisogno la gravità per comunicargli tanto moto, quanto ne ha avuto per salire, quindi 1.° da tanta forza deve essere animato un corpo per salire liberamente per una data altezza, quanta la gravità a lui ne avrebbe comunicata discendendo per la medesima altezza, 2.° tanto tempo impiega il corpo a salire sino ad una data altezza, quanto ne impiega discendendo dalla medesima altezza, 3.° il corpo salendo passa per ciascheduno punto della verticale con li medesimi gradi di velocità, con li quali vi passa scendendo liberamente dopo di essersi il suo moto distrutto nella salita.

174. ESP. Se si fa uno spazio privo di aria, ed in esso si fanno cadere nello stesso istante di tempo due corpi di masse molto disuguali, si osserva, che ambidue descriveranno eguali spazj in eguali tempi.

175. AVV. Bisogna notare, che questo fenomeno si osserva ancora quando nell' aria si fanno cadere due corpi, i quali abbiano un grande peso sotto picciolo volume, imperocchè contro di essi l' aria non fa sensibile resistenza.

176. COR. Da quello, che di sopra si è detto si deduce, che i corpi nel primo istante della loro discesa si muovono con eguali gradi di velocità, e che le velocità, che si ritrovano avere nel 2.°, 3.°, 4.° tempo &c. sono sempre respettivamente eguali, quindi tutti i corpi, che partono dalla quiete, e scendono liberamente, 1.° in tempi eguali percorrono spazj eguali, 2.°

in

in tempi eguali acquistano eguali gradi di velocità, 3.° mentre vanno discendendo, ritrovansi in qualunque tempo egualmente distanti dalli punti, da' quali si sono partiti, e sempre forniti di eguali gradi di velocità.

177. TEOR. IV. *Le gravità de' corpi sono proporzionali alle masse di essi.*

DIM. Le gravità de' corpi sono forze continuate costanti, ma le forze continuate costanti sono nella ragione de' moti, che producono operando in tempi eguali (§ 93), dunque le gravità de' corpi sono nella ragione de' moti, che producono operando ne' corpi in tempi eguali; ma questi moti sono in ragione composta da quella delle masse de' corpi, e da quella delle velocità da essi acquistate (§ 101), dunque le gravità sono in ragione composta da quella delle masse de' corpi, e da quella delle velocità da essi acquistate in tempi eguali; ma le velocità acquistate in tempi eguali sono eguali (§ 176.), dunque le gravità de' corpi sono in ragione delle loro masse.

178. COR. I. pesi de' corpi sono effetti delle gravità (§ 167), dunque sono ad esse proporzionali; ma le gravità de' corpi sono proporzionali alle masse di essi, dunque i pesi de' corpi sono proporzionali alle loro masse.

179. LEM. *Se un corpo è posto sopra di un piano inclinato, la sua gravità assoluta sta alla respettiva come la lunghezza del piano sta alla sua altezza.*

DIM. Rappresenti ABC qualunque piano *Fig.* 18.
In-

inclinato, del quale AB sia la lunghezza, ed AC l'altezza, sopra di esso si intenda in qualunque luogo posto il corpo O, e sia OG la verticale, per cui viene il corpo spinto dalla sua gravità assoluta; da O sopra di AB si cali la perpendicolare OF, e si compisca il rettangolo FE.

La gravità del corpo O fa azione su di quello per la verticale OG, quindi se essa si esprime con OD, essa farà azione sopra del corpo come se sopra di lui facessero azione le due forze espresse da FO, OE, o vero da OF, FD (§ 113); ma di queste due forze quella espressa da OF altro non fa, che premere il corpo contro di AB, dunque l'altra espressa da FD esprime la forza, per cui il corpo è spinto per la direzione del piano inclinato, e perciò la gravità assoluta del corpo O sta alla respettiva come OD : DF. In oltre i due angoli ODF, BDG sono verticali, e perciò eguali, quindi i due triangoli ODF, BDG hanno i due angoli OFD, DGB retti, gli altri due ODF, BDG dimostrati eguali, dunque sono simili, e perciò OD : DF = BD : DG; ma AC, DG sono parallele, dunque i due triangoli BAC, BDG sono simili, e perciò BA : AC = BD : DG = OD : DF; ma si è dimostrato, che OD : DF come la gravità assoluta alla respettiva del corpo O, dunque la gravità assoluta del corpo O sta alla sua respettiva come la lunghezza AB del piano inclinato alla sua altezza AC.

180. COR. I. Sicchè se un corpo è posto sopra

sopra di un piano inclinato, la sua gravità assoluta sta alla respettiva come il seno massimo al seno dell' angolo della inclinazione, imperciocchè nel triangolo rettangolo la ipotenusa sta ad uno de' cateti come il seno massimo al seno dell' angolo opposto al medesimo catero.

181. COR. II. Quindi se si esprimono con G la gravità assoluta di un corpo, con U, u le gravità sue respettive, qualora esso sia posto sopra due piani diversamente inclinati all' orizzonte, con R il seno massimo, e con S, s li seni degli angoli delle inclinazioni de' medesimi piani, sarà $U : G = S : R$

$$G : u = R : s$$

Quindi U, G, u hanno ragioni ordinate con S, R, s, dunque ordinando $U : u = S : s$; cioè se un medesimo corpo si mette sopra due piani diversamete inclinati all' orizzonte, le gravità respettive, che esso avrà sopra di quelli, saranno nella ragione de' seni degli angoli delle loro inclinazioni.

182. TEOR. V. *Ogni corpo qualora discende liberamente per un piano inclinato discende con moto uniformemente accelerato, e qualora sale per esso, si muove con moto uniformemente ritardato.*

DIM. Qualora un corpo è situato su di un piano inclinato, la lunghezza del piano sta alla sua altezza come la gravità assoluta del corpo alla sua gravità respettiva (§ 179), ma la gravità assoluta del corpo è sempre la stessa, qualunque sia il punto del piano, nel quale è situa-

ſituato il corpo (§168) dunque la gravità respettiva sarà ancora coſtantemente la ſteſsa; e perciò un corpo nel diſcendere per un piano inclinato verrà in ogni iſtante spinto da una forza coſtante, la quale produrrà in ogni momento di tempo eguali aumenti di velocità; ma i corpi, i quali ſi muovono facendo in ogni iſtante eguali aumenti di velocità, ſi muovono con moto equabilmente accelerato, dunque il corpo, che diſcende per lo piano inclinato, ſi muove con moto equabilmente accelerato.

Nella ſalita poi del corpo per lo piano inclinato, la gravità reſpettiva continuamente opponendoſi alla forza, da cui il corpo è animato a salire per lo piano inclinato, in ogni iſtante diſtrugge eguali gradi di velocità, ma quando un corpo ſi muove facendo in ogni iſtante eguali perdite di velocità ſi muove con moto uniformemente ritardato, Dunque &c.

183. AVV. Ciò, che ſi è detto (§.175) relativamente a' corpi, che ſalgono per la verticale, deve intenderſi anche detto relativamente a' corpi, che ſalgono per lo piano inclinato, per lo quale eſſi ſalendo ſi muovono con moto equabilmente ritardato.

184. COR. I. Quindi qualora un corpo diſcende liberamente per una verticale, ſpinto dalla ſua gravità, o per un piano inclinato, ſpinto dalla gravità reſpettiva 1.° la ſua velocità creſce in ragione del tempo della diſceſa (§ 89), 2.° gli ſpazj numerati dal principio della diſceſa ſono nella ragione de' quadrati de' tempi, ne'

quali

quali li percorre (§ 152), e perciò nella ragione de' quadrati delle velocità, che acquista nel percorrerli (§ 153), 3.° sì i tempi, ne' quali percorre gli spazj numerati dal principio della discesa, che le velocità acquistate per li medesimi spazj sono in ragione delle radici quadrate de' spazj medesimi, 4.° gli spazj, che successivamente percorre in eguali intervalli di tempo sono nella ragione de' numeri dispari, (§ 154) 5.° lo spazio, che corre per la verticale, o per lo piano inclinato partendosi dalla quiete, è sempre la metà di quello, che correrebbe nello stesso tempo con moto equabile con la velocità acquistata nella fine della discesa per lo stesso spazio (§ 155).

185. COR. II. Se poi un corpo é spinto da sotto verso sopra, o per la verticale, o per la direzione di qualunque piano inclinato 1° giunge a quel punto della verticale, o del piano inclinato, da cui discendendo acquisterebbe nella fine della discesa la stessa velocità, che aveva nel principio della salita (§173 §183), 2.° con la stessa velocità passa per li punti della verticale, o del piano inclinato salendo, e scendendo (§173 §183) 3.° gli spazj numerati dal principio della salita sono nella ragione composta da quella de' tempi, che impiega a percorrerli, e dalla ragione de' tempi, che si hanno con togliere i tempi, che impiega a percorrerli, dal doppio di quelli, che impiega per la intera salita (§160), 4.° gli spazj, che successivamente percorre in eguali intervalli di tempo sono nella ragione de' numeri di-

dispari 1, 3, 5, 7, 9 &c. presi con ordine contrario (159).

CAPITOLO XIII.

Del moto de' corpi per li piani inclinati paragonato con quello per la verticale.

186. TEOR. I. *La velocità, che acquista un corpo liberamente scendendo per qualsivoglia piano inclinato sta alla velocità, che acquisterebbe, se nello stesso tempo scendesse per la verticale, come l'altezza del piano inclinato alla sua lunghezza.*

DIM. Sì il corpo, che discende per lo piano inclinato, che quello, che discende per la verticale si muovono con moto equabilmente accelerato (§.182 §.171), quindi la velocità, che il corpo acquista movendosi per lo piano inclinato sta a quella, che acquisterebbe nello stesso tempo movendosi per la verticale come la velocità acquistata nel primo istante per lo piano inclinato a quella, che acquisterebbe nel primo istante per la verticale; ma queste velocità sono effetti della gravità respettiva, e della gravità assoluta, dunque sono nella ragione della gravità respettiva all' assoluta; ma la gravità respettiva sta all' assoluta come l'altezza del piano alla lunghezza del medesimo piano (§179), dunque anche la velocità, che un corpo acquista per lo piano inclinato in un dato tempo sta a quella, che nel medesimo tempo avrebbe acquistata discendendo per la verticale co-

me

me l'altezza del piano inclinato alla ſua lunghezza.

187. COR. Quindi ſe più corpi diſcendono per uno ſteſſo piano inclinato, le velocità da eſſi acquiſtate in tempi eguali hanno eguali ragioni alle velocità, che acquiſterebbero nello ſteſſo tempo diſcendendo per la verticale, ma le velocità, che acquiſtano diverſi corpi diſcendendo per la verticale in eguali tempi, ſono eguali, dunque anche eguali ſaranno le velocità, che acquiſtano diverſi corpi diſcendendo in tempi eguali per lo ſteſſo piano inclinato.

188. TEOR. II. *Se due corpi diſcendono, uno per qualunque piano inclinato, un' altro per la verticale, in tempi eguali percorrono ſpazj, che ſono fra loro come l'altezza del piano alla ſua lunghezza.*

DIM. Siano AE, AF gli ſpazj, che nello ſteſſo tempo ſono percorſi da due corpi per lo piano inclinato AB, e per la verticale AC. *Fig. 19.*

Lo ſpazio AE è eguale a quello, che il corpo nello ſteſſo tempo percorrerebbe, movendoſi con moto equabile con la metà della velocità acquiſtata in E; lo ſpazio AF è eguale a quello, che il corpo percorrerebbe con moto equabile con la metà della velocità acquiſtata in F (§. 157.), ma qualora due corpi ſi muovono con moto equabile in tempi eguali, gli ſpazj corſi ſono nella ragione delle velocità, con le quali eſſi ſi muovono (§. 98.), dunque AE ſta ad AF come la metà della velocità acquiſtata in E alla metà della velocità acquiſtata in F; ma le grandezze sono proporzionali alle loro parti aliquote simili, dunque AE sta ad AF come la velocità dal corpo acquistata discendendo per AE, alla velocità dall' altro acquistata discendendo per AF; ma queste velocità sono nella ragione di C A : AB (§. 186.), dunque ancora AE : AF = C A : AB. Sicchè &c.

189. TEOR. III. *Se gli estremi de' spazj, che un corpo può percorrere in tempi eguali per l' altezza, e per la lunghezza del piano inclinato, si uniscono con una retta, questa retta sarà perpendicolare al piano inclinato.*

DIM. Rappresentino AF, AE gli spazj, che un corpo in tempi eguali può percorrere per la altezza, e per la lunghezza del piano inclinato nello stesso tempo, e sia unita la retta FE. Dal vertice C dell' angolo retto si cali sopra del piano inclinato AB la perpendicolare CD.

Per ipotesi, gli spazj AF, AE si descrivono in tempi eguali, dunque AF : AE = AB : AC (§. 186.); ma essendosi dal vertice C dell' angolo retto ACB calata su la ipotenusa AB la perpendicolare CD, sarà BA : AC = CA : AD, dunque CA : AD = FA : AE; quindi i due triangoli CAD, FAE hanno l' angolo A comune, ed i lati intorno ad esso proporzionali, e perciò sono simili; ma i triangoli simili sono equiangoli, dunque l' angolo AEF = ADC; ma ADC è retto, dunque anche retto è l' angolo AEF, e perciò FE è ad AB perpendicolare. Sicchè &c.

190. AVV. Di questa proposizione è vera anche

che la conversa, cioè che se da qualunque punto F della verticale AC si cala sopra il piano inclinato AB la perpendicolare FE, gli spazj AF, AE devono essere percorsi nello stesso tempo.

In fatti, se ciò si niega, sia AI lo spazio, che si percorrerebbe dal corpo per lo piano inclinato nello stesso tempo, che per la verticale si percorrerebbe lo spazio AF, sarà AF : AI = AB : AC (§. 188.); ma i triangoli ACB, ACD sono simili, quindi BA : AC = AC : AD, dunque AF : AI = AC : AD; ma CD, FE sono perpendicolari ad AB, dunque anche i triangoli CAD, FAE sono simili, e perciò CA : AD = FA : AE; dunque FA : AE = FA : AI; ma le grandezze, alle quali una terza ha eguali ragioni sono eguali, dunque AI = AE; ma ciò ripugna, dunque ripugna ancora, che gli spazj AF, AE non siano descritti nello stesso tempo.

191. TEOR. IV. *La velocità, che acquista un corpo discendendo per la intiera altezza del piano inclinato sta alla velocità, che acquisterebbe discendendo in uno eguale tempo per lo medesimo piano, come la altezza del piano inclinato allo spazio percorso nel piano medesimo.*

Rappresenti ABC qualunque piano inclinato, e *Fig. 20.* dall' estremo C della sua altezza, sopra del piano inclinato AB si cali la perpendicolare CD; disegnerà AD lo spazio, che il corpo percorrerebbe per lo piano inclinato nello stesso tempo, che discendendo verticalmente descriverebbe la intiera altezza AC (§. preced.). Di più la velocità, che ha il corpo acquistata scendendo per AC sta a quella, che acquisterebbe scendendo per AD = AB : AC (§. 186.), ma i triangoli ACD, ACB sono simili, è perciò AB : AC = AC : AD, dunque la velocità, che ha acquistata il corpo scendendo per AC sta a quella, che acquisterebbe scendendo nello stesso tempo per AB = AC : AD. Sicchè &c.

192. TEOR. V. *Se un corpo discende da un punto di una orizzontale sopra qualunque altra orizzontale, acquista sempre la stessa velocità, tanto se vi discende per la verticale, quanto se vi discende per qualunque piano inclinato.*

DIM. Rappresenti ABC qualunque piano inclinato, e dal punto C sopra di AB si cali la perpendicolare CD; disegnerà AD lo spazio, che il corpo percorrerebbe per lo piano inclinato nello stesso tempo, che verticalmente cadendo descriverebbe l' altezza AC (§. 188.). Inoltre la velocità, che un corpo acquista scendendo per AB sta alla velocità, che acquisterebbe se scendesse per AD = $\sqrt{AB} : \sqrt{AD}$. (§.184.), ma AB, AC, AD sono continuamente proporzionali, dunque sarà AB : AC = $\sqrt{AB} : \sqrt{AD}$, e perciò la velocità, che acquista un corpo scendendo per AB sta alla velocità, che acquisterebbe se scendesse per AD = BA : AC, o pure = AC : AD; ma la velocità, che acquista un corpo scendendo per AC sta alla velocità, che acquisterebbe se scendesse per AD = AC : AD, (§.186.) dunque la velocità, che un corpo acquista scendendo per AC sta alla velocità, tà, che acquisterebbe se scendesse per AD come la velocità, che acquista un corpo scendendo per AB alla velocità, che acquisterebbe se scendesse per la stessa AD; ma le grandezze, che hanno eguali ragioni ad una terza, sono eguali fra loro; dunque la velocità, che un corpo acquista scendendo per l'intiero piano inclinato è eguale alla velocità, che acquisterebbe se scendesse per l'altezza del medesimo piano. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che un corpo scendendo per qualunque altro piano inclinato, del quale AC sia l'altezza, acquista sempre la stessa velocità, che acquisterebbe se scendesse per la verticale AC. Dunque &c.

193. TEOR. VI. *Il tempo, che un corpo impiega a discendere per la intiera lunghezza di un piano inclinato sta al tempo, che impiegherebbe a discendere per la sua altezza, come la lunghezza del piano alla altezza.*

DIM. Rappresenti ABC qualunque piano inclinato, e dal punto C sopra di AB si cali la perpendicolare CD.

Il tempo, che impiega un corpo a percorrere AB sta al tempo, che impiegherebbe a percorrere AD $= \sqrt{AB} : \sqrt{AD}$ (§. 184.), ma essendo AB, AC, AD continuamente proporzionali, sarà AB : AC $= \sqrt{AB} : \sqrt{AD}$, dunque il tempo, che un corpo impiega a percorrere AB, sta al tempo, che impiegherebbe a percorrere AD $=$ AB : AC; ma il tempo, che il corpo impiega a percorrere AC è eguale a quello, che impiegherebbe a percorrere AD (§. 190.), dunque il tempo, che un corpo impiega a percorrere l'intiero piano inclinato AB, sta al tempo, che impiegherebbe a percorrere l'altezza AC del piano inclinato come la lunghezza AB, all'altezza AC del medesimo piano inclinato.

194. TEOR. VII. *Se un semicerchio ha il suo diametro verticalmente situato, e da' suoi estremi sono tirate in esso quante corde si vogliono, il corpo percorrerà queste corde nel medesimo tempo, in cui percorrerebbe il diametro se scendesse verticalmente.*

Fig.21. DIM. Rappresenti ACB un semicerchio, il quale abbia il diametro AB verticalmente situato, e da' punti A, B in esso siano tirate le corde AC, AD, BC, BD: &c.

Gli angoli ACB, ADB sono retti, perchè fatti nel mezzo cerchio, dunque le rette BC, BD sono perpendicolari ad AC, AD. Di più le rette AC, AD disegnano le porzioni di due piani inclinati, delli quali AB è l'altezza, ma la perpendicolare calata sopra il piano inclinato da un punto della sua altezza, taglia del piano inclinato uno spazio, il quale da un corpo, che per lo medesimo piano discende, si descrive in un tempo eguale a quello, che il medesimo corpo impiegherebbe per descrivere la corrispondente porzione dell' altezza (§. 190.), dunque il corpo, che discende per le rette AC, AD, le percorre in tempo eguale a quello, che impiegherebbe a percorrere il diametro AB, se cadesse verticalmente.

In oltre per D si tiri la retta DE parallela ad AB, si taſi tagli DE = AB, e ſi uniſca BE. Eſſendo per coſtruzione AB, DE eguali, e parallele, anche eguali, e parallele ſaranno le due AD, BE; di più le rette AB, DE ſono parallele, vengono tagliate dalla terza BD, quindi gli angoli alterni ADB, DBE ſono eguali; ma ADB è retto, dunque retto è ancora l'angolo DBE, e per conſeguenza il corpo, che diſcende per la corda DB, impiegherà tanto tempo a percorrere DB, quanto ne impiegherebbe a percorrere DE, ſe ſcendeſſe verticalmente; ma per coſtruzione DE = AB, dunque il tempo, che un corpo verticalmente ſcendendo impiegherebbe a percorrere il diametro AB è eguale a quello, che dovrebbe impiegare ſe diſcendeſſe per qualunque corda nello ſteſſo mezzo cerchio tirata dai punti A, B. Sicchè &c.

195. TEOR. VIII. *Se un ſemicerchio ha il ſuo diametro verticalmente ſituato, e dagli eſtremi di eſſo ſi tirano quante corde ſi vogliono, le velocità acquiſtate dai corpi nel percorrerle ſaranno nella ragione delle corde medeſime.*

DIM. Rappreſenti ACB un ſemicircolo, di cui il diametro AB ſia ſituato verticalmente, dai punti A, B ſiano in eſſo tirate le corde AC, AD, BC, BD; e dai punti C, D ſiano ſopra di AB calate le perpendicolari CF, DG.

Eſſendo AB verticale, CF, DG ſaranno orizzontali, e perciò le velocità, che il corpo acquiſta ſcendendo per AC, AD ſono eguali a quelle, che acquiſterebbe liberamente ſcendendo per gli ſpazj verticali AF, AG (§. 192.), ma queſte velocità ſono nella ragione delle radici quadrate di AF, AG (§.184.), dunque le velocità acquistate dal corpo discendendo per AC, AD sono nella ragione delle radici quadrate di AF, e di AG. In oltre BA: AC = AC: AF; BA: AD = AD: AG, ma se tre rette sono continuamente proporzionali, il rettangolo delle estreme è eguale al quadrato della media, dunque il rettangolo fatto da BA, AF è eguale al quadrato di AC, ed il rettangolo fatto da BA, AG è eguale al quadrato di AD, dunque il rettangolo fatto da BA, AF sta al rettangolo fatto da BA, AG come il quadrato di AC al quadrato di AD; ma questi rettangoli hanno la medesima base AB, e perciò sono nella ragione delle altezze AF, AG, dunque AF sta ad AG come il quadrato di AC al quadrato di AD, ed estraendone le radici quadrate, sarà $\sqrt{AF} : \sqrt{AG} = AC : AD$; dunque la velocità, che il corpo acquista discendendo per AC sta a quella acquistata discendendo per AD = AC : AD. Sicchè &c.

CAPITOLO XIV.

Del moto de' corpi per diversi piani inclinati.

196. TEOR. I. *Se vi sono due piani contigui diversamente inclinati al piano orizzontale, e per essi discende un corpo, la velocità, che quello acquista discendendo per uno di questi piani sta alla velocità, con la quale passa nel-l'al-*

l' altro come il seno massimo al coseno dell' angolo della inclinazione de' due piani.

DIM. Rappresentino AB, BC due piani contigui diversamente inclinati al piano orizzontale; si prolunghi CB verso F, e da A sopra CF si cali la perpendicolare AE, e si compisca il rettangolo EH. Fig. 12.

Se con AB si disegna la forza, che il corpo acquista discendendo per la intiera lunghezza AB, le rette EB, BH disegneranno le sue componenti (§. 113.), quindi il corpo passa nel piano BC come se facessero contro di lui azione le forze espresse da EB, BH; ma la forza espressa da BH premendo direttamente contro del piano, viene interamente distrutta dalla reazione del piano, dunque il corpo passa nel piano BC con la porzione della sua forza espressa da EB; quindi la forza intiera, che il corpo acquista scendendo per AB sta a quella, con la quale passa nel piano BC, come AB : BE, e perciò la velocità intiera acquistata dal corpo scendendo per AB sta a quella, con cui passa nel piano BC, come AB : BE; ma se con AB si disegna il seno massimo, BE disegnerà il coseno dell' angolo ABE, il quale è la inclinazione del piano AB col piano BC, dunque &c.

197. COR. I. Esprimendo AB la velocità acquistata dal corpo, che scende per la intiera AB; ed EB quella, con cui passa nel piano BC, la differenza di AB, BE disegnerà la diminuzione, che soffre la velocità acquistata per AB qualora il corpo passa nel piano BC, ma questa differen-

perficie curva come se discendesse per infiniti picciolissimi piani diversamente inclinati all' orizonte, ed inclinati fra loro con angoli infinitamente piccioli ; e quantunque la velocità, che acquista il corpo discendendo per essi, continuamente soffra diminuzione nel passare da un piano all' altro, e questa diminuzione si faccia infinite volte, perchè infiniti sono i piani, da' quali la curva si concepisce composta, pure di queste diminuzioni non deve tenersi alcun conto, imperciocchè essendo esse disegnate dai seni versi degli angoli infinitamente piccioli delle inclinazioni, i quali sono infinitesimi del secondo ordine, saranno ancora esse diminuzioni ; grandezze infinitesime del secondo ordine ; ma infiniti infinitesimi del secondo ordine formano uno infinitesimo del primo ordine, dunque tutte le sopradette diminuzioni formeranno uno infinitesimo per riguardo alla velocità del corpo, che discende per la curva, e perciò la velocità, che un corpo acquista discendendo per qualunque superficie curva si può, senza errore sensibile, prendere per eguale a quella, che un corpo avrebbe acquistato discendendo per quel piano inclinato che unisce gli estremi della curva, e per consequenza come eguale a quella, che un corpo avrebbe acquistato discendendo per la verticale corrispondente alle due orizontali che passano ; una per lo punto, dal quale ha incominciota la discesa, e l' altra per lo punto, nel quale termina ; e perciò un corpo, che discende da una orizontale ad un altra, vi giunge sempre con la stessa velocità, tanto se vi discende per una curva, quanto se vi discen-

discende per una retta o che essa sia verticale, o che sia in qualunque maniera inclinata all'orizonte,

201. AVV.II. Si noti, che se i due piani AB, BC siano uniti in maniera, che l'angolo della loro inclinazione ABE sia infinitamente picciolo, ed un corpo venga spinto da sotto verso sopra dal punto C, con una forza eguale a quella, che esso avrebbe acquistata scendendo da A per li due piani AB, BC, esso giungerà fino al punto A; imperciocchè essendo, per tutta la lunghezza del piano inclinato BC, la gravità respettiva una forza costante, essa tanta forza deve distruggere nel corpo, che sale fino a tanto che giunge al punto B, quanta sarebbe stata capace di comunicargliene se fosse disceso per lo stesso piano BC, e per conseguenza nel punto B il corpo si ritroverà animato da tanta forza salendo da C verso B, da quanta si ritroverebbe animato se fosse disceso da A verso B; ma la gravità respettiva sopra del piano BA toglie al corpo, che per quello sale, tanta forza quanta glie ne avrebbe comunicato se fosse disceso per AB, dunque giunto nel punto A si dovrà ritrovare privo di forza.

202. AVV. III. Quello, che si è detto relativamente al corpo, che sale per due piani inclinati, vale ancora qualora il corpo sale per molti piani inclinati, i quali si uniscono con angoli di inclinazione infinitamente piccioli, e per conseguenza qualora sale per una curva,

203. TEOR. II. *Se due piani sono fra loro inclinati, e formano l'angolo della loro inclinazione infi-*

infinitamente picciolo, e vi sono due altri piani; anche fra loro inclinati, li quali formano l' angolo della loro inclinazione eguale all' angolo della inclinazione formato dagli altri, e formano con l' orizzontale gli angoli eguali, ed i due primi piani sono proporzionali alli due secondi, e su di essi si muovono due corpi, sarà il tempo, che un corpo impiega à percorrere la somma de' due primi, al tempo, che l' altro impiega à percorrere la somma de' due secondi, come la radice quadrata della somma delle lunghezze de' due primi, alla radice quadrata della somma della lunghezza de' due secondi.

DIM. Siano AB, BC due piani fra loro inclinati con l'angolo ABG infinitamente picciolo, e siano DE, EF i due altri, li quali siano inclinati fra loro con l'angolo DEH $=$ ABG, e facciano con l' orizzontale gli angoli C, F eguali, e sia $AB : BC = DE : EF$, sarà il tempo, che il corpo impiegherà a percorrere $AB + BC$ al tempo che impiegherebbe a percorrere $DE + EF = \sqrt{AB + BC} : \sqrt{DE + EF}$. Per A, G si tirino le orizzontali AG, DH, le quali si prolunghino fino a tanto che incontrino i piani CB, FE prolungati in G, H. *Fig. 23.*

Le orizontali GA, IC sono parallele, e vengono tagliate della terza GC, dunque gli angoli alterni in C, G sono eguali; similmente si dimostra, che gli angoli F, H, sono eguali; ma per ipotesi i due angoli C, F sono eguali, dunque eguali sono ancora i due angoli G, H, onde i due triangoli GAB, HDE hanno gli angoli G, H

eguali

eguali, gli angoli ABG, DEH sono eguali per ipotesi, quindi sono equiangoli, e perciò simili; dunque sarà AB : DE = GB : HE, ma per ipotesi AB : DE = BC : EF, dunque GB : HE = BC : EF, e permutando, e componendo sarà GC : BC = HF : EF, e di nuovo permutando sarà GC : HF = BC : EF; ma per ipotesi AB : DE = BC : EF, dunque permutando, e componendo AB + BC : BC = DE + EF : EF, e di nuovo permutando AB + BC : DE + EF = BC : EF, e perciò GC : HF = AB + BC : DE + EF.

In oltre essendo i piani fra loro inclinati con angolo infinitamente picciolo, il tempo, che il corpo impiega a percorrere AB + BC è eguale a quello, che impiegherebbe a percorrere GC, ed il tempo, che il corpo impiega a percorrere DE + EF è eguale a quello, che impiegherebbe a percorrere HF, dunque sarà il tempo impiegato a percorre AB + BC al tempo impiegato a percorrere DE + EF come il tempo impiegato a percorrere GC a quello, che si impiegherebbe a percorrere HF; ma i due piani GC, HF sono egualmente inclinati all' orizonte, e perciò il tempo, che il corpo impiega a percorrere GC sta a quello, che impiegherebbe a percorrere HF = $\sqrt{GC} : \sqrt{HF}$; dunque sarà ancora il tempo impiegato a percorrere AB + BC al tempo, che si impiegherebbe a percorrere DE + EF = $\sqrt{AB+BC} : \sqrt{DE + EF}$. Sicchè &c.

204. AVV. Le verità dimostrate relativamente alla salita, e discesa libera de' corpi per diver-

versi piani inclinati fra loro con diversi angoli di inclinazioni ci aprono la strada a fare alcune considerazioni necessarie per dimostrare le teorie della caduta, e salita libera de' corpi per le linee curve: le considerazioni sono le seguenti:

Rappresenti ACa una superficie curva, della *Fig.24.* quale la orizzontale ED sia tangente nel punto C, e le parti AC, Ca di detta superficie siano perfettamente eguali; i punti A, a si uniscano con la retta Aa, la quale sarà orizzontale, e perciò parallela ad ED; nella detta superficie curva si prendano ad arbitrio i punti M, N, e si tirino le orizzontali Mm, Nn; dal punto C del contatto si inalzi sopra ED la perpendicolare CB, la quale sarà verticale, e perciò perpendicolare alle altre orizzontali Aa, Mm, Nn; si uniscano AC, aC, che incontrino Mm, Nn ne' punti R, r, ed S, s; e finalmente per li punti M, N si tirino alla curva le tangenti MX, NZ.

Un corpo partendosi dalla quiete discenderà dalla orizzontale Aa sopra delle orizzontali inferiori, Mm, Nn, ED, e giungerà esso sopra ogni una dell e dette orizzontali con lo stesso grado di velocità, tanto scendendo per la verticale, quanto scendendo per la curva, o per qualunque piano inclinato (§ 200); di più un corpo dal punto C essendo spinto da sotto verso sopra con velocità eguale a quella, che acquisterebbe discendendo dalla orizzontale Aa fino alla orizzontale ED, ascenderà alla medesima orizzontale Aa tanto se vi salirà per la verticale CB, quanto se vi salirà per lo piano inclinato CA, o per la curva CMA,

anzi

anzi salendo per la curva, dovrà passare per li punti N, M, A con li medesimi gradi di velocità, co' quali vi sarebbe passato discendendo; ed i tempi, che impiegherà a salire gli spazj CN, CM, CA, saranno eguali ai tempi impiegati a discendere per li medesimi archi NC, MC, CA (§ 202); essendo la curva CMA perfettamente eguale alla curva Cma, se il corpo dopo di essere disceso per AMC con la velocità acquistata in C, si muove per l'arco Cma, ne' punti n, m, a si ritroverà avere respettivamente i medesimi gradi di velocità, che si ritrovava avere ne' corrispondenti punti N, M, A della curva AMC; ed i tempi impiegati a discendere per gli archi NC, MC, AC saranno eguali ai tempi impiegati a salire per gli archi Cn, Cm, Ca. Se dunque il corpo A si parte dalla quiete, e discende per la curva AMC, il detto corpo quando sarà giunto nel punto il più basso C, avrà acquistata tanta velocità, quanta a lui ne avrebbe bisognata per salire per l'arco Ca; ma il corpo non ritrovando impedimento nel punto C, non potrà ivi restare immobile, quindi siccome il corpo discendendo da A verso C giunge in C con moto ~~uniformemente~~ accelerato, così da C ad a salirà con moto ~~uniformemente~~ ritardato, e giunto nel punto a, non ritrovando ostacolo alcuno, che lo ritenga, discenderà con moto anche ~~uniformemente~~ accelerato, fino a tanto che sarà giunto al punto C, dal quale di nuovo partendosi con moto ~~uniformemente~~ ritardato salirà fino al punto A; e supposto, che questo

moto

moto ſi faccia ſenza, che egli incontri resiſtenza alcuna, continuamente, ed in perpetuo ſi muoverà per la curva ACa.

Di più il corpo movendoſi per la curva AMCma, paſsa continuamente da un piano inclinato in un altro ſempre diverſamente inclinato all'orizzonte; quindi la gravità reſpettiva continuamente deve variare, e per conſeguenza continuamente deve variare ancora quella porzione della gravità del corpo, con la quale eſſo corpo preme contro della curva, dunque la gravità reſpettiva del corpo nel punto M è diverſa dalla gravità reſpettiva del medeſimo corpo nel punto N, e la forza, con cui il corpo preme contro del punto M della curva, è diversa da quella, con cui preme contro del punto N; ma ogni elemento della curva ſi conſidera come congruente con l'elemento della tangente, dunque la gravità reſpettiva, che ha il corpo, è la ſteſſa tanto ſe il corpo è ſituato nel punto M della curva, quanto ſe è ſituato ſu la tangente della curva tirata dal medeſimo punto; e la forza, con la quale nel punto M il corpo preme contro la curva, è la ſteſſa di quella, con la quale premerebbe contro della tangente MX.

