~~65 - 2 . 19814~~

~~73 - 8.~~

RISTRETTO
DI
GEOMETRIA PIANA

COLL' AGGIUNTA
DI ALCUNE PROPOSIZIONI PRATICHE

AD USO

DEL SEMINARIO VERULANO

DEDICATO

All' Illmo, e Rmo Signore Monsignore

GIO: BATTISTA JACOBINI
VESCOVO DI VERULI

DALL' ABATE FRANCESCO ROBERTI.

IN ROMA MDCCLXXX.

PER IL CASALETTI.
Col Permesso de' Superiori.

Illmo, e Rmo Signore.

SEmbrar potria forse ardimentoso il mio pensiero di fregiare la fronte di questa Operetta col rispettabilissimo Nome di V. S. Illustrissima, e Reverendissima: Nome, che nella Letteraria Republica risuona con tanto applauso, e riscuote la venerazione de' più saggi, i quali nella ſua degniſſima Perſona non ceſſano di ammirare un raro poſſeſſo di ogni facoltà Sacra e Profana, comparendo ne' ragionamenti anche familiari in tutte così verſata, che mal potrebbeſi definire in quale di eſſe più ſi diſtingua, ſegnalandoſi del pari in tutte. Di queſta mia ſinceriſſima eſpreſſione poſſon render teſtimonianza irrefragabile non ſolo la ſua, e le vicine Dioceſi, ma Roma medeſima, la quale per altro, forſe perchè troppo avvezza a coſe grandi, non è uſa gran fatto a profonder lodi, ed encomii, pure non potè non ammirare, ed eſtollere la prontezza dell' ingegno, e la chiarezza, che vi è maggiormente illuſtrarono quella profonda dottrina, colla quale ſtabilì sù due piedi, come ſuol dirſi, le ſue aſſerzioni, e dileguò le non volgari, nè prevenute oppoſizioni, allora quando eletto a Paſtore di coteſta riſpettabile Chieſa Verulana ſi diè l' onore di preſentarſi alla glorioſa memoria di Clemente XIII; che

com-

compiacendosi altamente del suo gran valore in quell' arduo cimento mostrato, volle e goderne a lungo, e coronarlo de' meritati encomii. A Personaggio adunque di ogni letteratura così a dovizia fornito potrei parer io troppo animoso, presentandomi co' primi Elementi della Piana Geometria, se nota non fosse a tutti, ed a me sopra ogni altro l' indole sua sì amabile, e sì benigna, colla quale lungi dal mostrar poca stima de' meno dotti, e scienziati, a tutti degnevolmente si volge, e col gradirne ogni saggio, comeche tenue, e di non gran valore, tutti incoraggisce a promoversi, ed inoltrarsi nella letteraria carriera: non abbisognando, perchè Grande in se stesso, di splendere col confronto delle ombre altrui: Cotesta sua Indole degnevolissima mi spinge a presentarle questo picciolo tributo del mio ossequio, e spero voglia degnarsi di riceverlo con benevol' accoglienza perchè de' Grandi anch' è proprio non isdegnar le picciole offerte degl'inferiori, compiacendosi dell' animo, col quale da essi vengono presentate. Gradirà dunque V. S. Illustrissima, e Reverendissima questo tenue pegno della mia obbligatissima servitù, mentre io nell'atto di farle profondo inchino, e baciarle ossequiosamente la mano mi do l'onore di ripetermi,

Di V. S. Illm̃a, e Rm̃a.

Umilifs. Devotifs. Obbligatifs. Servo Vero
FRANCESCO ROBERTI.

L'AU-

L' AUTORE
A CHI LEGGE.

NON basta a chi viaggia in paese a lui nuovo aver buone forze, se non abbia altresì buona guida, che gli additi le vie diritte, e sicure; e così pure avviene de' Giovani studiosi, a' quali non basta aver buon ingegno per avvanzarsi nelle scienze, e profittarne senza risico o di traviare, o di rimanersi per noia dopo i primi passi: Han bisogno inoltre di chi nell' arduo cammino saviamente gli scorti, ed agevoli anche il viaggio. Or questo appunto è nostro intendimento di fare co' Giovani desiosi d' innoltrarsi con vantaggio nello studio utilissimo delle scienze naturali: di queste s' invaghiscono i più tra loro sentendone celebrat' i pregi, e la dignità; ma poi incontrandosi in tante pagine segnate di linee, di figure Geometriche quanti i Moderni Trattati ne portano, più che dalle larve i fanciulli, smarriti, e sgomentati s' arrestano; e se pur trar vogliono tuttavia innanzi, delusi rimangono di lor fatica, non potendo penetrar gli arcani di quelle facoltà, che sù la Geometria ch' essi ignorano stabiliscono i loro principii, ed i progressi, e però escono dalle scuole o leggermente aspersi di quelle scienze, o della Storia di esse appena informati; e non è già, che non sappiano per quanto han letto, ovvero udito, che gli Elementi almeno Geometrici debbano aversi alla mano da chi ne-

gli studii con profitto brami procedere ; ma pur trascurano di applicarvisi , uno studio stimandolo troppo spinoso per chi ami di camminar vie amene , o troppo lungo per chi ami di giugnere presto al suo termine . Per ovviare adunque ad un tal pregiudizio della Gioventù studiosa quanto per noi è possibile , presentiamo perora a que' che ce ne han fatta istanza , o per meglio dire , ci anno obbligati co' loro comandi questo picciol Ristretto di Geometria , nel quale potranno i Giovani con poca fatica , e molto vantaggio apprendere quelle proposizioni al meno , che son di uso più frequente nelle Moderne scuole .

Nel dimostrar poi dette proposizioni ci siam serviti della maniera più facile tra le molte , che ci venivano d' innanzi , sì per unirne molte insieme senza pregiudizio della chiarezza , sì perchè possa un Giovane di qualche talento , anche senz' altrui magistero apprendere da se stesso questi principii , come abbiamo con piacere nostro saputo , che abbia più d' uno tra essi provato di fare con tal riuscimento , che ha potuto poi con felicità trarre innanzi nello studio delle sublimi Matematiche .

A maggior commodo altresì de' Principianti in questa facoltà non ci siam contentanti di accennar nel margine le antecedenti proposizioni , che necessarie erano a dimostrar le seguenti , ma siccome abbisognavano , abbiam riputato di brevemente notarle in ogni occorrenza : il che ad essi risparmia la noja di andarle rivangando da per se stessi : ed al contrario per amore di brevità prescrittaci alcuna di esse proposizioni abbiam

tra-

tralasciato di dimostrare, perchè troppo era chiara ne' suoi medesimi termini semplicemente appresi, indicandone però il luogo ove il famoso Euclide la dimostra, ed alcuna, che operosa troppo era, e non così facile ad apprendersene la dimostrazion geometrica l' abbiamo, su l' esempio di chiarissimi Autori; anche poi meccanicamente risoluta, il che non toglie il pregio dell' esser vera come avverte il Ch. Ximenes. Unico nostro disegno essendo il facilitar colla brevità, e chiarezza a' Principianti lo studio di questi elementi; il che se conseguiremo, ci direm contenti.

NOME, ORIGINE, E PROGRESSO
DELLA
GEOMETRIA.

DAlle voci Greche γῆ *Terra*, e Μετρῶ misuro vien composto il vocabolo *Geometria*, quasi una scienza, che 'l modo insegni di misurare la Terra. Che questo per verità sia stato il primo uso di essa, anzi la primiera sua istituzione, lo riferisce Strabone (1) dopo Erodoto (2). Confondendo, dicon' essi, coll' uscir dal suo letto le acque del Nilo i poderi, furono astretti gli Egizii, per restituir a ciascuno il suo, ad usar delle figure Geometrice, e delle regole su di esse stabilite, e vogliono, che 'l primo de' Mercurii loro Re ingegnosamente questa scienza perfezionasse (3).

Giuseppe Ebreo però a que' di sua Nazione vuol si dia di tal ritrovato la gloria (4); mentre, dic' egli, l' osservazion, che degli Astri, e di ciò, che ne' Cieli accadeva, in due Colonne vollero gli Ebrei inciso di bronzo l' una, perchè dall' acque dell' universal diluvio, che per tradizione sapevano dover accadere, disfatta non fosse, l' altra di mattoni, perchè restando sal-

(1) Lib. 26 (2) Lib. 16.
(3) Polidor. Virgil. de Invent. rer. lib. 1. c. 8.
(4) Lib. 1. cap. 3.

ſalva dal fuoco, a poſteri tramandar ſi poteſſe.

Che che ne ſia di ció, che per altro ſtimaſi dal Maffei (1) intruſo ne' libri di Gioſeffo, e da altri, che tengono per genuino il paſſo, ſi vuol favoloſo il racconto, potendoſi agli Ebrei accordare il primo vanto della ſcienza Aſtronomica, ed agli Egizii della Geometrica. Da ſuoi pretende l' Ebreo Scrittore, che paſſaſſe a Caldei, ed agli Aſſirii.

Poſe poi sì felicemente il piede nella Grecia la Geometria, che non fuvi Filoſofo di quella ſtagione, che l' ignoraſſe, anzi non l' accreſceſſe; così a Talete l' aggiunta attribuiſcono della 5, 15, e 26 propoſizione, che nel libro primo, giuſta l' ordine tenuto da Euclide, ſi legge; e la 2,3, 4, 5 del libro quarto. A Pitagora il ritrovato della 32, e 47, per le quali offerì ſacrifizio di Buoi alle Muſe, e la 44, e 48.

Quanto al divino Platone non pur' egli a maraviglia ne fù fornito, ma per lo ſtudio della Filoſofia ſtimolla sì neceſſaria, che sù le porte della ſua Scuola ſcolpito volle in famoſo divieto: *Neſſuno quì entri, che di Geometria non s' intende*.

Uditor di Platone fù il famoſo Archita Tarentino, da cui ſi videro meſſe in pratica le Matematiche, ſapendoſi di lui tra le altre coſe aver lavorata una Colomba di legno, che ſoſteneaſi

(1) Lib. I. Antiq. cap. III. Nell'Oſſervazioni Letterarie Tom. VI. p. 426. e nell'Arte Gritica Lapidaria l. 1. col. 5. e benchè impugnato dal Nicolai nelle Diſſert. e Lez. della Sacra Scrit. Lez. 37. p. 245. pure l' Iſteſſo Nicolai cita lo Strauchio, il Boeclero, il Tacquelot, e'l Simon, che lo anno per falſo p. 241.

neasi girando per aria, al riferir di Aulo Gellio.

Altro famoso discepolo di Platone fù, com' è notissimo, Aristotele; e ben a torto vien da taluni biasimato, quasi ignorante di tale Scienza, mentre dall' aver compilato un' intero volume di Matematiche dimostrazioni tratte dalle sue Opere il dotto Blancasio l'ha dato chiaro a vedere, quanto istruito egli ne fosse, e quant' uso ne facesse.

A tal perfezione poi avanzò questa scienza Archimede Siracusano, che a tutta ragione il Padre può dirsene, e pe' nuovi sublimi ritrovati l' inventore.

Se non che ad Euclide veramente debbe la Gioventù l' unione, e metodo delle Geometrice dimostrazioni, che da altri raccogliendo, ed accrescendo, più facile rese il modo di apprenderle.

Illustrarono anch' essi questa Facoltà Appollonio, Tolomeo, Diodoro, Proclo, Pappo, ed altri molti tra gli antichi, come tra moderni il Cartesio, Newtone, il Wolfio, il Pellettario, il Clavio, e più altri, che per non diffonderci più di quel, che porta il metodo di un Ristretto, volentieri tralasciamo: vie maggiormente che il tesserne quì lungo Catalogo, sarebbe lavoro più di Opera, che di pregio.

RISTRETTO
DI
GEOMETRIA PIANA

DEFINIZIONI.

1. IL Punto è un ſegno, che debbe concepirſi Indiviſibile, dovendoſi conſiderare, che non abbia parti.

2. La Linea è un ſegno, in cui la ſola lunghezza ſi conſidera da Matematici: ſi concepiſce, come generata da un punto, che ſcorre.