Con ſimile raziocinio ſi dimoſtra, che in qualunque altro punto della curva, il corpo preme contro di eſſa con quella ſteſſa forza, con cui premerebbe contro della tangente, e che la gravità reſpettiva, che eſſo ha in qualunque punto della curva, è eguale alla gravità reſpettiva, che avrebbe ſopra la tangente tirata alla curva dal medesimo punto ; e perciò giunto il corpo nel punto infimo della curva , la ſua gravità reſpettiva ſarà eguale a quella , che avrebbe ſu la tangente ED; e la forza , con cui eſſo preme il punto C della curva , ſarà eguale a quella, con cui premerebbe la tangente ED ; ma la tangente per ipoteſi è orizzontale, dunque la gravità reſpettiva ſvaniſce , e la forza, con la quale il corpo preme contro del punto C è la intiera gravità del corpo .

Finalmente ſe ſi ſuppone un' altra curva EFe, ſimile alla curva ACa , e ſimilmente poſta per riſpetto della orizzontale , e ſi fan diſcendere due corpi, uno per la curva AC, l' altro per EF, ſaranno i tempi , che essi impiegheranno a percorrere AC, EF, nella ragione delle radici quadrate di AC, EF (§ 203); ma i tempi, che i corpi impiegano a percorrere le curve ACa, EFe , ſono doppj de' tempi impiegati a percorrere AC, EF, dunque il tempo , che il corpo impiega a percorrere ACa ſta a quello, che impiegherebbe a percorrere EFe , come la radice della curva AC alla radice della curva EF.

205. AVV.II. Si noti, che la gravità reſpettiva di un corpo , il quale ſi muove per linee curve , in qualunque punto della curva ſi conſideri ſi chiamerà *forza acceleratrice*.

CAPI-

CAPITOLO XV.

Della salita, e discesa libera de' corpi per gli archi circolari.

206. TEOR. I. *SE vi è un mezzo cerchio, il quale abbia il suo diametro orizzontalmente situato, ed un corpo partendosi da qualunque punto della periferia di quello giunge nel punto infimo di essa, le velocità dal corpo acquistate, allorchè sarà giunto in questo punto, saranno nella ragione delle corde corrispondenti agli archi da esso descritti.*

DIM. Rappresenti FADE un cerchio, nel quale siano tirati il diametro orizzontale AE, ed il diametro verticale FD, sarà D il punto infimo della semiperiferia ADE; nell'arco AD si prendano ad arbitrio i pnnti A, B, C, e si uniscano le corde AD, BD, CD. *Fig. 25.*

Il corpo scendendo per gli archi AD, BD, CD giunge nel punto D con velocità eguali a quelle, che avrebbe acquistate scendendo per le respettive corde AD, BD, CD, (§192 § 199); ma le velocità acquistate dal corpo discendendo per le corde AD, BD, CD sono nella ragione delle corde medesime (§195); dunque le velocità, che acquista un corpo discendendo per gli archi AD, BD, CD sono nella ragione delle corrispondenti corde AD, BD, CD. Sicchè &c.

207. TEOR. II. *Se due corpi discendono per*

due archi circolari ſimili, li percorrono in tempi, li quali ſono fra loro come le radici quadrate de' diametri de' cerchi, a' quali gli archi appartengono.

Fig. 26. DIM. I tempi, che i corpi impiegano a percorrere gli archi AB, DE ſono nella ragione delle radici quadrate de' medeſimi archi (§ 204), ma gli archi ſimili AB, DE ſono nella ragione de' diametri CB, FE, dunque i tempi, che i corpi impiegano a percorrere gli archi ſimili AB, DE ſono nella ragione delle radici quadrate de' diametri CB, FE. Sicchè &c.

208. TEOR. III. *Se un corpo diſcende per un arco circolare, diſcende con moto inequabilmente accelerato.*

Fig. 27. DIM. Rappreſenti GIE un cerchio, il quale abbia il diametro IE orizzontale, ed il diametro GH verticale; nel quadrante IBH ſi prendano ad arbirtio i punti A, B, per li quali ſi tirino le tangenti AD, BF, e ſi calino ſopra di GH le perpendicolari AK, BL; finalmente ſi uniſcano i raggi AC, BC.

Le forze acceleratrici, che ha un corpo qualora è ſituato ne' punti A, B dell' arco IBH, ſono eguali alle gravità reſpertive, che il corpo avrebbe avuto ſe foſſe ſtato ſituato ſopra le tangenti AD, BF (§. 104), ma le gravità reſpettive di un corpo ſituato ſopra diverſi piani inclinati ſono nella ragione de' ſeni degli angoli delle loro inclinazioni (§181), dunque le forze acceleratrici del corpo poſto ſopra de' punti A, B, ſono nella ragione de' ſeni degli angoli DAK,

DAK, FBL; ma gli angoli DAK, FBL ſono eguali agli angoli ACH, BCH, de' quali AK, BL ſono i ſeni, dunque le forze acceleratrici del corpo poſto ne' punti A, B ſono nella ragione di AK: BL; ma AK è maggiore di BL, dunque anche la forza acceleratrice del corpo poſto in A è maggiore della forza acceleratrice del corpo poſto in B; e perciò il corpo, che diſcende per l'arco IAH, è animato da una forza acceleratrice, la quale non è coſtante; ma quando un corpo ſi muove animato da una forza acceleratrice variabile, in ogni iſtante non fa eguali acquiſti di velocità, e perciò ſi muove con moto inequabilmente accelerato, dunque il corpo, che diſcende per l'arco IAH ſi muove con moto inequabilmente accelerato.

209. AVV. Con lo ſteſſo raziocinio ſi può dimoſtrare, che un corpo, il quale ſale per un arco circolare, ſale con moto inequabilmente ritardato.

210. COR. Si sa, che gli archi AH, BH hanno fra loro una ragione maggiore di quella, che hanno i loro ſeni AK, BL, ma la forza acceleratrice, che ha il corpo, qualora è poſto nel punto A, ſta a quella, che ha, qualora è poſto nel punto B, come AK: BL (§181), dunque l'arco AH ſta all'arco BH in ragione maggiore di quella, che ha la forza acceleratrice del corpo poſto in A alla forza acceleratrice del corpo poſto in B.

211. TEOR. IV. *Se un corpo diſcende per una curva di tale natura, che le forze acceleratrici,*

che lo animano ne' diversi punti di essa, siano proporzionali agli archi, che dal corpo si devono percorrere, il corpo percorrerà quelli archi in tempi eguali.

Fig. 28. DIM. Rappresenti AMC una curva, per la quale discenda un corpo, e sia tale la natura della curva, che la forza acceleratrice del corpo posto in M sia alla forza acceleratrice del corpo posto in N come MC : NC.

Si prenda il punto m infinitamente vicino al punto M, indi si ritrovi Nn quarta proporzionale in ordine ad MC, NC, ed Mm; gli archi MC, NC saranno composti da un eguale numero di elementi respettivamente eguali ad Mm, Nn. Per ipotesi la forza acceleratrice del corpo posto in M sta alla forza acceleratrice del corpo posto in N come MC : NC, ma MC : NC = Mm : Nn, dunque la forza acceleratrice del corpo posto in M sta alla forza acceleratrice del corpo posto in N come Mm : Nn; ma le forze acceleratrici sono nella ragione delle velocità, che esse producono nel primo istante, che operano (§ 90), dunque la velocità, che ha il corpo nel punto M sta a quella, che ha qualora è nel punto N come Mm : Nn; ma le velocità sono nella ragione de' spazj, che i corpi percorrono in tempi eguali, (§ 96) dunque Mm, Nn si percorrono in tempi eguali. Così si dimostra, che tutti gli altri elementi dell' arco MC si percorrono in tempi eguali a quelli, ne' quali si percorrono li corrispondenti elementi dell' arco NC, dunque i due archi MC, NC si percorrono in tempi eguali. Sicchè &c. 212.

212. COR. Quindi se un corpo discende per una curva, e ne' varj punti di essa ha le forze acceleratrici, che non sono nella ragione degli archi, che esso deve percorrere, impiegherà tempi disuguali a percorrere archi disuguali, ma le forze acceleratrici del corpo, che discende per archi circolari, non sono in ragione degli archi, che deve percorrere, perchè il corpo, che discende per archi circolari si muove con moto inequabilmente accelerato, dunque il corpo, che discende per archi circolari impiega tempi disuguali a percorrere archi disuguali.

CAPITOLO XVI.

Della salita, e discesa libera de' corpi per archi cicloidali.

213. TEOR.I. S*E due corpi eguali sono posti sopra due punti di una cicloide, la quale abbia il vertice rivolto alla parte inferiore, e l'asse verticalmente situato avranno le forze acceleratrici nella ragione degli archi compresi fra i medesimi punti, ed il vertice della cicloide.*

DIM. Rappresenti CAC una cicloide, la quale abbia il vertice A rivolto alla parte inferiore, e l'asse AB verticale, e sopra di essa siano situati due corpi eguali in M, N; e sia BRA il circolo generatore; da' punti M, N si calino sull' asse AB le perpendicolari MP, NQ, indi si uniscano le corde BR, BS, AR, AS, e per A si tiri la orizzontale AH. *Fig.29.*

La forza acceleratrice del corpo situato in M è la stessa di quella, che il corpo avrebbe se fosse situato su la retta tangente della cicloide in M(§204), ma la retta tangente della cicloide in M è parallela alla corda AR, dunque la forza acceleratrice del corpo situato nel punto M è eguale alla gravità respettiva del corpo situato su la corda AR; similmente la forza acceleratrice del corpo situato nel punto N della cicloide è eguale a quella, che avrebbe il corpo se fosse situato sopra la retta tangente della curva nel punto N; ma la tangente della curva nel punto N è parallela alla corrispondente corda AS del circolo generatore, dunque la forza acceleratrice del corpo situato in N è eguale alla gravità respettiva del corpo situato sù la corda AS, dunque la forza acceleratrice del corpo posto in M sta alla forza acceleratrice del corpo situato in N, come la gravità respettiva del corpo posto sopra della corda AR alla gravità respettiva del corpo posto sopra della corda AS; ma le gravità respettive de' corpi eguali posti sopra le corde AR, AS sono nella ragione de' seni degli angoli, che formano con la orizzontale AH, (§ 181.) dunque la forza acceleratrice del corpo situato in M sta alla forza acceleratrice del corpo situato in N come il seno dell' angolo RAH, al seno dell' angolo SAH; ma gli angoli fatti dalle tangenti di un cerchio, e dalle corde tirate dal punto del contatto sono eguali agli angoli fatti nelle porzioni alterne, dunque sarà la forza acceleratrice del corpo situato in M alla forza acceleratrice del cor-

corpo situato in N come il ſeno dell' angolo ABR al ſeno del angolo ABS; ma ſe col centro B, e con l' intervallo BA si intende deſcritto un cerchio, AR ſarà il ſeno dell' angolo ABR, ed AS il ſeno dell' angolo ABS, dunque la forza acceleratrice del corpo poſto in M ſta alla forza acceleratrice del corpo poſto in N come AR : AS; ma è proprietà della cicloide che qualunque ſuo arco terminato al vertice ſia il doppio della corda corriſpondente del circolo generatore, dunque la forza acceleratrice del corpo situato in M ſta alla forza acceleratrice del corpo eguale situato in N come l' arco AM all' arco AN.

214. COR. Qualora un corpo diſcende per una curva di tale natura, che le forze acceleratrici, che lo animano ne' diversi punti di eſſa, ſiano proporzionali agli archi, che dal corpo sì devono percorrere, il corpo percorre quegli archi in tempi eguali (§. 211.), ma il corpo, che diſcende per la cicloide, ha le forze acceleratrici, che lo animano, nella ragione degli archi, che da eſſa si devono percorrere (§ 113), dunque il corpo, che diſcende per una cicloide, percorre archi diſuguali in tempi eguali.

115. TEOR. II. *Se vi è una cicloide, che abbia il vertice rivolto alla parte inferiore, e aſſe verticale, e per eſſa ſi fa muovere un corpo in maniera, che diſcendendo ſi parta dal principio della cicloide; li tempi, che il corpo impieghera a deſcrivere gli archi cicloidali ſaranno nella ragione degli archi corriſpondenti della ſemiperiferia del circolo generatore.*

DIM.

Fig. 30. DIM. Rappresenti CAC una cicloide, per cui discenda un corpo descrivendo due archi disuguali CM, CN, e sia ABS il suo circolo generatore; si prendano due punti m, n infinitamente vicini a' punti M, N, e da' punti M, m, N, n si calino su l'asse AB della cicloide le perpendicolari MP, mp, NQ, nq, le quali incontrano la periferia del circolo generatore ne' punti R, r, S, s; si uniscano le corde Br, Bs, AR, Ar, AS, As, indi col centro A, e con gli intervalli AR, AS, si descrivano gli archi circolari RO, SU; finalmente dalli punti, R, S, s' intendano tirate le tangenti rX, sY, le quali si possono prendere per gli archetti Rr, Ss prolungati.

Per la natura della cicloide AM = 2AR, Am = 2Ar, quindi Am − AM, overo Mm = 2Ar − 2AR = 2Or, similmente Nn = 2Us.

Quantunque il corpo discendendo per la cicloide si muova con velocità, la quale continuamente va crescendo, pure si può la velocità considerare come costante ne' piccoli tempi, che il corpo impiega a muoversi per gli archi Mm, Nn; quindi il corpo nel descrivere gli archetti Mm, Nn si muoverà come se si muovesse con moto equabile con le velocità acquistate discendendo per gli archi Cm, Cn; ma nel moto equabile i tempi dal corpo impiegati a percorrere due spazj sono nella ragione de' medesimi spazj divisi per le velocità, con le quali essi vengono percorsi (§ 99), dunque sarà il tempo, che il corpo impiega a percorrere Mm al tempo che impiega

piega a percorrere Nn in ragione di Mm diviſo per la velocità, che il corpo ha in m, ad Nn diviſo per la velocità, che il corpo ha in n; ma la velocità, che il corpo ha in m è eguale alla velocità, che avrebbe acquiſtata liberamente ſcendendo per Br, quella che ha in n è eguale a quella, che avrebbe acquiſtata liberamente ſcendendo per Bs, e le velocità acquiſtate ſcendendo per Br, Bs ſono nella ragione di Br : Bs (§ 195); dunque il tempo, che il corpo impiega a percorrere Mm ſta al tempo, che impiega a percorrere Nn come

$$\frac{Mm}{Br} : \frac{Nn}{Bs} = \frac{2Or}{Br} : \frac{2Us}{Bs} = \frac{Or}{Br} : \frac{Us}{Bs}$$

In oltre gli angoli RrO, SsU ſono reſpettivamente eguali agli angoli rBA, sBA fatti nelle porzioni alterne, dunque ſono ſimili sì i triangoli ROr, rBA, che i triangoli sUS, SBA, e perciò sarà

$$Or : Br = Rr : BA$$
$$sU : Bs = Ss : BA \text{ Quindi}$$

$\frac{Or}{Br} = \frac{Rr}{BA}$, ed $\frac{sU}{Bs} = \frac{Ss}{BA}$, e per conſeguenza

$\frac{Or}{Br} : \frac{sU}{Bs} = \frac{Rr}{BA} : \frac{Ss}{BA} = Rr : Ss$; ma si è dimoſtrato, che i tempi dal corpo impiegati a percorrere gli archi Mm, Nn ſono nella ragione di $\frac{Or}{Br} : \frac{Us}{Bs}$, dunque i tempi dal corpo impiegati

a per-a percorrere gli archi cicloidali Mm , Nn sono nella ragione di Rr : Ss, li quali sono i corrispondenti elementi della periferia del circolo generatore. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che i tempi impiegati dal corpo a percorrere gli altri elementi degli archi CM, CN sono nella ragione de' corrispondenti elementi degli archi BR, BS della periferia del circolo generatore, dunque il tempo, che il corpo impiega a percorrere l' arco CM, sta al tempo, che impiega a percorrere l' arco CN come l' arco BR all' arco BS del circolo generatore. Sicchè &c.

216. COR. I. Se l' arco CN si accresce tanto, che giunga sino al punto A, l' arco CA diventerà la semicicloide, e l' arco BA la semiperiferia del circolo generatore, quindi sarà il tempo, che il corpo impiega a descrivere l' arco CM a quello, che impiega a descrivere la semicicloide, come l' arco BR del circolo generatore alla sua semiperiferia; e se il corpo giunto in A sale per l' altra semicicloide, il tempo, che impiegherà a percorrere CAC', sarà il doppio di quello, che aveva impiegato a percorrere CA (§ 204), dunque sarà il tempo, che il corpo impiega a percorrere CM al tempo, che impiega a percorrere CMC, come l' arco BR alla periferia del circolo generatore.

217. COR. II. Li tempi che il corpo impiega a percorre CN, CM sono nella ragione de' corrispondenti archi BS, BR del circolo generatore (§215); dunque dividendo, ed invertendo sarà il tempo, che il corpo impiega a percorrere

CM

CM al tempo, nel quale continuando a muoversi percorre MN come l' arco BR all' arco RS del circolo generatore.

218. COR. III. Quindi se la semiperiferia del circolo generatore si divide in parti eguali, e per li punti delle divisioni si tirano rette perpendicolari all' asse della cicloide, le quali si prolunghino fino a tanto che incontrino essa cicloide, il corpo, che si muove per la cicloide descriverà in tempi eguali gli archi compresi fra esse rette.

219. TEOR. III. *Se vi è una semicicloide, che abbia il suo vertice alla parte inferiore, e l' asse verticale, il tempo, che un corpo impiega a percorrere la semicicloide sta a quello, che impiegherebbe a percorrere il suo asse verticalmente cadendo come 3. 141 : 2.*

DIM. Rappresenti CAC una cicloide, la quale abbia il suo asse BA verticalmente posto, ed il vertice rivolto alla parte inferiore. Si prenda l' archetto CM, il quale sia infinitamente piccolo relativamente alla semicicloide CA, dal punto M si cali sull' asse AB la perpendicolare MP, che incontra la periferia del circolo generatore nel punto R, si uniscano le corde BR, RA, e per C si tiri la tangente CX, la quale si può prendere per l' archetto CM prolungato. *Fig.* 31.

Essendo CM un arco infinitesimo, sarà anche infinitesimo l' arco BR del circolo generatore, la corda BR si potrà prendere senza errore sensibile per l' arco BR, e la corda AR sarà infinitamente vicina all' asse AB.

Per

Per la proprietà della cicloide CX è parallela a BA, e perciò BPMC è un parallelogrammo, quindi BP = CM; di più se si esprimono i tempi, che il corpo impiega a percorrere CA, CM, BA con le lettere T, m, t, sarà

$$T : m = BRA : BR \ (\S 216)$$

$$m : t = \sqrt{BP} : \sqrt{BA} \ (\S 184)$$

ma essendo BP, BR, BA continuamente proporzionali sarà, $BP : BA = BR^2 : BA^2$, e perciò $\sqrt{BP} : \sqrt{BA} = BR : BA$, dunque

$$m : t = BR : BA$$

quindi le tre grandezze T, m, t hanno ragioni ordinate alle tre altre BRA, BR, BA; dunque ordinando, T : t = BRA : BA; ma la semiperiferia di un circolo sta al suo diametro come 3. 141 : 2, dunque il tempo, che il corpo impiega a descrivere la semicicloide CMA sta al tempo, che il corpo impiega a percorrere l'asse BA verticalmente cadendo come 3. 141 : 2.

220. COR. Un corpo tanto tempo impiega a percorrere l'intiera semicicloide CA, quanto ne impiega a percorrere qualunque suo arco NA (§214), dunque il tempo, che un corpo impiega a discendere da qualunque punto della cicloide fino al suo vertice, sta a quello, che esso impiegherebbe a discendere per lo suo asse verticale BA come 3. 141 : 2. Sicchè &c.

221. TEOR. IV. *Se vi sono due cicloidi, le quali abbiano gli assi verticali, ed i vertici rivolti verso la parte inferiore, e per esse due corpi discendendo descrivano due archi terminati al*

verti-

vertice, i tempi, che i corpi impiegheranno a percorre gli archi saranno nella ragione delle radici quadrate degli assi delle cicloidi.

DIM. Rappresentino CAC, DED due cicloidi, delle quali i vertici A, E siano rivolti alla parte inferiore, e gli assi AB, EF siano verticalmente situati, e due corpi P, Q discendano per gli archi PA, QE. *Fig. 32.*

Il tempo, che il corpo impiega a percorrere PA sta a quello, che impiegherebbe, liberamente cadendo, a percorrere BA = 3. 141 : 2; similmente il tempo, che il corpo impiega a percorrere QE sta a quello, che impiegherebbe liberamente cadendo, a percorrere FE = 3. 141 : 2 (§220) dunque sarà il tempo, che P impiega a percorrere PA al tempo, che impiega a percorrere AB come il tempo, che il corpo Q impiega a percorrere QE, al tempo, che impiega a percorrere FE; e permutando sarà il tempo, che P impiega a percorrere PA al tempo, che Q impiega a percorrere QE come il tempo, che P impiega a percorrere BA al tempo, che Q impiega a percorrere FE; ma i tempi, che P, Q impiegano a percorrere BA, FE sono come $\sqrt{BA}$: $\sqrt{FE}$ (§184), dunque anche il tempo, che P impiega a percorre PA sta al tempo, che Q impiega a percorrere QE come $\sqrt{BA} : \sqrt{FE}$ Sicchè &c.

CAPITOLO XVII.

Della linea della più veloce diſceſa.

Fig.33. 222. LEM. I. D*Ati i due punti A, B, tra li quali ſia tirata la retta CD, ed un corpo partendoſi dal punto A giunga al punto B, con tale condizione, che da A fino a tanto che giunga alla retta CD ſi muova con la velocità U dalla retta CD ſino al punto B ſi muova con la velocità u maggiore di U, e da quelle velocità animato ſi muova deſcrivendo linee rette; Determinare la ragione, che paſſa fra i tempi, che il corpo impiega a venire dal punto A al punto B ſeguendo varie direzioni.*

SOL. Dal punto B ſopra CD si cali la perpendicolare BD, la quale si divida in L in maniera, che BD : DL = u : U, per L si tiri FL parallela a CD, dipoi in CD si prendano ad arbitrio i punti E, M, &c, e si uniſcano le rette AE, EB, AM, MB, AB, Dico, che il tempo, che il corpo impiega a venire dal punto A al punto B con le date velocità U, u per le direzioni AB, AMB, AEB, ſono nella ragione di AQ, AM+MN, AE + EF.

DIM. Per ipotesi il corpo si muove per AP, AM, AE con la medesima velocità U, ma ne' corpi, i quali si muovono con moto equabile, e con la ſteſſa velocità, gli ſpazj ſono nella ragione de' tempi, che eſſi impiegano a percorrer-

li

li (§.98.), dunque li tempi, che il corpo impiega a percorrere AP, AM, AE sono nella ragione di AP, AM, AE. In oltre se il corpo proseguisse a muoversi per PB, MB, EB con la medesima velocità U, i tempi impiegati a percorrere PB, MB, EB sarebbero nella ragione di PB, MB, EB, ma esso si muove con la velocità u, dunque dovranno essere i tempi, che il corpo impiegherebbe a percorrere PB, MB, EB, con la velocità U, alli respettivi tempi, che impiega a percorrere li medesimi spazj PB, MB, EB con la velocità u, in ragione reciproca delle medesime velocità (§. 98.), cioè come u : U; ma per costruzione u : U = BD : DL, dunque li tempi, che il corpo impiegherebbe a percorrere PB, MB, EB con la velocità U, stanno a quelli, che impiega a percorrerli con la velocità u, come BD : DL; ma per costruzione FL è parallela ad EB, dunque BD : DL = BP : PQ = BM : MN = EB : EF; quindi se li tempi, che il corpo impiegherebbe a percorrere PB, MB, EB con la velocità U si esprimono con le rette PB, MB, EB, le rette PQ, MN, EF esprimeranno i tempi, che il corpo impiega a percorrere gli stessi spazj con la velocità u; i tempi dunque, che il corpo impiega a venire dal punto A al punto B con le date velocità U, u, per le direzioni AB, AMB, AEB, sono nella ragione di AQ, AM+MN, AE+EF.

223 COR. Quindi se il corpo dal punto A al punto B venisse con la velocità costante U, sarebbero i tempi, che impiegherebbe per AB,

AMB, AEB nella ragione di AB, AM+MB, AE+EB, ma un lato di un triangolo è sempre minore della somma degli altri due, dunque il tempo, che il corpo impiegherebbe a venire dal punto A al punto B, sarebbe il minimo, qualora esso si muovesse per la linea retta.

Fig. 34. 224. LEM. II. *Siano i due punti A, B, fra i quali sia tirata la retta CD, ed un corpo dal punto A venga al punto B, con tale condizione, che si muova per linee rette, e che dal punto A fino alla retta CD si muova con la velocità costante V, e da CD fino a B si muova con la velocità costante u maggiore di V: Dico, che qualora il corpo dal punto A al punto B viene nel tempo brevissimo, sarà V ad u, come il coseno dell'angolo fatto dalla direzione, per cui il corpo si muove fino a tanto che giunge alla retta CD, e da CD al coseno dell'angolo fatto dalla direzione, per cui il corpo prosegue il suo moto da CD fino a B, e da CD.*

DIM. Si intendano nella retta CD presi ad arbitrio i due punti E, M infinitamente fra loro vicini, ed egualmente distanti dal punto, in cui la retta CD verrebbe tagliata dalla direzione, per cui il corpo movendosi, nel tempo brevissimo giungerebbe dal punto A al punto B; si uniscano le rette AE, AM, BE, BM; dal punto B sopra di CD si cali la perpendicolare BD, la quale si divida in L in maniera, che sia BD : DL = u : U, e per L si tiri FL parallela a CD, la quale incontra BM, BE nelli punti N, F; indi col centro B e con gli intervalli BF, BM si de-si descrivano gl' archetti infinitamente piccioli FI, MH, e col centro A, e con l' intervallo AE si descriva l' arco EG; finalmente col centro M, e con l' intervallo MA si descriva il cerchio CAT, il quale con la sua periferia incontra MB nel punto T, e dalli punti A, T si calino sopra di CD le perpendicolari AR, TS.

I punti E, M sono infinitamente vicini, dunque $AE+EF = AM+MN$, $AG+MI = AE+HF$, e perciò $GM+IN = EH$, $GM = EH - IN$. In oltre nel triangolo EMB il lato EM è prolungato verso D, dunque l' angolo esterno DMB è maggiore del suo interno opposto MEB di tanto quanto è l' angolo EBM, ma l' angolo EBM è infinitamente piccolo, dunque l' angolo DMB senza errore sensibile si può prendere per eguale all' angolo MEB; ma DMB è eguale al suo alterno MNF, dunque $MEB = MNF$; quindi i due triangoli MHE, FIN hanno gli angoli MEH, INF eguali, gli altri due MHE, FIN sono retti, e perciò anche eguali, dunque sono simili, e perciò $EH : IN = MH : FI$; ma MH, FI sono due archi simili, quindi sono nella ragione di $BM : BI$, o sia di $BM : BN$; ma DM è parallela ad FL, e perciò $BM : BI = DB : BL$, dunque $EH : IN = DB : BL$, e convertendo $EH : EH - IN = DB : DB - BL$, o vero $EH : GM = DB : DL$; ma per costruzione $BD : DL = u : U$, dunque $EH : GM = u : U$

Di più i due triangoli MHE, MTS hanno gli angoli MEH, SMT dimostrati eguali, gl' altri due EHM, MST retti, e perciò eguali, dunque essi sono simili; similmente i due triangoli AMR, EMG hanno l'angolo AMR comune, e gl'altri due ARM, EGM retti, e perciò eguali, dunque essi sono anche simili; quindi sarà EH : EM = MS : MT, EM : MG = MA : MR = MT : MR, dunque le tre rette EH, EM, MG hanno ragioni ordinate alle tre altre MS, MT, MR, dunque ordinando, EH : MG = MS : MR; ma si è dimostrato EH : MG = u : U; dunque MS : MR = u : U, ma MS, MR sono i coseni degl'angoli TMS, AMR, dunque u : U = cosen. TMS : cosen. AMR; ma si è supposto il punto M essere infinitamente vicino al punto, in cui la direzione, per la quale il corpo movendosi nel tempo brevissimo, incontra la retta CD, dunque il punto M si può prendere per quello, in cui la retta CD viene incontrata dal corpo, qualora dal punto A viene al punto B nel tempo brevissimo; ed AM, MB si possono prendere per le direzioni, per le quali movendosi il corpo dal punto A al punto B viene nel tempo brevissimo, è perciò nel caso, che il corpo venga dal punto A al punto B nel tempo brevissimo portando dal punto A sino alla retta CD la velocità U, e da CD sino al punto B la velocità u, i coseni degli angoli formati dalla retta CD con le direzioni, per le quali il corpo si muove, sono nella ragione delle velocità con le quali il corpo camina per le medesime direzioni.

Fig. 35. 225. COR. Quindi se un corpo partendosi dal punto L per andare al punto M, incontri quante rette parallele si vogliono AB, CD, EF, GH, e di e di più le velocità che porta movendosi dal punto L al punto N dal punto N al punto O, dal punto O al punto P, dal punto P al punto Q dal punto Q al punto M siano nella ragione de coseni degli angoli che le direzioni fanno con le rette AB, CD, EF, GH, esso corpo giungerà da L ad M in tempo brevissimo.

226. TEOR. *La linea della più veloce discesa è la Cicloide.* Fig. 36.

DIM. Rappresenti CMB una mezza cicloide, la quale abbia il vertice rivolto alla parte inferiore, e l'asse AB sia verticalmente situato, e sia ARB il semicircolo generatore.

In CMB si prendano ad arbitrio i punti M, N, dalli quali si calino sopra di AB le perpendicolari MP, NQ, si prendano gli archetti Mm, Nn infinitamente piccoli, e per li punti m, n si tirino le rette pm, qn parallele a PM, QN, Indi si uniscano le corde AR, AS, BR, BS del circolo generatore, e per li punti M, N si tirino le tangenti MO, NT alla cicloide, le quali si possono prendere per gli elementi Mm, Nn della curva prolungati.

Per la natura della cicloide le tangenti Mm, Nn sono parallele alle corrispondenti corde BR, BS del circolo generatore, dunque gli angoli OMR, TNS fatti dalle direzioni, per le quali il corpo si muove qualora si ritrova ne' punti M, N della cicloide, e dalle orizzontali PM, QN sono eguali agli angoli BRP, BSQ; in oltre nel triangolo RPB l'angolo RPB è retto, dunque gli altri due PRB, PBR presi insieme sono eguali ad un retto; similmente si dimostra, che gli altri due angoli QSB, QBS presi insieme sono eguali ad un retto, dunque i seni degli angoli PBR, QBS saranno coseni degli angoli PRB, QSB; ma se si concepisca descritto un cerchio, il quale abbia per centro il punto B, e per intervallo BA, le corde AR, AS sono seni degl' angoli PBR, QBS, dunque AR, AS sono coseni degli angoli PRB, QSB, o sia degli angoli RMm, SNn; ma la velocità, che il corpo, il quale discende per la cicloide, ha nel punto M, sta a quella, che ha nel punto N come AR : AS (§. 95) dunque le velocità che ha il corpo che discende per la cicloide qualora si ritrova nè punti M, N, sono nella ragione de' coseni degli angoli formati dalle direzioni, per le quali si muove, e dalle orizzontali tirate dai punti M, N. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che le velocità, che ha il corpo, il quale discende per la cicloide, ne' varj punti di essa, sono nella ragione de' coseni degli angoli fatti dalle direzioni, per le quali si muove, e dalle orizzontali, dunque la cicloide è la linea delle più veloce discesa.

CAPITOLO XVIII.

Del moto de' Pendoli.

227. DEF. I. Si chiama *pendolo* qualunque corpo, che ritrovasi sospeso ad un punto fisso, intorno al quale può muoversi.

228.

228. DEF. II. Il *Pendolo semplice*, è quello, che noi consideriamo come un punto pesante sospeso all' estremo di una retta inflessibile, e priva di gravità, la quale con l' altro estremo ritrovasi sospesa ad un punto fisso.

229. DEF. III. Si dice *Pendolo composto* quello, che è fatto da molti pesi, i quali conservano sempre la medesima distanza tanto fra loro, quanto relativamente al punto intorno al quale essi si muovono.

230. DEF. IV. Si dice *Asse delle oscillazioni* la retta orizzontale, che passa per lo punto, al quale il pendolo è sospeso.

231. OSS. Se un pendolo si mette nel sito verticale, resta perpetuamente nella quiete, se poi si mette in sito non verticale, purchè non oltrepassi la orizzontale, tirata per lo punto della sospensione, discende per una curva, sino a tanto, che si mette nel sito verticale, indi sale per la parte opposta anche per una curva, e sì nella discesa, che nella salita, il filo resta sempre teso.

232. COR. I. Mantenendosi il filo del pendolo sempre teso, il pendolo in tutti i punti della curva, che descrive, si ritroverà sempre egualmente distante dal punto, al quale è sospeso, dunque la curva, che il pendolo descrive è un arco circolare.

233. COR. II. Se un corpo discende da una data altezza, acquista tanta velocità, quanto gli basterebbe per salire alla stessa altezza (§. 204.) quindi se BA rappresenti un pendolo, B il punto della sospensione, ed il pendolo sia posto in sito, Fig. 37.