Quindi il Punto chiamaſi termine della Linea, concependoſi cominciar dal punto la linea, e *nel punto* terminare.

3. Linea Retta diceſi quella, nella quale tutte le parti intermedie occupano ugual ſito; e ciò, oſſerveraſſi ſe da una eſtremità ſi rimiri l' altra. Ella è la più corta di tutte le linee, che trà due punti tirar ſi poſſono.

4. La ſuperficie è una grandezza, in cui due miſure ſi conſiderano, ciò è, lunghezza, e larghezza: Si concepiſce generata dal congiungimento delle linee, il qual congiungimento formerà la larghezza; la lunghezza ſi avrà dalla linea ſteſſa.

Quella ſuperficie diceſi Piana, cui può per ogni parte adattarſi la linea retta, e combaciare.

5. Il corpo, (che nominaſi col vocabolo di Solido) è una grandezza, che hà tre miſure; ciò

è lunghezza, larghezza, e profondità; e vien generato dalle superficie adattate l' una sopra dell' altra, che formano la profondità.

6. L'Angolo è l'Inclinazione di una linea verso l'altra, che si tocchino in un punto, come in C, ove si toccano le due linee BC, DC.

Tav. I. Fig. 1. Se le due linee saranno rette, l' angolo sarà Rettilineo, come BCD; se tutte e due saranno curve, come ABC, dirassi Angolo Curvilineo; se una sarà retta, e l'altra curva, l' angolo denominerassi Mistilineo, come EFG.

Tav. I. Fig. 1. 2. 3. Con tre lettere suol designarsi l' angolo; mà quella, che nominasi nel secondo luogo, o sia in mezzo, sarà quella, che dinota l'angolo, di cui procede la dimostrazione, come nell' angolo rettilineo BCD, sarebbe la C, nel curvilineo la B, nel mistilineo la F.

7. Il cerchio è una figura piana formata da una linea curva, che chiude il dato spazio.

Tre cose in qualsivoglia cerchio si considerano; la linea curva TCALMDB, che chiamasi Circonferenza, o Periferia; il punto E situato in mezzo, che dicesi Centro, e 'l Diametro, ch' è una linea retta, che da una parte della periferia partendosi, passa pe'l centro, e tocca l'altra parte dirittamente opposta della periferia stessa, come TEM; ò AEB.

Tav. I. Fig. 4.

Se una linea si partirà da una parte della circonferenza, e terminerà nel centro, o partendosi dal centro, terminerà ad una qualsivoglia parte della circonferenza, denominerassi Semidiametro, o Raggio del Cerchio, come ET, EB, ED &c.

Tutte le linee, che possono tirarsi dalla circonconferenza al centro, sono tra di loro uguali, come sono TE, CE, AE, DE &c.

La circonferenza di qualsisia cerchio si vuol divisa da Matematici in 360 parti uguali, che chiamansi gradi; che perciò la metà del cerchio conterrà 180 gradi, e la quarta parte, che chiamasi Quadrante, n' avrà 90.

L' Arco è la misura degli angoli, formati nel centro di detto arco. Per ben' intendere ciò, è da sapersi, che tre generi di angoli si danno. 1. Il Retto, che hà determinatamente sempre 90 gradi. 2. L' Ottuso, che passa li 90. 3. L'Acuto, che ha meno di 90.

Se dunque il centro E si prenda, come vertice, e le due linee TE, AE, come lati, l' arco TA del cerchio fra le dette due linee sarà la misura dell' angolo AET, il quale arco, essendo la quarta parte del cerchio, e perciò quadrante, avrà 90 gradi; mà l' angolo di 90 gradi sarà Angolo Retto; dunque ogni angolo, che avrà per misura il Quadrante del cerchio, sarà Retto.

Per conseguenza quegli angoli, che avran per misura un'arco, che sarà maggiore della quarta parte della circonferenza del suo cerchio, avendo perciò più di 90 gradi, sarà Ottuso, come l'angolo TEL ch' ha per misura l'arco TL maggiore del quadrante TA.

Quello poi, che avrà per misura un'arco minore del Quadrante, come avrà meno di 90 gradi, sarà Acuto, qual' è l'angolo AEL, che ha per misura l'arco AL minore del quadrante AM.

Generalmente di tanti gradi sarà qualunque angolo, quanti ne conterrà l' arco, che gli è op-

 posto,

posto, essendo descritto dal vertice dell' angolo, dove abbia il centro.

Tav. I. Fig. 18. Inoltre se si descriva un' arco LC terminato da due Semidiametri DC, DL, e dall' estremità C si tiri la retta CR perpendicolare all'altro Semidiametro DL, questa perpendicolare determinerà anche la misura dell'angolo CDL compresa da' due semidiametri. Detta perpendicolare nella Trigonometria dicesi *Seno* dell'angolo opposto fatto nel centro; il detto angolo, e seno sarà sempre di tanti gradi, quanti si comprendono nell'arco intercetto da' due semidiametri. Se dunque ci saranno due seni uguali, come CR, SD dentro l' istesso, o uguale cerchio, gli angoli opposti B, ed A saranno uguali.

8. Una linea Retta allora dirassi Perpendicolare all'altra retta, quando gli angoli formati da una parte, e dall'altra, saranno tra di loro uguali, e retti, come EM sarà perpendicolare ad AD, poichè gli angoli fatti in M da essa sono uguali. Tav. I. Fig. 5.

9. Due linee saranno tra di loro Parallele, o vogliamo dire equidistanti, qualora sempre in tutta la di loro lunghezza conserveranno esattamente l'istessa distanza in tutti i punti opposti, come sono le linee AB, CD. Tav. I. Fig. 6.

Si conoscerà conservarsi in ogni punto la distanza stessa, se una commune misura perpendicolare si addatterà esattamente in qualunque parte, come è la misura EF, EF, EF.

Questa misura dicesi il commun Perpendicolo: dicesi *Perpendicolo*, perchè dee cader perpendicolarmente dall' una sopra l' altra retta: *Commune*, perchè debb' ella stessa esser misura della distan-

distanza di tutte le parti delle linee, che si voglion parallele .

10. Il Triangolo è una figura formata da tre linee, che toccandosi fra di loro nell'estremità in tre punti, formano anche tre angoli, come BAC, CFT, MLN. Tav. I. Fig. 7. 8. 9.

In due maniere si considerano i triangoli, o secondo le linee, da cui son formati, o secondo gli angoli, che ne risultano. Se si considerano secondo le linee; se avrà un triangolo tutte e tre le linee uguali, si dirà Equilatero, come BAC: se due sole saranno uguali, il triangolo denominerassi Isoscele, o Equicrure, come CFT; se tutte e tre le linee saranno disuguali, dirassi Scaleno, come MLN.

Avrà anche diverse denominazioni pe' diversi angoli, che potrà formare; così se avrà un' angolo retto, e due acuti, il triangolo sarà Rettangolo; se avrà un'angolo ottuso, e due acuti, sarà triangolo Ottusangolo; se poi tutti e tre gli angoli saranno acuti, si dirà triangolo Acutangolo.

Questi con voci Greche si nominano così; Il Rettangolo dicesi Ortogonio; L'Ottusangolo Ambligonio; L'Acutangolo Ossigonio.

11. Quei lati di due triangoli, che si paragonano tra di loro, chiamansi Omologi.

12. Figura quadrilatera è quella, che ha quattro lati, i quali unendosi tra di loro nelle quattro estremità, formano quattro angoli, come AB CD; LM OE &c. Tav. I. Fig. 10. 11. &c.

Se avrà quattro lati uguali, e quattro angoli retti, e per conseguenza uguali, si chiamerà assolutamente Quadrato, come A B C D. Ciascun Tav. I. Fig. 10.

 lato

lato del quadrato è parallelo al ſuo oppoſto.

Tav. I. Fig. 11. Se avrà i lati oppoſti reſpettivamente paralleli, ſi nominerà Parallelogrammo, o gli angoli ſiano retti, come MLOE, o non ſiano retti come nella fig. 27 BEFC. Molte volte quando gli angoli del quadrilatero ſono retti, ſi nomina ſemplicemente Rettangolo, o Quadro lungo.

Tav. I. Fig. 12. Se avrà tutti i lati uguali, ma non già tutti gli angoli uguali, come AFCL, una tal Figura ſi chiamerà Rombo.

Tav. I. Fig. 13. Se avrà i ſoli lati oppoſti, ed i ſoli angoli oppoſti uguali, come ABDC, ella verrà chiamata Romboide.

Qualunque altra figura Quadrilatera diverſa

Tav. I. Fig. 14. dalle quattro dette diraſſi Trapezio, come ABNR.

Una verità, che avrà biſogno di eſſer dimoſtrata, diraſſi Propoſizione... Se queſta propone a fare qualche coſa, come formare un triangolo equilatero, diceſi Problema. Se propone a dimoſtrar ſoltanto la verità eſpoſta, come = In ogni triangolo i tre angoli ſono uguali a due retti = diceſi Teorema.

Quella verità, che ſi premette, perchè poſſa dimoſtrarſene un' altra, chiamaſi Lemma.

Quella verità, che ſi deduce da un' altra, appellaſi Corollario.

Di tre parti ſogliono coſtar le Propoſizioni, cioè, di Eſpoſizione, Coſtruzione, e Dimoſtrazione. Eſpoſizione è l' eſporre quella verità, di cui ſi tratta, come = Formare un' angolo uguale ad un' altro già dato, o Dimoſtrar che i triangoli equilateri ſieno equiangoli. Coſtruzione altro non è, che il formar la figura. Dimoſtrazione è il pro-

var

var con evidenza la cosa esposta esser tale, quale si è asserita.

E' da avvertirsi, che talora ne' Teoremi la costruzione non è necessaria, supponendosi di già formata.

ASSIOMI.

Assioma è una verità tanto chiara, che non ha bisogno d'esser dimostrata, bastando ad esser tenuta per vera il solo concepirne i termini, coi quali vien' espressa: Di tal natura sono le verità seguenti.

1. Il tutto è maggior della sua parte. Le parti insieme unite sono uguali al tutto.

2. Se alle quantità, che sono uguali s'aggiungono altre quantità anche uguali, le somme saranno uguali; e se dalle quantità uguali si sottraggono uguali quantità, gli avvanzi saranno anch' essi uguali.

3. Se alle quantità disuguali si aggiungono quantità uguali; o da esse uguali se ne tolgano, le somme, ed i residui saranno disuguali.

4. Le quantità, che saranno uguali ad una terza, saranno uguali tra di loro.

5. Se due quantita saranno metà di una terza quantità, saranno uguali fra di loro; e se amendue saranno o doppie, o triple, o quadruple di una terza quantità, saranno anche uguali tra di loro.

6. Le quantità, che poste l'una sopra l'altra combaceranno, saranno fra di loro uguali, e se le linee rette, e gli angoli saranno uguali, combaceranno.

7. Due linee rette non chiudono ſpazio alcuno, eſſendovi neceſſarie a queſto effetto almeno tre rette, o una ſola curva, o una curva con una retta.

POSTULATI.

Sotto queſta voce s' intendono alcune domande indirizzate alle dimoſtrazioni, faciliſſime però ad eſeguirſi, ed ad eſſer accordate, e ſono le ſeguenti.

1. Tirare una linea retta da qualunque punto a qualſivoglia termine.

2. Prolungare una retta data.

3. Deſcrivere un cerchio, dato qualſivoglia centro, e qualunque intervallo; il che eſeguiſceſi col mettere un piede del compaſſo nel punto dato, ed aperto il detto compaſſo, quanto è l' intervallo aſſegnato, girar l'altro piede, fin che chiuda lo ſpazio.

4. Tirare una linea retta uguale ad un'altra data; il che ſi fa coll'aprire il compaſſo giuſta la lunghezza della linea data, e ſegnarla.

5. Tagliar da una linea maggiore una porzione, che ſia uguale ad una minore data. Si apra il compaſſo giuſta la lunghezza della minore, e ſi traſporti la miſura nella maggiore, e queſta reſterà a quella uguale.

RISTRETTO
DI
GEOMETRIA PIANA

PARTE PRIMA.

Dieci Teoremi, ed altrettanti Problemi co' loro Corollarii, a' quali aggiungeremo alcuni usi; saranno la materia di questa prima Parte. Dove prima tratterassi la Teoría delle linee, e degli Angoli da esse formati: indi de' Triangoli, e finalmente de' Quadrilateri.

TEOREMA I.

Se una retta linea caderà sopra un' altra retta, farà o due angoli retti, o due angoli uguali a due retti.

C*ostruzione*: Dal centro B, dato qualsivoglia intervallo, come BA, si descriva un cerchio, nel quale si tiri il diametro AC, sopra cui cada perpendicolarmente LB. Tav. I. Fig. 15.

Dico, I due angoli LBA, LBC essere due angoli retti.

Dimo-

Dimoſtrazione: I due angoli LBA, LBC anno per loro miſura i due quadranti del cerchio, cioè AL, LC; ma ciaſcun quadrante è miſura

(a) *Def.7.* dell' angolo retto: (*a*) dunque i due angoli LBA, LBC ſono due retti: ciò che doveaſi dimoſtrare in primo luogo.

Parte 2. Coſtruz. Sopra l' iſteſſo diametro AC cada obliquamente la linea FB.

Dico, I due angoli ABF, CBF eſſere uguali a due retti.

Dimoſtr. I due archi AF, FC inſieme ſono

(b) *Aſſ.5.* uguali ai due quadranti inſieme AL, LC (*b*): dunque i due angoli ABF, CBF inſieme ſono uguali ai due retti preſi inſieme ABL, CBL. Ciò, che &c.

Corollario 1.

SE due rette s'interſegheranno, gli angoli, che ſi oppongono al vertice, ſono uguali.

Tav. I. Fig. 16. *Coſtruz.* In qualunque dato cerchio ſi tirino due rette AF, CD, le quali ſi ſeghino nel punto B.

Dico, eſſere uguali gli angoli oppoſti al vertice CBA ad FBD, CBF ad ABD.

Dimoſtr. Tanto l' arco CAD, che l'arco FDA ſono ſemicerchi dell'iſteſſo cerchio ACFD, e per

(c) *Aſſ.5.* ciò ſono uguali (*c*). Se dunque ſi ſottrarrà l' arco DA ch'è commune a tutti e due i ſemicerchi, ri-

(d) 2. *Par. e dell'aſſ.* 2. marranno CA, FD uguali (*d*): dunque uguali anche ſaranno gli angoli oppoſti CBA, FBD (*e*) Ciò che &c.

(e) *Def.7.* Nell' iſteſſa maniera ſi dimoſtreranno gli altri due angoli. Gli archi FCA, FDA eſſendo ſemicer-

cerchi dell'isteſſo cerchio, ſono tra loro uguali (*a*): (a) *Aſſ.* 5.
dunque ſe ſi ſottrarrà da una parte l'arco C A, dall'altra l'arco FD, poc'anzi dimoſtrati uguali, rimarranno gli archi FC, DA (*b*) tra loro uguali: dunque uguali anche ſaranno gli angoli oppoſti (*c*) CBF, ABD. Ciò, che &c.

(b) 2. *P. dell' aſſ.* 2.
(c) *Def.* 7.

Corollario 2.

SE due rette s'interſegheranno, i quattro angoli, da eſſe formati, ſaranno uguali a quattro angoli retti.

Dimoſtr. Cadendo la linea AB ſopra CD obliquamente, ſaranno due angoli CBA, DBA uguali a due retti (*d*) e cadendo FB nella ſteſſa maniera ſopra CD, farà anch'eſſa due angoli uguali (*e*) a due retti CBF, DBF: inſiſtendo DB obliquamente ſopra FA, riſulteranno i due angoli FBD, ABD uguali a due retti (*f*) ed inſiſtendo CB ſopra FA, ſaranno anch'eſſi i due angoli CBF, ABC uguali a due retti (*g*) dunque ſottrattine i quattro communi, reſteranno i quattro angoli uguali a quattro retti (*h*). Ciò, che &c.

Tav. I. Fig. 16.
(d) 2. *P. del Teor.* 1.
(e) *Per l' iſteſſ.*
(f) *Per l' iſteſſ.*
(g) *Per l' iſteſſ.*
(h) 2. *P. dell' aſſ.* 2.

Corollario 3.

SE più di due linee s'interſegheranno nell'iſteſſo punto, tutti gli angoli, che ſi formeranno, ancorchè foſſero ſenza numero, tutti ſaranno uguali a quattro retti.

Coſtruz. Si deſcriva un cerchio con qualunque intervallo, ſi tirino due diametri AR, DN, che dividano il cerchio in quattro parti uguali: indi a piacere ſi tirino dal centro quante ſi vogliano linee.

Tav. I. Fig. 17.

Dico, Tutti gli angoli da queſte linee formati eſſer uguali a ſoli quattro retti.

Di-

Dimostr. Tutti gli angoli DET, TEH, HEA, AEF &c. sono compresi ne' quattro quadranti del (a) *Def.7.* cerchio; ma questi sono uguali a quattro retti (*a*) dunque tutti gli angoli, che si formano da tutte le linee, che si tirano tra l'intersezione, sono uguali a quattro retti. Ciò che &c.

TEOREMA II.

Se una linea retta segherà due linee parallele; 1. Gli angoli alterni saranno uguali. 2. L'angolo interno sarà uguale all' esterno posto alla stessa parte. 3. I detti due angoli interni saranno uguali a due retti.

Tav. I. Fig. 18.

COstruz. Dal punto C, dove la retta GD sega la parallela EF, coll' intervallo dell' altra intersezione D, si descriva l' arco DE. Similmente coll' istesso intervallo si descriva dal punto D l'arco CL: Si tirino li communi perpendicoli DS, CR.

Dico, Gli angoli alterni A, B essere uguali, come anche FCD, IDC.

Dimostr. Essendo uguali CR, DS perpendicoli (b) *Def.9.* communi delle parallele (*b*) gli stessi sono anche seni uguali degli archi CL, ED, che perciò gli (c) *Def.7.* stessi archi sono uguali: dunque (*c*) gli angoli A, e B alterni sono uguali, poichè sono misurati da' detti archi uguali. Ciò che &c.

Così saranno uguali gli altri due alterni FCD, IDC; perciocchè la stessa linea retta DC cade sopra la retta EF, gli angoli ECD, FCD (d) P. 2. *del Teor. 1.* sono uguali a due retti (*d*); e perchè l'istessa retta DC

DC cade ſopra la I L, ſaranno anche gli angoli IDC, LDC uguali a due retti (*a*): toltine dunque ECD, LDC, o ſia A, e B, che per l'uguaglianza degli archi ſi ſono dimoſtrati uguali, reſteranno anch'eſſi gli altri due alterni FCD, IDC uguali (*b*). Ciò, che &c.

Dimoſtr. della 2. parte. L'angolo GCF è uguale all'angolo A (*c*); ma l'angolo B è uguale all'iſteſſo angolo A; perchè ſono alterni (*d*); dunque l'angolo GCF eſterno è uguale all'angolo B interno poſto all'iſteſſa parte (*e*). Ciò, che &c.

Dimoſtr. della 3. parte. Gli angoli A, e B alterni ſono tra di loro uguali (*f*), ma A, ed FCD ſono uguali a due retti (*g*), dunque FCD, e B poſti all'iſteſſa parte ſono uguali a due retti (*h*). Ciò, che &c.

(a) *Per l' iſteſſ.*

(b) *Par. 2. dell' aſſ. 2.*

(c) *Cor. 1. del Teor. 1*

(d) *Per la 1. Parte del Teor. 2*

(e) *Aſſ. 4.*

(f) *Per la 1. Parte del Teor. 2*

(g) *Par. 2. del Teor. 1.*

(h) *Aſſ. 4.*

Corollario.

SE una linea cada ſopra due altre, e gli angoli alterni ſieno uguali, l'eſterno uguale all'interno, i due interni poſti all'iſteſſa parte uguali a due retti, le due linee ſegate ſono tra loro parallele.

Coſtruz. Si tirino le due linee EF, IL; e queſte ſi ſeghino dalla linea DC. Tav. I. Fig. 19.

Dimoſtr. Se le due rette EF, IL non ſono parallele, ſi tiri un'altra MN, la quale ſia parallela a IL. L'angolo MAD ſarà uguale al ſuo alterno LBC (*i*); ma per ipoteſi l'angolo EAD è uguale all'angolo LBC, dunque (*k*) gli angoli MAD, EAD ſaranno tra loro uguali; la parte EAD al tutto MAD; dunque per non cadere in queſto aſſurdo, biſogna dire, che EF è parallela ad IL. Ciò, che &c. TEO-

(i) *Teor. 2. p. 1.*

(k) *Aſſ. 4.*

TEOREMA III.

Se in due triangoli i lati omologi, e l'angolo costituito da essi saranno uguali, avranno le basi, e gli angoli delle basi anche uguali.

Tav. I. Fig. 20.

DImostr. Imaginiamo, che 'l triangolo N si sovrapponga al triangolo M, essendo per l'ipotesi il lato AC uguale al lato EF, e l' altro AB al lato ED, e l'angolo A all' angolo E, i tre punti A, C, B esattamente combaceranno (*a*) co' tre punti E, F, D; dunque la base C B caderà esattamente sopra la base FD, e gli angoli C, e B sopra F, e D. (*b*) Ciò, che &c.

(a) 2. P. *dell' ass.6.*

(b) 1. *Part. dell' ass.6.*

TEOREMA IV.

Se in due triangoli le basi, e gli angoli alle basi saranno uguali, saranno anche i lati, e gli angoli fatti da' lati, uguali.

Tav. I. Fig. 20.

DImostr. Se imaginiamo, che la base CB si sovrapponga alla base FD, queste per l'ipotesi saranno uguali, ed uguali saranno gli angoli C, B agli angoli F, D; dunque saranno anche uguali i lati CA, BA a' lati FE, DE, e l'angolo A all' angolo E; altrimenti la base CB non caderebbe sopra FD, ne gli angoli, C, e B sopra F, D, contro l' ipotesi. Ciò, che &c.

Corol-

Corollario 1.

SE in due triangoli tutti i tre lati saranno uguali, tutti i tre angoli opposti a' lati uguali saranno anch' essi uguali. Tav. I. Fig. 20.

Dimostr. Essendo i tre lati CA, AB, BC per ipotesi uguali ai tre lati FE, ED, DF, se si sovrapporranno, esattamente corrisponderanno, combaciandosi; dunque saranno anche uguali gli angoli, che corrisponderanno a' lati uguali. Ciò, che &c.

Corollario 2.

GLI angoli della base del triangolo Isoscele sono uguali, come anche quelli di sotto la base.

Costruz. Si divida in due parti uguali la base FD: dal punto della divisione L si eriga una perpendicolare LE, (nella maniera, che s'insegna nel Probl. 2. di questa prima Parte) che passerà per il vertice E. Tav. I. Fig. 21.

Dimostr. Il dato triangolo Isoscele FED diviso nella base per la perpendicolare LE forma due triangoli tra loro uguali; perciocchè FL, DL per costruzione sono uguali; FE, DE sono uguali per ipotesi, essendo il triangolo Isoscele: LE è commune: dunque gli angoli F, e D opposti al lato commune LE (*a*) sono uguali. Ciò che &c.

Dimostr. della 2. parte: I due angoli F, M insieme sono uguali a due retti (*b*), come anche D, N; toltine dunque dall'una parte F, dall'altra D, dimostrati uguali per la prima parte, restano anche uguali tra loro M, ed N (*c*). Ciò, che &c.

(a) *Cor.* 1. *del Teor.* 4

(b) 2. *P. del Teor.* 1

(c) *Par.* 2. *dell' ass.* 2.

Corol.

Corollario 3.

SE in un triangolo due angoli ſaranno uguali tra loro, ancora i lati oppoſti ſaranno uguali.