ſito, non verticale BC, eſſo diſcenderà per l'arco CA, e nel punto infimo A avrà acquiſtata tanta velocità quanta è baſtante per farlo ſalire ad una altezza eguale a quella, dalla quale è diſceſo, ma il pendolo nel punto A non incontra alcuno impedimento, dunque ſale ad una altezza eguale a quella, dalla quale era diſceſo; nel qual ſito non potendo reſtare, per eſſersi diſtrutta tutta la ſua velocità, dovrà diſcendere da quella altezza, ed acquiſtando di nuovo quella velocità, che aveva perduta, e non ritrovando impedimento alcuno ſalirà dall'altra banda al medeſimo punto C, dal quale di nuovo diſcendendo continuerà il ſuo moto nell'isteſſa maniera, ed in perpetuo deſcriverà l'arco CAD.

234. AVV. I. Biſogna avvertire, che nelle coſe dette di ſopra abbiamo ſuppoſto, che il pendolo nel ſuo moto, non ſoffra alcuna reſiſtenza nè dallo ſtropicciamento del filo intorno al punto della ſoſpenſione, nè dall'aria dentro della quale ſi muove, quindi ne viene, che movendoſi eſſo nell'aria, e ſoffrendo diminuzione di moto per lo ſtropicciamento del filo, gli archi, che eſſo deſcrive vanno continuamente diminuendoſi fino a tanto, che il moto del pendolo interamente diſtruggendoſi, eſſo reſti immobile nel ſito verticale.

235. COR. III. Quindi ſuppoſto, che il pendolo ſi muova liberamente per archi circolari, ne ſegue 1. Che eſſo diſcendendo ſi muova con moto inequabilmente accelerato, e ſalendo ſi muova

va con moto inequabilmente ritardato (§. 208.) 2., Che descriva archi disuguali in tempi disuguali (§. 212.) 3., Che se due pendoli si muovono per archi circolari simili, fanno le loro oscillazioni in tempi, li quali sono fra loro nella ragione delle radici quadrate de' diametri de' cerchi, alli quali gli archi appartengono, overo delle radici quadrate de' raggi de' medesimi cerchi, overo delle lunghezze de' pendoli (§. 207.) 4. Che le lunghezze de' pendoli siano nella ragione de' quadrati de' tempi, che essi impiegano a fare le loro oscillazioni.

236. COR. IV. Li numeri delle oscillazioni, che fanno in tempi eguali due pendoli i quali si muovono per archi circolari simili sono in ragione reciproca de' tempi, che essi impiegano a fare ciascheduna loro oscillazione, ma questi tempi sono nella ragione delle radici quadrate delle lunghezze de' pendoli (§.235.) dunque i numeri delle oscillazioni, che essi fanno in tempi eguali sono nella ragione reciproca delle radici quadrate delle loro lunghezze.

237. AVV. II. Avendo dimostrato, che il pendolo, il quale si muove per archi circolari descrive archi disuguali in tempi disuguali, è chiaro, che esso non può servire per la esatta misura del tempo, quindi, per avere nel pendolo un esatto misuratore del tempo, è necessario farlo muovere per quella curva, la quale è tale, che il pendolo, per essa oscillando, descriva archi disuguali in tempi eguali, ma la curva per la quale un corpo movendosi descrive archi disu-

ſuguali in tempi eguali è la cicloide (§. 214.), dunque volendo adoperare il pendolo per la eſatta miſura del tempo, biſogna fare in maniera, che eſſo ſi muova per archi cicloidali.

238. TEOR. I. *Se intorno ad una ſemicicloide ſi adatta un filo, il quale abbia nel ſuo eſtremo inferiore un peſo, il peſo, ſvolgendo il filo, cadrà deſcrivendo una ſemicicloide eguale alla prima.*

Fig. 38. DIM. Rappreſenti ARB una ſemicicloide della quale ſiano AF la baſe, BF l'aſſe, ed FMB il ſemicircolo generatore; ſi intenda prolungata BF verſo C fino a tanto, che FC ſia eguale a BF, e ſi compiſca il rettangolo AC; indi ſi deſcriva il cerchio Amf, il quale abbia per diametro Af; e ſi deſcriva la ſemicicloide AQC, la quale abbia per ſuo aſſe Af, e per circolo generatore Amf, la quale ſarà perfettamente eguale alla ſemicicloide ARB; di poi ſi intenda al punto C ligato un filo, il quale ſia adattato alla ſemicicloide AQC, ed all'eſtremo A abbia un peſo, il quale laſciato in libertà diſtacca il filo dalla porzione AQ della cicloide, e lo mette nel ſito della tangente QR; finalmente dall'eſtremo R del filo ſi cali ſopra BF la perpendicolare RP, che incontra il ſemicircolo FMB nel punto M; ſi uniſcano le corde Am, MF, e dal punto R ſi cali ſopra di AF la perpendicolare RS.

La retta RQ è tangente della cicloide nel punto Q dunque per la natura della cicloide, è parallela alla corda Am del circolo generatore, ma per coſtruzione MQ è parallela ad AN; dunque ANQm è un parallelogrammo, e perciò MQ = AN, AN, AM = NQ, di più QR è eguale all'arco QA, al quale essa era adattata, ma AQ = 2AM, dunque QR = 2QN, e perciò QN = NR = Am, inoltre le parallele Am, RN vengono tagliate dalla terza AN, e perciò formano gl'angoli alterni RNA, NAm eguali, ma per la stessa ragione anche gli angoli NAm, Amp sono eguali, dunque RNA = Amp; quindi i due triangoli RNS, Amp, i quali sono equiangoli, ed hanno RN = Am, sono perfettamente eguali, e perciò Ap = RS = PF, dunque l'arco Am è eguale all'arco FM, la corda Am è eguale alla corda FM, e l'angolo MFN = NAm; quindi Am è eguale, e parallela ad MF, ma Am è eguale, e parallela ad RN, dunque RN è eguale, e parallela ad FM, e perciò RM, NF, le quali le unifcono dalla stessa parte, sono anche eguali, e parallele. Finalmente per la natura della cicloide AF è eguale alla semiperiferia BMF, AN overo mQ è eguale alla arco Am = ME dunque NF, overo RM è eguale al restante arco MB del semicircolo generatore; quindi l'estremo R del filo è nella cicloide ARB; così si dimostra che in tutto lo sviluppo del filo, sempre il suo estremo è sopra della cicloide ARB, dunque &c.

239. COR. I. Quindi se si prendano due semicicloidi AB, AC perfettamente eguali, le quali si uniscano nel punto A, al quale si sospenda il pendolo AD, la lunghezza del quale sia eguale alla semicicloide AB, esso nel suo moto descriverà la cicloide BDC perfettamente eguale a quella, a cui appartiene AB. *Fig. 39.*

COR.

240. COR. II. La ſemicicloide è ſempre eguale al doppio del diametro del ſuo circolo generatore, dunque la lunghezza AD del pendolo è eguale al doppio del diametro del circolo generatore sì delle ſemicicloidi AB, AC, che di quello della cicloide BDC, che eſſo deſcrive.

241. COR. III. Quindi 1. Il pendolo, deſcrivendo la cicloide BDC, fa le ſue oſcillazioni in tempo minore di quello, che impiegherebbe ſe veniſſe dal punto B al punto C, per qualunque altra curva fra i medeſimi punti compreſa (§ 226.) 2. Il pendolo fa le ſue oſcillazioni nel medeſimo tempo tanto ſe incomincia a muoverſi dal punto B, quanto ſe incomincia a muoverſi da qualunque altro punto E (§. 214.) 3. Il tempo che impiega a fare qualunque ſemioſcillazione ſta al tempo che impiegherebbe, ſe liberamente diſcendeſſe, a percorrere la metà della lunghezza del pendolo come 3. 141: 2. (§. 219.), e perciò il tempo che impiega a fare una intera oſcillazione ſarà al tempo che impiegherebbe, ſe liberamente diſcendeſſe, a percorrere la metà della lunghezza del pendolo come 3. 141: 1.

242. COR. IV. La porzione della cicloide, che è vicina al punto D ſi deſcrive dal pendolo ſenza che il filo AD ſi adatti alle ſemicicloidi AB, AC, quindi l'arco infiniteſimo cicloidale, il quale ſta intorno al punto D ſi confonde coll'archetto infiniteſimo del cerchio deſcritto col raggio AD, dunque il pendolo, il quale oſcilla per archi circolari infiniteſimi ſi muove come ſe deſcriveſſe archi cicloidali, e perciò 1. Le oſcilla-

zio-

zioni, che il pendolo fa per archi infinitesimi circolari, quantunque questi siano di differente lunghezza sono isocrone. 2. Il tempo che il pendolo impiega per fare una semioscillazione per un archetto circolare infinitesimo, sta al tempo, che, liberamente discendendo, impiegherebbe a percorrere la metà della lunghezza del pendolo come 3. 141: 2.; e perciò il tempo, che impiega a fare una intera oscillazione, sta a quello, che impiegherebbe, liberamente discendendo, a percorrere la metà della lunghezza del pendolo come 3, 141: 1.

243. AVV. Cristiano Ugenio determinò, che la lunghezza del pendolo, il quale fa le sue oscillazioni in $1''$ è di piedi parigini 3. 059, ma il tempo, che un pendolo impiega a descrivere un arco cicloidale, o un arco circolare infinitesimo sta al tempo, che impiegherebbe a descrivere la metà della lunghezza del pendolo, se liberamente cadesse, come 3. 141 : 1. (§.241, 242.) o sia come 22: 7., dunque se si fa, come sta 22 : 7 così $1''$ al quarto proporzionale $\frac{7}{22}'''$, overo $19''' \frac{1}{11}$, questo quarto proporzionale darà il tempo, che il corpo impiegherà a discendere liberamente per pied. 1. 1295, che è la metà della lunghezza del pendolo. Di' più gli spazj, che i corpi percorrono liberamente cadendo sono nella ragione de' quadrati de' tempi, che essi corpi impiegano a percorrerli, quindi se si fa la seguente proporzione.

$(19''' \frac{1}{11})^2 : (60.''')^2$, overo $\frac{44100}{121} : 3600$, ovevero 441 : 4356 come la metà della lunghezza del pendolo, che fa le sue oscillazioni in 1'', cioè piedi 1. 1295 al quarto proporzionale, il quale è 15 pied., 1 pol., 2 lin., overo pal. 18. 57; questo quarto proporzionale da lo spazio, che un corpo liberamente cadendo descriverebbe in 1'', spazio, che esattamente corrisponde a quello determinato dallo stesso Ugenio per le osservazioni da lui fatte su la caduta de' gravi.

244. TEOR. II. *Se uno stesso pendolo oscilla in tempi disuguali in due luoghi della terra, la gravità, che anima i corpi nel luogo, in cui il pendolo oscilla in tempo minore, è maggiore della gravità, che anima i corpi in quel luogo, nel quale il pendolo oscilla in tempo maggiore.*

DIM. Il tempo, che un pendolo impiega a descrivere un arco circolare infinitesimo, o un arco cicloidale, sta al tempo che impiegherebbe se liberamente cadesse, a descrivere la metà della lunghezza del pendolo, nella ragione costante di 3. 141, 1: (§. 241., 242.), dunque se un pendolo oscilla in due luoghi diversi della terra in tempi disuguali, sarà il tempo, in cui fa una oscillazione in un luogo, al tempo, in cui fa una oscillazione nell' altro luogo come il tempo, che impiegherebbe a descrivere, liberamente cadendo, la metà della sua lunghezza nel primo luogo, al tempo, che impiegherebbe a discendere per la metà della sua lunghezza nell' altro luogo, dunque se il pendolo in un luogo fa una oscillazione in tempo maggiore di quello, in cui fa un' altra oscillazione nell' altro luogo, anche

che la discesa de' gravi nel primo luogo si fa in tempo maggiore di quello, che si fa nell'altro, e perciò il corpo cadendo nel primo luogo descrive uno spazio minore di quello, che nello stesso tempo descriverebbe nell'altro luogo; ma la caduta de' gravi è effetto della gravità, dunque la gravità è minore in quel luogo dove il pendolo oscilla più lentamente, ed è maggiore in quel luogo dove il pendolo oscilla più velocemente, Sicchè &c.

245. COR. Le osservazioni ci hanno fatto conoscere, che il pendolo portato all'equatore impiega maggior tempo per fare le sue oscillazioni di quello, che impiega per farle in qualunque altro luogo, allontanandosi dall'equatore, quindi la gravità che anima i corpi nell'equatore è minore di quella, che anima i corpi ne' luoghi, che sono vicini ai poli.

246. AVV. I. Richero nel 1672. allorchè si portò nella Cajenna, paese lontano dall'equatore non più di 5°, osservò, che il pendolo, il quale in Parigi faceva le sue oscillazioni in 1'' ivi per farle doveva impiegare un tempo maggiore, quindi fu obbligato di renderlo più corto per lin. $1\frac{1}{4}$, acciocchè le facesse similmente nello stesso tempo di 1''. Lo stesso è accaduto in varie altre occasioni ad Allez Varin, e Des Hayes, e ad altri, li quali hanno costantemente osservato, che allora quando essi si sono portati verso l'equatore è bisognato rendere più corto il pendolo per fare, che le oscillazioni fossero fatte in 1'' ed

$1''$, ed allora quando si sono portati verso i poli è bisognato rendere più lungo il pendolo per fare, che le oscillazioni si fossero fatte nel tempo di $1''$.

247. AVV. II. Molti attribuirono questo fenomeno all'azione del calore, e del freddo, imperciocchè i corpi per lo calore si dilatano, e per lo freddo si restringono, ma il calore della zona torrida è maggiore del calore delle zone temperate, ed in queste il calore è maggiore di quello delle zone frigede dunque il pendolo da una zona temperata portato nella torrida dovea ritrovarsi alluncato a cagione del calore, e nella frigida accorciato a cagione del freddo, e perciò il pedolo doveva ritardare nella zona torrida, e doveva accelerare nella frigida. Filippo de la Hyre in Parigi prese una verga di ferro della lunghezza di 6. piedi, e per molte ore la tenne esposta alla azione libera del sole in tempo di està, e ritrovò, che la verga del pendolo, la quale era della lunghezza di 3 piedi in circa, ricevè l'aumento di $\frac{1}{3}$ di linea, or se nelle vicinanze dell' equatore qualora la verga non è esposta ai raggi del sole, il calore fosse eguale a quello, che era in Parigi allorchè de la Hyre vi sottopose la verga, il pendolo avrebbe dovuto acciorciarsi per $\frac{1}{3}$ di linea; ma nelle vicinanze dell'equatore, cioè nella Cajenna il pendolo si dovè accorciare di lin. $1\frac{1}{4}$ dunque il fenomeno del ritardamento del pendolo portato nelle vicinanze dell' equatore non può

può dipendere dal calore; lo stesso si deve dire dell' azione del freddo per lo pendolo portato nelle vicinanze de' poli, anzi Maupertuis avendo portato nella Lapponia il suo pendolo, il quale in Parigi batteva i minuti secondi, ed avendolo tenuto in una stanza, nella quale manteneva per mezzo del fuoco un grado di calore eguale a quello di Parigi, si ritrovò nella necessità di dovere allungare il pendolo, acciò che potesse battere i minuti secondi.

248. AVV. III. Cristiano Ugenio divise la lunghezza del suo pendolo in tre parti eguali, ciascuna delle quali chiamò *piede orario*, e determinò, che ogni piede orario sta al piede di Parigi come 881 : 864, e credè, che questo piede potesse servire di misura universale, ma avendo le osservazioni dimostrato, che il pendolo deve ne' varj luoghi della terra variare la sua lunghezza per fare le oscillazioni in 1", il piede orario non può servire di misura universale.

249. TEOR. III. *Se un pendolo descrive un arco circolare infinitesimo, il tempo, che impiega a descrivere l' arco sarà al tempo, che impiegherebbe se discendesse per la corda quasi come* 11 : 14.

DIM. Rappresenti AC un pendolo, il quale descriva l' arco infinitesimo DA del circolo FDE, e si unisca la corda DA. *Fig.* 40

Il tempo, che il pendolo impiega a percorrere l' arco DA sta al tempo, che impiegherebbe a percorrere la metà della sua lunghezza CA, se cadesse liberamente, come 3. 141 : 2 (§. 242), o vero come 11 : 7, ma il tempo, che il corpo impiega a discendere per lo doppio di AC è il doppio di quello, che impiega a discendere per $\frac{1}{2}$ AC (§.184) dunque il tempo, che il pendolo impiega a percorrere DA sta al tempo, che impiega a percorrere 2AC = 11 : 14, ma il tempo, che un corpo impiega a percorrere la corda DA è uguale a quello, che impiegherebbe, liberamente discendendo, a percorrere 2AC (§.194). Dunque il tempo, che il pendolo impiega a descrivere l'arco DA sta a quello, che impiegherebbe se discendesse per la corda DA come 11 : 14. Sicchè &c.

250. COR. Quindi il pendolo, che discende per un arco circolare infinitesimo per descrivere l'arco non impiega il medesimo tempo, che impiegherebbe per descrivere la corda, se discendesse per essa, e perciò vanno errati que' Fisici, che hanno dimostrato l'isocronismo degli archi circolari infinitesimi, supponendo, che il pendolo descriva l'arco circolare infinitesimo nel medesimo tempo, che descriverebbe la corda del medesimo arco.

251. AVV. Tutto ciò, che si è detto in questo capitolo per riguardo al moto de' pendoli si è detto supponendo, che i pendoli siano semplici, ma li pendoli, che noi nella natura abbiamo, e su de' quali ci è permesso di fare le esperienze sono tutti pendoli composti, sicchè è necessario, che da noi si cerchi la maniera di ridurre ogni pendolo composto a pendolo semplice, la quale cosa si otterrà facilmente con determi-

terminare il centro della oſcillazione di eſſi.

CAPITOLO XIX.

Del centro di gravità.

252. DEF. I. SI dice *centro di gravità* di un corpo, quel punto, dal quale il corpo liberamente ſoſpeſo, o ſoſtenuto reſta ſempre immobile.

253. COR. Quantunque la gravità del corpo ſia equabilmente diſtribuita a tutte le particelle della materia, che lo compongono, pure i Fiſici la conſiderano, come ſe foſſe riunita nel centro di gravità di quello; imperocchè qualora da una forza viene ſoſtenuto un corpo per lo centro di gravità, da eſſo vien ſoſtenuto tutto lo sforzo, che fa la intiera gravità del corpo, e per queſta ragione noi ſupponiamo, che le parti di materia, che compongono un corpo, ſiano riunite nel centro di gravità di quello.

254. DEF. II. Si dice *diametro di gravità* di un corpo qualunque retta, la quale paſſa per lo centro di gravità di eſſo.

255. COR. Potendo per un punto paſſare infinite linee rette, è chiaro, che un corpo può avere infiniti diametri di gravità.

256. DEF. III. Si dice *piano di gravità* di un corpo qualunque piano, il quale paſſa per lo centro di gravità di eſſo,

257. COR. I. Potendo per un medeſimo punto paſſare infiniti piani, ne ſegue, che un cor-

po può avere infiniti piani di gravità.

258. COR. II. Quindi ſe due piani di gravità ſi interſecano, la loro comune ſezione è un diametro di gravità, e ſe due diametri di gravità ſi interſecano, il punto, in cui eſſi ſi tagliano è il centro di gravità.

259. AVV. I. Biſogna avvertire, che il centrò di gravità di un corpo in alcuni caſi è un punto eſiſtente dentro del medeſimo corpo, in alcuni altri è un punto eſiſtente fuori di eſſo, così il centro di gravità di una sfera è un punto eſiſtente nella ſteſſa sfera, il centro di gravità di un anello sferico è un punto eſiſtente fuori di eſſo. Nel caſo che il centro di gravità ſia fuori del corpo, immaginano i fiſici, che eſſo ſia al corpo così legato, che non poſſa eſſerne ſeparato, e che conſervi ſempre la medeſima situazione relativamente a tutte le parti del corpo.

260. AVV. II. Siccome ciaſcheduna particella di un corpo ſi può conſiderare come un corpuſcolo peſante, così ciaſcheduna particella del medeſimo corpo avrà un ſuo particolare centro di gravità, nel quale tutta la gravità di eſſa si può concepire riunita, quindi il centro di gravità dell'intero corpo ſi può conſiderare come il centro di gravità di tutti i centri di gravità particolari delle particelle, dalle quali il corpo ſi concepiſce compoſto. Similmente ſe vi ſono più corpi ſeparati, eſſi ſi poſſono conſiderare come ſe formaſſero un ſolo corpo, il quale aveſſe un ſolo centro di gravità, nel quale ſolo ſi concepiſce riunita tutta la gravità de' corpi particolari,

or

or sì fatto centro di gravità si chiama *centro di gravità comune* di tutti quelli corpi.

261. DEF. IV. Si dice *sistema di corpi* l'unione di più corpi fra loro distinti, li quali si considerano come se facessero un corpo solo.

262. DEF. V. Si dice *centro di gravità di un sistema di corpi* il centro di gravità comune di tutti quelli corpi, che si considerano formare il sistema.

263. DEF. VI. Si dice *linea della direzione di un corpo, o di un sistema di corpi* quella verticale, che passa per lo centro di gravità del corpo, o del sistema.

264. COR. I. Quindi ogni diametro di gravità può divenire linea della direzione.

265. COR. II. Avendo ogni sistema di corpi il suo centro di gravità, avrà ancora li suoi piani di gravità, li suoi diametri di gravità e la sua linea di direzione.

266. COR. III. La gravità di un corpo facendo azione sopra di esso come se tutta fosse riunita nel suo centro di gravità, ne segue 1. Che ogni corpo lasciato libero in qualsivoglia situazione deve discendere per la linea di direzione, che li corrisponde nella situazione, in cui è lasciato. 2. Che nessun corpo ubbidendo alla forza della sua gravità può allontanare il suo centro di gravità dal centro della terra. 3. Che ogni corpo ubbidendo alla forza della sua gravità si muove accostando il suo centro di gravità al centro della terra, e si muove sempre in maniera, che l'avvicinamento del suo centro di gravità al

centro della terra sia il maſsimo poſsibile. 4. Che ogni corpo ſoſtenuto da un punto diverſo dal centro di gravità, reſta immobile, ſe il punto, da cui è ſoſtenuto, ed il ſuo centro di gravità ſono nella medesima verticale, altrimenti il corpo ſi gira fino a tanto, che il centro di gravità, ed il punto della ſoſpenſione ſi mettano nella ſteſſa verticale. 5. Che ſe un corpo pende per mezzo di un filo da un altro corpo, eſſo fa ſopra dell' altro corpo quella medesima azione, che farebbe ſe il ſuo centro di gtavità foſſe nel punto, da' cui è ſoſpeſo. 6. Che ſe un corpo è ſoſpeso per mezzo di un filo a qualunque punto fiſſo, il corpo ſi ſituerà in maniera, che il punto, a cui ſi concepiſce eſſer legato il filo, il punto, del filo al quale è ligato il corpo, ed il centro di gravità del corpo ſono nella medeſima verticale. 7. Che ſe un filo, il quale paſſa per li centri particolari di gravità di varj corpi è ſoſpeſo ad un punto fiſſo, i centri di gravità de' detti corpi, ed il punto fiſſo ſaranno nella ſteſſa verticale. 8. Che ſe un corpo ſi ſoſpende ad un filo per un punto, indi ſi ſoſpende per un altro punto diverſo dal primo, le due direzioni verticali del filo paſſeranno ambedue per lo centro di gravità del corpo, e perciò il punto, in cui eſſe ſi interſecheranno, ſarà il centro di gravità del corpo.

267. COR. IV. Di più reſtando immobile qualunque corpo, qualora è ſoſtenuto dal ſuo centro di gravità, ne ſegue, che ſe per lo centro di gravità di un corpo ſi fa paſſare un piano verticale, la ſomma delle azioni, che

che fanno le parti di materia, che sono da una parte del piano, è eguale alla somma delle azioni, che fanno le parti di materia, che sono dall' altra parte del medesimo piano, perchè altrimenti il corpo sostenuto dal centro di gravità non resterebbe immobile, e similmente se per lo centro di gravità di un sistema di corpi s'intende passare un piano verticale, la somma delle azioni, che fanno i corpi, che sono da una parte del piano, è eguale alla somma delle azioni, che fanno i corpi, che sono dall'altra parte dello stesso piano.

268. DEF.VII. Li corpi, che compongono un sistema di corpi allora si dicono *essere nell' equilibrio*, quando sono sospesi da un punto in maniera, che la somma delle azioni de'corpi, che sono da una parte sia eguale alla somma delle azioni de' corpi, che sono dall' altra parte.

269.COR. Quindi 1. quando un sistema di corpi è sostenuto dal suo centro di gravità, li corpi, che lo compongono sono in equilbrio. 2. quando un corpo è sostenuto dal suo centro di gravità, le sue parti sono nell' equilibrio, imperciocchè ogni corpo si può considerare come un sistema di corpi formato da tutte le parti di materia, che compongono il corpo.

270. AVV. Per ritrovare il centro di gravità di un corpo, o di qualunque figura, è necessario, che prima si ritrovino i centri particolari di gravità de' loro elementi, e dopo si dia la maniera di ritrovare il centro comune di gravità del sistema di tutti questi centri particolari, ma

per maggiore chiarezza incominciéremo dal dire come si possono le figure considerare formate da differenti elementi.

1. Possiamo noi considerare ogni figura solida come formata da infinite laminette, e ordinariamente supponiamo, che esse siano di eguale profondità; posiamo ancora considerare ogni figura solida come composta da infiniti strati simili alla figura esteriore, e di eguali profondità; in fine posiamo anche, quando ci torna comodo, considerare ogni figura solida come composta da una infinità di piramidi, le quali tutte mettono i loro vertici nel medesimo punto, e tengono per basi le piccole porzioni della superficie della medesima figura solida.

Così per esempio posiamo considerare una sfera divisa per piani paralleli, ed infinitamente vicini; posiamo considerarla composta da infiniti strati sferici; posiamo considerarla composta da infinite piramidi eguali, le quali tengono tutte il loro vertice nel centro della sfera, ed hanno per basi gli elementi della superficie sferica. Un cilindro si può intendere composto di infinite laminette circolari eguali alla laminetta, che forma la sua base; posiamo ancora considerarlo composto da infiniti strati cilindrici, ma non ci riesce comodo di considerarlo come composto da infinite piramidette.

2. Considerando le superficie, noi supponiamo, che esse siano corpi infinitamente sottili, e da per tutto della medesima profondità; se sono superficie piane, supponiamo, che esse siano composte

da

dà infinite verghe dritte della medesima larghezza, e della medesima profondità, acciocchè i loro pesi siano proporzionali alle loro lunghezze; possiamo ancora considerarle divise in tante particelle rassomiglianti alla intera figura, o pure come composte da molti triangoli.

Così un circolo si può considerare diviso da infinite rette parallele, si può considerare come formato da infiniti anelli posti gli uni dentro degli altri, si può finalmente considerare come composto da infiniti triangoli, li quali tutti tengono li loro vertici nel centro del cerchio, ed hanno per loro basi gli elementi della periferia del cerchio.

Se poi la superficie è curva, come quella della sfera, si può considerare composta da infinite fasce, le quali hanno tutta la medesima larghezza.

3. La linea si può considerare come un corpo da per tutto della medesima grossezza, che tiene una larghezza ed una profondità infinitamente piccola, o pure si può considerare come composta da infiniti punti tutti egualmente pesanti.

271. PROB. I. *Dato un corpo, determinare meccanicamente il suo centro di gravità.*

SOL. Si sospenda il corpo per qualsivoglia suo punto, e si segnino su la sua superficie il punto da cui è sospeso, ed il punto, che gli è opposto, ed è nella stessa verticale; indi si sospenda il corpo per qualunque altro punto diverso dagli già detti e su la superficie si segnino similmente il punto della sospensione, ed il punto che li è opposto; si intendano i due primi punti uniti con una retta, ed i due secondi con un'altra. Dico, che il punto, in cui

queste

queste due rette si intersecano, è il centro di gravità.

DIM. La dimostrazione è chiara per lo §. 258. Altrimenti. Il corpo prima con la sua lunghezza, indi con la sua larghezza, e finalmente con la sua altezza si appoggi sopra del lato superiore di un prisma triangolare, il quale prisma sia posto sopra di un piano orizzontale con uno de' suoi parallelogrammi, ed in ognuna delle dette situazioni si tiri il corpo più avanti, o più dietro fino a tanto, che si osservi orizzontale, ed immobile, indi si tiri su la superficie del corpo una linea nel luogo, dove il corpo tocca il lato superiore del prisma, ed un'altra nel luogo, che gli è opposto, ed è nello stesso piano verticale, e ciò si faccia per la lunghezza, per la larghezza, e per la altezza; finalmente si concepisca, che per le due prime, per le due seconde, e per le due terze linee passino tre piani. Dico, che il punto, in cui le comuni sezioni de' tre piani si intersecano, è il centro di gravità del corpo.

DIM. La dimostrazione è chiara per lo §. 258.

272. AVV. Se il corpo, di cui si cerca il centro di gravità, non si può comodamente situare sopra il lato del prisma, allora si prenda una tavola, della quale sia prima determinato il centro di gravità, questa si metta in modo, che il suo centro di gravità corrisponda al lato del prisma, indi sopra di esso si adatti il corpo, del quale si determini il centro di gravità, come nel §. 271.

273. TEOR. I. *Se li centri particolari di gravità di due corpi si uniscono per mezzo di una retta, le distanze, che il centro comune di gravi-*

tà

tà de' due corpi tiene dai centri di gravità particolari di essi, sono in ragione reciproca delle masse de' medesimi corpi.

DIM. Siano A, B i centri di gravità particolari de' due corpi P, Q, i quali siano uniti con la retta AB, e sia O il loro centro comune di gravità, dal quale si concepisca sostenuto il sistema de' corpi P, Q. *Fig.41.*

La gravità del corpo P in ogni istante di tempo fa azione sopra di esso, e se non vi fosse in B la gravità del corpo Q, il detto corpo P descriverebbe uno spazio, il quale sia AC, e con l'ajuto della retta AB trasporterebbe il corpo Q per l'archetto BF, ma la gravità del corpo Q in ogni istante di tempo fa azione sopra di esso, e se non vi fosse in A la gravità del corpo P, il medesimo corpo Q descriverebbe nello stesso tempo uno spazio, il quale sia BD, e con l'ajuto della retta BA trasporterebbe il corpo P per l'archetto AE, dunque il moto che il corpo P, produce nel corpo Q per BF viene distrutto dal moto, che la gravità del corpo Q in esso produrrebbe per BD, e perciò il moto del corpo Q per BF è eguale al moto del corpo Q per BD; di più i corpi P, Q essendo in equilibrio, se si movessero, i loro moti sarebbero eguali, e perciò il moto del corpo P per AC è eguale al moto del corpo Q per BD; ma il moto del corpo Q per BD, è eguale al moto del corpo Q per BF, dunque il moto del corpo Q per BF anche è eguale al moto del corpo P per AC; in oltre gli spazj AC, BF sono descritti in tempi eguali dalli corpi

corpi P, Q, dunque sono nella ragione delle loro velocità; ma gli angoli AOC, FOB, fatti a' centri de' cerchi, alli quali gli archi AC, BF appartengono, sono eguali, dunque l'arco AC sta all'arco BF come AO : OB; ma gli archi AC, BF sono nella ragione delle velocità de' corpi P, Q, dunque la velocità del corpo P sta alla velocità del corpo Q come AO : OB. Finalmente quando i moti di due corpi sono eguali, le masse di essi sono in ragione reciproca delle loro velocità (§.105) dunque la massa del corpo P sta alla massa del corpo Q = BO : AO. Sicchè &c.

274. COR. I. Si è dimostrato, che P : Q = BO : OA, ma quando quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, dunque P. AO = Q. BO, ma AO, BO disegnano le velocità prodotte ne' corpi P, Q dalle azioni delle loro gravità, dunque P. AO, e Q. BC disegnano li moti prodotti dalle medesime azioni; ma gli effetti sono proporzionali alle cagioni, che li producono, dunque le azioni delle gravità de' corpi P, Q sono nella ragione di P. AQ : Q. BO; e perciò le azioni de' corpi equiponderanti si determinano per mezzo de' prodotti, che si hanno moltiplicando le loro masse per le respettive distanze, che essi hanno dal loro centro di gravità. Or questi prodotti si chiamano *momenti de' corpi*.

275. COR. II. Essendo P : Q = BO : OA, sarà componendo P + Q : Q = AB : AO, e perciò la quarta proporzionale $AO = \frac{Q.AB}{P+Q}$: quindi

la

la distanza, che il centro di gravità del corpo P tiene dal centro di gravità comune de' corpi P, Q, si ritrova moltiplicando il peso Q per la distanza AB, e dividendo il prodotto per la somma de' pesi P, Q.

276. AVV. Si noti, che se AC rappresenta un piano verticale immobile, e da qualunque suo punto B si tira una orizzontale BD, sopra della quale a' varj punti D, E, F siano situati de' corpi, e si intende DB muoversi per uno istante per l' azione della gravità de' corpi D, E, F, e venire nella situazione BG, questi corpi descriveranno gli archetti DG, EH, FI, i quali disegneranno le velocità de' corpi; ma essi sono archi simili, e perciò sono nella ragione di DB, EB, FB, dunque i momenti de' corpi D, E, F, relativamente al piano AC, sono nella ragione de' prodotti D. DB, E. EB, F. FB; e perciò i momenti de' corpi, relativamente al piano verticale, sono sempre nella ragione delle loro masse moltiplicate per le distanze, che hanno dal piano. *Fig. 42.*

277. TEOR. II. *Se vi è un sistema di corpi, e per qualunque luogo si fa passare un piano, la somma de' prodotti, che si hanno, moltiplicando ciaschedun peso per la distanza del suo centro di gravità dal piano, è eguale al prodotto, che nasce moltiplicando la somma de' pesi per la distanza, che il centro di gravità del sistema tiene dal piano.*

DIM. Sia un sistema di corpi, il quale sia composto da qualsivoglia numero di corpi A, B, C, D, E esistenti, o nello stesso piano, o in diversi piani, e si supponga essere O il centro *Fig. 43.*

di

di gravità dell' intero ſiſtema, e ſia ad arbitrio tirato qualſivoglia piano ST, indi dalli centri particolari di gravità delli corpi A, B, C, D, E, e dal centro O ſiano calate ſopra di ST le perpendicolari AF, BM, CR, EI, DP, OK, e per O si intenda paſſare il piano UX, parallelo al piano TS, che incontri AF, BM, CR nelli punti G, L, Q, ed incontri le rette EI, DP prolungate in H, N.

Paſſando il piano UX per lo centro di gravità del ſiſtema, la ſomma de' momenti de' corpi A, B, C ſarà eguale alla ſomma de' momenti di E, D, ma i momenti ſi hanno moltiplicando le maſſe de' corpi per le reſpettive diſtanze, che hanno dal piano UX, dunque ſarà

$A.AG + B.BL + C.CQ. = E.EH + D.DN$; ma

$A.AG = A.AF - A.GF$,

$B.BL = B.BM - B.LM$

$C.CQ = C.CR - C.QR$

$D.DN = D.NP - D.DP$

$E.EH = E.HI - E.EI$

Dunque $A.AF - A.GF + B.BM - B.LM + C.CR - C.QR = D.NP - D.DP + E.HI - E.EI$ e trasferendo i termini, ſarà

$A.AF + B.BM + C.CR + D.DP + E.EI = A.GF + B.LM + C.QR + E.HI + D.NP$, ma i piani XU, ST ſono paralleli, e perciò le rette GF, HI, LM, NP, QR ſono eguali ad OK, dunque $A.AF + B.BM + C.CR + D.DP + E.EI = (A + B + C + D + E) OK$. Sicchè &c.

279. COR. Quindi ſe ſi vuole determinare la diſtan-

stanza, che il centro di gravità del dato sistema di corpi tiene dal piano TS, basterà determinare i momenti particolari de' corpi A, B, C, D, E relativamente al piano ST, e dividere la somma di questi momenti per la somma de' pesi de' corpi A, B, C, D, E, il quoziente, che si avrà, darà la distanza OH, che tiene il centro di gravità O del sistema dal piano ST.

278. PROB. II. *Data una verga inflessibile orizzontalmente situata, e da essa pendano più corpi, determinare il centro di gravità comune di essi corpi.*

SOL. Rappresenti AB una verga orizzontale *Fig.* 44. inflessibile dalla quale pendano liberamente i corpi P, Q, R, S, le direzioni PA, QC, RD, SB saranno tutte verticali, e perciò perpendicolari ad AB.

Si facciano li prodotti P. AB, Q. CB, R. DB, e la somma di essi si divida per la somma de' pesi P + Q + R + S, e dalla orizzontale AB, si tagli BE eguale al quoziente, che nasce da sì fatta divisione; di poi si facciano i prodotti P. PA, Q. QC, R. RD, S. SB, e la somma di essi si divida per la somma de' pesi P + Q + R + S; finalmente dalla verticale BS prolungata, se bisogna, si tagli BF eguale al quoziente, che nasce da sì fatta divisione, e si compisca il rettangolo EF. Dico che O è il centro di gravità ricercato.

DIM. Si intendano per AB, e per BF passare due piani, alli quali siano respettivamenre perpendicolari le rette PA, QC, RD, SB, ed AB

La

la distanza, che il centro di gravità comune de' corpi P, Q, R, S tiene dal piano, che passa per BS, è eguale a $\frac{P.AB + Q.CB + R.DB}{P+Q+R+S}$ (§.279) ma per costruzione a sì fatto quoziente è eguale EB, dunque EB disegna la distanza del centro comune di gravità de' corpi P, Q, R, S relativamente al piano, che passa per BF, similmente la distanza del centro comune di gravità de' corpi P, Q, R, S, relativamente al piano, che passa per AB, è eguale a
$\frac{P.PA + Q.QC + R.RD + S.SB}{P+Q+R+S}$ ma per costruzione BF è eguale a sì fatto quoziente, dunque BF disegna la distanza, che il centro comune di gravità de' corpi P, Q, R, S ha dal piano, che passa per AB; ma il centro di gravità è un punto solo, dunque è il punto O il quale è lontano da AB tanto quanto è la retta BF, ed è lontano da BF quanto è la retta BE. Sicchè &c.

279. AVV.I. Si noti, che allora quando la retta AB si tiene sospesa per lo punto E, essa, ed il sistema de' corpi P, Q, R, S restano equilibrati, perchè il punto B della retta AB si ritrova essere ancora nella verticale OE, la quale passa per lo centro di gravità O del sistema de' corpi P, Q, R, S. Di più se la retta AB non si considera più senza peso, ma si considera come una verga pesante, ed il suo centro di gravità è nel punto G, allora per fare, che la verga, ed il

il sistema restino in equilibrio, bisogna, che si ritrovi il loro centro di gravità, e perciò si congiunga la retta GO e questa si divida nel punto H in modo, che sia GH : HO = P + Q + R + S al peso della verga, ciò fatto, il punto H, è il centro di gravità della verga, e del sistema: or se per lo punto H si fa passare una verticale, la quale incontra AB nel punto I, la verga AB, ed il sistema P, Q, R, S resteranno equilibrati allorchè la verga AB si terrà sospesa per lo punto I.

280. AVV. II. Di più dalle cose dette si ricava facilmente il metodo di ritrovare il centro di gravità di un sistema qualsivoglia di corpi. In fatti sia il sistema de' tre corpi A, B, C, che abbiano i loro centri di gravità particolari ne' punti O, P, R; si unisca OP, e si determini prima il centro Q di gravità comune de' corpi A, B (§.275), indi si unisca QR, e si ritrovi in QR il centro S di gravità della somma de' due corpi A, B posti col loro centro di gravità in Q, e del corpo C, sarà S il centro comune di gravità del sistema de' tre corpi A, B, C. Imperciocchè, supposte le rette OP, QR inflessibili, le azioni, che fanno i corpi A, B sopra la retta OP ne' loro luoghi, sono eguali all' azione, che farebbe sopra di OP la somma de' pesi A, B, se fosse situata col suo centro di gravità nel punto Q, ma la somma de' pesi A, B col centro di gravità in Q è in equilibrio col peso C, qualora si sostiene la retta QR dal punto S; dunque anche li pesi di A, B, sopra la retta *Fig. 45.*

AB sono in equilibrio col peso C sopra la retta QR, qualora si sostiene la retta RQ dal punto S. Sicchè S è il centro di gravità del sistema de' tre corpi A, B, C; similmente si determinerà il centro di gravità di qualunque altro sistema composto da qualsivoglia numero di corpi.

CAPITOLO XX.

De' centri di gravità delle linee, delle superficie, e de' solidi.

Fig. 46. 281. PROB. I. D*Eterminare il centro di gravità di qualunque retta.*

SOL. Sia data la retta AB, la quale si divida in due parti eguali nel punto O. Dico, che O è il centro di gravità di essa.

DIM. Gli elementi, che compongono AO eguagliano nel numero, nella grandezza, e nelle distanze, che ciascheduno di essi ha dal punto O, gli elementi, che compongono OB; dunque la somma de' momenti degli elementi, che compongono AO, relativamente al punto O, eguaglia la somma de' momenti degli elementi, che compongono BO, anche relativamente al punto O, quindi O è il centro di gravità di AB.

282. AVV. I. Si noti, che considerandosi le linee come corpi omogenei, che hanno i loro pesi proporzionali alle loro lunghezze, si determinerà il centro di gravità di un sistema di rette, e per conseguenza del perimetro di un rettilineo,

tilineo, della ſteſſa maniera, come ſi è determinato il centro di gravità di un ſiſtema di corpi; quindi ſe ſi vuole determinare il centro di gravità del perimetro del rettilineo ABCDE, ſi deve procedere nella ſeguente maniera. Si divida in due parti eguali ciaſcuno de' lati AB, BC, CD, DE, EA ne' punti F, G, H, I, K; ſi uniſca FG, la quale ſi divida in O in modo, che ſia FO: OG = CB: BA, ſarà O il centro comune di gravità delli lati AB, BC; ſi congiunga OH, la quale ſi divida in P, in maniera, che sia HP: PO = AB + BC : CD; ſarà P il centro comune di gravità di AB, BC, CD; si congiunga PI, la quale si divida in Q in maniera, che sia IQ: QP = AB + BC + CD : DE, ſarà Q il centro comune di gravità di AB, BC, CD, DE. Finalmente si congiunga QK, la quale si divida in R, in modo che sia KR: RQ = AB + BC + CD + DE : EA, ſarà R il centro comune di gravità di tutto il perimetro della figura ABCDE. Fig.47.

283. LEM. *Se dal centro di un ſemicerchio ſi tira un raggio perpendicolare al diametro, e dall'eſtremo di eſſo ſi tira una tangente, la quale ſi prolunga fino a tanto, che incontri due altre tangenti tirate dagli eſtremi del diametro, il momento della tangente, relativamente al diametro, è eguale al momento della ſemiperiferia, relativamente al medeſimo diametro.*

DIM. Rappreſenti ABD un mezzo cerchio, di cui il diametro sia AD, ed il centro C, indi tirato per lo punto C il raggio CB perpendico- Fig.48.

 lare

lare ad AD, per B si tiri la tangente EF, la quale prolungata incontri le tangenti AE, DF tirate dagli estremi A, D del diametro ne' punti E, F; nella semiperiferia ABD si prenda ad arbitrio l' archetto infinitamente piccolo GH, il quale si concepisca diviso in due parti eguali nel punto O, e dalli punti G, O, H si calino sopra AD le perpendicolari GL, OM, HN, le quali si prolunghino fino a tanto, che incon. trino la tangente EF ne' punti T, U, X; finalmente dal punto G sopra HN si cali la perpendicolare GQ, e si unisca il raggio OC.

Essendo l'archetto GH infinitamente piccolo, si potrà considerare come una linea retta, ma della linea retta il centro di gravità è in quel punto, in cui essa viene divisa in due parti eguali (§.281), dunque il centro di gravità dell' archetto GH è nel punto O, e per conseguenza il suo momento, relativamente al diametro AD, è eguale a GH. OM. In oltre i due triangoli OMC, HGQ sono simili, e perciò GH : GQ = CO : OM, o vero GH : TX = CO : OM, dunque GH. OM = TX. CO = TX. UM; ma GH. OM è il momento dell' elemento dell' arco AB, relativamente al diametro AD, e TX. VM è il momento del corrispondente elemento TX della tangente, relativamente allo stesso diametro, dunque il momento dell' elemento della semiperiferia ABD, relativamente al diametro CD, è eguale al momento del corrispondente elemento della tangente EF, relativamente allo stesso diametro. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che il momento

mento di qualunque altro elemento della ſemiperiferia ABD, relativamente al diametro AD, è eguale al momento del corriſpondente elemento della tangente EF, relativamente allo ſteſſo diametro; dunque il momento di tutta la ſemiperiferia ABD, relativamente al diametro AD, è eguale al momento di tutta la tangente EF, relativamente allo ſteſſo diametro. Sicchè &c.

284. COR. Eſſendo il momento di ciaſcheduno elemento della ſemiperiferia ABD, relativamente al diametro AD, eguale al momento dell' elemento corriſpondente della tangente EF, saranno li momenti degli archi AG, GB, BD, relativamente allo ſteſo diametro, reſpettivamente eguali alli momenti delle corriſpondenti parti della tangente ET, TB, BF.

285. PROB. II. *Dato un arco di cerchio non maggiore della mezza periferia, determinare il ſuo centro di gravità.*

SOL. Sia dato l' arco GBI. Si ritrovi il centro C del cerchio, a cui l' arco GBI appartiene, e diviſo l' arco GBI in due parti eguali nel punto B, si uniſca il raggio CB, dal quale si tagli CP quarta proporzionale in ordine all' arco GBI, alla ſua corda GI, ed al raggio BC. Dico, che il punto P è il centro di gravità dell' arco GBI. *Fig.* 49.

DIM. Per B si tiri la tangente EF, e per lo centro C si tiri AD parallela alla tangente EF, e si compiſca il mezzo cerchio ABD; dai punti G, I ſopra di AD, si calino le perpendicolari GL, IR, le quali si prolunghino fino a tanto, che incontrino EF ne' punti T, Y.

Se si concepiſce la retta BM diviſa in parti infinitamente piccole, e tutte fra loro eguali, e per li punti delle divisioni si intendono tirate delle rette parallele alla corda GI, ſaranno le due porzioni GB, BI dell'arco, diviſe in parti eguali, e' similmente situate per riſpetto del raggio BC, e perciò i momenti di GB, BI, relativamente al raggio BC, ſaranno eguali, dunque il centro di gravità dell'arco GBI ſarà nel raggio CB; di più il momento dell' arco GBI, relativamente al diametro AD, è eguale al momento della tangente TY; ma il momento di TY, relativamente ad AD $=$ TY.CB $=$ GI. CB, dunque il momento dell' arco GBI, relativamente al diametro AD, è eguale a GI. CB; ma il momento di GBI, relativamente al diametro AD, è eguale al prodotto dell' arco GBI moltiplicato per la diſtanza, che il ſuo centro di gravità tiene dallo ſteſſo diametro, dunque il prodotto di GBI moltiplicato per la diſtanza, che il ſuo centro di gravità tiene dal diametro AD $=$ GI. CB, quindi dividendo queſti prodotti eguali per l'arco GBI, ſarà la diſtanza, che il centro di gravità dello ſteſſo arco tiene dal diametro $AD = \frac{GI.CB}{GBI}$, e perciò ſarà GBI : GI $=$ CB alla diſtanza, che il centro di gravità di GBI tiene dal diametro AD; ma il centro di gravità è nel raggio CB; dunque &c.

Fig. 50. 286. AVV. I. Si noti, che ſe nel cerchio ACBD, ſi tirano due diametri AB, CD fra loro perpendicodicolari, il centro di gravità della ſemiperiferia CBD è il punto P del raggio OB, il quale divide la detta ſemiperiferia in due parti eguali, ed è diſtante dal centro O di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che ſi ha in ordine alla ſemiperiferia CBD, al diametro CD, ed al raggio OB; ſimilmente il centro di gravità della ſemiperiferia CAD è nel punto Q del raggio AO, il quale divide la ſemiperiferia CAD in due parti eguali, ed è diſtante dal centro O pure di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che ſi ha in ordine alla ſemiperiferia, al diametro, ed al raggio; dunque il centro di gravità di tutta la periferia ACBD è il punto O, in cui la retta QP, che uniſce i centri di gravità particolari delle ſemiperiferie CBD, CAD, viene diviſo in due parti eguali; e perciò il centro di gravità della intera periferia circolare è il centro del cerchio.

287. AVV. II. Se poi l'arco GHI è maggiore della mezza periferia, è chiaro, che il ſuo centro di gravità deve eſſere pure nel diametro BCH, che divide il detto arco in due parti eguali, e ſi comprenderà facilmente, che eſſo centro di gravità è diſtante dal centro C di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che ſi ha in ordine all' arco GHI, alla ſua corda GI, ed al raggio CH; in fatti ſi ſupponga, che X ſia la diſtanza, che il centro di gravità dell' arco GHI tiene dal centro C del cerchio, e che C ſia il centro di gravità della intera periferia, e per conſeguenza ſia il il centro di gravità del ſiſtema delli due archi Fig. 49.

 GBI,

GBI, GHI; sarà GHI : GBI = CP : X (§. 273) ma GBI : GI = CB : CP (§. 285), quindi $CP = \frac{GI.CB}{GBI}$; e perciò sostituendo sarà $GHI : GBI = \frac{GI.CB}{GBI} : X$, ma quando quattro grandezze sono proporzionali il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, dunque sarà GHI. X = GI. CB, e perciò GHI: GI = CB : X. Dunque la distanza, che il centro di gravità dell'arco GHI tiene dal centro O, è quarta proporzionale in ordine all' arco GHI, alla sua corda GI, ed al raggio CH.

288. PROB. III. *Determinare il centro di gravità di qualsivoglia triangolo.*

Fig. 51. SOL. Rappresenti ABC qualsivoglia triangolo, si divida qualunque lato AC in due parti eguali nel punto D, e dal vertice B dell' angolo opposto al lato AG si tiri al punto D la retta BD; finalmente si tagli da BD la sua terza parte DO. Dico, che O è il centro di gravità del triangolo ABC.

DIM. Si divida BC in due parti eguali nel punto E, indi dal punto A al punto E si tiri la retta AE, che interseca BD nel punto O, e si unisca DE.

Se il triangolo ABC si concepisce composto da elementi paralleli ad AC, la retta BD, che taglia AC in due parti eguali, anche in due parti eguali taglierà tutti gli elementi paralleli ad AC, dunque tutti i centri di gravità di tutti gli elementi del triangolo ABC saranno nella retta BD, quindi BD

sarà

ſarà un diametro di gravità del triangolo ABC; ſimilmente ſi dimoſtra, che AE è un altro diametro di gravità dello ſteſſo triangolo, dunque il punto O, in cui i due diametri di gravità AE, BD ſi interſecano, ſarà il centro di gravità del triangolo ABC. In oltre, per coſtruzione, AD = DC, BE = EC, dunque AD : DC = BE : EC, e perciò DE è parallela ad AB; ma le parallele AB, DE vengono tagliate dalla terza DB, e perciò formano gli angoli alterni EDO, OBA eguali, dunque i due triangoli AOB, DOE ſono ſimili, e perciò AB : DE = BO : OD; ma per la ſimiglianza de' triangoli ACB, DCE, AC : CD = AB : DE, dunque AC : CD = BO : OD; ma per coſtruzione CA è doppia di CD, dunque BO è doppia di OD, e perciò OD è terza parte di BD. Sicchè &c.

289. PROB. IV. *Determinare il centro di gravità di qualunque figura rettilinea.*

SOL. Sia ABCDE qualunque figura rettilinea; *Fig.* 52. ſi divida ne' triangoli ABC, ACD, ADE, e ſi determinino i loro centri di gravità particolari O, P, Q; indi ſi tiri la retta OP, la quale ſi divida in R in modo, che ſia PR : RO come il triangolo ABC al triangolo ACD; ſarà R il centro di gravità comune de' due triangoli ABC, ACD, e per conſeguenza il centro di gravità del quadrilatero ABCD. Indi ſi tiri la retta QR, e ſi divida in S in modo, che ſia QS : SR come il quadrilatero ABCD al triangolo ADE, ſarà S il centro di gravità comune del quadrilatero ABCD, e del triangolo ADE, e perciò S ſarà il cen-

centro di gravità della figura ABCDE.

Fig. 53. 290. AVV. Se del metodo dato nella prop. precedente facciamo uso per ritrovare il centro di gravità di un parallelogrammo, lo ritroveremo in quel punto, in cui la diagonale del parallelogrammo viene divisa in due parti eguali; in fatti nel parallelogrammo ABCD si tiri la diagonale AC, verrà da essa diviso il parallelogrammo in due triangoli perfettamente eguali BAC, ACD; si divida AD in due parti eguali in F; si unisca CF, dalla quale si tagli FP $= \frac{1}{3}$ FC, sarà P il centro di gravità del triangolo ACD; similmente si divida BC in due parti eguali nel punto E; e si unisca AE, dalla quale si tagli EO $= \frac{1}{3}$ AE, sarà O il centro di gravità del triangolo BAC (§. 288) quindi se dal punto O al punto P si tira la retta OP, in essa sarà il centro comune di gravità de' due triangoli BAC, ACD, o vero il centro di gravità dell' intero parallelogrammo ABCD; ma li due triangoli BAC, ACD sono eguali, dunque il loro comune centro di gravità è in quel punto della retta OP, da cui essa viene divisa in due parti eguali. La retta AF $= \frac{1}{2}$ AD, la retta EC $= \frac{1}{2}$ BC, ma AD $=$ BC, dunque AF $=$ EC; ma AF, EC sono parallele, dunque anche AE, CF sono eguali, e parallele, e perciò $\frac{2}{3}$ AE $= \frac{2}{3}$ FC, o vero AO $=$ CP, quindi ne' due triangoli AQO, CQP, gli angoli AQO, PQC sono eguali, perchè verticali, gli angoli OAQ, QCP sono eguali, perchè alterni delle parallele AE, FC, quindi sono i due triangoli equiangoli, hanno di più i lati AO, PC oppo-

opposti ad angoli eguali, li quali si sono dimostrati eguali, dunque sono perfettamente eguali, e perciò AQ = QC, OQ = QP; ma si è dimostrato, che il centro di gravità del parallelogrammo ABCD è quel punto, in cui OP è divisa in due parti eguali, dunque il centro di gravità del parallelogrammo ABCD è il punto Q; ma il punto Q divide la diagonale AC in due parti eguali; dunque il centro di gravità di un parallelogrammo è il punto, che divide la sua diagonale in due parti eguali.

291. PROB. V. *Determinare il centro di gravità di un settore circolare.*

SOL. Sia AOB il settore circolare, si divida l'arco AB in due parti eguali in E, e si congiunga il raggio OE, indi si congiunga la corda AB, e si trovi OP quarta proporzionale in ordine all'arco AB, alla sua corda, ed alle due terze parti di OE. Dico, che P è il centro di gravità del settore AOB. *Fig.54.*

DIM. Con il centro O, e con l'intervallo OC= $\frac{2}{3}$ OB, si descriva l'arco CFD, e si congiunga CD. Il settore AOB si può considerare come composto da infiniti triangoli isosceli infinitamente piccoli, che hanno per loro basi le rette infinitamente piccole, dalle quali si può considerare composto l'arco AB; quindi i centri di gravità di sì fatti piccoli triangoli, o vero degli elementi del settore AOD saranno ne' raggi, che dividono in due parti eguali le basi di sì fatti triangoletti, e saranno distanti da O per $\frac{2}{3}$ de' medesimi raggi (§. 288), e per conseguenza saranno nell'

nell' arco CFD, ma questi centri di gravità si debbono considerare egualmente gravi, ed a distanze eguali fra loro, imperciocchè sono centri di gravità di triangoli eguali, e perciò il centro di gravità comune di tutti li triangoletti sarà lo stesso, che il centro di gravità dell'arco CFD, ma il centro di gravità comune di tutti i triangoletti è lo stesso, che il centro di gravità del settore, dunque il centro di gravità del settore è lo stesso, che il centro di gravità dell' arco CFD; ma il centro di gravità di CFD è distante dal centro O di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine all' arco CFD, alla sua corda CD, ed al raggio OF; dunque anche il centro di gravità del settore è distante dal centro O di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine all' arco CFD, alla sua corda CD, ed al raggio OF. In oltre i due settori AOB, COD sono simili, e perciò AEB : AB = CFD : CD; dunque il centro di gravità del settore AOB è distante dal centro del cerchio di tanto, quanto è la quarta proporzionale in ordine all'arco AEB, alla sua corda AB, ed alli $\frac{2}{3}$ di OE. Sicchè &c.

292. COR.I. Se il settore è un mezzo cerchio, il centro di gravità cade nel raggio, che divide la mezza periferia in due parti eguali, ed è distante dal centro del cerchio di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine alla mezza periferia, al diametro, ed alli $\frac{2}{3}$ del raggio.

293. COR.II. Se il settore è maggiore del mezzo cerchio come AOBG, il suo centro di gravità

T ca-

T cade nel raggio OG, che divide l'arco AGB in due parti eguali, ed è distante dal centro O di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine all' arco AGB, alla sua corda AB, ed alli $\frac{2}{3}$ del raggio.

294. COR. III. Finalmente se si ha il cerchio ACBD, ed in esso si tirano i due diametri AB, CD fra loro perpendicolari, il centro di gravità del mezzo cerchio CBD sarà nel raggio OB, che lo divide in due parti eguali, e sarà il punto P tanto distante del centro O del cerchio, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine alla semiperiferia CBD, al diametro CD, ed alli $\frac{2}{3}$ del raggio OB; similmente il centro di gravità del mezzo cerchio CAD è il punto Q del raggio OA, che divide la semiperiferia DAC in due parti eguali, ed è distante dal centro O del cerchio di tanto, quanto è la quarta proporzionale, che si ha in ordine alla semiperiferia, al suo diametro, ed alli $\frac{2}{3}$ del raggio (§.292), e perciò il centro di gravità dell' intero cerchio è il centro O del cerchio, il quale divide in due parti eguali la retta QP. *Fig.* 50.

295. PROB. VI. *Data una porzione di cerchio, ritrovare il centro di gravità di essa.*

SOL. Sia data la porzione di cerchio AEB, si tirino i due raggi AO, OB, e si ritrovino il punto P centro di gravità del settore AOB (§.291), ed il punto Q centro di gravità del triangolo AOB (§.288); indi si ritrovi PR quarta proporzionale in ordine alla porzione AEB, al triangolo AOB, ed alla distanza PQ. Dico, che il *Fig.* 54.

il punto R è il centro di gravità della porzione AEB.

DIM. Il punto P è il centro di gravità del ſettore AOB, e perciò del ſiſtema di AEB, AOB, ma AEB, AOB ſono in equilibrio, qualora ſono ſoſtenuti dal punto P, dunque ſono fra loro in ragione reciproca delle diſtanze, che i loro centri di gravità hanno dal centro di gravità del ſiſtema (§. 273), e perciò deve eſſere AEB : AOB = QP alla diſtanza, che il punto P tiene dal centro di gravità della porzione AEB; ma per coſtruzione PR è tagliata eguale a sì fatta quarta proporzionale; dunque R è il centro di gravità della porzione AEB.

296. PROB. VII. *Determinare il centro di gravità della ſuperficie di qualſivoglia porzione sferica.*

Fig. 55. SOL. Rappreſenti ACB qualunque porzione sferica, della quale CP ſia l' altezza, ſi divida l' altezza CP in due parti eguali nel punto Q. Dico, che Q è il centro di gravità ricercato.

DIM. Per Q ſi intenda paſſare il piano *LM* parallelo ad AB. La ſuperficie sferica ACB da qualunque piano, che paſſa per PC, viene diviſa in due porzioni eguali, e perfettamente ſimili, quindi non ſolamente il numero degli elementi di una di sì fatte porzioni eguaglia il numero degli elementi dell' altra, ma ancora gli elementi corriſpondenti delle due porzioni, nelle quali viene la ſuperficie diviſa da uno de' detti piani, ſono eguali, ed egualmente diſtanti dallo ſteſſo piano; ſicchè per riſpetto di qualunque piano, che paſſa per PC, la ſomma de' momen-

ti

ti delle parti della ſuperficie, che ſono di qua dal piano, eguaglia la ſomma de' momenti delle parti, che ſono al di là dallo ſteſſo piano, dunque ogni piano, che paſſa per PC è un piano di gravità della ſuperficie ACB, e perciò PC è aſſe di gravità della medeſima ſuperficie. In oltre ſe ſi intendono diviſe CQ, QP in parti eguali, ed infinitamente piccole, e per li punti delle diviſioni si intendono paſſare piani paralleli ad AB, le faſcette sferiche, nelle quali reſta diviſa da' detti piani la ſuperficie ACB ſaranno tutte eguali, or le faſcette egualmente diſtanti dal piano LM hanno elementi eguali di numero, eguali fra loro, ed egualmente diſtanti dal piano LM, quindi la ſomma de' momenti degli elementi di una di tali faſcette è eguale alla ſomma de' momenti degli elementi dell'altra, relativamente al piano LM, e perciò la ſomma de'momenti di tutti gli elementi della faſcia ABML eguaglia laſomma de' momenti degli elementi della ſuperficie LCM, relativamente al piano LM. Per la quale coſa il piano LM è un piano di gravità della ſuperficie sferica ACB; e perciò il centro di gravità della ſuperficie sferica ACB deve eſſere nel piano LM, ma il centro di gravità della ſuperficie sferica ACB deve eſſere anche nel diametro di gravità CP, dunque ſarà il punto Q, in cui CP incontra LM. Sicchè &c.

297. COR. Quindi il centro di gravità della ſuperficie della mezza sfera è il punto, che divide la ſua altezza in due parti eguali, ed il centro di gravità della ſuperficie della intera sfera è il centro iſteſſo della sfera.

298. PROB. VIII. *Determinare il centro di gravità di qualunque prisma.*

SOL. Si determinino i due centri di gravità delle due basi parallele, eguali, e simili del prisma. Dico, che il punto, in cui viene divisa in due parti eguali la retta, che unisce sì fatti centri di gravità, è il centro di gravità del prisma.

DIM. Si intenda il prisma diviso da infiniti piani paralleli alla base, ed a distanze eguali fra loro, ed infinitamente piccole, saranno sì fatte sezioni eguali, e simili alla base, quindi la retta, che unisce li centri di gravità delle basi opposte, deve passare per li centri di gravità di tutte le dette sezioni, ma queste sezioni si possono considerare come corpi omogenei, e dotati di gravità, e perciò si potranno anche considerare come elementi del prisma, sicchè la detta retta passa per li centri di gravità di tutti gli elementi del prisma, quindi tutta la gravità del prisma si potrà considerare come equabilmente distribuita alla detta retta, e perciò il centro di gravità del prisma sarà quel punto, in cui è il centro di gravità della detta retta, ma il centro di gravità di qualunque retta è quel punto, in cui essa viene divisa in due parti eguali (§. 281), dunque il centro di gravità del prisma è quel punto, che divide in due parti eguali la retta, che congiunge i centri di gravità delle sue basi opposte.

299. COR. Potendosi ogni cilindro considerare come un prisma terminato da infiniti parallelogrammi

mi infinitamente piccoli, il centro di gravità di ogni cilindro sarà quel punto, il quale divide in due parti eguali la retta, che unisce i centri di gravità delle sue basi, ma li centri di gravità delle basi sono li centri delle basi medesime (.§294) dunque il centro di gravità di qualsivoglia cilindro è quel punto, che divide il suo asse in due parti eguali.

300. PROB.IX. *Determinare il centro di gravità di qualunque piramide triangolare.*

SOL. Rappresenti ABCD qualunque piramide triangolare. Si divida AC in due parti eguali in E, e si uniscano le rette DE, EB, indi si tagli EO = $\frac{1}{3}$ EB, e si congiunga OD. Dico, che il centro di gravità della piramide ABCD è nella retta OD distante da ACB di tanto, quanto è $\frac{1}{4}$ OD. *Fig.* 56.

DIM. Dal punto D al punto E si tiri la retta DE, dalla quale si tagli la terza parte EP, e si uniscano BP, PO, si intenda la piramide divisa da infiniti piani paralleli al triangolo ABC, a distanze eguali fra loro, ed infinitamente piccole, li quali saranno tutti triangoli simili ad ABC, ma il punto O è centro di gravità del triangolo ABC (§.288), dunque la retta OD passerà per li centri di gravità di tutte le infinite sezioni, che si intendono fatte nella piramide ABCD, e perciò passerà per li centri di gravità di tutti gli elementi, nelli quali viene divisa la piramide da sì fatti piani, per conseguenza è un diametro di gravità della piramide ABCD. Similmente si dimostra, che BP è anche un diametro di gravità della ſteſſa piramide, dunque il centro di gravità della piramide ſarà nel punto Q, in cui li due diametri di gravità ſi interſecano. Di più per coſtruzione EO $= \frac{1}{3}$ EB, EP $= \frac{1}{3}$ ED, dunque ſarà BO : OE = DP : PE; ma se in un triangolo ſi tira una retta, la quale divida due lati in parti proporzionali, eſſa è parallela al terzo lato, dunque BD è parallela ad OP, e perciò BE : EO = BD : OP; ma per coſtruzione EO è terza parte di EB, dunque anche OP è terza parte di BD. Finalmente i due triangoli PQO, DQB hanno gli angoli PQO, DQB eguali, come verticali, gli angoli POQ, QDB eguali, come alterni, dunque ſono ſimili, e perciò OP : BD = OQ : QD; ma OP $= \frac{1}{3}$ BD, dunque OQ $= \frac{1}{3}$ QD; dunque il centro di gravità Q della piramide ABCD è nella retta OD diſtante dal punto O di tanto, quanto è $\frac{1}{4}$ OD.

301. AVV. I. Si noti, che ſe la piramide è poligona, allora la retta, che congiunge il ſuo vertice con il centro di gravità della baſe, paſſa per tutti li centri di gravità delle infinite ſezioni parallele alla baſe, e paſſa anche per lo centro di gravità della piramide, imperciocchè ſe la piramide poligona ſi intende diviſa in quelle piramidi triangolari, nelle quali ſi può dividere, li centri di gravità particolari di eſſe piramidi triangolari ſi ritrovano nelle rette, che congiungono il loro vertice comune con li centri di gravità delle loro baſi, e ſi ritrovano diſtanti da' centri di gravità delle baſi per le quarte parti delle medeſime rette, o vero ſi ritrovano tutti in un piano,

no, il quale è parallelo alla baſe della intera piramide, e di più taglia dalla retta, che congiunge il vertice della piramide con il centro di gravità della medeſima baſe, la quarta parte verſo la baſe, dunque nel piano, in cui ſono tutti li centri di gravità particolari delle piramidi triangolari, deve eſſere anche il centro di gravità comune a tutti li centri di gravità delle dette piramidi; ma il centro comune di gravità di tutte queſte piramidi triangolari è il centro di gravità della intera piramide, dunque il centro di gravità della intera piramide è nel piano, il quale taglia la piramide parallelamente alla baſe, ed è diſtante della baſe medeſima per un quarto della retta, che uniſce il vertice della piramide con il centro di gravità della baſe, e perciò il centro di gravità della piramide poligona è nella retta, che uniſce il vertice della piramide con il centro di gravità della baſe, ed è diſtante dalla baſe per un quarto della medeſima retta.

302. COR. Potendoſi un cono conſiderare, ſenza errore ſenſibile, come una piramide poligona, ſarà il centro di gravità di qualſivoglia cono anche nell' aſse di eſſo, e diſtante dal centro della baſe di tanto, quanta è la quarta parte dell' aſſe medeſimo.

303 AVV. II. Si noti, che ſe ſi vuole determinare il centro di gravità del cono ABCD troncato dal piano DC, parallelo alla baſe AB, ſi deve procedere nella ſeguente maniera. Si determini l'aſſe FE dell'intero cono ABE, e per conſeguenza l'aſſe GE della porzione che manca, indi da FE ſi tagli *Fig.* 57.