Tav. I. Fig. 20. *Dimoſtr.* Figuriſi, l' iſteſſo triangolo CAB traſportato in FED, ma col ſito inverſo, cioè, che AB ſia rappreſentato in EF, e CA in DE, e perciò l'eſtremità C ſarà rappreſentata in D, e B in F. Eſſendo dunque in queſti triangoli gli angoli delle baſi reſpettivamente uguali, cioè, C uguale ad F, e B uguale a D, li due lati, che coſtituiſcono l'angolo F combaceranno colli due lati, che coſtituiſcono l'angolo C, cioè, i due lati EF, FD caderanno eſattamente ſopra i lati AC, CB; (*a*) per l' iſteſſa ragione i due lati ED, DF caderanno eſattamente ſopra AB, BC; dunque il lato CA ſarà uguale al lato FE, a cui corriſponde eſattamente; ma EF è l' iſteſſo che AB, mentre fu traſportato, e rappreſentato da eſſo AB; dunque nel primo triangolo CAB, i lati CA AB, i quali ſono oppoſti agli angoli uguali C, e B ſono uguali. Ciò, che &c.

(a) *Aſſ.6.*

TEOREMA V.

Se due triangoli avranno un lato, e due angoli uguali, ſaranno tra loro uguali.

Tav. I. Fig. 20. D*Imoſtr.* Se i lati omologi ſaranno le baſi CB, FD, e gli angoli ſaranno que' delle baſi, cioè C, B, ed F, D, ſarà l'iſteſſiſſimo Teorema IV, la dicui dimoſtrazione ſervirà anche per queſto Teorema V.

Se

Se il lato omologo ſarà AC, EF, e gli angoli ſaranno B, C, e D, F; dico, i triangoli BAC, DEF eſſere tra loro uguali.

Dimoſtr. Se il lato EF ſi ponga ſopra il lato AC, che per l' ipoteſi gli è uguale, i punti E, F caderanno ſopra li punti A, C; mà perchè l' angolo F per l' ipoteſi è uguale all' angolo C, il lato FD caderà ſopra il lato CB; e perchè l'angolo D è per l' ipoteſi uguale all'angolo B, il lato DE caderà ſopra BA: dunque li tre lati del triangolo FED caderanno ſopra li tre lati del triangolo CAB: dunque li detti triangoli ſono uguali quanto a' lati (*a*), e quanto agli angoli (*b*). Ciò, che &c.

(a) *Aſſ.* 6.
(b) *Cor.* I. *del Teor* 4

TEOREMA VI.

In qualſivoglia triangolo quell'angolo ſarà maggiore dell' altro, che ſi opporrà al lato maggiore: quello ſarà minore, che ſarà oppoſto al lato minore.

Tav. I. Fig. 22.

D*Imoſtr.* Nel triangolo DEF, ſe l' angolo D, che ſi oppone al lato maggiore EF non ſarà maggiore, dovrà eſſere uguale, o minore dell' angolo F: non può eſſere uguale, poichè ſarebbero uguali (*c*) anche i lati DE, EF; il che ſarebbe contro l'ipoteſi (giacchè ſi ſuppone, che il triangolo non abbia i lati uguali). Non può l'angolo D eſſere minore dell' angolo F, perciocchè ſe F foſſe maggiore, col tirar la linea FG, reſtringendoſi, potremo farlo uguale all'angolo D, che ſi vuole minore. Dunque eſſendo divenuti uguali gli angoli, i lati oppo-

(c) *Cor.* 3. *del Teor.* 4.

(a) *Cor.* 3. *del Teor.* 4. oppoſti DG, FG ſarebbero (*a*) anch' eſſi uguali; Or ſi aggiunga la linea GE commune all'uno, ed all'altro lato, che ſi ſuppongono uguali, dovrà (*b*) (b) *Aſſ.* 2. reſtar uguale il lato compoſto DGGE al lato anch' eſſo compoſto FGGE: Mà il lato DE per l'ipoteſi aſſunta nella propoſizione, è minore nel lato EF; dunque FGGE ſono anche minori di EF, ch' è linea retta: dunque la linea retta non ſarebbe la più corta tra tutte quelle, che da medeſimi punti poſſono tirarſi, contro la definizione 3. Dunque l'angolo D, che ſi oppone al lato maggiore EF, non potendo eſſere uguale a F, nè minore, neceſſariamente ſarà maggiore dell'angolo F, che ſi oppone al lato minore DE. Ciò che &c.

Corollario 1.

Tav. I. Fig. 22. IN qualunque triangolo il lato maggiore è quello, che ſi oppone all'angolo maggiore: quello è il lato minore, che ſi oppone all'angolo minore.

Dimoſtr. Il lato EF non puol'eſſere minore del lato DE, perchè l'angolo D ſarebbe minore dell' angolo F, contro ciò, che ſi è dimoſtrato nel Teorema VI. detto lato EF non può eſſere uguale a DE; poichè uguali anche ſarebbero i due angoli (c) *Cor.* 2. *del Teor.* 4 D, F (*c*) contro l' ipoteſi: dunque il lato EF, che ſi oppone all' angolo D maggiore, ſarà maggiore. Similmente ſi dimoſtrerà, che il lato minore è quello, che ſi oppone all'angolo minore. Ciò, che &c.

Corollario 2.

SE due triangoli avranno due lati a due uguali, ma l'angolo fatto da essi l'uno maggior dell' altro, avranno anche la base maggiore.

Siano due triangoli CFD, BLA, che abbiano due lati scambievolmente uguali, cioè, il lato CF uguale a BL, ed il lato DF uguale ad AL; sia però l'angolo L, fatto da detti lati respettivi, maggiore dell'altro angolo F, fatto dagli altri lati. Tav. I. Fig. 23.

Dico, che il triangolo, che avrà l'angolo maggiore, avrà anche la sua base maggiore della base dell' altro triangolo.

Costruz. Sovrappongasi uno de' lati uguali di un triangolo sopra l'altro lato uguale dell' altro triangolo, e sia CF sopra BL: allora l' altro lato FD sarà LE, e la base CD sarà BE. Coll' intervallo dell'altro lato LA (*il quale è uguale ad* FD, ed a cagione della più grande apertura del suo angolo resta fuori del lato LE) descrivasi un cerchio, che passerà per il punto E, a cagione dell' uguaglianza de' lati LA, LE. Tirisi la linea EA.

Dimostr. Nel triangolo BEA l'angolo BEA è maggior di LEA, mentre lo contiene, come parte: dunque detto angolo BEA è maggiore anche di LAE, mentre per essere questo l' altro angolo della base del triangolo isoscele ALE, è uguale al suddetto LEA (*a*): mà quest'angolo LAE è maggiore del BAE, mentre lo contiene, come parte: dunque il suddetto primo angolo BEA è molto maggiore dell' angolo BAE. Dunque in questo triangolo ABE il lato BA opposto al maggior angolo BEA è maggiore del lato BE opposto all' ango-

(a) *Cor. 2. del Teor. 4*

(a) Cor. 1. del Teor. 6 angolo minore BAE (*a*). Ma detto lato BA è base del triangolo proposto BLA, ed il lato BE è la base dell' altro triangolo proposto BLE, o CFD: dunque tra i due triangoli proposti, che abbiano i due lati respettivamente uguali, quello, che avrà il suo angolo maggiore dell' angolo respettivo dell' altro triangolo, avrà anche la sua base maggiore della base dell'altro. Ciò, che &c.

TEOREMA VII.

In qualunque triangolo i tre angoli interni presi insieme sono uguali a due retti.

Tav. I. Fig. 24. COstruz. Si prolunghi la base BC in R, ed S, e si tiri al vertice A la linea DF, che sia parallela ad RS.

(b) Per costr. (c) 1. Par. del Teor. 2 (d) 2. Par. del Teor. 1 *Dimostr.* DF è parallela ad RS (*b*): dunque gli angoli alterni M, B: N, C sono uguali (*c*); ma gli angoli M, A, N sono uguali a due retti (*d*): dunque se in luogo degli angoli M, ed N si pongano gli alterni B, C suoi uguali, saranno B, C, insieme con A uguali a due retti. Ciò, che &c.

Corollario 1.

Tav. I. Fig. 24. L'Angolo esterno è uguale a i due interni, ed opposti.

Dimostr. Gli angoli B, A, C sono uguali a due retti (*e*): ma gli angoli C, L sono anch' essi uguali a due retti (*f*): se dunque se ne tolga l' angolo C, ch' è commune, rimarrà l'angolo L esteriore uguale ai due A, e B interiori, ed opposti al detto L (*g*). Ció, che &c.

(e) Teor. 7 (f) Par. 2. del Teor. 1 (g) Ass. 2. p. 2.

Co-

Corollario 2.

DAta la somma di due angoli, si saprà la somma de' gradi del terzo angolo.

Dimostr. Tutti i tre angoli sono uguali a due retti (*a*), cioè, a 180 gradi: sapendosi dunque, che due angoli formano 100 gradi, si saprà che'l terzo ne avrà 80. (a) *Teor.* 9

Se si sapranno i gradi di uno, che sia a cagion d' esempio di 70 gradi, si saprà, che la somma degli altri due insieme sarà 110, complemento di 180.

Se in due triangoli due angoli saranno uguali a due dell'altro triangolo, il terzo angolo sarà uguale al terzo; così se un'angolo sarà in tutti e due i triangoli di 50 gradi, un'altro sarà in tutti e due di 60 gradi, il terzo in tutti e due dovrà esser di 70, che dovrà compire il numero di 180 in ciascun dei due triangoli.

Nel triangolo rettangolo gli altri due angoli debbono essere acuti; perciocchè essendo rettangolo, uno debb'essere di 90. gradi (*b*), gli altri due dovran contener divisi gli altri 90. Il che sarà vero anche nell' ottusangolo, perchè contenendo l'angolo ottuso più di 90 gradi, gli altri due angoli dovran contenere tra loro divisa la somma minore di 90 gradi: dunque saranno acuti. (b) *Def.* 7

Corollario 3.

IN qualsivoglia figura quadrilatera rettilinea i quattro angoli interni presi insieme sono uguali a quattro retti.

Tav. I. Fig. 25. *Dimostr.* Tirandosi la diagonale AD, verrà diviso il quadrilatero ACDB in due triangoli CDA, BDA; ma i tre angoli di ciascun triangolo sono uguali a due retti (*a*): dunque i due triangoli formati dalla diagonale conterranno quattro angoli uguali a quattro retti.

(a) *Teor.* 7

TEOREMA VIII.

La diagonale divide il quadrilatero (o sia quadrato, o Parallelogrammo) in due triangoli uguali.

Tav. I. Fig. 25. DImostr. I due triangoli ABD, DCA anno il lato AD commune, e due angoli uguali di ciascun triangolo, cioè, L al suo alterno O, ed M al suo alterno N (*b*): dunque i due triangoli saranno tra loro uguali (*c*). Ciò, che &c.

(b) *P.* 1. *del Teor.* 2
(c) *Teor.* 5

Corollario 1.

NEl Parallelogrammo gli angoli opposti sono uguali.

Tav. I. Fig. 25. *Dimostr.* Ne' due triangoli fatti dalla diagonale AD tirata nel parallelogrammo, gli angoli L, O; M, N, perchè alterni, sono uguali (*d*): dunque il terzo angolo C sarà uguale al terzo B (*e*): in oltre gli angoli L, M; N, O sono parti respettivamente uguali, che compongono tutto l' angolo D, ed A: dunque questi angoli saranno tra loro uguali. L' istesso si potrà dimostrar degli angoli C, B, tirando la diagonale da C in B: gli angoli dunque opposti del Parallelogrammo sono uguali tra loro. Ciò, che &c.

(d) *P.* 1. *del Teor.* 2
(e) 3. *P. del Cor.* 2. *del Teor.* 7

Co-

Corollario 2.

I Lati opposti del Parallelogrammo sono uguali.

Dimostr. Se i lati opposti CD, AB; e CA, DB non fossero uguali, i triangoli ABD, DCA non sarebbero uguali; contro ciò, che si è dimostrato nel Teorema VIII. Se dunque i triangoli sono uguali, i lati del Parallelogrammo, tra loro opposti, sono uguali. Ciò, che &c. Tav. I. Fig. 25.

Corollario 3.

I Parallelogrammi, che si dicono complementi di un' altro Parallelogrammo principale, che compongono, e pe' quali non passa il diametro principale, ma sono intorno all' istesso diametro, sono tra loro uguali.