FO = $\frac{1}{4}$ FE, e da GE si tagli GP = $\frac{1}{4}$ GE; saranno così determinati i centri O, P di gravità dell'intero cono AEB, e della porzione, che manca; indi si faccia come sta ABCD : DCE = PO alla quarta proporzionale OQ, sarà Q il centro di gravità del cono troncato ABCD; imperocchè essendo O il centro di gravità del sistema di ABCD, DEC, dovranno essere le distanze, che i centri particolari di gravità di ABCD, DEC hanno dal centro di gravità O del sistema, in ragione reciproca di ABCD, DEC (§.273). Dunque Q è il centro di gravità del cono troncato.

Con simile metodo si può ritrovare il centro di gravità di qualsivoglia piramide troncata da un piano parallelo alla sua base.

304. PROB.X. *Determinare il centro di gravità di qualsivoglia settore sferico.*

Fig. 55. SOL. Rappresenti AODG qualsivoglia settore sferico, dal centro O al vertice G della porzione ADG si tiri il raggio OG, ed in esso s'intenda preso il punto R tale, che sia OR eguale a tre quarte parti del raggio OG, toltene tre ottave parti dell'altezza GH della porzione AGD. Dico, che il punto R è il centro di gravità del settore sferico AODG.

DIM. S' intenda, essere FOEI un settore simile ad AODG, il quale abbia per raggio OE = $\frac{3}{4}$ OD; e si intendano essere DA, EF i diametri delle basi delle porzioni simili DGA, EIF. Potendosi il settore AODG considerare come composto da infinite piramidi infinitamente piccole ed eguali, le quali abbiano per vertice comune il il punto O, e per basi i piccoli piani, dalli quali si può concepire composta la superficie sferica AGD, saranno li centri di gravità di sì fatte piccole piramidi ne' raggi, che giungono alli centri di gravità delle basi di esse, e saranno distanti dal centro O per le tre quarte parti delli medesimi raggi (§.301), e perciò nella superficie EIF; ma sì fatte piccole piramidi sono gli elementi del settore sferico AODG, dunque i centri di gravità degli elementi del settore sferico AODG, sono nella superficie sferica EIF. Inoltre i detti centri di gravità si devono considerare egualmente gravi, e ad eguali distanze fra loro, perchè sono centri di gravità di piramidette eguali, dunque il centro di gravità comune di sì fatte piramidette, sarà lo stesso, che il centro di gravità della superficie EIF, ma il centro comune di gravità di tutte le dette piramidette è il centro di gravità del settore sferico AODG, dunque il centro di gravità del settore sferico AODG è lo stesso, che il centro di gravità della superficie sferica EIF; ma il centro di gravità della superficie sferica EIF è il punto R, in cui l' altezza della porzione sferica EIF è divisa in due parti eguali (§.296), dunque il centro di gravità del settore sferico AODG è il punto R. Di più le porzioni sferiche AGD, EIF sono simili, e perciò $IK : GH = EF : DA = OE : OD$; ma per costruzione $OE = \frac{3}{4} OD = \frac{3}{4} OG$, dunque $IK = \frac{3}{4} GH$, ed $IR = \frac{1}{2}$ di $\frac{3}{4} GH = \frac{3}{8} GH$; ma $OR = OI - IR = OE - IR$. Dunque $OR = \frac{3}{4} OG - \frac{5}{8} GH$.

305. COR.I. Quindi ſe il ſettore diventa una mezza sfera, il cenrro di gravità di eſſa ſarà nel raggio, che giunge al ſuo vertice, e ſarà diſtante dal centro della sfera per $\frac{3}{4}$ del raggio, toltine $\frac{3}{8}$ dell'altezza della porzione sferica, ma in queſto caſo il raggio è eguale all' altezza della porzione, dunque il centro di gravità della mezza sfera è diſtante dal centro della sfera per $\frac{3}{4}$ del raggio, toltine $\frac{3}{8}$ dello ſteſſo raggio; ma $\frac{3}{4}$ del raggio, toltine $\frac{3}{8}$ dello ſteſſo raggio ſono eguali a $\frac{3}{8}$ di eſſo; dunque il centro di gravità della mezza sfera è nel raggio, che giunge al ſuo vertice, ed è diſtante dal centro della sfera per $\frac{3}{8}$ dello ſteſſo raggio.

306. COR. II. Se il ſettore diventa una intera sfera, e queſta ſi concepiſce diviſa per mezzo di un cerchio maſſimo, e dal centro di eſſo ſi tira un diametro perpendicolare al medeſimo cerchio maſſimo, sì fatto diametro giungerà a' vertici delli due emisferj; quindi il centro di gravità di ciaſcheduno di eſſi ſarà nel ſuo raggio corriſpondente, e ſarà diſtante dal centro della sfera per $\frac{3}{8}$ dello ſteſſo raggio, ed il centro di gravità comune di eſſi, ſarà in quel punto, che divide in due parti eguali la retta, che uniſce i loro centri di gravità; e perciò ſarà nel centro della sfera; ma il centro di gravità comune de' due emisferj è il centro di gravità della sfera. Dunque il centro di gravità di una intera sfera è il ſuo centro.

CA-

CAPITOLO XXI.

Del centro di oscillazione.

307.DEF.I. Si dice *linea del centro* di un pendolo composto, quella retta, la quale unisce il punto della sospensione del pendolo col centro di gravità di esso.

308. DEF.II. Si dice *centro di oscillazione* di un pendolo composto, quel punto della sua linea del centro, il quale è tanto distante dal punto della sospensione, quanta è la lunghezza di quel pendolo semplice, che fa le sue oscillazioni nel medesimo tempo, in cui le fa il pendolo composto.

309.COR. Quindi se tutta la gravità del pendolo composto si riunisse nel suo centro di oscillazione, esso si ridurrebbe ad un pendolo semplice, il quale farebbe le sue oscilazioni nel medesimo tempo, in cui le faceva prima.

310.TEOR.I. *Se una verga inflessibile, e priva di gravità si sospende ad un punto, intorno al quale essa si muove, e sono ad essa attaccati più corpi comunque fra loro distanti, in modo, che questi formino un pendolo composto, le velocità, che ciaschedun corpo avrà in ogni momento di tempo, nel moto del pendolo composto, saranno nella ragione delle respettive distanze, che essi hanno dal punto della sospensione.*

DIM. Rappresenti AO una verga inflessibile, alla quale siano attaccati i corpi A, B, C, del- *Fig.* 58.

li quali li centri di gravità ſiano ne' punti A,B,C, e ſia ſoſpeſa la verga AO nel punto O, intorno al quale eſſa facendo le ſue oſcillazioni, li corpi A, B, C conſervino ſempre la medeſima diſtanza fra loro, e dal punto O. Se il pendolo AO ſi traſporta in qualunque ſito non verticale OD, nel quale eſſo ſia laſciato in libertà, ſi muoverà, e ſi metterà nel ſito verticale OA, ed in sì fatto moto li corpi A, B, C deſcriveranno gli archi circolari ſimili AD, EB, FC, e le velocità, che avranno i corpi A, B, C in ciaſcheduno iſtante di tempo, ſaranno nella ragione degli elementi degli archi DA, EB, FC (§. 99), ma gli elementi degli archi DA, EB, FC ſono nella ragione degli interi archi DA, EB, FC, dunque le velocità, che in ogni iſtante hanno li corpi A, B, C, ſono nella ragione degli archi AD, EB, FC; ma gli archi AD, EB, FC ſono nella ragione de' raggi AO, OB, OC delli cerchi, alli quali appartengono. Dunque le velocità, che i corpi A, B, C hanno in ogni iſtante di tempo, qualora il pendolo compoſto AO ſi muove, ſono nella ragione delle diſtanze AO, BO, CO, che eſſi hanno dal punto della ſoſpenſione.

311. COR. I. Le forze motrici, che animano i corpi A, B, C in ogni iſtante, qualora il pendolo AO ſi muove intorno al punto O, ſono nella ragione de' moti, che eſſe producono (§. 90), ma sì fatti moti ſono nella ragione compoſta da quella delle maſſe de' corpi A, B, C, e da quella delle loro velocità (§. 101). Dunque le

forze

forze motrici, che in ogni istante animano i corpi A, B, C, qualora il pendolo composto OB' si muove, sono nella ragione di A. AO, B.BO, C. CO.

312. AVV. Qualora si cerca il centro di gravità de' corpi A, B, C sospesi alla verga AO, la verga AO, è in quiete, e perciò le forze, che operano nelli punti A, B, C, sono li soli pesi de' corpi A, B, C; ma qualora si cerca il centro di oscillazione de' corpi A, B, C, la verga AO si muove, e perciò le forze, che operano nelli punti A, B, C, non sono li pesi di essi, ma sono li prodotti A. AO, B. BO, C. CO. Quindi il cercare il centro di oscillazione de' corpi A, B, C, è lo stesso, che cercare il centro delle forze, che spingono li corpi nelli punti A, B, C.

313. COR. II. Quindi la differenza, che passa tra la determinazione del centro di gravità, e la determinazione del centro di oscillazione è, che nella determinazione del centro di gravità, le forze, le quali operano, sono li soli pesi de' corpi; nella determinazione poi del centro di oscillazione, le forze, che operano sono li prodotti, che nascono, moltiplicando li pesi de' medesimi corpi per le distanze, che essi hanno dal punto della sospensione; e perciò se si determina la distanza, che il centro di gravità de' corpi A, B, C tiene da qualsivoglia punto, e nella formola, che esprime sì fatta distanza, in luogo delli pesi A, B, C, si sostituiscono i prodotti A. AO, B. BO, C. CO, la formola, che ne sulte-

fulterà, dinoterà la distanza, che il centro di oscillazione de' medesimi corpi tiene dallo stesso punto, dal quale sono sospesi.

314. TEOR. II. *Se una verga inflessibile, e priva di gravità si sospende ad un punto, intorno al quale si muove, e sono ad essa attaccati più corpi comunque fra loro distanti in modo, che conservino sempre la stessa distanza sì dal punto della sospensione, che fra loro, la distanza, che il centro di oscillazione tiene dal punto della sospensione, sarà eguale alla somma de' prodotti, che nascono moltiplicando ciaschedun peso per lo quadrato della distanza, che ciaschedun peso tiene dal punto della sospensione, divisa per la somma de' prodotti, che nascono moltiplicando ciaschedun peso per la distanza, che esso tiene dal punto della sospensione.*

DIM. Rappresenti AO qualunque verga inflessibile, la quale abbia ne' punti A, B, C sospesi li corpi A, B, C. La formola, che esprime la distanza, che il centro di gravità de' corpi A, B, C tiene dal punto O, è

$$\frac{A.\,AO + B.\,BO + C.\,CO}{A + B + C}$$

(§. 279); ma se in essa in luogo di A, B, C si sostituiscono A. AO, B. BO, C. CO, essa si trasformerà nella formola,

$$\frac{A.\,AO^2 + B.\,BO^2 + C.\,CO^2}{A.\,AO + B.\,BO + C.\,CO}$$

la quale disegna la distanza, che tiene il centro di oscillazione dallo stesso punto O (§. 313). Dunque la distanza, che il centro di oscillazione delli corpi A, B, C tiene dal punto della sospensione, è espressa dalla somma de' prodotti, che nascono, mol-

moltiplicando ciascheduno de' pesi A, B, C per lo quadrato della distanza, che esso tiene dal punto O, divisa per la somma de' prodotti, che nascono moltiplicando li medesimi pesi per le semplici distanze, che tengono dallo stesso punto O.

315.AVV.I. Bisogna avvertire, che quando più corpi quieti premono contro di un ostacolo, il punto, che soffre la massima pressione, è quello, che corrisponde al centro di gravità comune di essi; li corpi poi, li quali si muovono, fanno la loro massima azione in quel punto, che è centro di oscillazione di essi, e perciò il centro di oscillazione de' corpi si suole anche chiamare *centro di percossa*.

316.AVV.II. Si noti, che per quello, che si è dimostrato in questo capitolo si può determinare il centro di oscillazione delle linee, delle superficie, e de' solidi, ma per cagione della brevità da noi si tralascia di farlo.

CAPITOLO XXII.

Del moto de' Proietti.

317.DEF.I. SI dice *Proietto* quel corpo, il quale si muove animato dalla sua gravità, e da un'altra forza, la quale ha fatta contro di lui una sola volta azione, per qualsivoglia direzione.

318.DEF.II. Si dice *forza proiettile* quella forza, la quale ha fatto contro del proietto una sola volta la sua azione.

319.COR.Quindi se il proietto non fosse animato dalla sua gravità, per la sola forza proiettile si muoverebbe con moto equabile per la direzione, per la quale la forza proiettile lo spinge.

320.DEF.III. Si dice *direzione della forza proiettile* quella retta, per la quale il proietto si muoverebbe, se ubbidisse alla sola forza proiettile.

321.DEF.IV.Si dice *punto della proiezione* quel punto, dal quale il proietto comincia il suo moto.

322.DEF. V. Si dice *linea della velocità* quella verticale, per la quale se il proietto liberamente discendesse, acquisterebbe una velocità eguale a quella, che gli comunica la forza proiettile.

323.DEF.VI. Si dice *angolo della proiezione* quell' angolo, che è formato dalla direzione della forza proiettile, e dalla verticale procedente dal punto della proiezione verso la parte superiore.

324. DEF. VII. Si dice *angolo della elevazione* quello, che è formato dalla direzione della forza proiettile, e dalla orizzontale, allora quando la direzione della forza proiettile cade sopra della orizzontale.

325. DEF. VIII. Si dice *angolo della depressione* quello, che è formato dalla direzione della forza proiettile, e dalla orizzontale, qualora la direzione della forza proiettile cade sotto della orizzontale.

326. AVV. Qualora la forza proiettile spinge il corpo verticalmenre da sotto verso sopra, ritrovandosi la forza proiettile interamente opposta alla forza della gravità, il corpo salirà per la verti-

verticale; ſe poi la forza proiettile ſpinge il corpo da ſopra verſo ſotto, eſſa coſpira con la gravità, e per conſeguenza la linea, che è dal corpo deſcritta, è anche la verticale corriſpondente; ma ſe la forza proiettile opera contro del corpo per direzione inclinata alla verticale, allora eſſendo le forze di proiezione, e di gravità due forze di mezzana coſpirazione, ed oppoſizione, il corpo non può muoverſi nè per la direzione della forza proiettile, nè per la verticale, anzi eſſendo la gravità una forza continuata coſtante, eſſa in ogni iſtante altererà il moto del proietto; onde è neceſſario, che da noi ſi determinino ſecondo li principj della compoſizione, e della riſoluzione de' moti, le leggi, che il proietto ſiegue nel ſuo moto.

327. TEOR. I. *Se un corpo è ſpinto da una forza proiettile per una direzione, in qualunque maniera inclinata alla verticale, eſſo deſcrive una curva, la quale è nello ſteſſo piano, nel quale ſono la verticale, e la direzione della forza proiettile.* Fig. 59.

DIM. Rappreſenti AL la direzione, per la quale una forza proiettile ſpinge un corpo, la quale ſia comunque inclinata alla verticale AC, e contraſegni AD lo ſpazio, che il proietto correrebbe nel primo iſtante di tempo, ſe ubbidiſſe alla ſola forza proiettile, ed AE lo ſpazio, che correrebbe nello ſteſſo iſtante, ſe ubidiſſe alla ſola forza di gravità; ſi compiſca il parallelogrammo ED, ed in eſſo ſi tiri la diagonale AF, ſarà AF lo ſpazietto, che nel primo iſtante di tempo correrà il proietto, facendo inſieme azioni la forza

pro-

proiettile, e la gravità (§.106); si prolunghi AF in G fino a tanto, che EG sia eguale ad AF, il proietto nel secondo istante correrebbe FG, se la gravità non replicasse la sua azione; sia di più FH lo spazio, che il corpo correrebbe nel secondo istante per la sola seconda azione della gravità, e si compisca il parallelogrammo GH, in cui si tiri la diagonale FI: disegnerà FI lo spazietto, che il proietto nel secondo istante percorrerà; ma FI è inclinata ad FG, e per conseguenza è anche inclinata ad HF, dunque AF, FI sono in direzioni diverse. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che in ogni altro istante il proietto descrive uno spazietto inclinato a quello, che ha percorso nell'istante precedente, dunque il proietto in ogni istante muterà direzione, e perciò descriverà una linea, della quale ognuna delle parti è fuori della direzione della sua vicina, e per conseguenza descriverà una curva. In oltre AF, DF sono nel piano delle rette AL, AC, dunque ancora FG, FH, FI saranno nello stesso piano; similmente si dimostra, che tutti gli altri elementi della curva, che descrive il proietto sono nello stesso piano delle rette AL, AC. Dunque la intera curva, che descrive il proietto è nel piano delle rette AL, AC.

328.COR. La gravità in ogni istante fa azione sopra del proietto, quindi il proietto incomincia a descrivere la curva dal punto della proiezione, allontanandosi dalla direzione della forza proiettile, e perciò la direzione della forza proiettile è una

una retta, la quale incontra la curva nel punto della proiezione, e cade tutta fuori dello ſpazio compreſo nella curva, dunque è tangente della curva, che il proietto deſcrive nel punto della proiezione.

329. TEOR. II. *Se un corpo è ſpinto da una forza proiettile, la quale operi per qualunque direzione inclinata alla verticale, la curva, che deſcriverà il proietto, è una parabola.*

DIM. Sia AMB la curva, che un proietto deſcrive, qualora è ſpinto da una forza proiettile, per qualunque direzione AL inclinata alla verticale AR. Nella curva AMB ſi prendano ad arbitrio quanti punti ſi vogliano M, N, O, e per eſſi ſi tirino le rette MC, ND, OL parallele alla verticale AR, e ſi compiſcano i parallelogrammi PC, QD, RL. Per le leggi della riſoluzione de' moti, il proietto giungerà nel punto M della curva, nello ſteſſo tempo, in cui per la ſola forza proiettile ſarebbe giunto in C, e per la ſola forza della gravità ſarebbe giunto in P: di più il proietto giunge nelli punti N, O &c. della curva nello ſteſſo tempo, che per la ſola forza proiettile ſarebbe giunto in D, L. &c., e per la ſola forza di gravità ſarebbe giunto in Q. R &c; ma il moto, che il corpo ha per la ſola forza di proiezione è equabile, e perciò gli ſpazj AC, AD, AL ſono nella ragione de' tempi, nelli quali il corpo li percorrerebbe (§. 98); ed il moto prodotto dalla gravità è equabilmente accelerato, e perciò gli ſpazj AP, AQ, AR ſono nella ragione de' quadrati de' tempi, che il corpo impie- *Fig.60.*

piegherebbe a percorrerli (§.184), dunque AP, AQ, AR ſono nella ragione de' quadrati di AC, AD, AL; ma AC, AD, AL ſono reſpettivamente eguali a PM, QN, RO; dunque AP, AQ, AR ſono nella ragione de' quadrati di PM, QN, RO; dunque la curva AMO, della quale AL è tangente, è di tale natura, che li quadrati delle ordinate PM, QR, RO ſono nella ragione delle aſciſse corriſpondenti; ma queſta proprietà appartiene alla parabola. Dunque la curva AMO, che il proietto deſcrive, è una parabola.

330. COR. Tutti i diametri di una parabola ſono fra loro paralleli, dunque tutti li diametri della parabola AMO ſono paralleli ad AR; ma AR è una verticale, dunque tutti i diametri di una parabola, che un proietto deſcrive, ſono rette verticali.

331. TEOR. III. *Se un corpo ſpinto da qualſivoglia forza proiettile deſcrive una parabola, la velocità, che eſſo avrà nel punto della proiezione, è eguale a quella, che eſſo avrebbe acquiſtata liberamente diſcendendo per una verticale eguale alla quarta parte del parametro del diametro procedente dal punto della proiezione.*

DIM. Rappreſenti AMO la parabola, che un corpo deſcrive ſpinto da una forza proiettile per la direzione di AL, ſia BA la linea della velocità, ed AR diſegni il diametro procedente dal punto della proiezione A. Da AL ſi tagli AD= 2AB, indi per D ſi tiri DN parallela ad AR, che incontri la parabola in N; finalmente per N ſi tiri ſi tiri NQ parallela ad AD. Se il corpo ubbidiſſe alla ſola forza proiettile, ſi muoverebbe per la retta AL con moto equabile, e perciò deſcriverebbe AD nello ſteſſo tempo, nel quale, liberamente cadendo, avrebbe deſcritta AB (§.184). Di più il proietto ſe ubbidiſſe alla ſola forza proiettile, deſcriverebbe AD nello ſteſſo tempo, in cui, ubbidendo alla ſola forza di gravità, avrebbe deſcritta AQ, dunque BA = AQ. In oltre, per la natura della parabola, AQ : QN = QN al parametro del diametro AR, ma QN = AD = 2AB = 2AQ, dunque ancora il parametro del diametro AR è eguale a 2QN= 4AQ= 4AB; e perciò AB è eguale alla quarta parte del parametro del diametro AR. Sicchè &c.

332. COR. I. Sicchè un proietto deſcrive la parabola AMO, ed incomincia a deſcriverla dal punto A, ſe la forza proiettile nel punto A opera contro di lui per la direzione della retta AL tangente della parabola in A, e gli comunica una velocità eguale a quella, che eſſo acquiſterebbe, liberamente diſcendendo per una verticale eguale alla quarta parte del parametro del diametro procedente dallo ſteſſo punto A.

333. COR. II. Di più qualora è data la poſizione delle ordinate di una parabola, relativamente ad un ſuo diametro ed è dato il parametro dello ſteſſo diametro, ∴ data ancora la parabola; quando poi varia o la poſizione delle ordinate, o la grandezza del parametro, o tutte due queſte coſe inſieme, varia ancora la parabola, dunque qualora è data la direzione della forza proiettile,

ed è data la velocità, che essa imprime al proietto, si avrà anche la parabola, che il proietto deve descrivere; variando poi, o la direzione della forza proiettile, o la velocità, che essa comunica al proietto, o tutte due queste cose insieme, deve variare ancora la parabola; sicchè un proietto può descrivere infinite diverse parabole, secondo che all'infinito varia, o la velocità, che gli imprime la forza proiettile, o la direzione della medesima forza, o ambedue queste cose insieme.

Fig. 61. 334. AVV. Se la velocità, che la forza proiettile imprime al corpo, è sempre la medesima, cioè sempre eguale a quella, che esso acquisterebbe, se liberamente scendesse per AB, tutte le infinite parabole, che il proietto può descrivere, variando la direzione della forza proiettile, hanno lo stesso parametro relativamente al diametro, che procede dal punto A, imperciocchè il parametro è sempre il quadruplo di AB; e se per B si tira una orizzontale, essa sarà direttrice di tutte le parabole, che il proietto potrà descrivere, qualora la forza proiettile gli comunica la velocità eguale a quella, che acquisterebbe, se liberamente discendesse per la verticale BA, e tutti li fuochi delle dette parabole saranno lontani dal punto A di tanto, quanto è la retta AB, e per conseguenza saranno nella periferia del cerchio, che ha per centro A, e per intervallo AB, ed il fuoco sarà in quel punto della detta periferia, per cui passa il raggio, il quale fa con la direzione AL della

forza

forza proiettile, un angolo eguale all'angolo della proiezione BAL.

335. COR. III. Quindi quanto più l'angolo della proiezione BAL sarà piccolo, tanto più il fuoco della parabola si avvicinerà alla direttrice BD; se l'angolo BAL sarà eguale alla metà di un angolo retto, l'angolo BAF sarà retto, e per conseguenza il fuoco sarà nella orizzontale procedente dal punto A; se l'angolo BAL sarà retto, ancora retto sarà l'angolo LAH, ed il fuoco H caderà nella verticale AB prolungata in H; se l'angolo BAL sarà ottuso, ottuso sarà ancora l'angolo fatto da AL con la retta, che giunge al fuoco, e perciò allora il fuoco della parabola caderà dall'altra parte della verticale BH, ed il proietto descriverà un arco parabolico, che non giungerà al vertice dell'asse.

336. TEOR. IV. *Un proietto, il quale descrive qualsivoglia parabola, ha in ogni punto di essa quella velocità, che esso acquisterebbe se discendesse per la quarta parte del parametro del diametro procedente dallo stesso punto.*

DIM. Rappresenti SAO la parabola, che un proietto descrive, e sia AB la verticale, per la quale, se il proietto discendesse, acquisterebbe la velocità, che ha nel punto A della detta parabola; dal punto A si tiri la tangente AL, dalla quale si tagli AD = 2AB, e per D si tiri DN parallela alla verticale AR, che incontra la parabola in N; finalmente per N si tiri NQ parallela ad AL. Se la gravità cessasse di fare la sua azione, qualora il proietto è nel pun- *Fig. 60.*

to A della parabola, esso cesserebbe di descrivere la parabola SAO, e si muoverebbe equabilmente per la tangente AL, con tutta la velocità, che aveva in A, ma la velocità, che aveva in A, per ipotesi, è eguale a quella, che esso acquisterebbe, se liberamente discendesse per BA, dunque percorrerà AD nel medesimo tempo, che impiegherebbe, se liberamente cadesse, a descrivere AB (§.184); ma AD si descriverebbe dal proietto nel medesimo tempo, che per la forza di gravità esso discenderebbe per AQ, dunque il proietto, se liberamente cadesse, descriverebbe in tempi eguali le due rette AB, AQ; ma li corpi, che liberamente cadono, in tempi eguali descrivono spazj eguali, dunqne AB = AQ, e per conseguenza AD, overo QN = 2AQ; ma, per a natura della parabola, AQ : QN = QN al parametro del diametro AR, dunque QN è metà del parametro del diametro AR, ed AQ, o vero AB è eguale alla quarta parte del parametro del diametro AR; ma BA disegna la retta, per la quale il proietto, se liberamente discendesse, avrebbe acquistata una velocità eguale a quella, che esso ha nel punto A della parabola, dunque il proietto nel punto A ha una velocità eguale a quella, che avrebbe acquistata, se liberamente fosse disceso per la quarta parte del parametro del diametro AR.

337. COR. Si sa, che il parametro di qualunqne diametro della parabola è il quadruplo della retta tirata dal suo vertice al fuoco, dunque le velocità, che il proietto tiene nelli diversi pun-

ſi punti della parabola, ſono eguali alle velocità, che eſſo acquiſterebbe, ſe diſcendeſſe per linee verticali reſpettivamente eguali alle diſtanze, che li medeſimi punti hanno dal fuoco; ma ne' corpi, che liberamente diſcendono, le velocità ſono nella ragione delle radici quadrate de' ſpazj percorſi (§. 184.), dunque le velocità, che il proietto ha ne' diverſi punti della parabola, che deſcrive, ſono nella ragione delle radici quadrate delle rette tirate dalli punti medeſimi al fuoco della parabola, ed il proietto nel vertice dell'aſſe avrà la minima velocità, ne'punti più vicini all' aſſe avrà velocità minore di quella, che ha ne'punti più diſtanti dall' aſſe, e ne' punti, che hanno eguali diſtanze dall' aſſe, avrà eguali velocità, (perchè nella parabola l' aſſe ha il minimo parametro, il diametro più vicino all'aſſe ha il parametro maggiore di quello, che ha il diametro più lontano, ed i diametri, che hanno eguali diſtanze dall' aſſe, hanno eguali parametri) quindi il proietto nel deſcrivere la parabola, varia continuamente la ſua velocità, ed eſſa diviene ſempre minore, ſiccome il proietto più ſi accoſta all' aſſe, e diventa ſempre maggiore, ſiccome il proietto più ſi diſcoſta dall' aſſe.

338. TEOR.V. *Se un corpo è ſpinto da qualſivoglia forza proiettile per varie direzioni, di tutte le diſtanze, alle quali può giungere per le infinite diverſe parabole, che può deſcrivere; col variare l' angolo della proiezione, la maſſima è quella, alla quale il corpo giunge allor che l' angolo della proiezione è la metà dell' angolo forma-*

to dalla verticale, e dalla retta, in cui ſono il punto della proiezione, ed il punto, in cui il proietto finiſce di muoverſi.

*Fig.*62. 63.64. DIM. Rappreſenti A il punto della proiezione, AL la direzione della forza proiettile, AB la verticale, che paſſa per lo punto A, ed AR la linea, in cui ſono il punto della proiezione, ed il punto, in cui il proietto finiſce di deſcrivere la parabola, la quale linea ſia, o orizzontale, o in qualunque maniera inclinata all'orizzonte. Si intenda, eſſere BA la linea della velocità, e fatto centro il punto A, con l' intervallo della retta AB, ſi intenda deſcritto il cerchio BFC; per B ſi tiri la orizzontale indefinita BI, e ſia l' angolo BAL = LAR, ſarà BI direttrice della parabola, che il proietto deſcrive, ed F il fuoco di eſſa (§.334.). Si intenda, che AMN ſia la parabola, che il proietto deſcrive, e dal punto N ſopra la direttrice BI ſi intenda calata la perpendicolare NE. Per la natura della parabola, ſarà NE = NF, onde ſe ſi deſcrive un cerchio, il quale abbia per centro il punto N, e per intervallo la retta NE, eſſo con la ſua periferia paſſerà per lo punto F; or ſe ſi prende in AR qualunque altro punto G, il quale ſia più lontano dal punto A, di quello, che ne è lontano il punto N, e da eſſo ſi cala ſopra di BI la perpendicolare GI, ſarà, nel caſo della fig. 62, GI = NE = NF, e perciò GI è minore di GF; nel caſo della fig. 63, ſarà GI minore di NE, e perciò molto più minore di GF; nel caſo della fig. 64, tirata per N la orizzontale PK, ſarà

KI

KI = NE = NF; ma nel triangolo NKG l'angolo K è retto, e perciò KNG è acuto, dunque NG è maggiore di KG, e per conſeguenza tutta IG è minore di GF, onde in tutti e tre i caſi ſempre GI è minore di GF; dunque il cerchio deſcritto col centro G, e con l'intervallo GI non può toccare, nè interſecare il cerchio BFC; dunque tutte le rette, che dal punto G ſi poſſono tirare alli punti della periferia del cerchio BFC, ſono maggiori della perpendicolare GI calata dallo ſteſſo punto ſopra della direttrice di tutte le infinite parabole, che il proietto può deſcrivere con la velocità, che avrebbe acquiſtata, ſe liberamente foſſe diſceſo per BA, nella quale ſono tutti li fuochi delle infinite parabole, che sì fatto proietto può deſcrivere, variando l'angolo della proiezione (§. 334.); dunque il punto G non può eſſere in alcuna delle parabole, che il proietto può deſcrivere con la data velocità, e perciò di tutte le infinite parabole, che il proietto può deſcrivere, con variare all'infinito l'angolo della proiezione BAL, qualora la forza proiettile comunica al proietto la velocità, che eſſo acquiſterebbe ſcendendo per BA, la parabola, che porta il proietto alla maſſima diſtanza dal punto A, è quella, che viene deſcritta dal proietto allor che l'angolo della proiezione BAL è la metà dell'angolo BAR.

339. TEOR. VI. *Se un corpo è ſpinto da qualſivoglia forza proiettile in maniera, che eſſo debba giungnere ad un punto della retta, in cui ſono il punto della proiezione, ed il punto, in cui il pro-*

proietto finisce di descrivere la parabola, il quale punto sia più vicino al punto della proiezione, di quello, che sarebbe il punto, in cui il proietto giungerebbe, se si muovesse per la parabola, che lo porterebbe alla massima distanza, il proietto potrà giungere a sì fatto punto per due diverse parabole, e li due angoli delle proiezioni avranno eguali differenze relativamente all' angolo della proiezione, che bisognerebbe, per fare, che il proietto giungesse alla massima distanza dal punto della proiezione.

Fig. 65. 66. 67. DIM. Siano A il punto della proiezione, AB la linea della velocità, AR la linea, in cui sono il punto della proiezione, ed il punto, nel quale il proietto finisce di descrivere la parabola, la quale linea sia orizzontale, o comunque inclinata alla orizzontale. N disegni il punto della massima distanza, alla quale il proietto può giungere, qualora la forza proiettile gli comunica tanta velocità, quanta ne acquisterebbe se liberamente discendesse per AB, ed O disegni un punto più vicino al punto A, di quello, che è il punto N; col centro A, e con l' intervallo AB si descriva il cerchio BCK, per B si tiri la orizzontale indefinita BE, e da N, O si calino sopra BE le perpendicolari NE, OD. Il punto N, per ipotesi, è il punto il più distante, a cui può giungere il corpo spinto dalla forza proiettile dal punto della proiezione A, quindi NE = NC, e percio OD è maggiore di OC, e per conseguenza se si descrive il cerchio DFF, il quale abbia per centro O, e per intervallo OD, questo intersecherà

cherà il cerchio BCK nelli punti F, F; ma il fuoco della parabola, per cui il corpo movendosi deve giungere da A in O, deve essere quel punto della periferia BCK, che è tanto distante dal punto O, quanto è OD, dunque essendo due li punti FF della periferia BCK, che sono distanti da O di tanto, quanto è OD, due ancora possono essere le parabole diverse, per le quali il corpo spinto dalla forza proiettile con la velocità eguale a quella, che acquisterebbe, se liberamente discendesse per la verticale BA, può giungere da A in O.

Di più si congiungano le rette AF, AF, OF, OF; li due angoli FAO, FAO hanno AF = AF, AO comune, e la base OF = OF, dunque FAO = FAO, e perciò li due angoli BAF, BAF hanno eguali differenze, relativamente all' angolo BAC, e per conseguenza le metà degli angoli BAF, BAF hanno eguali differenze, relativamente alla metà dell' angolo BAC; ma le metà degli angoli BAF, BAF sono gli angoli delle proiezioni necessarj acciocchè il corpo giunga da A in O, spinto dalla forza proiettile con la velocità eguale a quella, che acquisterebbe nella libera discesa per la verticale BA; e la metà dell' angolo BAC è l' angolo della proiezione necessario, acciocchè il corpo spinto dalla medesima forza proiettile giunga alla massima distanza dal punto A, dunque li due angoli delle proiezioni necessarj acciocchè il corpo giunga da A in O spinto dalla forza proiettile eguale alla velocità, che acquisterebbe nella libera discesa

per

per BA, hanno eguali differenze relativamente all' angolo, il quale è necessario acciocchè il corpo giunga alla massima distanza dal punto A.

340. TEOR. VII. *Se un proietto percuote contro di un piano, sarà la velocità, con la quale il proietto giunge sopra del piano, alla velocità, con la quale percuote il piano, come il seno massimo al seno dell' angolo della inclinazione, che ha la tangente tirata alla parabola nel punto, in cui il proietto percuote il piano, con il piano medesimo.*

Fig.68. DIM. Sia AMN la parabola, che descrive un proietto, RS il piano, che esso percuote nel punto N, ed NT la tangente della parabola nel punto N; nella tangente NT si prenda ad arbitrio il punto B, dal quale sopra di RS si cali la perpendicolare BS, e si unisca NS, sarà BNS la inclinazione della tangente TN col piano RS.

Potendosi, senza errore sensibile, considerare la tangente TN come l' elemento N della parabola prolungato, si potrà, senza sensibile errore, considerare, che il proietto giunga nel punto N del piano, con quella velocità, che ha nel punto N della curva, e che giunga nel piano come se vi fosse venuto per la direzione della tangente TN, sicchè se con BN si esprime la velocità, con la quale il proietto giunge in N, esprimerà BS la velocità, con la quale il medesimo proietto percuote RS; e perciò la velocità, con la quale il proietto giunge in N, sta a quella, con la quale percuote il piano RS, RS, come NB: BS, ma nel triangolo rettangolo l' ipotenusa sta ad un cateto come il seno massimo al seno dell' angolo, che è opposto al medesimo cateto, dunque la velocità, con la quale il proietto giunge in N, sta alla velocità, con la quale il proietto percuote contro del piano RS, come il seno massimo al seno dell' angolo BNS. Sicchè &c.

CAPITOLO XXIII.

Delle forze centrali.

341. DEF. I. SI dice *forza centripeta* qualunque forza, la quale continuamente operando sopra di un corpo, cerca di avvicinarlo ad un dato punto.

342. DEF. II. Si dice *forza centrifuga* qualunque forza, la quale continuamente operando su di un corpo, cerca di allontanarlo da un dato punto.

343. AVV. I. Le due forze centripeta, e centrifuga si chiamano col nome comune di *forze centrali*, ed il punto, relativamente al quale, si considerano le loro azioni si dice *centro delle forze*.

344. AVV. II. Se una forza in uno spazio libero spinge un corpo; e dopo di avere in esso prodotto il moto, più non replica la sua azione sopra di quello, il corpo si muoverà per una linea retta con moto equabile; se poi essa in ogni istante replica la sua azione sopra del corpo, quello anderà continuamente accrescendo la sua velocità, e proseguirà il suo moto acce-

cele-

celerato, anche per una linea retta, dunque se un corpo in uno spazio libero si muove spinto da una sola forza, camminerà sempre per una linea retta, e per essa si muoverà con moto equabile, se la forza opera contro del corpo in un solo istante, senza replicare la sua azione; e si muoverà con moto accelerato, se essa replica la sua azione in ogni istante; similmente se contro di un corpo operano due forze istantanee di mezzana cospirazione, ed opposizione, il corpo si muoverà anche per una retta, la quale è la diagonale di quel parallelogrammo, che ha per lati due porzioni delle linee, che esprimono le direzioni, per le quali il corpo avrebbe camminato, se a ciascheduna di esse separatamente avesse ubbidito, le quali porzioni sono eguali alli spazj, che il corpo per quelle direzioni avrebbe camminato in tempi eguali, se alle medesime forze avesse separamente ubbidito; di più se un corpo è spinto da una forza proiettile, e contro di lui opera in ogni istante un' altra forza, la quale fa la sua azione sempre per una direzione inclinata a quella, per la quale esso in quel momento si muove, il corpo in ogni istante dovrà cambiare la sua direzione, e per conseguenza dovrà descrivere una linea, della quale ognuna delle piccolissime parti è fuori della direzione della sua vicina, e perciò si muoverà per una linea curva.

345. COR. I. Quindi se un corpo si muove per una linea curva nello spazio libero, deve essere spinto da due forze, delle quali una fa la sua azio-

azione una ſola volta, e l'altra replica l'azione ſua in ogni iſtante ſempre per direzioni inclinate a quelle direzioni, per le quali nel medeſimo momento il corpo ſi muove; e ſe queſta forza replica la ſua azione ſpingendo il corpo in ogni iſtante contro di un medeſimo punto, eſſa ſarà forza centripeta, ed obbligherà il corpo a deſcrivere una curva, la quale ſarà concava verſo il centro delle forze; finalmente ſe la forza centripeta ceſſa di fare la ſua azione sopra del corpo mentre eſſo è in qualunque punto della curva, per cui ſi muove, il detto corpo per la forza, che ha acquiſtata ſino a quel momento, in cui la forza centripeta ceſſa di fare azione, ſi muoverà con moto equabile per quella linea retta, la quale naſce dal prolungamento dell'ultimo elemento della curva deſcritto dal corpo, dunque il corpo ſi muoverà con moto equabile per la tangente della curva, che il medeſimo corpo avrebbe deſcritta, ſe la forza centripeta non aveſſe ceſſato di fare la ſua azione.

346. COR. II. Se dunque un corpo ſi muove animato da una forza proiettile, e da una forza centripeta, eſſo deſcriverà una curva la quale varierà ſecondo che eſſe forze o varieranno le loro efficacie, o varieranno gli angoli formati dalle loro direzioni, o finalmente ſecondo che varieranno le azioni della forza centripeta.

347. TEOR. I. *Se un corpo in uno ſpazio libero è animato da due ſorze, una proiettile, e l'altra contripeta, li tempi, che eſſo impiega a percorrere gli archi della curva, che deſcrive, ſaranno*

ranno proporzionali alle aree terminate dagli archi medesimi, e dalle rette, che sono tirate dagli estremi di essi archi al centro delle forze.

Fig.69. DIM. Il corpo A nello spazio libero venga spinto da una forza proiettile per la direzione AL, e da una forza centripeta, la quale in ogni istante replichi la sua azione, spingendo il corpo verso il centro O delle forze, e si unisca AO. Rappresentino AB lo spazio, che in uno istante il corpo percorrerebbe, se ubbidisse alla sola forza proiettile, ed AC lo spazio, che esso percorrerebbe nello stesso tempo, se ubbidisse alla sola forza centripeta, ma sì fatte forze operano in un medesimo istante, e sono di mezzana cospirazione, ed opposizione, quindi il corpo non ubbidirà nè all' una, nè all' altra separatamente, ma, compitosi il parallelogrammo CB, descriverà la diagonale AD nel medesimo tempo, in cui avrebbe descritta AB, o AC, se a ciascuna di esse separatamente avesse ubbidito (§.106); giunto il corpo in D, se contro di lui non facesse nuova azione la forza centripeta, per la forza acquistata continuerebbe a muoversi con moto equabile per la retta AD prolungata verso F, e descriverebbe DF = AD nel secondo istante di tempo, ma quando il corpo si ritrova in D, la forza centripeta fa una nuova azione sopra di lui, spingendolo verso il centro O delle forze, quindi congiunta la retta DO, e da essa tagliata la porzione DE, che disegna lo spazio, che in un istante il corpo percorrerebbe, se ad essa sola ubbidisse, il corpo sarà animato da due forze di mezzana cospirazione, ed opposizione,

delle

delle quali una gli farebbe percorrere lo ſpazio DF, l'altra lo ſpazio DE nel medeſimo tempo, onde il corpo non potrà muoverſi nè per l' una nè per l'altra direzione, ma compitoſi il parallelogrammo EF, deſcriverà nel medeſimo iſtante la diagonale DG; giunto il corpo in G, ſe contro di lui non faceſſe nuova azione la forza centripeta, eſſo continuerebbe a muoverſi con moto equabile per la direzione della retta DG prolungata, e deſcriverebbe GH = DG nel terzo iſtante, ma quando il corpo è giunto in G, la forza centripeta fà una nuova azione ſopra di lui, ſpingendolo verſo il centro O delle forze, quindi congiunta la retta GO, e da eſſa tagliata la porzione GI, che diſegna lo ſpazio, che il corpo in un iſtante deſcriverebbe, ſe ad eſſa ubbidiſſe, il corpo nel punto G ſarà animato da due forze di mezzana coſpirazione, ed oppoſizione, delle quali una gli farebbe percorrere lo ſpazio GH, l'altra lo ſpazio GI nel medeſimo tempo, onde il corpo non potrà muoverſi nè per l' una, nè per l'altra direzione, ma compitoſi il parallelogrammo IH, deſcriverà nel medeſimo iſtante la diagonale GK. Della ſteſſa maniera, procedendo avanti, ſi potranno determinare le altre lineette, le quali dinotano gli ſpazj, che il corpo percorrerà negli altri iſtanti ſeguenti, ma sì fatti ſpazj AD, DG, GK &c., che il corpo percorre ſucceſſivamente in eguali intervalli di tempo, ſono tutti infinitamente piccoli, ed in diverſe direzioni, dunque AD, DG, GK &c. diſegnano gli elementi della curva, che il corpo deſcrive nelli ſucfucceſſivi eguali iſtanti, ed AOD, DOG, GOK &c. diſegnano le aree corriſpondenti alli ſpazj AD, DG, GK deſcritti in tempi eguali.

Si uniſcano le rette FO, HO &c. Li due triangoli AOD, DOF hanno le baſi AD, DF eguali, ed hanno la medeſima altezza, imperciocchè hanno il vertice nello ſteſſo punto O, e le baſi nella medeſima retta AF, dunque ſono eguali; ma li triangoli DFO, DGO hanno la medeſima baſe DO, e ſono racchiuſi fra le ſteſſe parallele DO, FG, e perciò ſono eguali, dunque allo stesso triangolo DOF è eguale sì il triangolo AOD, che il triangolo DOG, ma le grandezze eguali ad una terza sono eguali fra loro, dunque il triangolo AOD è eguale al triangolo DOG, e perciò le aree AOD, DOG corrispondenti agli spazj AD, DG descritti in tempi eguali, sono fra loro eguali. Col medesimo raziocinio ſi dimoſtra, che le aree DOG, GOK, KON, &c. corrispondenti agli archetti DG, GK, KN descritti in tempi eguali sono fra loro eguali, dunque sarà l'area AOK all'area KON come il tempo impiegato a descrivere l'arco ADGK della curva al tempo impiegato a descrivete l'arco KN. Sicchè &c.

348. TEOR. II. *Se un corpo ſi muove in uno ſpazio libero, in maniera, che li tempi, che impiega a percorrere gli archi della curva, che eſſo deſcrive, ſiano proporzionali alle aree terminate dagli archi medeſimi, e dalle rette tirate dagli eſtremi di eſſi archi ad un punto eſiſtente dentro della curva, eſſo corpo ſi muoverà animato da una for-*

forza centripeta tendente al medesimo punto.

DIM. Muovasi un corpo per una curva ADGKN, in maniera, che li tempi, che esso impiega a percorrere gli archi AD, DG della curva, siano proporzionali alle aree AOD, DOG. Si supponga, che AD, DG siano due archi infinitamente piccoli, che il corpo percorre in due istanti eguali, e consecutivi di tempo; si prolunghi AD verso F, fino a tanto, che DF sia eguale ad AD, e si congiungano le rette AO, DO, GO, FO.

Le aree AOD, DOG corrispondenti alli tempi eguali, che il corpo impiega a descrivere gli archetti AD, DG, sono eguali, di più li due triangoli AOD, DOF hanno le basi AD, DF eguali poste nella medesima retta, ed i loro vertici posti nello stesso punto O, dunque sono eguali; ma il triangolo AOD è eguale al triangolo DOG, dunque il triangolo DOF è eguale al triangolo DOG; ma li triangoli DOF, DOG hanno la medesima base DO, e sono posti dalla medesima parte per rispetto della base, dunque la retta FG, che unisce li loro vertici, è parallela alla base DO Di più AD disegna lo spazio, che il corpo percorre in un istante, dunque DF disegnerà lo spazio, che il corpo percorrerebbe nel secondo istante, se contro di esso non facesse nuova azione un' altra forza nel punto D; ma esso descrive DG, dunque contro di esso fa nel punto D azione una forza, la quale opera per direzione parallela ad FG; ma si è dimostrato, che DO è parallela ad FG, dunque il corpo nel punto D riceve una nuova azione per la direzione della retta DO, la quale procede dal punto O. Con lo stesso raziocinio si dimostra, che in ogni altro istante la forza, che replica la sua azione sopra del corpo, la replica per direzione procedente dal medesimo punto O, dunque il corpo, descrivendo la curva ADGKN, è animato da una forza centripeta, ed il centro delle forze è il punto O.

349. TEOR. III. *Se due corpi animati da forze centripete tendenti a due punti, si muovono per due curve, le velocità, che essi hanno in due punti delle curve, che descrivono, sono in ragione composta dalla diretta di due aree, le quali sono terminate da due archetti infinitamente piccoli descritti in tempi eguali, ed infinitamente piccoli, e della reciproca delle perpendicolari calate dalli centri delle forze sopra le rette, che sono tangenti delle curve ne' medesimi punti.*

Fig. 70. DIM. Rappresentino AB, CD due curve, per le quali li corpi A, C si muovano con forze centripete tendenti alli punti O, P, ed AE, CF disegnino due archetti infinitamente piccoli, li quali si descrivono dalli corpi A, C in eguali tempi infinitamente piccoli, e si intendano sì fatti archetti prolungati verso G, H. saranno AG, CH tangenti delle curve nelli punti A, C; finalmente dalli punti O, P si calino sopra delle tangenti AG, CH le perpendicolari OG, PH, e si uniscano le rette OA, OE, PC, PF.

Per

Per ipotesi gli archetti AE, CF sono infinitamente piccoli, e perciò gli spazj mistilinei AOE, CPF si possono considerare come triangoli rettilinei, ma le basi de' triangoli rettilinei sono in ragione composta dalla diretta de' triangoli, e dalla reciproca delle loro altezze, dunque sarà l'arco AE all'arco CF in ragione composta da quella dell'area AOE all'area CPF e dalla reciproca di OG:PH; ma AE, CF sono due archi infinitamente piccoli descritti in tempi eguali, e perciò sono nella ragione dalle velocità, che li corpi hanno nelli punti A, C, (§.96.), dunque la velocità, che il corpo A tiene nel punto A, sta alla velocità, che il corpo C tiene nel punto C, in ragione composta da quella dell' area AOE all'area CPF, e dalla reciproca delle perpendicolari OG, PH, sicchè &c.

350. COR. I. Quindi qualora un corpo animato da una forza centripeta si muove per una curva, le velocità, che ha nelli diversi punti di essa, sono nella ragione composta dalla diretta delle aree terminate dagli archetti descritti in tempi eguali infinitamente piccoli, e dalla reciproca delle perpendicolari calate dal centro delle forze sopra delle rette, che sono tangenti della curva nelli medesimi punti, ma quando un corpo animato da una forza centripeta si muove per una curva, in tempi eguali percorre archi, li quali terminano aree eguali (§.347.), dunque le velocità, che il corpo ha nelli diversi punti della curva, sono nella sem-

plice ragione reciproca delle perpendicolari calate dal centro delle ſorze ſopra delle rette, le quali ſono tangenti della curva nelli medeſimi punti.

351. COR. II. Se la curva, per la quale il corpo ſi muove, è la periferia di un cerchio, e la forza centripeta, dalla quale il corpo è animato, tende al centro di eſſo, ſaranno le velocità, che il corpo ha nelli diverſi punti della periferia, in ragione reciproca delle perpendicolari calate dal centro del cerchio ſopra delle tangenti tirate alli medeſimi punti, ma li raggi tirati alli punti del contratto ſono perpendicolari alle corriſpondenti tangenti, dunque le velocità, che il corpo ha nelli diverſi punti della periferia ſono in ragione reciproca delli corriſpondenti raggi; ma li raggi di un cerchio ſono tutti eguali, dunque eguali ſono le velocità, che il corpo ha nelli diverſi punti della periferia, quindi il corpo, che ſi muove per una periferia circolare con forza centripeta tendente al centro del cerchio, ha ſempre la medeſima velocità; ma il corpo, il quale ſi muove conſervando ſempre la medeſima velocità, ſi muove con moto equabile (§.85.), dunque il corpo, che ſi muove per una periferia circolare con forza centripeta tendente al centro del cerchio, ſi muove con moto equabile.

352. AVV. I. Di queſta propoſizione è vera anche la converſa, cioè che ſe un corpo ſi muove con moto equabile per la periferia di un cerchio, eſſo è animato da una forza centri-

tripeta tendente al centro del medesimo cerchio. In fatti se nella periferia si prendano due archi descritti in tempi eguali, essi saranno eguali, e perciò li settori circolari da essi terminati saranno anche eguali, quindi il centro del cerchio è un punto tale, che se da esso si tirino le rette, le quali uniscono gli estremi degli archi, che si descrivono in tempi eguali, le aree sono anche eguali; ma sì fatto punto è il centro delle forze, dunque se un corpo si muove con moto equabile per la periferia di un circolo, è animato da una forza centripeta tendente al centro di esso.

353. AVV. II. Si noti, che in appresso chiameremo *tempo periodico*, il tempo, che un corpo, il quale si muove animato da forze centrali, impiega a fare l'intiera sua rivoluzione intorno al centro delle forze.

354. COR. III. Le velocità, che hanno li corpi, che si muovono con moto equabile, sono in ragione composta dalla diretta degli spazj, che li corpi descrivono, e dalla reciproca delli tempi, che impiegano a percorrerli (§.96.), ma li corpi, che si muovono per le periferie circolari, animati da forze centripete tendenti alli loro centri, si muovono con moto equabile (§.351.), dunque le velocità de' corpi, li quali si muovono per periferie circolari, animati da forze centripete tendenti alli loro centri, sono in ragione composta da quella delle periferie, ch' essi descrivono, e dalla reciproca de' tempi periodici; ma le periferie de' cer-

chi sono nella ragione de' loro diametri, dunque le velocità, che hanno li corpi, che descrivono periferie circolari, animati da forze centripete tendenti alli centri de' cerchi, sono in ragione composta dalla diretta delli diametri de' cerchi, e dalla reciproca de' tempi periodici.

355. COR. IV. Ne' corpi, che si muovono con moto equabile, li tempi impiegati a percorrere diversi spazj sono in ragione composta dalla diretta de' medesimi spazj, e dalla reciproca delle velocità (§. 98.), ma li corpi, che si muovono per periferie circolari animati da forze centripete tendenti alli loro centri, si muovono con moto equabile (§. 351.), dunque ne' corpi, li quali si muovono per periferie circolari, animati da forze centripete tendenti alli loro centri, saranno li tempi periodici in ragione composta dalla diretta delle periferie, e dalla reciproca delle velocità, con le quali essi si muovono; ma le periferie de' cerchi sono nella ragione de' diametri, dunque ne' corpi, li quali si muovono per periferie circolari, animati da forze centripete tendenti alli loro centri, li tempi periodici sono in ragione composta dalla diretta de' diametri de' cerchi, le periferie de' quali essi percorrono, e dalla reciproca delle velocità.

356. COR. V. Si chiamino A, B le aree intere appartenenti alle curve AEB, CFD. Si chiamino *a*, *b* le aree AOE, CPF terminate dagli archetti infinitamente piccoli, AE, CF descritti in eguali tempi infinitesimi. Li

tem-

tempi periodici per le curve AEB, CFD si chiamino T, t, ed il tempo, che li corpi impiegano a percorrere gli archi AE, CF, si chiami C.

Qualora un corpo animato da una forza centripeta descrive una curva, li tempi, che impiega a percorrere gli archi di essa, sono nella ragione delle aree terminate dalli medesimi archi (§.347.), dunque $a: A = C: T$, $b: B. = C: t.$, ma quando quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, dunque $aT = AC$, $bt = BC$, quindi facendo con sì fatte grandezze una proporzione, sarà $aT: bt = AC: BC = A: B.$; e perciò $aTB = btA$, e sciogliendo sì fatti prodotti in proporzione, sarà $a : b = At : BT$, ma le velocità delli due corpi sono in ragione composta dalla diretta di a, b, che sono le aree terminate dagli archetti infinitamente piccoli descritti in tempi eguali infinitesimi, e dalla reciproca delle perpendicolari OG, PH, calate dalli centri delle forze sopra le tangenti AG, CH (§.349.), dunque le velocità, che li corpi hanno nelli punti A, C, sono in ragione composta dalla diretta di A: B, dalla reciproca di $T : t$, e dalla reciproca delle perpendicolari OG, PH, e perciò le velocità, che hanno li due corpi nelli punti A, C delle curve, che descrivono, sono in ragione composta dalla diretta delle intere aree, dalla reciproca de' tempi periodici, e dalla reciproca delle perpendicolari calate dalli centri delle forze sopra delle rette, che sono tangenti delle curve nelli medesimi punti.

357. TEOR. IV. *Se due corpi animati da forze centripete si muovono per due curve, essi percorrono due archi delle dette curve, in tempi, li quali sono in ragione composta dalla diretta delle aree terminate dalli medesimi archi, e dalla reciproca delle aree terminate dagli archi, che da' corpi si descrivono in tempi eguali.*

DIM. Rappresentino AB, CD due curve, le quali sono descritte da due corpi animati da forze centripete tendenti alli punti O, P, ed in esse siano presi ad arbitrio li due archi AL, CM, e si uniscano le rette OL, OA, PC, PM, saranno AOL, CPM le aree terminate dagli archi AL, CM. Siano di più AE, CF due archi descritti in tempi eguali, e si uniscano le rette OE, PF, saranno AOE, CPF le aree terminate dagli archi AE, CF descritti in tempi eguali.

Si chiamino T, *t* li tempi, che li corpi impiegano a descrivere gli archi AL, CM, ed R il tempo, che essi impiegano a percorrere gli archi AE, CF.

Qualora un corpo animato da una forza centripeta si muove per una curva, nel descrivere due archi di essa, impiega tempi, li quali sono nella ragione delle aree corrispondenti alli medesimi archi (§.347.), dunque sarà T: R = AOL: AOE, *t*: R = CPM: CPF; ma quando quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, dunque T.AOE = R.AOL, *t*. CPF = R.CPM; dunque T. AOE: *t*.CPF = R.AOL: R. CPM

= AOL

$=$ AOL : CPM; ma se quattro grandezze sono proporzionali, dividendo gli antecedenti per una medesima grandezza, ed i conseguenti per un altra, esse restano proporzionali, dunque $T : t =$ $\frac{AOL}{AOE} : \frac{CPM}{CPF}$; ma li rotti sono in ragione composta dalla diretta de' numeratori, e dalla reciproca de' denominatori, dunque li tempi T, t, che li corpi impiegano a percorrere li due archi AL, CM, sono in ragione composta dalla diretta delle aree AOL, CPM terminate dalli medesimi archi, e dalla reciproca delle aree AOE, CPF corrispondenti agli archi AE, CF descritti in tempi eguali.

358. TEOR. V. *Se due corpi si muovono per due periferie circolari con forze centripete tendenti alli centri de' cerchi, le forze centripete dalle quali sono animati, saranno fra loro in ragione composta dalla diretta de' quadrati delle loro velocità, e dalla reciproca de' raggi de' medesimi cerchi.*

DIM. Si muovano due corpi per le perife- *Fig. 71.* rie circolari ACB, DEF con forze centripete tendenti alli centri O, P, ed in esse periferie s'intendano presi ad arbitrio gli archetti AC, DE infinitamente piccoli descritti in tempi eguali infinitamente piccoli, indi per gli punti A, D si tirino li diametri AB, DF, e le tangenti AG, DH; finalmente dalli punti C, E si calino sopra di AB, DF le perpendicolari CI, EK; si compiscano li rettangoli IG, KH, e si uniscano le corde AC, CB, DE, EF.

Li

Li corpi, che descrivono periferie circolari con forze centripete tendenti alli loro centri, si muovono con moto equabile (§.351.), ma ne' corpi, li quali si muovono con moto equabile, le velocità sono nella ragione degli spazj, che essi percorrono in tempi eguali (§.96.), dunque gli archi AC, DE sono nella ragione delle velocità, con le quali li corpi si muovono per le periferie circolari ACB, DEF. Di più si supponga, che la forza centripeta cessi di operare quando il corpo è nel punto A, allora esso, per la forza, che si ritroverebbe avere in sì fatto punto, descriverebbe la tangente AG, nel medesimo tempo, che descrive l'arco AC: se poi in esso si distruggesse la forza, che ha nel medesimo punto della curva, per l'azione della sola forza centripeta descriverebbe AI nel medesimo tempo: per la medesima ragione il corpo, il quale si muove per la periferia DEF, per la sola forza centripeta, descriverebbe la la retta DK, nello stesso tempo, che descrive DE, dunque la forza centripeta, che anima il corpo nella curva ACB, sta alla forza centripeta, che anima il corpo nella curva DEF, come AI : DK. Dipiù li triangoli ACB, DEF, sono rettangoli in C, E, e dalli vertici degli angoli retti sono calate sopra delle ipotenuse AB, DF le perpendicolari CI, EK, dunque BA: AC = AC : AI, FD: DE = ED : DK; ma la terza proporzionale è eguale al quadrato della media diviso per la pri-

prima, dunque $AI = \frac{AC^2}{BA}$, $DK = \frac{DE^2}{DF}$ ma le forze centripete, che animano li corpi, li quali si muovono per le periferie ACB, DEF, sono nella ragione di AI : DK, dunque le forze centripete, che animano li corpi, li quali si muovono per le periferie ACB, DEF, sono nella ragione di $\frac{AC^2}{AB} : \frac{DE^2}{DF}$; ma AC, DE, sono nella ragione delle velocità, che sì fatti corpi hanno, AB, DF sono li diametri de' cerchi, per le circonferenze delli quali li corpi si muovono, dunque le forze centripete, che animano li corpi, li quali si muovono per le periferie circolari ACB, DEF, sono nella ragione de' quadrati delle loro velocità, divisi per li diametri de' cerchi, le periferie de'quali essi descrivono; ma due rotti sono in ragione composta dalla diretta de' loro numeratori, e dalla reciproca de' denominatori, dunque se due corpi si muovono per le periferie circolari ACB, DEF, con forze centripete tendenti alli centri O, P, sono animati da forze centripete, le quali sono fra loro in ragione composta dalla diretta de' quadrati delle velocità, con le quali li corpi si muovono, e dalla reciproca de' diametri, o delli raggi de'cerchi, per le circonferenze de'quali essi si muovono.

359. COR. I. Si chiamino F, *f* le forze centripete, che animano due corpi, li quali si muovono per le circonferenze di due cerchi, alli centri de' quali tendono le medesime for-

forze ; T , t li tempi periodici ; U , u le velocità ; D , d li raggi de' medesimi cerchi, o le distanze, che li corpi hanno dalli centri delle forze. Le forze centripete, che animano due corpi, che si muovono per le circonferenze di due cerchi con forze centripete tendenti alli loro centri, sono in ragione composta dalla diretta de' quadrati delle loro velocità, e dalla reciproca delli diametri, o de' raggi de' cerchi (§. 358.), dunque $F : f = U^2 d : u^2 D$; ma quando quattro grandezze sono proporzionali, il prodotto delle estreme è eguale al prodotto delle medie, dunque $Fu^2 D = f U^2 d$, e sciogliendo sì fatti prodotti in proporzione, sarà $U^2 : u^2 = FD : f d$, e per conseguenza $U : u = \sqrt{FD} : \sqrt{fd}$; quindi due corpi, li quali si muovono per due periferie circolari con forze centripete tendenti alli loro centri, hanno le loro velocità in ragione composta da quella delle radici quadrate delle forze centripete, e da quella delle radici quadrate delle distanze, che essi hanno dalli centri delle forze.

360. COR. II. Di più, qualora due corpi si muovono per due periferie circolari con forze centripete tendenti alli loro centri, li tempi periodici sono in ragione composta dalla diretta de' diametri, o de' raggi, li quali disegnano le distanze, che hanno li corpi dalli centri delle forze, e dalla reciproca delle velocità, con le quali essi si muovono (§.355.), dunque sarà $T : t = Du : dU$; ma $u : U =$

fd

$\sqrt{fd} : \sqrt{FD}$; (§.359.) dunque $T : t = D\sqrt{fd}$: $d\sqrt{FD}$, e dividendo sì l' antecedente, che il conseguente per $\sqrt{Dd}$, sarà $T : t = \sqrt{Df} : \sqrt{dF}$; e perciò quando due corpi si muovono per due periferie circolari con forze centripete tendenti alli loro centri, li tempi periodici sono in ragione composta dalla diretta delle radici quadrate delle distanze, che essi hanno dalli centri delle forze, e dalle reciproche delle radici quadrate delle forze medesime.

361 TEOR. VI. *Se due corpi si muovono per le periferie di due cerchi con forze centripete tendenti alli centri di essi cerchi, e queste siano in ragione reciproca delli quadrati delle distanze, che li corpi hanno dalli centri delle forze, i quadrati de' tempi periodici saranno come li cubi delle distanze, che li corpi hanno dalli centri delle forze; e se li quadrati delli tempi periodici sono come li cubi delle distanze, che li corpi hanno dalli centri delle forze, si fatte forze saranno in ragione reciproca de' quadrati delle distanze, che li corpi hanno dalli centri delle forze.*

DIM. Si chiamino T, *t* li tempi periodici, F, *f* le forze, D, *d* le distanze, U, *u* le velocità.

I. Per ipotesi $f : F = D^2 : d^2$, e perciò $\sqrt{f} : \sqrt{F} = D : d$, ma $T : t = \sqrt{Df} : \sqrt{dF}$ (§.360.) dunque sostituendo $T : t = D\sqrt{D} : d\sqrt{d} = \sqrt{D^3} : \sqrt{d^3}$, ed elevando tutte le grandezze alla se-

con-

conda potenza, sarà $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$; sicchè &c.

II. Per ipotesi $T^2 : t^2 = D^3 : d^3$, ma $T : t = \sqrt{Df} : \sqrt{dF}$ (§. 360.), dunque $T^2 : t^2 = Df : dF$, e perciò sostituendo $Df : dF = D^3 : d^3$, e dividendo gli antecedenti per D, e li conseguenti per d, sarà $f : F = D^2 : d^2$, ed invertendo $F : f = d^2 : D^2$; sicchè &c.

362. TEOR. VII. *Il corpo, che si muove per la periferia di un cerchio con forza centripeta tendente al centro di esso, ha una velocità eguale a quella, che acquisterebbe qualunque corpo discendendo liberamente per una verticale eguale alla metà del raggio.*

Fig. 72. DIM. Si muova un corpo per la periferia circolare ABC con forza centripeta tendente al centro O, si tiri nel cerchio il diametro AC, e nella periferia ABC si prenda l'archetto AB infinitamente piccolo; dal punto B si cali sopra di AC la perpendicolare BE, e si uniscano le corde AB, BC; essendo l' arco AB infinitamente piccolo, si potrà, senza errore sensibile, prendere come eguale alla sua corda AB; finalmente si tagli dal raggio AO, la retta $AF = \frac{1}{2}$ AO. Se un corpo si muovesse con moto equabile con la velocità, che acquisterebbe se liberamente discendesse per AE descriverebbe uno spazio doppio di AE nello stesso tempo, che, discendendo liberamente, avrebbe descritto AE (§.184.); di più il corpo, che descrive la periferia ABC con forza centripeta tendente al centro O, si muove con mo-

moto equabile (§.351.), ma li corpi, che si muovono con moto equabile, hanno le velocità nella ragione degli spazj, che descrivono in tempi eguali (§. *96.*), dunque la velocità, che il corpo acquisterebbe scendendo per AE, sta a quella, con la quale si muove per la curva ABC $=$ 2AE : AB; ma il triangolo ABC è rettangolo in B, e dal vertice dell' angolo retto è calata la perpendicolare BE sopra l' ipotenusa AC, dunque CA : AB $=$ AB: AE; ma quando tre rette sono continuamente proporzionali, il rettangolo delle estreme è eguale al quadrato della media, dunque AB^2 $=$ CA. AE, ed AB $= \sqrt{CA.AE}$, quindi la velocità, con la quale il corpo descrive la curva, sta a quella, che acquisterebbe liberamente discendendo per una verticale eguale ad AE $=$ $\sqrt{CA.AE} : 2AE = \sqrt{2AO.AE} : 2AE$, e dividendo sì l'antecedente, che il conseguente per $\sqrt{2AE}$, sarà la velocità, con la quale il corpo si muove per la curva, a quella, che acquisterebbe liberamente discendendo per una verrticale eguale ad AE $= \sqrt{AO} : \sqrt{2AE}$; di più la velocità, che il corpo acquisterebbe liberamente discendendo per una verticale eguale ad AE, sta a quella, che acquisterebbe, se liberamente discendesse per AF $= \sqrt{AE} : \sqrt{AF}$ (§.184.) $= \sqrt{2AE}$: $\sqrt{2AF}$, dunque la velocità, con la quale il corpo descrive la curva, quella, che acquisterebbe se liberamente discendesse per AE, e quella, che acquisterebbe, se liberamente discendesse per AF, hanno ragioni ordinate al-

le

le tre grandezze $\sqrt{AO}$, $\sqrt{2AF}$, $\sqrt{2AF}$; perciò ordinando, sarà la velocità, con la quale il corpo descrive la curva, a quella, che acquisterebbe se liberamente discendesse per una verticale AF metà del raggio, come $\sqrt{AO} : \sqrt{2AF}$; ma $\sqrt{AO} = \sqrt{2AF}$, dunque anche la velocità, con la quale il corpo descrive la curva, è eguale alla velocità, che un corpo acquisterebbe, se discendesse liberamente per una verticale eguale alla metà del raggio. Sicchè &c.