Costruz. Se pe'l punto E della diagonale CB si tirino le linee FG, HI parallele ai lati AC, CD del parallelogrammo dato; Tav. I. Fig. 26.

Dico, che i due Paralellogrammi GI, FH, pe' quali non passa la diagonale BC, sono uguali.

Dimostr. I due triangoli B A C, C D B sono uguali (*a*): sono anche uguali i triangoli E F B, EIB (*b*), ed i triangoletti CHN, CGO: dunque se dai due triangoli BAC, CDB si sottraggano i triangoletti CHN, e CGO, e si sottraggano parimenti gli altri due triangoli EFB, EIB; rimarranno uguali i Parallelogrammi AE, GI (*c*). Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 8

(b) *Per l' istess.*

(c) *Ass.* 2. *p.* 2.

TEOREMA IX.

Due Parallelogrammi sopra l' istessa, o uguale base, e tra l' istesse parallele sono tra loro uguali.

Tav. I. Fig. 27. DImostr. Avendo i due Parallelogrammi AD BC, EFBC l' istessa base BC, i lati opposti AD, EF saranno uguali a BC (*a*), e saranno anche uguali tra loro (*b*): Si aggiunga la linea DE commune, saranno i lati AE, DF uguali (*c*): sono altresì uguali i lati FC, EB, per esser lati opposti del parallelogrammo (*d*): inoltre l' angolo esterno AEB è uguale all' interno AFC (*e*): dunque i triangoli AEB, DFC sono uguali (*f*): Se dunque se ne tolga il triangoletto DEM, rimarranno uguali i due piani ADBM, EFCM (*g*): aggiungasi il commune triangolo BMC, sarà il parallelogrammo AC uguale al parallelogrammo FB (*h*). Ciò, che &c.

(a) *Cor.* 2 *del Teor.* 8
(b) *Ass.* 4.
(c) *Ass.* 2.
(d) *Cor.* 2. *del Teor.* 8
(e) 2. *P. del Teor.* 2
(f) *Teor.* 3
(g) *Ass.* 2. *P.* 2.
(h) *Ass.* 2. *P.* 1.

Corollario I.

I Triangoli sopra l' istessa, o ugual base, e tra l' istesse parallele sono tra loro uguali: E se i detti triangoli saranno uguali, le linee saranno parallele.

Part. I. Costruz. Siano dati li triangoli BAC, BEC tra le due parallele: si tirino CD parallela a BA, e CF parallela a BE, saranno perfetti li parallelogrammi BD, e BF, e divisi dalle sue diagonali respettive AC, EC.

Tav. I. Fig. 28.

Dico, che li triangoli dati BAC, BEC sono uguali.

Di-

Dimostr. I due parallelogrammi BD, BF essendo sopra l' istessa base, e tra l' istesse parallele, sono tra loro uguali (*a*): mà le diagonali AC, EC dividono ciascuna il suo parallelogrammo in due triangoli uguali (*b*): dunque essendo i due triangoli di ciascun parallelogrammo metà di due Tutti uguali, saranno li detti triangoli tra loro uguali (*c*). Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 9

(b) *Teor.* 8

(c) *Ass.* 5.

Part. 2. *Dimostr.* Se IL, EF non sono parallele sia la parallela MN, si tiri la SO. Il triangolo DOS è uguale al triangolo DCS (*d*): mà il triangolo DRS è uguale (per ipotesi) all' istesso DCS: dunque il triangolo DOS sarà uguale al triangolo DRS, cioè, la parte al suo tutto, contro l'Assioma 1.

Tav. I. Fig. 19.

(d) 1. *Par. di questo Corol.*

Corollario 2.

SE il triangolo sarà sopra l' istessa base, e tra l' istesse parallele col parallelogrammo, esso sarà metà del parallelogrammo.

Tav. I. Fig. 29.

Costruz. Si tiri la C B nel Parallelogrammo AL, e sù l'istessa base AB si costituisca il triangolo AEB.

Dico il Triangolo AEB essere la metà del parallelogrammo AL.

Dimostr. I triangoli AEB, ACB sono tra loro uguali (*e*): mà il triangolo ACB è metà del parallelogrammo AL (*f*): dunque anche AEB è metà di AL (*g*). Ciò, che &c.

(e) *Cor.* 1 *del Teor.* 9

(f) *Teor.* 8

(g) *Ass.* 5.

TEO-

TEOREMA X.

Ne' triangoli rettangoli, il Quadrato, che si forma sopra il lato opposto all'Angolo Retto, è uguale ai due Quadrati, che si formano sopra i lati, che costituiscono detto Angolo Retto.

Tav.II. Fig. 1. COstruz. Sia il triangolo ABC rettangolo in B: si formi il quadrato ABGF sopra il lato BA, e sopra il lato CB l'altro quadrato BCIH, e sopra CA lato, o ipotenusa il quadrato CADE. In oltre dall' angolo B si tiri una retta BL parallela al lato AE, e dall'istesso punto B si tiri all'angolo E la retta BE, e dal punto F si tiri FC.

Dico il quadrato CE fatto sopra l'ipotenusa CA essere uguale ai due quadrati HC, GA fatti sopra i lati, che compongono l' angolo retto.

Dimostr. I due Triangoli FAC, BAE anno il lato AC uguale al lato AE, (perchè lati dell'istesso quadrato ACDE) ed AF uguale ad AB (perchè lati dell'istesso quadrato ABGF) ed anno gli angoli FAC, BAE anche uguali (poichè sono an-
(a) *Def.*12 goli retti de' quadrati (*a*) a' quali si aggiugne, l' angolo BAC commune): dunque il triangolo
(b) *Teor.*3 FAC è uguale al triangolo BAE (*b*). Ma il triangolo FAC col quadrato ABGF sono sopra, l' istessa base FA, e tra l' istesse parallele FA, GBC; e 'l triangolo BAE col parallelogrammo EAOL sono sopra l'istessa base EA, e tra l'istesse
(c) *Teor.*8 parallele EA, LOB; che perciò (*c*) ciascun quadrato, e ciascun parallelogrammo è doppio del suo triangolo: essendo dunque i triangoli uguali, saranno anche uguali i loro doppii, cioè, il quadra-

to

to, e'l parallelogrammo ABFG, EAOL (a). (a) *Ass.* 5.

Della maniera stessa si dimostra COLD uguale a BCIH, che però tutto il quadrato CAED formato sopra l'ipotenusa CA sarà uguale ai due quadrati HICB, BGFA. Ciò, che &c.

Corollario 1.

IL quadrato, che si forma sopra la diagonale d'un quadrato, o parallelogrammo rettangolo, debb' essere uguale ai due quadrati de' lati, che comprendono l' angolo opposto alla diagonale.

La dimostrazione è l' istessa del Teorema x.; Tav. II. Fig. 15. perciocchè la diagonale CB è lato opposto all'angolo retto A del triangolo rettangolo BAC, che risulta da essa, e da due lati contigui CA, BA del quadrato diviso.

Corollario 2.

SE il quadrato dell'ipotenusa AC è uguale ai due quadrati degli altri due lati, AB, CB, l'angolo ABC, che si oppone all' ipotenusa, è retto. Tav. II. Fig. 2.

Costruz. Si tiri dal punto B la BD perpendicolare a CB, come insegnasi nel Probl. 11. di questa prima Parte, ed uguale ad AB, indi si uniscano i due punti D, C.

Dico, l' angolo ABC opposto all' ipotenusa AC esser retto.

Dimostr. I due triangoli ABC, DBC sono respettivamente equilateri; perciocchè hanno il lato BC commune: DB per Costruzione uguale ad AB; e DC uguale ad AC: poichè essendo il quadrato di AC uguale ai due quadrati AB, BC (*b*), (b) *Per l' ipot.* e'l quadrato DC uguale ai due quadrati BD, BC, saran-

saranno anche li quadrati AC, DC trà loro uguali (a), e per conseguenza anche uguali saranno i lati AC, DC, ed essendo i due triangoli equilateri, saranno anch'equiangoli (b): dunque gli angoli ABC DBC sono uguali: ma DBC è retto (c): dunque ABC opposto all' ipotenusa AC anche è retto. Ciò, che &c.

(a) *Ass.* 4.
(b) *Cor.* 1. *del Teor.* 4
(c) *Costr.*

ANNOTAZIONE.

Questo Teorema decimo, che nell' ordine Euclideo è la proposizione 47 tanto famosa, viene attribuito al rinomato Pitagora, d'onde trasse anche dall'Autore il nome di Teorema Pitagorico, pe 'l ritrovamento del quale, se vogliamo prestar fede a Vitruvio, (d) egli sacrificò cento bovi alle Muse Dee delle Scienze, d'onde fu anche chiamato Ecatombe dalle voci Greche ἑκατος *cento*, e βȣ̃ς: *bove*; Sebbene Proclo ci faccia sapere averne immolato un solo. Dicesi anche Ipotenusa dalle parole Greche ὑπὸ *sotto*, e τίνω *stendo*, cioè, *sottesa*; perciocchè trattandosi di dimostrare, che il quadrato, che si forma sopra la linea ch'è sottesa, cioè, opposta all' angolo retto, è uguale ai due quadrati, che si formano sopra le altre due linee, che compongono l'angolo retto, hà preso da ciò il nome d'Ipotenusa.

Vogliono, che considerando il Filosofo questi tre numeri 3, 4, 5, ed osservando, che i quadrati de' due primi, cioè, 9 del 3, e 16 del 4 insieme uniti

(d) *Lib.* 9.

uniti fossero uguali al solo quadrato del 5, ch'è 25, ingegnassesi a dimostrare una tal verità anche nelle linee, come per noi nel Teorema si è fatto.

Se voglionsi ritrovare altri numeri differenti dai già esposti 3, 4, 5, basterà o duplicare, o triplicare, o quadruplicare ugualmente tutti e tre, e si avrà lo stesso, facendosi 6, 8, 10; l'istesso sarà triplicandosi 9, 12, 15; così successivamente.

Se vorransi trovare i predetti numeri coll' accennata proprietà de' suoi quadrati, senza aver d' innanzi i tre detti numeri, useremo delle regole, riferite da Proclo, la prima delle quali vogliono, che sia di Pitagora stesso. Si prenda, dic'egli, un numero impare, qualunque egli si sia come 5; dal quadrato di questo, che sarà 25, se ne tolga una unità, e diviso detto numero troncato, ch'è 24, per metà, si avrà 12, e questo sarà uno de'due desiderati numeri, che si cercano; ed aggiugnendo a questo 12 una unità, che farà 13, sarà questo l'altro numero, che si cercava; Sicchè i numeri saranno 5, 12, 13; poichè il quadrato di questo terzo, ciò è, 13, ch' è 169, sarà uguale ai due quadrati di 5, che sarà 25, e di 12, che sarà 144, mentre uniti daranno anch' essi 169. Se il numero, che si assume a formar il quadrato per dividerlo, sarà 3, gli altri due, che ne risulterebbero, saranno 4, e 5 riportati di sopra.

L' altra regola viene attribuita a Platone, ed è la seguente. Si assuma un numero uguale, come 6; si formi il quadrato 36, il quale diviso per metà, darà 18, di questo si prenda la metà 9, e togliendone una unità, darà uno de' numeri, cioè, 8; si aggiunga questa unità al detto 9, e darà l' altro

tro numero 10; e si avranno tutti e tre i numeri, cioè, il 6 assunto, l'8, e'l 10; al quadrato di quest' ultimo, che sarà 100, saranno uguali i due quadrati, cioè, 36 dalla radice 6, ed il 64 dall'8, che uniti 36, ed il 64 daranno anche 100.

Si troveranno anche in quest' altro modo. Si prendano a talento due numeri, come 3, e 4 (da' quali come nasceranno tutti e tre i numeri si chiameranno generatori) si formi da ciascun di essi il quadrato, come 9 dal 3, e 16 dal 4, uniti questi due quadrati 9, e 16 che daranno 25, il quale si stabilisca per ipotenusa numero maggiore de' tre; per uno de' lati si stabilisca la differenza, che corre tra due quadrati, cioè, 9, e 16, che sarà 7; pe'l terzo numero si prenda il doppio del prodotto della moltiplicazione de' due generatori tra loro 3, e 4, che moltiplicati danno 12, si prenda, dico, il doppio di questo prodotto 12, ch'è 24. Si avranno dunque i tre numeri 7, 24, e 25. Il quadrato del 25 ch' è 625, sarà uguale ai due 49, che nasce del 7, e 576 del 24, formando insieme 625.

PROBLEMA I.

Dividere una retta terminata, in due parti uguali.

Tav. II. Fig. 3. Costruz. Sia data per dividersi la retta AB. Costituito per centro il punto estremo A coll' intervallo di tutta la retta AB si descriva un'arco, o quasi semicerchio GBR; indi costituita l' altra estremità B per centro, coll' istesso intervallo si de-

descriva un' altro arco GAR: si ritiri una retta per li punti G, R, dove s'incontrano detti cerchi, e questa retta, passando per L, dividerà la data AB in due parti uguali AL, LB.

Dimostr. Si tirino le rette AG, AR, BG, BR: Li triangoli AGR, BGR sono equiangoli, mentre anno li lati respettivamente uguali, cioè, AG, AR uguali a BG, BR, perchè sono raggi di uguali cerchi, e GR è commune: dunque li due angoli in G sono uguali (*a*): Dunque li triangoli AGL, BGL avendo li lati BG, AG uguali, e GL commune, e gli angoli fatti da questi lati in G uguali, come si è dimostrato, avranno detti triangoli le basi uguali, cioè, AL sarà uguale ad LB: (*b*) sarà dunque divisa la data retta AB in due parti uguali. Ciò, che far doveasi.

(a) *Cor.* 1. *del Teor.* 4

(b) *Teor.* 3

Se la retta tutta AB *non potrà prendersi nell' apertura del compasso, basterà prendere più di quello, che si giudica esser la metà, e far l' intersezione più bassa, come in* S, *ed un' altra simile in giù, e tirate le dovute linee, la dimostrazione sarà l' istessa.*

PROBLEMA II.

Da un punto dato in una retta alzare una perpendicolare.

Tav. II. Fig. 4.

C*ostruz.* Dal punto dato A nella retta data CD verso l' una, e l' altra parte si prendano due parti uguali AE, AF: Indi facendo centro in E, ed F coll' intervallo di tutta l' EF si facciano le due intersezioni degli archi sù, e giù in G, ed ed I, la retta, che da G passerà per A fino ad I, sarà la perpendicolare, che si cerca.

Dimostr. Si tirino le rette EG, FG: li Triangoli EGA, FGA anno tutti i lati respettivamente uguali; perchè li lati EG, FG sono raggi di uguali cerchi, AE, AF sono uguali per la costruzione, AG è commune: dunque li triangoli anno gli an-
(a) *Cor.* I *del Teor.* 4 goli omologi uguali (*a*): dunque gli angoli in A sono uguali, e per la definizione 8 sono retti: e per conseguenza la retta GA è perpendicolare alla data retta CD. Ciò, che &c.

L' istesso potrà praticarsi facendo l' intersezioni degli archi in S, ed in I, prendendo per intervallo, o raggio del cerchio non tutta la EF, ma quanto si giudichi esser più della sua metà, e tirandosi le dovute linee, la dimostrazione sarà l'istessa, come si è detto nel problema precedente.

PROBLEMA III.

Da un punto dato fuori di una retta indefinita tirare una perpendicolare alla detta linea.

Tav. II. Fig. 5. *Costruz.* Descrivasi dal punto dato A un'arco, che tagli la data linea LI in due punti B, C:
(b) *Probl.* I Dividasi questa linea BC nel mezzo in O (*b*): si tiri la linea AO: Questa sarà la perpendicolare, che si desidera.

Dimostr. Si tirino le linee BA, CA. Li Triangoli BOA, COA anno tutti li lati respettivamente uguali, perchè AB, AC sono raggj d'uguali cerchj: BO uguale ad OC per la costruzione: AO è commune: dunque gli angoli in O sono ugua-

uguali (*a*): dunque sono retti (*b*). Si è tirata dunque la perpendicolare AO dal punto A dato fuori della retta LI. Ció, che &c.

(a) *Cor. 1. del Teor. 4*
(b) *Def. 8.*

Si chiama retta indefinita, *quella, che non ha lunghezza determinata, mà si dovrà prolungare, quando non sia in sito capace di ricevere la perpendicolare cadente dal dato punto fuor di essa.*

PROBLEMA IV.

Tirare una linea, che sia parallela ad una linea data CF *da un punto dato* A.

Tav. II. Fig. 6.

C*ostruz.* Dal punto A dato si tiri una retta AL, che seghi in qualsivoglia parte la linea data CF, sia nel caso in L. Si descriva un' arco dal centro L con qualsivoglia intervallo competente, sia TQ, e coll' intervallo stesso, fatto centro in A, si descriva un simile arco XO. Si prenda l' arco intercetto da Q in T, e si trasferisca da X in O, tirandosi per O, ed A una retta BOAS.

Dico BAS esser la parallela richiesta.

Dimostr. Essendo gli archi TQ, OX per la costruzione uguali, saranno anche gli angoli alterni BAL, FLA uguali (*c*): dunque BAS, CLF saranno parallele (*d*). Ciò, che &c.

(c) *Def. 7.*
(d) *Cor. del Teor. 2*

PROBLEMA V.

Formare in una retta DE *data da un punto assegnato* D *un' Angolo uguale ad un' altro dato* A.

Tav. II. Fig. 7.

C*ostruz.* Fatto centro A, si descriva un' arco a piacere BC, che tagli li lati dell' angolo dato A: indi fatto centro D punto assegnato nella data DE, coll'istesso intervallo si descriva un simile arco FL, che tagli la DE in F. Da quest' arco si prenda la porzione F G uguale all' arco B C.

Dico, la linea, che da D si tirerà pe'l punto dell'arco G, darà in D l'angolo uguale ad A. Poichè essendo gli archi B C, F G per costruzione
(a) *Def.* 7. uguali, saranno gli angoli A, e D uguali (*a*).

PROBLEMA VI.

Dato un' angolo rettilineo, dividerlo in due parti uguali.

Tav. II. Fig. 8. COstruz. Da' lati dell' angolo dato DLA si assumano due parti uguali ad arbitrio, come LD, LA: Indi si costituiscano centri D, ed A, e si descrivano due archi, che si seghino in un qualche punto, come in F: Dalla sezione F si tiri FL.

Dico, la linea FL dividere l'angolo in due parti, o in due angoli uguali.

Dimostr. Da punti D, A, si tirino alla sezione de' cerchi due rette DF, AF. I due triangoli DLF, ALF sono respettivamente equilateri tra di loro (poichè DL, AL per costruzione sono uguali: DF, AF perchè raggi di cerchi uguali, sono anch'
(b) *Def.* 7. essi uguali (*b*): LF è commune): dunque sono
(c) *Cor.* 1. equiangoli (*c*): dunque l'angolo DLF sarà uguale
del Teor. 4 all' angolo ALF: l'angolo dunque L è stato diviso in due parti, o in due angoli uguali. Ciò, che &c.

Se vogliasi ulteriormente dividere l'istesso Angolo in parti uguali, mà pari, si potrà dividere di

nuo-

nuovo ciascuna delle parti dell' angolo già diviso nel modo detto.

In qualsivogliano parti potrà meccanicamente dividersi il dato angolo A, se costituito per centro l' angolo stesso A, si descriva coll' intervallo stabilito a proprio talento tra li lati, che lo costituiscono, un' arco BC, il quale si divida nelle parti, che si vorranno: indi si tirino le rette da ciascuna divisione, e verrà così a dividersi in qualsivogliano parti. Tav. II. Fig. 9.

PROBLEMA VII.

Sopra una data retta AB *formare un triangolo equilatero.*

C*ostruz.* Costituita per centro l' estremità A, coll' intervallo di tutta la retta data AB, si descriva un cerchio: e preso per centro B altra estremità, coll' istesso intervallo si descriva un' altro cerchio, che segherà in qualche punto il cerchio già fatto, come in C: dal punto della sezione alle due estremità della linea data si tirino due rette CA, CB. Tav. II. Fig. 10.

Dico, il Triangolo ACB essere equilatero.

Dimostr. I lati CA, AB sono tra di loro uguali, perché raggi dell' istesso suo cerchio (*a*): i lati CB, BA sono anche uguali per l' istessa ragione: dunque i lati AC, CB (ciascun de' quali è uguale al terzo AB) saranno uguali tra di loro (*b*). Ciò, che &c.

(a) *Def.* 7.

(b) *Ass.* 4.

Se sopra la data linea si voglia formare un triangolo Isoscele, fatto centro nelle due estremità del- Tav. II. Fig. 11.

della data linea AB non coll' intervallo uguale a tutta la data retta, mà o maggiore, o minore (sempre però più grande della metà della data linea) si descrivano due cerchi, che s' interseghe- ranno in un qualche punto, come C, dal qual pun- to all'estremità della data retta, se si tireranno due rette, daranno il triangolo ACB, che sarà Isosce-
(a) Def. 10 le (a); poichè i soli due lati CA, CB saranno uguali, essendo raggi di cerchi uguali.

Tav. II. Fig. 12. Ove vogliasi un triangolo Scaleno si dovrà aprire il compasso meno della data retta AB, e dall' estremità B descrivere un cerchio: indi dovrà aprirsi più della data AB, e dall'estremità, o punto A descrivere un' altro cerchio, che segherà il cerchio antecedente nel punto C, d' onde all' estremità della data AB tirandosi le linee CA, CB, sorgerà
(b) Def. 10 il triangolo Scaleno (b) poichè tutti e tre i lati saranno disuguali, perchè raggi di cerchi disuguali.

Quindi agevole sarà formare un Triangolo di tre date linee, due delle quali qualunque sieno, eccedano l' altra data linea.

Tav. II. Siano le tre linee date OB, LO, LB.

Fig. 13. *Costruz.* Si assuma una delle tre date a piacere, sia OB: si costituisca per centro un'estremità di essa O, e coll' intervallo dell' altra, cioè LO, si descriva un' arco: e costituita per centro l' altra estremità B, coll' intervallo della terza LB, si descriva un' altro cerchio, il quale segherà il primo nel punto L, da cui tirandosi le linee LO LB, all' estremità della data OB, si avrà il triangolo, che si cerca. Poichè per la costruzione della figura si conosce esser un triangolo fatto dalle tre linee disuguali date.

Dal

Dal già detto si hà il modo di costruire in un punto O di una data retta OB un' angolo uguale ad un' altro dato A: ciò, che si è praticato in un' altro modo nel Problema 5. Tav. II. Fig. 13., e 14.

Costruz. Tra i lati dell'angolo A dato si tiri una retta a piacere, sia FC: sicchè chiudendo lo spazio de' lati, formi un triangolo FAC. Costituiscasi per centro il punto dato O: coll' intervallo del lato AC dell'angolo dato, si descriva un'arco, e costituita l' altra estremità B per centro, si descriva un' altro arco coll' intervallo CF, che segherà il primo in L: dal punto della sezione L alle due estremità della data linea OB tirandosi due rette:

Dico, l'angolo O essere uguale all'angolo A dato.

Dimostr. I due triangoli ACF, OBL sono per la costruzione tra di loro equilateri: dunque sono equiangoli (*a*): dunque l' angolo O è uguale all' angolo A. Ciò, che &c.

(a) *Cor.* 1. *del Teor.* 4.

PROBLEMA VIII.

Sopra una data retta formar un Quadrato, un Parallelogrammo, un Rombo, un Romboide.