363. TEOR. VIII. *Se un corpo, il quale si muove per una ellisse con forza centripeta tendente al fuoco di quella, perdesse per un momento la forza, che tiene allorchè è in un punto della curva, ed operasse sopra di lui la sola forza centripeta, esso descriverebbe in un tempo infinitamente piccolo, accostandosi al centro delle forze, uno spazio, il quale è terza proporzionale in ordine al parametro dell' asse maggiore della medesima ellisse, ed alla perpendicolare, che dall' estremo dell' archetto, che il corpo avrebbe nel medesimo tempo descritto per la curva; si cala sopra la retta, che unisce il centro delle forze con il punto della curva, in cui il corpo si ritrova.*

Fig. 73. DIM. Rappresenti ACBD una ellisse, per la quale si muova un corpo animato da forza centripeta tendente al fuoco S, della quale siano AB l' asse maggiore, CD l' asse minore F, l'altro fuoco, P il parametro dell' asse maggiore, e PE l' archetto infinitamente piccolo, che

il

il corpo deſcriverebbe in un tempo infiniteſimo; ſiano nella elliſſe tirati li due diametri conjugati PM, QN, e dal punto P ſi cali ſopra QN la perpendicolare PH, indi ſi uniſcano le rette SP, SE, PF; per lo punto P ſi tiri la tangente XY, e per E, F, ſi tirino le rette Ec, IF parallele ad XY, QN, finalmente dal punto E ſopra di SP ſi cali la perpendicolare ET. e ſi compiſca il parallelogrammo PaEX.

Per ipoteſi l' archetto PE è infinitamente piccolo, e perciò, ſenza errore ſenſibile, ſi può conſiderare come diagonale del parallelogrammo aX, e per conſeguenza Pa diſegna lo ſpazio, che il corpo deſcriverebbe nello ſteſſo tempo, che deſcrive l' arco PE, ſe nel punto P ſi diſtruggeſſe la forza, che eſſo tiene; e faceſſe contro di lui azione la ſola forza centripeta. In oltre, per coſtruzione, le rette XY, IF ſono parallele, e perciò gli angoli alterni ſono fra loro eguali, dunque YPF = PFI, XPI = PIF, ma gli angoli XPI, YPF fatti dalla tangente con le rette tirate dal punto del contatto alli fuochi, ſono eguali, dunque eguali ſono ancora gli angoli PIF, PFI; ma qualora in un triangolo due angoli ſono eguali, anche li lati oppoſti agli angoli eguali ſono fra loro eguali, dunque IP = PF; ma nel triangolo ISF è tirata GO parallela ad IF, dunque SG : GI = SO : OF, ma SO = OF, dunque SG = GI, e perciò SG + PF = PI + IG = PG, e per conſeguenza GP = $\frac{1}{2}$ (SP + PF); ma la ſomma di due rette tirate da qualunque punto della ellisse alli due fuochi è eguale all'asse maggiore, dunque $GP = \frac{1}{2} AB = AO$. Di più, nella ellisse il parametro dell'asse maggiore è terza proporzionale in ordine all'asse maggiore, ed all' asse minore, dunque $AB : CD = CD : P$, e per conseguenza $AO : OC = OC : \frac{1}{2} P$; ma quando tre rette sono continuamente proporzionali, il rettangolo delle estreme è eguale al quadrato della media, dunque $OC^2 = AO \cdot \frac{1}{2} P$, e per conseguenza $OC = \sqrt{\frac{1}{2} AO.P}$: ma nella ellisse il rettangolo fatto dalli due assi è eguale al parallelogrammo, che è circoscritto alla ellisse, e che con li lati suoi la tocca nelli vertici di due diametri conjugati, dunque $AB . CD = NQ . 2PH$, e per conseguenza $AO . OC = OQ . PH$: ma $OC = \sqrt{\frac{1}{2} AO.P}$; dunque sostituendo sarà $AO \sqrt{\frac{1}{2} AO.P} = OQ.PH$, e dividendo sì fatte grandezze eguali per OQ, sarà $\frac{AO}{QO} \sqrt{\frac{1}{2} AO.P} = PH$. In oltre, per costruzione, *ao* è parallela a GO, e perciò li triangoli GPO, aPo sono simili, quindi $GP : PO = aP : Po$, ma $GP = AO$, dunque, sostituendo, $AO : OP = aP : Po$, ma quando quattro grandezze sono proporzionali, la quarta è eguale al prodotto delle due di mezzo diviso per la prima, dunque $Po = \frac{PO.Pa}{OA}$; ma se da qualunque punto di una ellis-

se

se si cali una ordinata ad un diametro, il rettangolo fatto dalle parti del diametro sta al quadrato dell'ordinata come il quadrato della metà dello stesso diametro al quadrato della metà del diametro ad esso conjugato, dunque $Mo . oP : oE^2 = OP^2 : OQ^2$; ma senza errore sensibile, si può prendere $Mo = MP = 2OP$, $Eo = Ea$, e si è dimostrato $Po = \frac{PO \cdot Pa}{\overline{AO}}$. dunque, sostituendo, sarà $OP^2 : OQ^2 = 2OP \frac{PO . Pa}{\overline{OA}} : Ea^2$, ma la quarta proporzionale è eguale al prodotto delle due di mezzo diviso per la prima, dunque $Ea^2 = \frac{2 OP^2 . Pa \; . OQ^2}{OP^2 . OA} = \frac{2 Pa . OQ^2}{OA}$, ed $Ea = OQ \sqrt{\frac{2Pa}{OA}}$. Similmente ac è parallela a GH, e perciò li triangoli aPc, GPH sono simili, dunque $GP : PH = Pa : Pc$, ma $PG = AO$, $PH = \frac{AO}{\overline{OQ}} \sqrt{\tfrac{1}{2} \overline{AO.P}}$

dunque, sostituendo, sarà $AO : \frac{AO}{\overline{OQ}} \sqrt{\tfrac{1}{2} \overline{AO.P}} = Pa : Pc$, ma la quarta proporzionale è eguale al prodotto delle due di mezzo diviso per la prima, dunque $Pc = \frac{Pa}{\overline{QO}} \sqrt{\tfrac{1}{2} \overline{AO.P}}$. Finalmente li triangoli rettangoli ETa, acP hanno gli angoli EaT, Pac eguali come verticali, e perciò sono simili, dunque $Pa : Pc = aE : \overline{ET}$: ma $Pc = \frac{Pa}{\overline{OQ}} \sqrt{\tfrac{1}{2} \overline{AO.P}}$, $Ea = OQ \sqrt{\frac{2Pa}{\overline{AO}}}$, dunque sostituendo, sarà $Pa : \frac{Pa}{OQ} \sqrt{\frac{1}{2} AO.P} = OQ \sqrt{\frac{2Pa}{AO}} : ET$, ma la quarta proporzionale è eguale al prodotto delle due di mezzo diviso per la prima, dunque $ET = \sqrt{Pa.P}$, ed elevando sì fatte grandezze a quadrato, sarà $ET^2 = Pa.P$, e per conseguenza $P:ET = ET:Pa$, ma Pa disegna lo spazio, che il corpo percorrerebbe in un tempo infinitamente piccolo, se in esso si distruggesse per un momento la forza, che lo anima nel punto P della curva, ed operasse la sola forza centripeta diretta al fuoco S, dunque &c.

364. COR. Quindi se PE, RK disegnino due archetti, che il corpo movendosi per la ellisse ACBD descriverebbe in due tempi infinitamente piccoli, ed eguali, e si uniscano le rette SP, SR, sopra delle quali si calino dalli punti K, E le perpendicolari KV, ET, e li spazj, che il corpo descriverebbe ne' medesimi tempi qualora si ritrova nelli punti P, R, se in esso si distruggesse la forza, con cui si muove per la curva, ed operasse la sola forza centripeta, si chiamino S, s, sarà $P: ET = ET:S$; $P: KV = KV: s$; ma la terza proporzionale è eguale al quadrato della media diviso per la prima; dunque $S = \frac{ET^2}{P}$, ed $s = \frac{KV^2}{P}$; e perciò $S : s = \frac{ET^2}{P} : \frac{KV^2}{P} = ET^2 : KV^2$, dunque anche

la

la efficacia della forza centripeta, che anima il corpo in P, ſta alla efficacia della forza centripeta, che anima il corpo in R $= ET^2 : KV^2$, ſicchè la efficacia della forza centripeta, che anima verſo il fuoco S un corpo, che ſi muove per la elliſſe ACBD, varia come variano li quadrati delle perpendicolari calate dagli eſtremi degli archetti, che eſſo deſcriverebbe in eguali tempi infinitamente piccoli ſopra delle rette, che uniſcono li punti della curva, ne' quali il corpo ſi ritrova, col centro delle forze.

365. TEOR. IX. *Se un corpo ſi muove per una elliſſe, animato da una forza centripeta tendente al ſuoco di eſſa, la efficacia della forza centripeta, che lo anima nelli diverſi punti della curva, varia come variano li quadrati delle diſtanze, che li medeſimi punti tengono dal fuoco, reciprocamente preſe.*

DIM. Rappreſenti ACBD una elliſſe, la quale *Fig. 73.* ſia deſcritta da un corpo, il quale ſia animato da una forza centripeta tendente al fuoco S, e ſiano PE, RK due archetti infiniteſimi, che il corpo deſcriverebbe in due tempi infinitamente piccoli, ed eguali; ſi uniſcano le rette SP, SE, SR, SK, e dalli punti E, K ſi calino ſopra SP, SR le perpendicolari ET, KV.

Le figure PSE, RSK diſegnano le aree terminate dagli archetti PE, RK deſcritti dal corpo in tempi eguali, ma le aree terminate dagli archetti deſcritti in tempi eguali ſono eguali (§. 347.), dunque PSE $=$ RSK. Di più gli archetti PE, RK ſono infinitamente piccoli, e perciò, ſenza er-

errore sensibile, si possono considerare come linee rette, dunque le aree PSE, RSK si possono prendere per triangoli rettilinei; ma li triangoli eguali hanno le basi in ragione reciproca delle altezze, dunque SP : SR = KV : ET, e per conseguenza $SP^2 : SR^2 = KV^2 : ET^2$; ma la efficacia della forza centripeta, che anima il corpo in P sta alla efficacia della forza centripeta; che anima il corpo in R = $ET^2 : KV^2$ (§.364), dunque la efficacia della forza centripeta, che anima il corpo in P sta alla efficacia della forza centripeta, che anima il corpo in R, come $SR^2 : SP^2$, sicchè &c.

366. COR. I. Nella ellisse le rette tirate dalli fuochi alli diversi punti della curva continuamente variano la loro lunghezza, ma qualora un corpo si muove per una ellisse animato da una forza centripeta tendente al fuoco di essa, la efficacia della forza centripeta, che lo anima nelli diversi punti della curva, varia, come variano li quadrati delle distanze, che li medesimi punti tengono dal fuoco, reciprocamente prese, dunque qualora un corpo si muove per una ellisse animato da forza centripeta tendente al fuoco di essa, nelli diversi punti della curva continuamente va variando la forza centripeta, che lo anima.

367. COR. II. Di più, di tutte le rette, che dal punto S si possono tirare agli infiniti punti della ellisse, la massima è SA, la minima è SB, delle altre, quelle, che sono più vicine alla massima sono maggiori di quelle, che ne so-

sono più distanti, quindi la efficacia della forza centripeta, che anima il corpo, che si muove per la ellisse ACBD, è massima nel punto B, è minima nel punto A, e qualora il corpo da A, si muove verso B, continuamente si va accrescendo, qualora poi da B si muove verso A, continuamente si và diminuendo.

368. AVV. I. Gli Astronomi, per mezzo di molte replicate osservazioni, hanno conosciuto I. Che ogni pianeta primario descrive intorno al sole una ellisse, e che ogni pianeta secondario descrive una ellisse intorno al suo pianeta primario. II. Che la retta tirata dal centro del sole al centro del pianeta primario descrive aree proporzionali alli tempi, nelli quali il pianeta primario percorre gli archi, che terminano sì fatte aree, e che la retta tirata dal centro del pianeta primario al centro del pianeta secondario descrive aree proporzionali alli tempi, nelli quali esso descrive gli archi, che terminano sì fatte aree. III. Che il centro del sole occupa un punto, il quale è fuoco comune di tutte le ellissi, che li pianeti primarj descrivono; e che li centri delli pianeti primarj occupano punti, li quali sono fuochi delle ellissi, che i loro pianeti secondarj descrivono intorno ad essi.

369. COR. III. Quindi I. Li pianeti primarj sono animati da una forza centripeta tendente al centro del sole, e li pianeti secondarj sono animati da una forza centripeta tendente alli centri delli pianeti primarj (§.348). II. Le

forze centripete, che animano li pianeti nelli diversi punti delle orbite, che descrivono, sono in ragione reciproca delli quadrati delle distanze, che essi hanno dal centro del corpo centrale (§.365). III. La velocità, che il pianeta ha nelli diversi punti della sua orbita varia, come variano le perpendicolari calate dal centro del corpo centrale sopra delle rette, le quali sono tangenti della ellisse, che il pianeta descrive nelli punti, nelli quali si considera posto il pianeta, reciprocamente prese (§.350.).

370. AVV. II. La forza centripeta, che anima, ed indivisibilmente accompagna un pianeta primario nella sua rivoluzione intorno al sole, o un pianeta secondario nella sua rivoluzione intorno al primario, varia la sua efficacia nelli diversi punti della curva, divenendo essa maggiore quando il pianeta è più vicino al corpo centrale; e minore quando il pianeta si allontana dal corpo centrale (§.367), ma è impossibile, che una forza inerente ad un corpo, e che indivisibilmente l'accompagna, possa ricevere alterazione, senza, che si alteri la massa dello stesso corpo, dunque anche è impossibile, che la forza centripeta, che anima, ed indivisibilmente accompagna li pianeti nelle loro rivoluzioni, sia ad essi inerente; in oltre la forza centripeta, che anima li pianeti, o è inerente alli pianeti, che girano intorno al loro corpo centrale, o è inerente al corpo centrale medesimo, ma si è dimostrato, che non è inerente al pianeta, dunque la forza centripeta de-

deve essere accumulata nel corpo centrale, dal quale si diffonde; di più se essa dal corpo centrale si propaga, deve la sua efficacia andarsi continuamente diminuendo come si accresce la superficie della sfera della sua diffusione, ma le superficie delle sfere sono in ragione de'quadrati de' loro raggi, dunque la forza si deve diminuire come crescono li quadrati delle distanze, che li pianeti tengono dal corpo centrale; ma la forza centripeta si diminuisce come crescono li quadrati delle distanze dal centro delle forze (§.365), dunque la forza centripeta, che anima li pianeti nelle loro orbite è accumulata nel corpo centrale, e da esso si diffonde verso li pianeti.

371. COR. IV. Sicchè la forza centripeta, che anima li pianeti, non è una forza, che li fa gravitare verso il corpo centrale, ma una forza attraente del corpo centrale, e perciò I. in un pianeta, che gira intorno ad un corpo centrale animato dall'attrazione di esso, varia l'azione della forza centrale, secondo che variano li quadrati delle distanze reciprocamente presi, II. In più pianeti, li quali girano intorno ad un medesimo corpo centrale, varia l' azione, che questo fa con la sua attrazione sopra di essi, secondochè variano li quadrati delle distanze, che li centri di essi hanno dal centro del corpo centrale, reciprocamente presi.

372. AVV. III. Di più si deve avvertire, che se li pianeti sono animati nelle loro orbite da forze centripete provvenienti dalle attrazio-

zioni di diversi corpi centrali, dovranno le forze centripete essere diverse, secondo che sono diverse le masse de' corpi centrali.

373. COR. V. Quindi l'azione, che riceve un pianeta da un corpo centrale, sta a quella, che riceve un' altro pianta da un altro corpo centrale, in ragione composta dalla diretta delle masse delli corpi centrali, e dalla reciproca de' quadrati delle distanze, che li centri di essi hanno dalli centri delli rispettivi corpi centrali.

Fig. 74. 374. AVV. IV. Contrasegnino T la terra, e RQ l'orbita della luna, che si può senza errore molto sensibile prendere per un cerchio, che abbia per centro il centro T della terra, e contrasegni LM l'archetto, che la luna descrive in un minuto primo; si intenda tirato il raggio TL, e calata da M sopra TL la perpendicolare MP. La luna descrive in un minuto primo l' arco LM animato dalla forza centripeta, e dalla forza proiettile, dunque LP dinoterà lo spazio, che correrebbe la luna in un minuto primo, se la sola forza centripeta operasse in essa; di più, essendo l'arco LM descritto in un minuto primo, si potrà senza sensibile errore prendere per LM, la sua corda, ma la corda di un arco circolare è media proporzionale tra il diametro, ed il seno verso del medesimo arco, dunque $2TL : LM = LM : LP$, e perciò $LP = \frac{LM^2}{2TL}$. In oltre gli Astronomi hanno dimostrato, che il raggio terrestre è di palmi 24163153, e che la di-

distanza mezzana della luna dalla terra è di 60 raggi terrestri, dunque sarà LT di palmi 144978918O; onde l'intera orbita lunare sarà di pal. 910757562 8. 76. Di più la luna percorre l'intera orbita sua in 39343, sicchè l'arco LM descritto in un minuto primo è ad un di presso di palmi 231491.; e per conseguenza $LP = \frac{LM^2}{2TL} = \frac{53588083081}{2899578360} =$ pal. 18. 57 ad un di presso. Or se la forza centripeta, che anima la luna nella sua orbita, si chiami F, e la luna si concepisca discesa sopra della superficie della terra, la forza centripeta, che avrebbe sopra della terra, sarebbe F moltiplicata per lo quadrato di 60, o sia 3600 F; dunque, per sì fatta forza, la luna sopra della terra dovrebbe discendere in un minuto primo per l'altezza di pal. (18. 57) 3600.; ma tanta è l'altezza, per la quale un corpo terrestre discende verso la terra in un minuto primo. Dunque la forza centripeta della luna è la stessa della gravità de' corpi terrestri; ma la forza centripeta della luna è della stessa natura della forza centripeta di ogni altro pianeta; dunque la forza centripeta, che anima tutti li pianeti è della stessa natura della gravità de' corpi terrestri.

375. COR. VI. Sicchè l'attrazione della terra rende gravi tutti li corpi terrestri, e perciò la gravità ne' medesimi, qualora vengono trasportati a diverse distanze dal centro della terra, deve variare come variano li quadrati di sì fatte distanze reciprocamente presi.

376. TEOR. X. *Se due corpi si muovono per due diverse ellissi con forze centripete prodotte dalla attrazione di un medesimo corpo centrale, il quale è nel comune fuoco delle due ellissi, che essi descrivono, saranno le velocità, che essi hanno in due punti delle loro ellissi, in ragione composta dalla diretta delle radici quadrate de' parametri degli assi maggiori delle ellissi, e dalla reciproca delle perpendicolari calate dal centro delle forze alle tangenti tirate alle ellissi nelli punti, nelli quali sono li corpi.*

Fig. 75. DIM. Rappresentino AMB, CGD due ellissi, le quali vengano descritte da due corpi, li quali sono animati dalla forza centripeta proveniente dal medesimo corpo centrale posto nel punto S comune fuoco delle due ellissi, e siano P, *p* li parametri degli assi maggiori di esse.

Si intendano, essere MN, HG due archetti, li quali vengano descritti dalli corpi in tempi infinitamente piccoli, ed eguali, e si intendano sì fatti archetti prolungati verso T, V, saranno MT, HU tangenti delle ellissi nelli punti M, H; indi dal fuoco S si calino sopra delle tangenti MT, HU le perpendicolari ST, SV, e si uniscano le rette SH, SG, SM, SN; dipoi dalli punti N, G si calino sopra SM, SH le perpendicolari NO, GR; e finalmente si intenda, che ME, HF siano gli spazietti, che li corpi percorrerebbero da M, H, per le sole azioni delle forze centripete, e con U, *u* si disegnino le velocità, che li corpi tengono nelli punti M, H delle ellissi, che essi descrivono.

Per

Per ipotesi, gli archetti MN, HG sono descritti dalli due corpi in tempi eguali, ed infinitamente piccoli, e perciò sono nella ragione delle velocità, che essi hanno nelli punti M, H, ma sì fatte velocità sono espresse con le lettere U, u, dunque $U : u = NM : GH$; di più li triangoli rettangoli STM, ONM hanno l' angolo NMO comune, e perciò sono simili, dunque $TS : SM = ON : NM$; similmente gli altri due triangoli rettangoli SVH, RGH sono simili, e perciò $SV : SH = RG:GH$; ma la quarta proporzionale è eguale al prodotto delle due di mezzo diviso per la prima, dunque $NM = \frac{ON.SM}{TS}$, ed $HG = \frac{SH.RG}{SV}$; quindi $NM: HG = \frac{ON.SM}{TS} : \frac{SH.RG}{SV}$; ma $NM : HG = V : u$, dunque $V:u = \frac{ON.SM}{TS} : \frac{SH.RG}{SV}$; Di più lo spazio ME è terzaproporzionale in ordine al parametro dell'asse maggiore di AMB, ed alla perpendicolare NO, ed HF è terza proporzionale in ordine al parametro dell' asse maggiore di CGD, ed alla perpendicolare GR (§.363), ma quando tre grandezze sono continuamente proporzionali, il quadrato della media è eguale al prodotto delle estreme, dunque $NO^2 = P.ME$, $GR^2 = p.\ FH$, e perciò $NO = \sqrt{P.ME}$, $GR = \sqrt{p.FH}$, quindi sostituendo sarà $U: u = \frac{SM.\sqrt{P.ME}}{TS} : \frac{SH\sqrt{p.FH}}{SV}$; ma gli

spa-

ſpazj ME, HF, che li corpi deſcriverebbero, ſe in eſſi ceſſaſſero le forze, che li ritengono nella curva, ed operaſſero le ſole forze centripete, ſono in ragione reciproca de' quadrati delle diſtanze SM, SH, che eſſi tengono, dal centro delle forze (§.371), dunque $ME:HF = SH^2:SM^2$, e per conſeguenza $\sqrt{ME}:\sqrt{HF} = SH:SM$; quindi ſoſtituendo, ſarà $U:u = \frac{SM.SH\sqrt{P}}{TS}:\frac{SH.SM\sqrt{p}}{SV} = \frac{\sqrt{P}}{TS}:\frac{\sqrt{p}}{SV}$, ma li rotti ſono in ragione compoſta dalla diretta de' numeratori, e della reciproca de' denominatori, dunque le velocità, che li corpi tengono nelli punti M, H delle elliſſi, che eſſi deſcrivono, ſono in ragione compoſta dalla ragione diretta delle radici quadrate de' parametri degli aſſi maggiori delle elliſſi AMB, CHD, e dalla reciproca delle perpendicolari ST, SV calate dal centro delle forze ſopra le rette, che ſono tangenti delle medeſime elliſſi nelli punti M, H, nelli quali li corpi ſono.

377. COR. Le velocità, che li corpi hanno nelli punti M, H delle elliſſi, che eſſi deſcrivono, ſono nella ragione compoſta da quella delle aree MSN, HSG terminate dagli archi MN, HG, che eſſi deſcrivono in tempi eguali, e dalla reciproca delle perpendicolari ST, SV calate dal centro delle forze ſopra delle tangenti tirate alle elliſſi dalli punti M, H, in cui li corpi ſi ritrovano (§.349.), ma le medeſime velocità ſono anche in ragione compoſta dalla diretta delle radici quadrate de' parametri degli

aſſi

assi maggiori delle ellissi, AMB, CHD; e dalla reciproca delle perpendicolari ST, SV (§. prec.), dunque $\frac{MSN}{ST} : \frac{GSH}{SV} = \frac{\sqrt{P}}{ST} : \frac{\sqrt{p}}{SV}$, e per conseguenza MSN: GSH $= \sqrt{P} : \sqrt{p}$; sicchè qualora due corpi si muovono per due ellissi, animati da forze centripete prodotte dalla attrazione di un medesimo corpo centrale, il quale è posto nel fuoco comune delle due ellissi, in tempi eguali descrivono archi, li quali terminano aree, le quali sono in ragione delle radici quadrate de' parametri degli assi maggiori delle medesime ellissi; che essi descrivono. Fig. 76.

378. TEOR. XI. *Due corpi, che si muovono per due ellissi con forze centripete prodotte dalla attrazione di un medesimo corpo centrale, il quale sia posto nel fuoco comune delle medesime ellissi, qualora sono nelli vertici degli assi minori, avranno le velocità, che sono fra loro in ragione reciproca delle radici quadrate delle metà degli assi maggiori delle medesime ellissi.*

DIM. Rappresentino AMB, CHD le ellissi, che due corpi descrivono, animati da forze centripete provvenienti dalla attrazione del medesimo corpo centrale situato nel punto S fuoco comune delle due ellissi, e siano li corpi nelli punti M, H, li quali si suppongono, essere li vertici degli assi minori delle medesime ellissi; dalli punti M, H si intendano tirate le tangenti MT, HV, le quali saranno parallele agli assi maggiori, e dal punto S si calino sopra di sì fatte tangenti le perpenpendicolari ST, SV, le quali saranno eguali alla metà delli respettivi assi minori delle ellissi, e finalmente si uniscano le rette SM, SH, le quali saranno eguali alle metà degli assi maggiori di AMB, CHD.

Si chiamino A, *a* le metà degli assi maggiori, B, *b* le metà degli assi minori, P, *p* li parametri degli assi maggiori di AMB, CHD, ed U, *u* le velocità, che li corpi hanno nelli punti M, H.

Il parametro di un asse della ellisse è terza proporzionale in ordine all'asse medesimo, ed al suo conjugato, quindi

$$2A : 2a = 2a : P$$
$$2B : 2b = 2b : p$$

Ma la terza proporzionale è eguale al quadrato della media diviso per la prima, dunque $P = \frac{4a^2}{2A} = \frac{2a^2}{A}$, $p = \frac{4b^2}{2B} = \frac{2b}{B}$; dipiù le velocità, che li corpi hanno nelli punti M, H, sono in ragione composta dalla diretta delle radici quadrate delli parametri P, *p*, e dalla reciproca delle perpendicolari calate dal centro delle forze sopra delle tangenti tirate alla ellissi nelli punti, nelli quali li corpi sono; (§. 376) dunque $U : u = \frac{\sqrt{P}}{ST} : \frac{\sqrt{p}}{SV}$; ma $TS = a$, $SV = b$, $P = \frac{2a^2}{A}$, $p = \frac{2b^2}{B}$, dunque sostituendo sara $U : u = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a^2}{A}} : \frac{1}{b}\sqrt{\frac{2b^2}{B}} = \frac{1}{a}\cdot a\sqrt{\frac{2}{A}} : \frac{1}{b}\cdot b\sqrt{\frac{2}{B}} = \sqrt{\frac{2}{A}} : \sqrt{\frac{2}{B}} = \sqrt{\frac{1}{A}}$

ma

$\sqrt{\frac{1}{B}}$; ma li rotti, che tengono eguali numeratori, sono in ragione reciproca de' loro denominatori, dunque le velocità, che li due corpi tengono nelli due vertici degli assi minori delle ellissi, che essi descrivono, sono in ragione reciproca delle radici quadrate delle metà degli assi maggiori delle medesime ellissi, Sicchè &c.

379. TEOR. XII. *Se due corpi si muovono per due ellissi, animati da due forze centripete provvenienti dalle attrazioni di un medesimo corpo centrale, il quale è posto nel fuoco comune delle medesime ellissi, li tempi, che impiegano a descrivere due archi qualisivogliano, sono in ragione composta dalla diretta delle aree terminate dalli medesimi archi, e dalla reciproca delle radici quadrate delli parametri degli assi maggiori delle ellissi, che essi descrivono.*

DIM. Rappresentino PQ, IK due archi, li quali vengono descritti dalli corpi, che si muovono per le ellissi BMA, DHC; si uniscano SP, SQ, SI, SK; gli spazj PSQ, ISK disegneranno le aree terminate dalli medesimi archi; rappresentino NM, HG due archi, che li corpi descrivono in tempi eguali, e si uniscano SN, SM, SG, SH; designeranno NSM, GSH le aree terminate dagli archi NM, GH, che li corpi descrivono in tempi eguali. Fig. 75.

Li tempi, che li corpi impiegano a descrivere gli archi PQ, IK, sono in ragione composta dalla diretta delle aree PSQ, ISK terminate dalli medesimi archi, e dalla reciproca delle aree NSM, GSK, che sono terminate dagli archi NM, GH descritti in tempi eguali (§.357.), ma le aree NSM, GSH descritte in tempi eguali sono nella ragione delle radici quadrate delli parametri degli assi maggiori delle medesime ellissi (§. 377.), dunque li tempi, che essi impiegano a percorrere li due archi PQ, IK, sono in ragione composta dalla diretta delle aree PSQ, ISK terminate dalli medesimi archi, e dalla reciproca delle radici quadrate delli parametri degli assi maggiori delle medesime ellissi. Sicchè &c.

380. COR. Quindi se gli archi diventino intere ellissi, li tempi periodici saranno in ragione composta dalla diretta delle aree ellittiche, e dalla reciproca delle radici quadrate de' parametri degli assi maggiori di esse.

381. TEOR. XIII. *Se due corpi si muovono per due ellissi, animati da forze centripete provvenienti dalle attrazioni di un medesimo corpo centrale posto nel comune fuoco delle due ellissi, li quadrati delli tempi periodici sono nella ragione de' cubi delle distanze, che essi tengono dal centro delle forze, qualora sono nelli vertici degli assi minori.*

DIM. Si chiamino T, *t* li tempi periodici, A, *a* le metà degli assi maggiori B, *b* le metà degli assi minori.

Li tempi periodici sono in ragione composta della diretta delle aree ellittiche intere, e della reciproca delle radici delli parametri degli assi maggiori (§. prec.), ma le aree elittiche sono in ragione delli rettangoli fatti dalle me-

metà delli loro assi, dunque $T : t = \frac{A \cdot a}{\sqrt{P}} : \frac{B \cdot b}{\sqrt{p}}$; ma $\sqrt{P} = a\sqrt{\frac{2}{A}}$, $\sqrt{p} = b\sqrt{\frac{2}{B}}$, dunque sostituendo $T : t = \frac{A \cdot a}{a\sqrt{\frac{2}{A}}} : \frac{B \cdot b}{b\sqrt{\frac{2}{B}}} = \frac{A}{\sqrt{\frac{2}{A}}} : \frac{B}{\sqrt{\frac{2}{B}}}$, e moltiplicando sì il numeratore, che il denominatore di sì fatti rotti respettivamente per $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ sarà $T : t = \frac{A\sqrt{A}}{\sqrt{2}} : \frac{B\sqrt{B}}{\sqrt{2}} = A\sqrt{A} : B\sqrt{B} = \sqrt{A^3} : \sqrt{B^3}$, ed elevando tutti li termini a quadrato, sarà $T^2 : t^2 = A^3 : B^3$; ma le distanze, che li corpi tengono, qualora sono nelli vertici degli assi minori, sono eguali alla metà degli assi maggiori, dunque li quadrati delli tempi periodici sono in ragione delli cubi delle distanze, che li corpi tengono dal centro delle forze, qualora essi sono nelli vertici degli assi minori.

382. TEOR. XIV. *Se un corpo si muove per una ellisse, animato da una forza centripeta tendente ad un fuoco di essa, e si intenda descritto un cerchio, il quale abbia per suo centro il centro delle forze, e per intervallo la distanza, che vi è dal centro delle forze sino al vertice dell' asse minore, e si supponga, che il corpo si muova per la periferia di sì fatto cerchio con forza centripeta diretta al medesimo centro delle forze, e sempre di efficacia eguale a quella,* *che*

che ha nel vertice dell'asse minore: per sì fatta periferia, avrà una velocità costante eguale a quella, che ha nel vertice dell'asse minore della ellisse, e descriverà sì fatta periferia in un tempo periodico eguale al tempo periodico per la ellisse.

Fig. 77. DIM. Rappresentino ABCD la ellisse, che descrive un corpo animato da forza centripeta diretta al fuoco F, AC l'asse maggiore, e BD l'asse minore, *BEG* il cerchio, il quale ha per centro il centro F delle forze, e per intervallo FB.

Ogni cerchio si può considerare come una ellisse, che ha per metà dell'asse maggiore ogni suo raggio, e per vertice dell'asse minore ogni punto della sua periferia, ma li corpi, che si muovono per due ellissi, animati da forze centripete provvenienti dalla attrazione del medesimo corpo centrale posto nel comune fuoco delle ellissi qualora sono nel li vertici degli assi minori hanno le velocità, le quali sono in ragione reciproca delle radici quadrate delle metà degli assi maggiori delle medesime ellissi (§. *376.*) dunque la velocità, che il corpo ha nel punto *B* della ellisse sta a quella, che avrebbe in qualsivoglia punto della periferia AEB $= \sqrt{FB} : \sqrt{OA}$; ma FB $=$ OA, dunque la velocità, che il corpo ha nel punto B della della ellisse, è eguale a quella, che avrebbe in qualsivoglia punto della periferia BEG.

In oltre se due corpi si muovono per due ellissi con forza centripeta provveniente dalla attrazione del medesimo corpo centrale situato in un comune fuoco di esse, descrivono sì fatte re ellissi in tempi periodici tali, che li quadrati di essi sono fra loro come li cubi delle distanze, che essi hanno dal centro delle forze, qualora sono ne' vertici degli assi minori (§.prec.), dunque il quadrato del tempo periodico del corpo per la ellisse ABCD sta al quadrato del tempo periodico per lo cerchio BDG come $FB^3 : FB^3$, ma $FB^3 = FB^3$, dunque il quadrato del tempo periodico per la ellisse è eguale al quadrato del tempo periodico per lo cerchio; e per conseguenza il tempo periodico per la ellisse è eguale al tempo periodico per lo cerchio. Sicchè ec.

383. TEOR. XV. *Se due corpi girano per due periferie circolari con forze centripete prodotte dalle attrazioni di due corpi centrali di disuguali masse, li quali tengono li loro centri nelli centri delli medesimi cerchi, le masse de' corpi centrali sono in ragione composta dalla diretta de' cubi de' raggi de' medesimi cerchi, e dalla reciproca de' quadrati de' tempi periodici delli corpi per le medesime periferie.* Fig. 71.

DIM. Girino due corpi per le periferie circolari ACB, DEF con forze centripete prodotte dalle attrazioni di due diversi corpi centrali, li quali sono posti nelli centri O, P di sì fatti cerchi, e per conseguenza con forze attraenti proporzionali a sì fatte masse.