COstruz. In una delle estremità della data retta AB si eriga (per il Probl. 11.) una perpendicolare AC, prolungando la detta retta AB, acciò possa praticarsi il detto Problema 11: in oltre sia la detta AC uguale all' istessa AB: indi fatto centro il punto B coll'intervallo della AB, si descriva un' arco, e stabilito per centro C, coll' istesso intervallo si descriva un' altro arco, che segherà il primo in qualche punto, come in D, da cui tirandosi Tav. II. Fig. 15.

dosi due rette fino a C, e B, si avrà il Quadrato: Poichè le due rette BA, AC sono per costruzione uguali: le BD, CD, essendo prese uguali all'intervallo AB, sono raggi d'uguali cerchi. Dunque tutti e quattro i lati di detto Quadrato sono uguali. Inoltre tirandosi la Diagonale CB, saranno li Triangoli CAB, CDB scambievolmente Equila-
(a) *Cor.1. del Teor.4* teri; dunque (*a*) li due angoli A, e D saranno uguali, ed essendo A retto, sarà D anche retto. E per l'ugualità de' lati C A, B A del Triangolo CAB, gli angoli ACB, ABC saranno uguali, e semiretti; per l'istessa ragione saranno anche semiretti gli Angoli DCB, DBC nel Triangolo CDB; dunque l'angolo composto C sarà retto, come anche l'angolo composto B. Sarà dunque fatto il
(b) *Def.12* Quadrato proposto ABCD. (*b*) Ciò, che &c.

Si descriverà nell'istessa maniera un Parallelo-
Tav.II. Fig. 16. grammo con questo solo divario, che la perpendicolare CA, che si ergerà sopra una dell'estremità della data retta CD, non dovrà essere uguale alla data, ma o maggiore, o minore: nel restante l'operazione sarà l'istessa, che nel Quadrato, e si avrà ABCD Parallelogrammo: il quale sarà rettangolo, secondo la sua costruzione. Ma se vogliamo formare un Parallelogrammo obliquangolo, si faccia, come qui in appresso diremo, trattando della formazione del Romboide.

Tav. II. Fig. 17. Sopra una retta data AB si formerà il Rombo, se si assuma una retta a quella uguale, come AE, e si collochino insieme, sicchè formino un'angolo non retto, ed assunti come centri le due estremità E, e B coll'intervallo di AB, o di AE si descrivano due archi, i quali si segheranno in un punto, co-

me

me C: da questa sezione C se si tireranno due linee fino a B, ed E, si avrà il Rombo ABEC. Poichè ove si tiri la diagonale EB, sarà diviso il Rombo in due triangoli, i quali per avere BA, EA per costruzione uguali ad EC, CB, ed EB commune, saranno tra di loro equilateri: e per conseguenza gli angoli opposti a'lati uguali saranno anche uguali (*a*): dunque l'angolo A sarà uguale all'angolo C, e tutto il B a tutto l' E (essendo gli angoli alterni, che li compongono, uguali tra loro) (*b*), e come per costruzione l'angolo A si è formato non retto, sarà anche l' uguale opposto non retto: Si avrà dunque il Rombo ABEC, come si richiede (*c*).

(a) *Cor.* 1. *del Teor.* 4

(b) *Teor.* 11.

(c) *Def.* 12 *part.* 4.

Tav. II. Fig. 18.

Il formare il Romboide altra differenza non ha dalla formazione già detta del Rombo, che la linea, che debbe all' estremità della data tirarsi, come AE, non sia a questa AB uguale: nel resto esattamente sarà, come la costruzione del Rombo, e sarà costruito il Romboide EABC: a cui si accommoderà facilmente l' istessa dimostrazione, che abbiamo detta nella formazione del Rombo.

PROBLEMA IX.

Formare un qualunque Parallelogrammo uguale ad un triangolo dato.

Tav. II. Fig. 19.

Costruz. Si prolunghi la base del triangolo dato ABC: la base data AC si divida in due parti uguali in E: si tiri per il vertice una parallela LN alla base: si assuma nelle parallele una parte uguale ad una della metà della base divisa, sia

(a) *Probl.* 7. sia RS: si formi su di essa il Parallelogrammo (*a*) PQRS.

Dico, questo Parallelogrammo PQRS essere uguale al triangolo ABC dato.

Dimostr. Si formi tra l' istesse parallele, e su l'istessa base AC del triangolo dato un parallelogrammo LANC. Il triangolo ABC è metà del Parallelogrammo LANC (*b*): mà il parallelogrammo PQRS è metà del Parallelogrammo ALNC per costruzione: dunque il Triangolo ABC, e'l Parallellogrammo PQRS (*c*) sono uguali. Ciò, che &c.

(b) *Cor.* 2. *del Teor.* 9

(c) *Ass.* 5.

La figura rappresenta solamente il Parallelogrammo rettangolo PQRS; mà se si voglia formare un Parallelogrammo Obliquangolo, presa la detta metà della base del triangolo in una delle parallele, e tirando gli altri lati tra l' istesse parallele obliquamente, così perfezionato questo parallelogrammo obliquangolo sarà uguale al detto triangolo, mentre li due parallelogrammi rettangolo, ed obliquangolo sopra l' istessa base, ed uguale sono sempre uguali (*d*) e per conseguenza così l'uno, come l' altro, avendo la metà della base del triangolo, sarebbe uguale al detto triangolo dato (*e*).

(d) *Teor.* 9

(e) *Cor.* 2. *Teor.* 9.

PROBLEA X.

Ritrovare l' area de' quadrilateri, de' triangoli, e de' poligoni rettilinei.

Tav. II. Fig. 15.

PER ritrovar l'Area d'un Quadrato, altro non avrà a farsi, che misurare un lato: indi moltiplicarlo per se stesso: il prodotto darà l'Area del Qua-

Quadrato: come ſe il lato ſarà 8 palmi, moltiplicandolo per ſe, cioè, per 8, il prodotto 64 ſarà l'Area cercata.

In ſimil guiſa potrà averſi l' area del Parallelogrammo rettangolo con queſto divario, che in vece di moltiplicare un lato per ſe, dovrà moltiplicarſi un lato per l'altro, dove formano angolo, cioè il CD per DB, il prodotto darà l'area, come ſe uno è 8, l'altro 3, il prodotto 24 darà l'Area cercata. Poichè eſſendo la geneſi del Quadrato, e del Parallelogrammo Rettangolo la baſe portata parallela alla ſua altezza per ciaſcun punto, che compone il lato ſteſſo, o un de' lati portato parallelo per ciaſcun punto della baſe, tanto ſarà lo ſpazio racchiuſo in dette figure, quanti ſono i punti componenti i due lati: e perchè nel quadrato i due lati ſono uguali, perciò l' iſteſſo ſarà moltiplicar un lato per l' altro, che moltiplicarlo per ſe ſteſſo. Tav. II. Fig. 16.

Se il parallelogrammo non ſarà Rettangolo, mà Obliquangolo, come ABCE, ſi avrà l' area, moltiplicando la baſe AB per l'altezza CD, ch' è la perpendicolare tirata da un' angolo del vertice alla baſe prolungandola, quando ſia di biſogno, e il prodotto di queſta moltiplicazione ſarà l'Area cercata. Tav. II. Fig. 18.

Dimoſtr. Il Parallelogrammo Rettangolo è uguale al Parallelogrammo obliquangolo formato ſopra l' iſteſſa, o ugual baſe, e trà l' iſteſſe parallele (a): ma l' Area del Rettangolo, come ſi è detto ſopra, ſi trova nel prodotto della baſe moltiplicata per l'altezza, che ſono li due lati contigui, che formano l'angolo retto: dunque l' area del

(a) *Teor.* 9

del Parallelogrammo Obliquangolo si trova nell' istesso prodotto risultante dalla moltiplicazione della base comune, o uguale, e dell' altezza comune, o uguale, ch'è l' istessa sì nel rettangolo, come nel parallelogrammo obliquangolo, che si forma trà l' istesse parallele.

Tav. II. Fig. 17. 18 L' area del Rombo, e Romboide si avrà, ove si assuma per base uno de' lati come AB, a cui si tiri una perpendicolare CD dall' angolo opposto C, prolungando la detta base nel sito opportuno.

Si moltiplichi la base AB per la perpendicolare CD, il prodotto ne farà l'area. Perciocchè equivalgono il Rombo, e'l Romboide al parallelogrammo Rettangolo, ch'abbia l' istessa base, essendo tra l'istesse parallele: ma questo ha per area sua il prodotto de' lati contigui, che sono come la perpendicolare, e la base: dunque l' area del Rombo, e del Romboide sarà il prodotto della perpendicolare moltiplicata per la base.

Tav. II. Fig. 19. L' area del triangolo ABC si avrà, se si moltiplicherà la base AC nella metà della sua altezza BE, o l'altezza tutta B E nella metà della base AC. Così se l'altezza sarà 6, la base 4, il prodotto di 3 (ch'è la metà dell'altezza) per 4, che farà 12, sarà l' area cercata del triangolo ABC.

Tav. II. Fig. 19. O veramente si assuma un lato per base AC: dall' angolo opposto si tiri una perpendicolare BE sul lato assunto per base: si moltiplichino tra loro: e'l prodotto si divida per 2: il quoto darà l'area. Così la perpendicolare BE 6 si moltiplichi per la base 4: il prodotto sarà 24, il quale dividendosi per 2 darà 12. Perciocchè l' area del parallelogrammo rettangolo si ha per la moltiplica-

zio-

zione de' lati contigui (*a*) : mà il triangolo è metà del parallelogrammo (*b*) : dunque dovrà tutta l' area del parallelogrammo dividersi per metà , o sia per 2 : quindi nel primo modo si prende tutta la base , e metà dell' altezza , o tutta l'altezza , e metà della base . (a) *Probl.* 10. *p.* 2. (b) *Cor.* 2 *del Teor.* 9

Vedasi anche la fig. 29 della Tav. I , ove la perpendicolare ED è l'altezza del triangolo obliquangolo ABE , la di cui area essendo uguale a quella del triangolo ACB, ch'è la metà del Parallelogrammo AL , resta conosciuta nel prodotto risultante dalla moltiplicazione della metà dell'altezza per la base, o dell'altezza tutta per la metà della base , come si è detto .

Notisi , che nel Triangolo Rettangolo l'altezza del triangolo è la stessa dell' uno de' due lati , che sono circa l' angolo retto .

Negli altri Triangoli si tiri dall'angolo opposto al lato assunto per base una perpendicolare . Ove non si potesse tirare la perpendicolare dentro il triangolo, si prolunghi la base AB in C : e dal punto M altezza dell'angolo, si tiri sulla base prolungata la perpendicolare MC . Tav. II. Fig. 20.

Dalle cose già dette non sarà difficile l' aver l'area di un Poligono , o sia Regolare, o Irregolare . Si trovino i punti , o sieno gli angoli opposti più lontani , come AB , e si tiri una linea , su la quale da ciascun' altro angolo si tirino altre perpendicolari , FD, PX , e tirando la LO parallela ad AB, si tirino dalle estremità L , O altre perpendicolari OR, LC sopra l' istessa AB : e finalmente dall'angolo M si tiri la perpendicolare MG sopra la LO . Verrà così commodamente diviso Tav. II. Fig. 21.

il

il Poligono propoſto, contenendo un Quadrato, un Parallelogrammo, e ſei Triangoli Rettangoli: ciaſcuno darà la ſua area nella maniera poc' anzi diviſata: ſi uniſcano inſieme tutte le aree, e ſi avrà l' area intera del poligono, che ſi cerca.

U S I.

I. *Dal Corollario 1. del Teorema I. ſi dimoſtra, come gli Aſtronomi uſando il Quadrante, o Seſtante miſurino la diſtanza di un qualche aſtro, o corpo celeſte dal Zenith, e la diſtanza del medeſimo dall' Orizonte.*

Tav. III. Fig. 1. SIa il Sole, o qualche Aſtro in S: ſi diriga il Quadrante BAEC in maniera, che l'Oſſervatore, applicando l' occhio, vegga per le diottre O, B, (o pe'l cannochiale, che ſuole anche in vece delle diottre attaccarſi a sì fatti iſtrumenti) il detto aſtro S. Poſta così la direzzione del Quadrante, il Pendolo AC ſegnerà i gradi nell'arco dell' iſteſſo Quadrante.

Dico 1, che tanti gradi è lontano il corpo celeſte S dal vertice Z, qnanti ne ſegna il Pendolo AC nell'arco CB del Quadrante.