Le forze attraenti li corpi, che si muovono per le due periferie ACB, DEF, sono in ragione composta dalla diretta delle masse de' corpi centrali, e dalla reciproca delli quadrati delle distanze, che essi tengono dalli centri delle

for-

forze (§. 373.), quindi chiamando F, f le forze attraenti, ed M, m le masse de' corpi centrali, D, d le distanze, U, u le velocità, sarà $F : f = \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2}$; ma qualora due corpi si muovono per periferie circolari con forze centripete tendenti alli centri di essi, le forze centripete sono in ragione composta dalla diretta de' quadrati delle loro velocità, e dalla reciproca delli raggi de' medesimi cerchi, o sia delle distanze, che essi tengono dalli centri delle forze (§.358.), dunque $F : f = \frac{U^2}{D} : \frac{u^2}{d}$; di più li corpi, che si muovono per periferie circolari con forze centripete tendenti alli loro centri, hanno le velocità in ragione composta dalla diretta de'raggi delli cerchi, che essi descrivono, e dalla reciproca delli tempi periodici (§.354.), dunque $U : u = \frac{D}{T} : \frac{d}{t}$; e perciò sostituendo sarà $F : f = \frac{D^2}{T^2} \cdot \frac{1}{D} : \frac{d^2}{t^2} \cdot \frac{1}{d} = \frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2}$; ma $F : f = \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2}$; dunque $\frac{D}{T^2} : \frac{d}{t^2} = \frac{M}{D^2} : \frac{m}{d^2}$; quindi moltiplicando gli antecedenti per D^2, ed i conseguenti per d^2, sarà $\frac{D^3}{T^2} : \frac{d^3}{t^2} = M : m$; ma li rotti sono in ragione composta dalla diretta delli loro numeratori, e dalla reciproca de' denominatori, dunque le masse delli cor-

corpi centrali sono in ragione composta dalla diretta delli cubi delli raggi de'cerchi, e dalla reciproca de' quadrati delli tempi periodici.

384. TEOR. XVI. *Se due corpi si muovono per due ellissi con forze centripete provvenienti dalle attrazioni di due corpi centrali posti in due fuochi di esse, le masse di sì fatti corpi centrali sono fra loro in ragione composta dalla diretta de' cubi delle metà degli assi maggiori delle ellissi, e dalla reciproca de' quadrati de tempi periodici.* Fig. 77.

DIM. Rappresentino ABCD, LMNQ due ellissi, le quali vengano descritte da due corpi animati da forze centripete prodotte dalle attrazioni di due corpi centrali di disuguali masse, situati nelli fuochi F, S delle medesime ellissi, e di esse siano AC, LN gli assi maggiori, BD, MQ gli assi minori, si uniscano le rette FB, SM, e fatti centri li punti F, S, si descrivano li cerchi BEG, MRT.

Se li corpi si concepiscono girare per le periferie BEG MRT, le masse de' corpi centrali sono in ragione composta dalla diretta de' cubi de' raggi de' medesimi cerchi, e dalla reciproca de' quadrati delli tempi periodici (§.prec.), ma li tempi periodici de' corpi, che si muovono per le periferie BEG, MRT con forze cenrripete costanti eguali a quelle, che essi hanno nelli punti B, M, sono eguali alli tempi periodici per le ellissi ABCD, LMNQ (§.380), e li raggi FB, SM sono eguali alle metà degli assi maggiori, dunque le masse de' corpi centrali situati ne' fuochi F, S sono

in

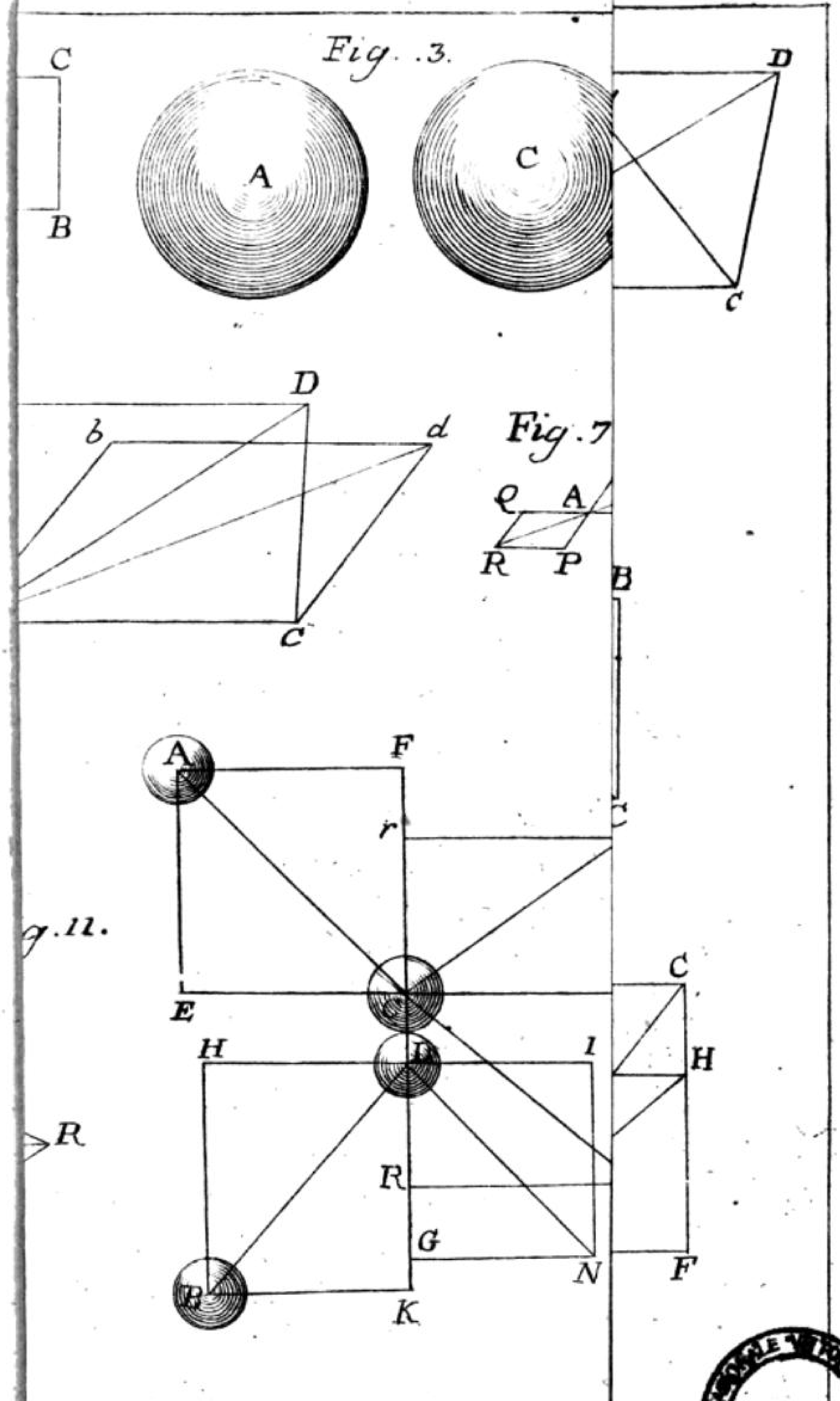
in ragione compoſta dalla diretta de' cubi delle metà degli aſsi maggiori delle elliſsi, per le quali li corpi ſi muovono, e dalla reciproca de' quadrati de' tempi periodici per le medeſime elliſsi.

285. COR. Le maſſe delli corpi centrali poſti ne' fuochi di due elliſſi, per le quali ſi muovono due corpi animati da forze centripete prodotte dalle attrazioni de' medeſimi corpi centrali, ſono fra loro in ragione compoſta dalla diretta de' cubi delle metà degli aſſi maggiori delle elliſſi, e della reciproca de' quadrati de' tempi periodici (§. prec.), ma la ragione compoſta da una diretta, e da una reciproca ſi ha dividendo li termini della diretta per li termini di quella, di cui ſi dovrebbe prendere la reciproca, dunque le maſſe de' corpi centrali ſono in ragione de' cubi delle metà degli aſsi maggiori delle elliſsi diviſi per li quadrati de' tempi periodici, quindi ſe li cubi delle metà degli aſsi maggiori delle elliſsi ſono in ragione ~~reciproca~~ de' quadrati de' tempi periodici, ſaranno eguali li quozienti, che ſi hanno, dividendo li cubi delle metà degli aſsi maggiori per li quadrati de' tempi periodici, e perciò le maſſe de' corpi centrali ſaranno ancora eguali.

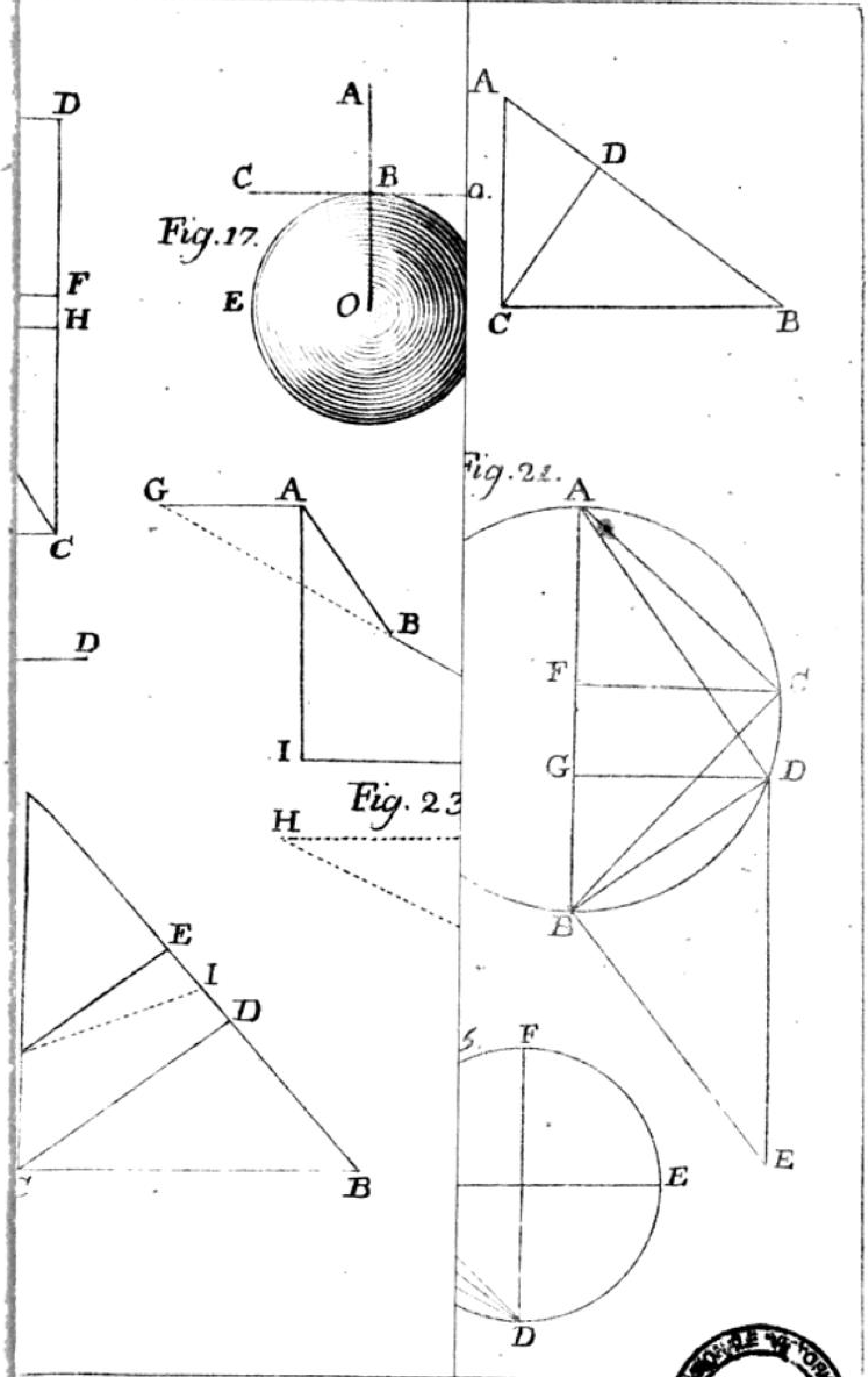
Quindi ſe due corpi ſi muovono per due elliſsi con forze centripete prodotte dalle attrazioni di due corpi centrali ſituati nelli fuochi di eſſe, e ſono li cubi delle metà degli aſsi maggiori in ragione ~~reciproca~~ de' quadrati de' tempi periodici, le maſſe de' corpi centrali ſono eguali.

F I N E.

Tav. I



Tav. II.



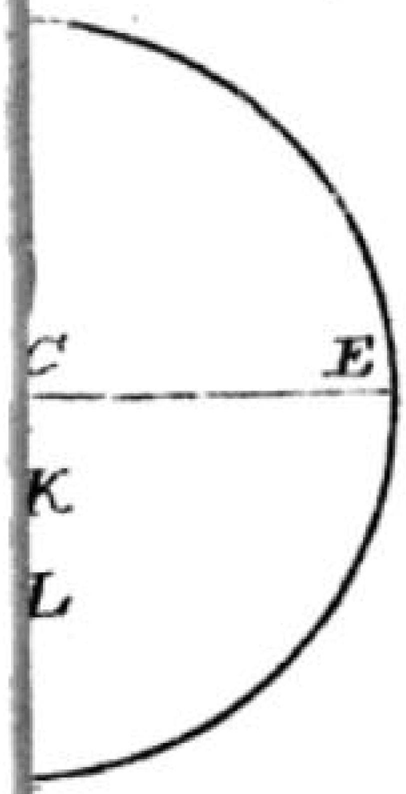


Fig. 28.

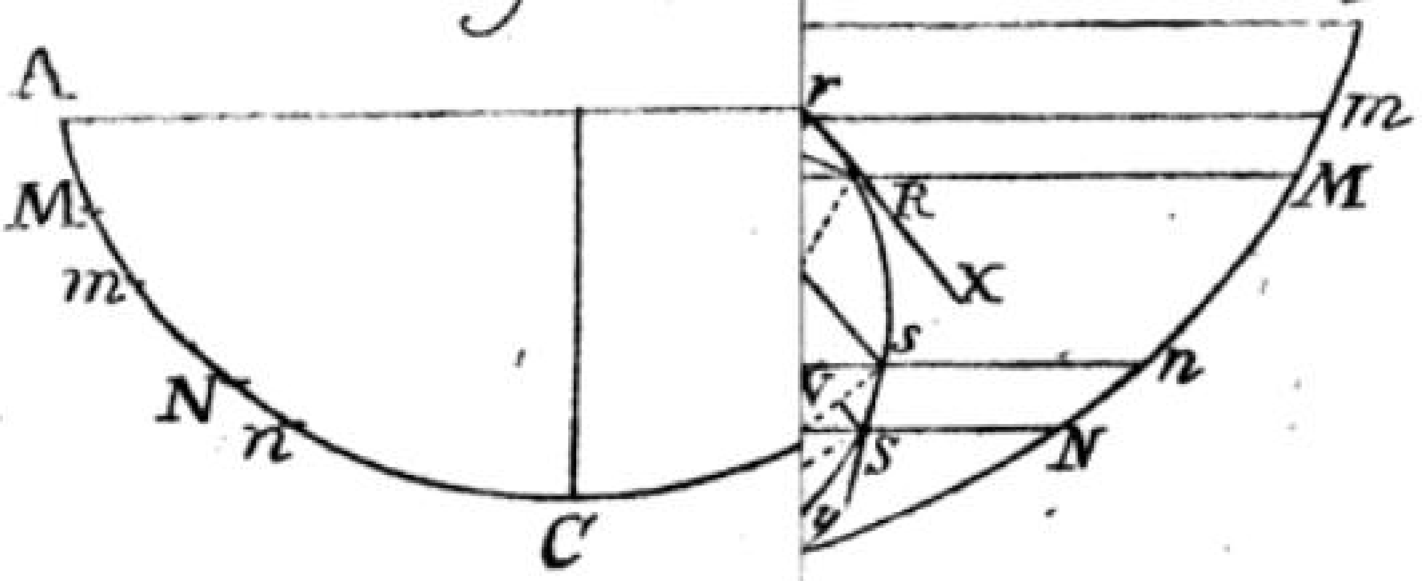


Fig. 34.

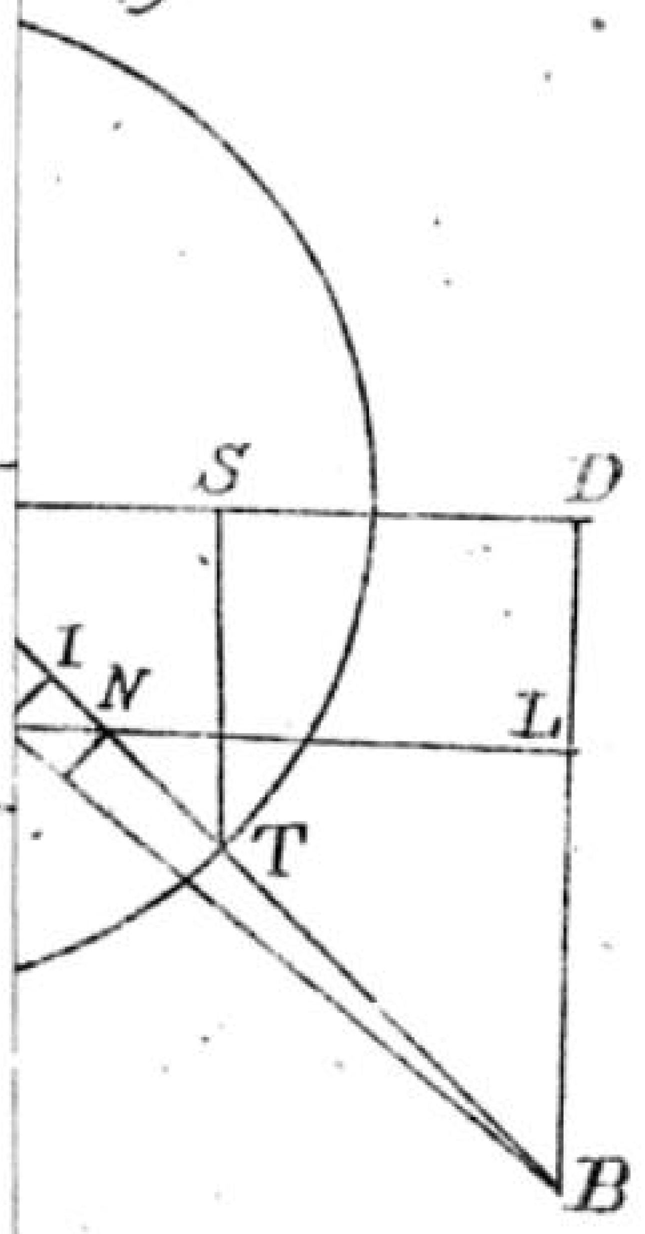


Fig. 32

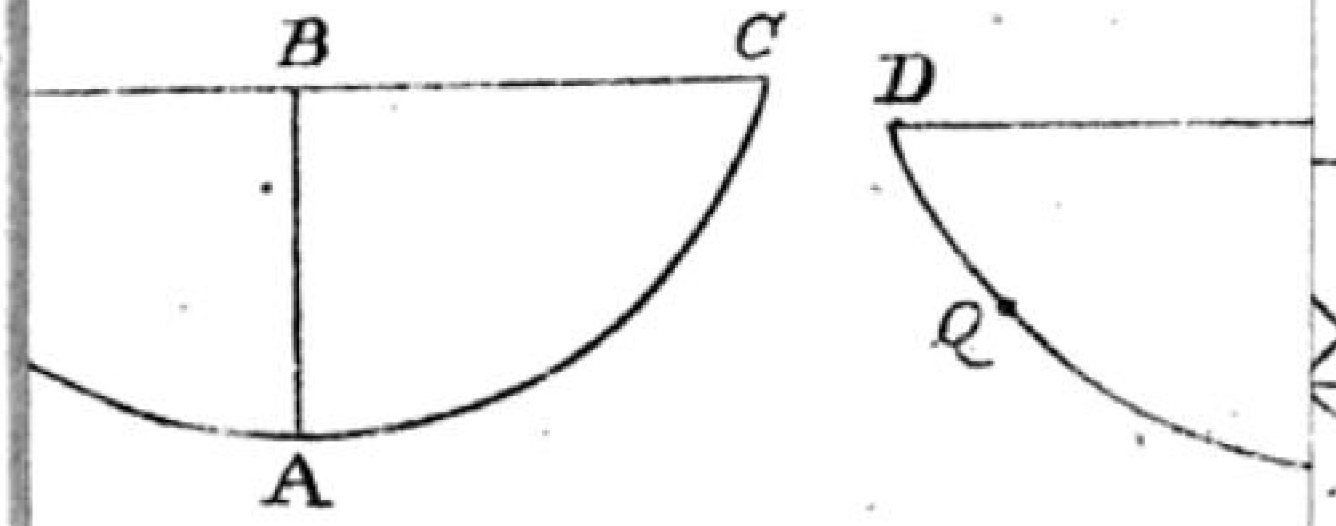
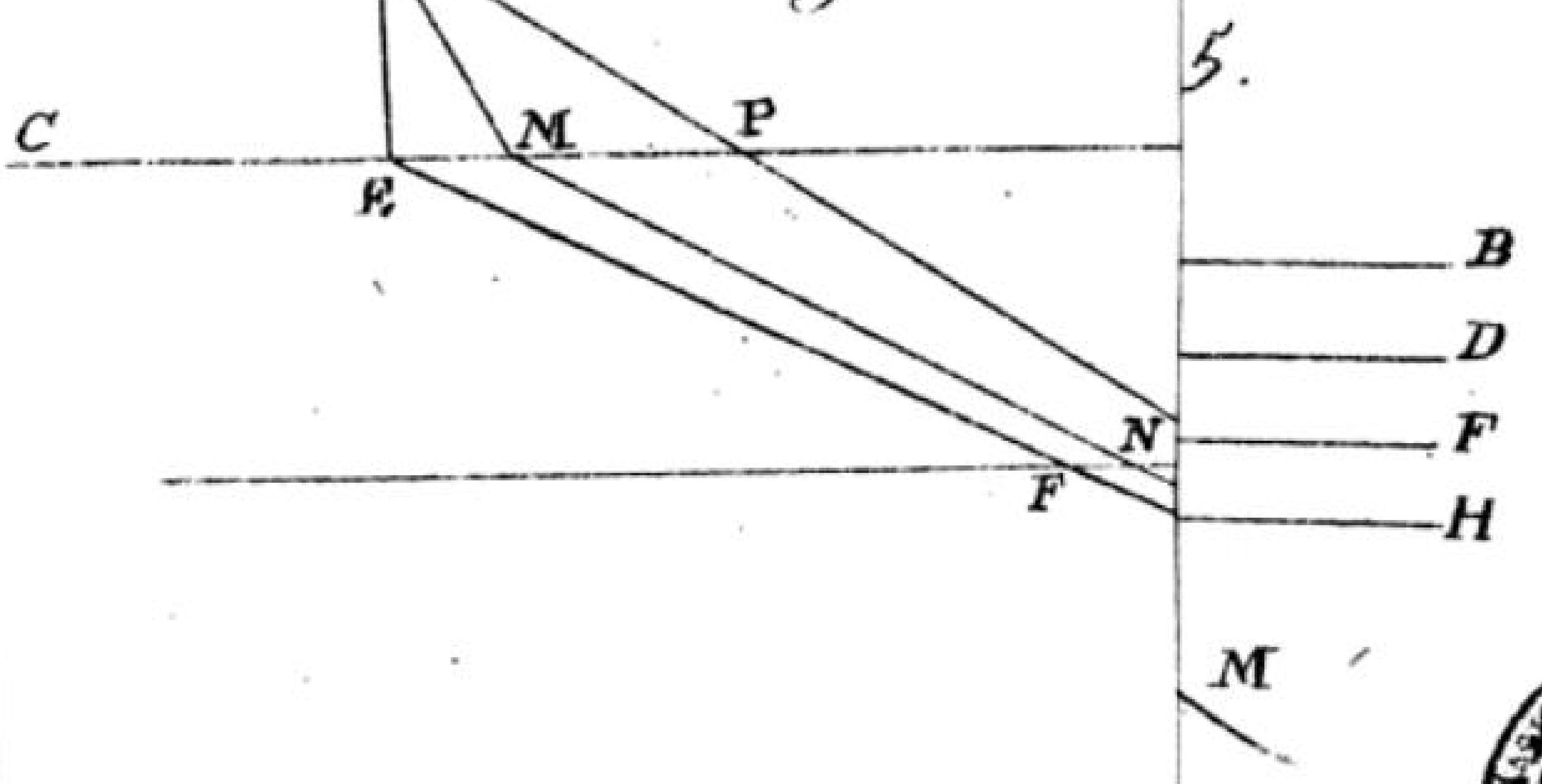
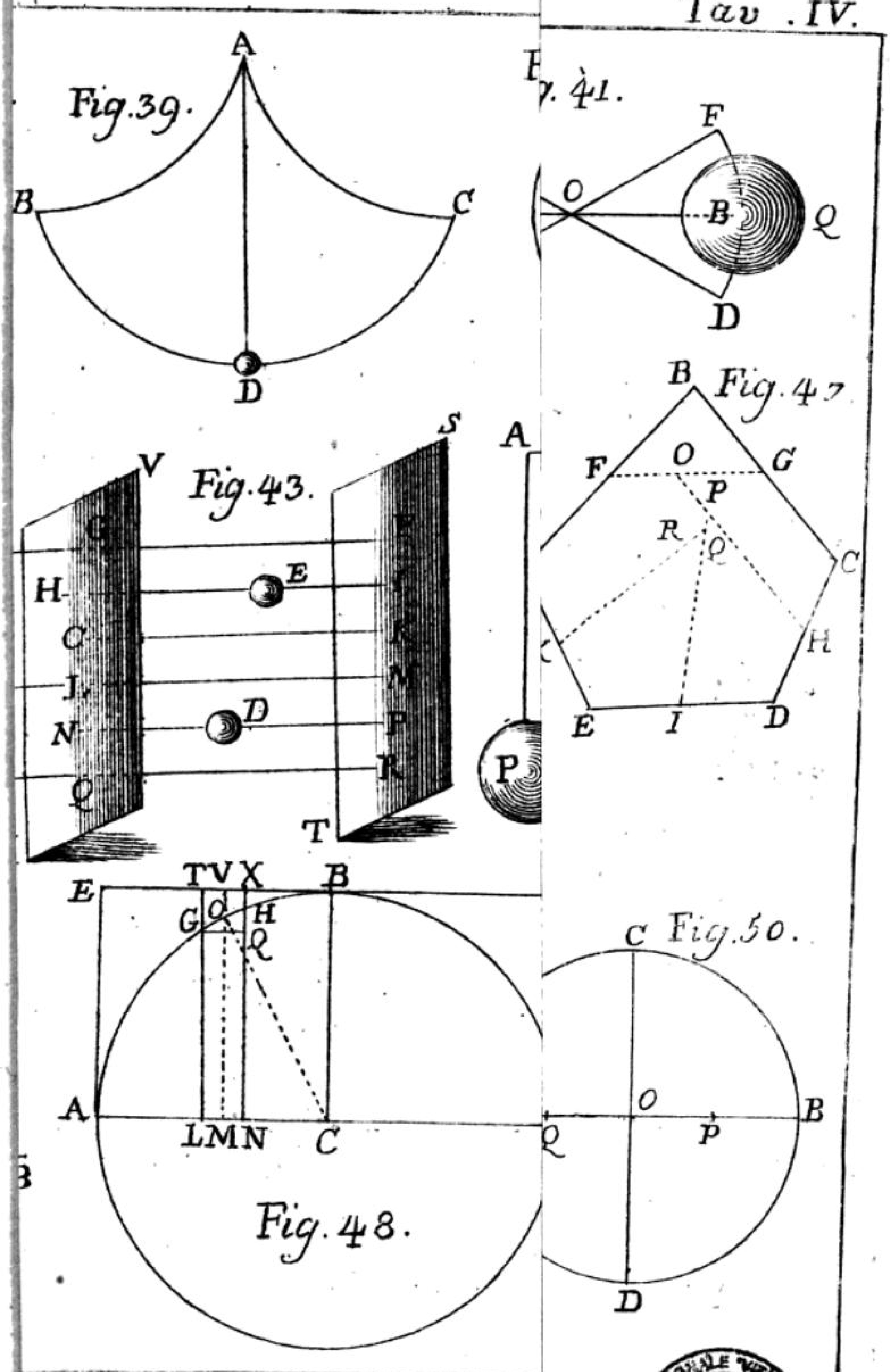
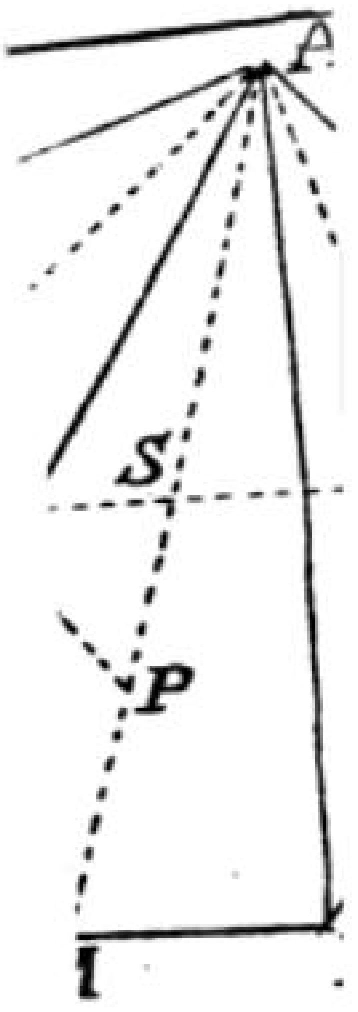


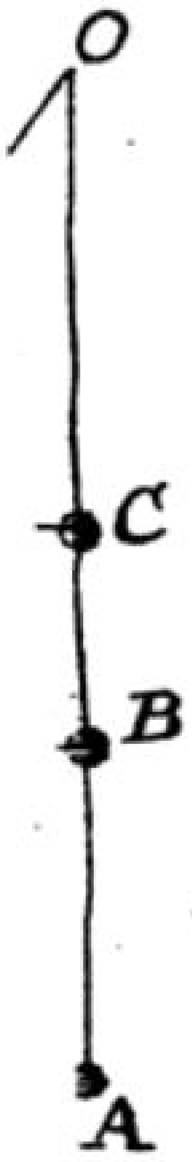
Fig. 33.



Tav. IV.

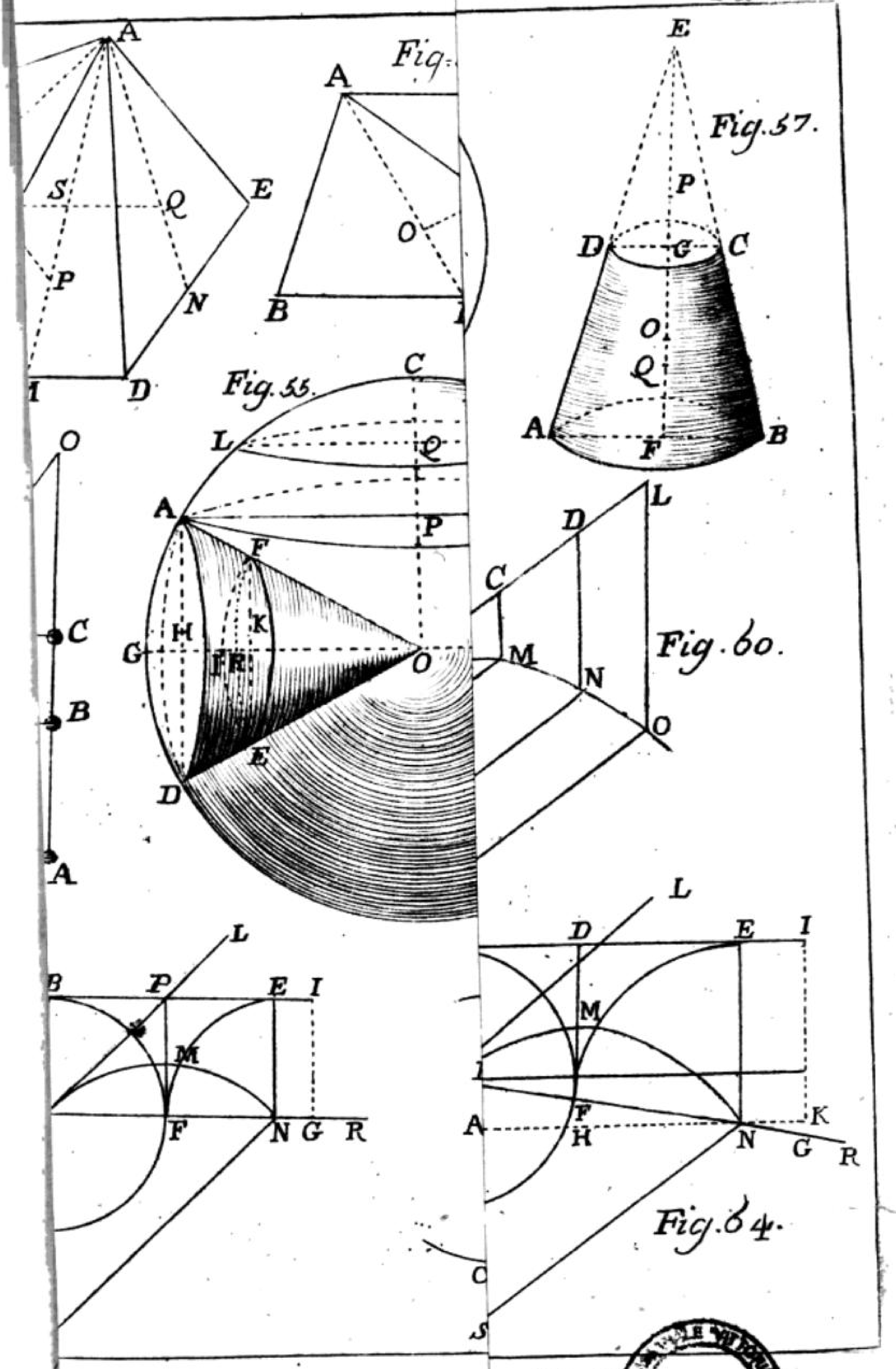



S
P


O
C
B
A


B

Tav. V.



Tav. V