Dimoſtr. Come la retta CAZ del Pendolo ſega la retta viſuale BS nel punto A, ſaranno gli angoli SAZ, CAB oppoſti al vertice tra loro uguali (*a*): dunque ſaranno ancora proporzionali gli archi SZ, CB corriſpondenti agli angoli uguali (*b*): mà l' arco SZ è la miſura della diſtanza dell'

(a) *Cor. 1. del Teor. 1.*
(b) *Def. 7.*

dell' astro S dal vertice Z, e l' arco CB contiene l' istessa misura di distanza proporzionale segnata ne' gradi del Quadrante per mezzo del Pendolo: dunque tanti gradi sarà distante l'astro S dal vertice Z, quanti ne segnerà il Pendolo nell' arco del Quadrante.

Dico 2, l' arco EC essere la distanza del medesimo astro S dall'Orizonte HI. (Non si considera l'altezza del Quadrante, poichè è insensibile riguardo alla gran distanza dell'obietto.)

Dimostr. Gli angoli ZAH, BAE sono uguali, perchè angoli de' quadranti del cerchio, e perciò ambedue retti (*a*): dunque se si sottragono gli angoli SAZ, CAB dimostrati per la prima parte uguali, resteranno uguali gli angoli SAH, EAC (*b*): dunque tanti gradi sarà dall' Orizonte HA distante l' astro S, quanti gradi si noteranno dal pendolo nell'arco EC.

(a) *Def.* 7.

(b) *Ass.* 2. *p.* 2.

II. *Dall' istesso Corollario del Teorema I. si dà la ragione, perchè di più obietti, che sieno tra loro uguali, il più lontano apparisca più piccolo, il più vicino apparisca più grande.*

Sieno due obietti uguali, AB più vicino all' Osservatore, il di cui occhio trovasi in I: e sia l' altro obietto CD più lontano.

Tav. III. Fig. 2.

Dico, che l' obietto A B apparisce più grande, e CD minore.

Dimostr. Supponiamo qui dal Trattato dell' Ottica, che (serbata l' uguaglianza nel resto) l' obietto apparisce presso a poco di tanta grandezza, quanto è l'angolo, che da raggi visuali si forma nell' occhio.

Ciò

Ciò posto, l'angolo AIB è formato da' raggi provenienti dall' obietto AB; ed incrociati nell' umore cristallino I dell' occhio passano alla retina, ove dipingono al rovescio l' obietto EF, formando nel cristallino I un'altro angolo EIF opposto al vertice del primo AIB. Similmente l'obietto CD forma l' angolo visuale esteriore CID uguale al suo opposto VIO formato da'raggi *Cior*, D*Ium*, avendo per misura nella retina l'arco *mr*. Essendo dunque l' angolo AIB maggior dell' angolo CID, perchè quello contiene questo: L' obietto AB sotto l'angolo maggiore comparirà più grande dell' obietto CD sotto l' angolo minore CID.

Mà applicando qui all'Ottica la ragione Geometrica del corollario 1. del Teorema I. si rileva, che l'angolo AIB essendo uguale all'angolo Ottico interno suo opposto EIF, ed avendo questo per misura l'arco della retina, che comprende l'obietto dipinto EF, ancora al detto angolo AIB corrisponde per misura nell' apparenza dell' obietto l' istessa porzione, ò arco della retina EF: ma quest' EF è maggiore dell'apparenza *uo* nella porzione della retina corrispondente all'angolo *mir*, o al suo uguale opposto CID: dunque l' obietto AB più vicino, che comparisce sotto l' apparenza EF, o sotto l'angolo AIB maggior dell' angolo CID, comparisce ancora maggiore dell'altro CD, il quale comparisce sotto l' angolo minore CID, o sotto l'apparenza minore *uo*.

III. Dal

III. Dal Corollario del Teorema II. si ha la maniera facile di poter tirare una linea, che sia parallela ad un'altra, a cui non si può tirar la linea secante, a cagion di qualche impedimento nel terreno intermedio.

E' Questa maniera quanto facile, altrettanto necessaria a sapersi pe'l continuato uso, che nell' Architettura se ne fa, dove sarà necessario far sorgere un muro, che sia parallelo ad un' altro, o per costruire una mezza Luna, una Cortina, una Via Coperta nella Militare Architettura, o simile. Tav. III. Fig. 3.

Sia data la linea DC, e si cerca tirar una parallela a questa dal punto A, non potendosi tirar la secante DA nel terreno. Si osservi col Quadrante, o con qualche altro Istrumento Goniometrico l'angolo ADC fatto dalla linea data DC, e dalla visuale DA; si faccia l' angolo alterno in A (ove dovrassi tirar la parallela) a questo uguale DAB (*a*), sarà la BA la parallela (*b*), che si cerca.

(a) *Probl.* 5.
(b) *Cor. del Teor.* 2

IV. Dal Teorema III. si può misurare la distanza di due luoghi inaccessibili, cioè quando non si possa andare dall' uno all' altro luogo.

SIano A, e B i due luoghi inaccessibili da misurarsi. Da' punti A, e B si tirino giù due rette, sicche l'una vada incontro l' altra, e vengano a segarsi in qualche punto, saranno le rette AX, BX: dal punto della sezione X si prolunghino tan- Tav.III. Fig. 4.

tanto, che ſieno uguali alle già tirate in XD, XE, ſi congiungano per la retta DE.

Dico, la diſtanza inacceſſibile tra i due luoghi A, e B eſſere uguale alla DE.

Dimoſtr. I due triangoli AXB, DXE ſono tra loro equilateri: perciocchè AX, BX ſono reſpettivamente uguali a XE, XD per coſtruzione, e l'angolo X, o AXB, per eſſere oppoſto al vertice, è uguale a Z, o a DZE (*a*): dunque la baſe AB ſarà uguale alla baſe DE (*b*). Ciò, che &c.

(a) *Cor.* 1 *del Teor.* 1
(b) *Teor.* 3

V. *Dal Teorema VI. ſi dimoſtra quanta grandezza debba avere una ſtatua poſta in alto, acciò compariſca uguale ad altre poſte nel baſſo più vicino all'occhio, che veda tutte da un certo ſito.*

Tav. III. Fig. 5.

NEll'uſo II. abbiamo data la ragione, perchè un' obietto più lontano dall' occhio appariſca minore di un' altro obietto più vicino: ora diremo la maniera di determinar la grandezza dell' obietto più lontano per farlo apparire uguale a quella degli altri obietti più vicini, eſſendo guardati dall' occhio poſto in un certo ſito.

Si deſidera mettere una ſtatua in alto BI, o in luogo più alto IS, le quali compariſchano all' occhio poſto in A d' ugual grandezza a quella dell' altra ſtatua poſta nel baſſo OB.

Per far ciò, ſi determinerà la vera grandezza delle ſtatue alte nella maniera ſeguente.

Dal punto A, come da Centro, ſi conſideri fatto un' arco di cerchio CDEFR: ſi tiri la retta AFS, che determina l' angolo OAS di tutta l' altezza: dividaſi ugualmente detto angolo in due, tre, ò più

più parti, quante se ne vogliano colle linee ADB, AEI. Dico, che le statue BI, ed IS compariranno all' occhio posto in A della stessa misura, o grandezza, con che si vede la statua OB.

La dimostrazione si fonda nella legge dell'Ottica sopra accennata, per la quale gli obietti, che si vedono sotto angoli uguali, compariscono uguali: essendo dunque ciascuna statua in alto BI, IS veduta sotto il suo angolo DAE, EAF ciascuno uguale all' angolo OAB compariranno tutte uguali vedute dall' occhio posto in A. Donde ne segue, che le statue alte devono aver quella certa, e determinata grandezza, acciò che comparischano uguali a quell' altra OB posta nel basso, quando sieno tutte vedute dal punto A.

VI. *Dal Corollario 2. del Teorema IV. dimostrasi la maniera di misurar l'Altezza di qualche luogo.*

SI formi un Triangolo Isoscele di legno, o di altra materia ACB, il quale sia rettangolo in B: si situi il detto triangolo in modo, che un lato sia orizontale AB, e l'altro a questo uguale CB sia verticale (il che potrà conseguirsi per mezzo del pendolo, che potrà farsi cadere dal punto C). Ciò posto, si fissi il punto F, ch' è la base della Torre: indi si applichi l'occhio in A, e dispongasi un sito tale, che la direzione della linea visuale AC vada a terminare nella punta E della Torre, che vorrà misurarsi. Tav.III. Fig. 6.

Dico, l'Altezza della Torre EF, essere uguale all' Intervallo AF.

Dimostr. Il lato del triangolo BC per costruzione è parallelo all' altezza FE della Torre: dunque l'angolo FEC interno sarà uguale all' esterno BCA (*a*); ed essendo retto EFA, ed A semiretto per costruzione, sarà E semiretto ancora (*b*): e'l triangolo AFE sarà isoscele (*c*): che perciò il lato EF sarà uguale ad AF. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 2 *p.* 2. (b) *Cor.* 2. *del Teor* 7 (c) *Cor.* 2. *del Teor* 4.

L'istesso potrà osservarsi adoperando una norma, o angolo retto ABC colli lati AB, BC uguali (e questo è quell' che più chiaramente si rappresenta nella figura citata). Sia dunque disposta la norma con un lato perpendicolare al terreno, e parallelo all'altezza, che debbe misurarsi: e si fermi in quel sito, dove possa indrizzarsi la vista esattamente secondo il lato visuale ACE, e si troverà, che l'altezza FE sarà uguale alla distanza AF, come si è dimostrato.

VII. *Dal Teorema V. si può determinar la Larghezza Inaccessibile di un Fiume.*

Tav. III. Fig. 7.

Sia la larghezza BC: si prolunghi la BC a piacere, e nella sponda si tiri una perpendicolare CA lunga, quanto si voglia, e se ne noti il termine di essa con un corpo, o segno visibile, che ivi si fissi. Si osservi col Quadrante l' angolo A, che ivi si forma dalle linee CA, BA. Nell' istesso sito, o punto A si formi colle linee di osservazione AC, AD (mediante l' istrumento,) un' altro angolo CAD uguale a CAB.

Dico, la Larghezza del Fiume essere uguale alla linea CD.

Dimostr. Ne' triangoli BAC, DAC il lato AC è comè commune: gli angoli in C ſono retti, ed uguali (a): gli angoli in A per l'oſſervazione ſono anche uguali: dunque gli altri due lati ſono uguali (b): e perció la CB larghezza del fiume inacceſſibile ſarà uguale a CD. Ciò, che &c.

(a) *Coſtr.*

(b) *Teor.5*

VIII. *Dal Teorema VII. conoſciamo col famoſo Ricciolio la miſura dell' ambito della Terra.*

STabilì egli due luoghi tra loro diſtanti, i quali furono l' altezza del campanile di Modena (com' egli ſcriſſe nel lib.5. cap.33 della Geograf. Riform.) e la ſommità del monte Paterno vicino Bologna, e nel modo ſeguente ſtabilì la ſua dimoſtrazione.

Sia AD FC la ſuperficie della Terra: ſia T la ſommità del campanile: P il vertice del monte Paterno: DF l'arco tra le falde dell' uno, e dell' altro loco. Tav.III. Fig. 3.

Col quadrante avendo oſſervato l' angolo BTP ritrovollo di $90^{\circ}. 15'. 7''$, e miſurato l' angolo BPT, ritrovollo di gradi $89.26'.13''.27'''$ (il che ſi ottiene pe'l pendolo dal vertice T convergente verſo il centro della Terra B, e la linea viſuale T P.)

Eſſendo dunque la ſomma di tutti tre angoli B, T, P, di 180 gradi, da queſti ſottrattane la ſomma di due angoli miſurati T, e P, cioè, $179. 41'. 20''. 27'''$, reſta la differenza $18'. 39''. 33'''$. Dunque il terzo angolo B, che ſi formerebbe dalle linee nel centro della Terra, la di cui misura è l'arco DF, è di 18.' 39." 33.'''

Mà misurato l'intervallo DF, ch'è 20016 $\frac{10}{504}$ cioè venti milla, e sedici passi Bolognesi con dieci cinquecentesime quarte, e facendo la regola di proporzione, determinò la misura del grado terrestre 64563. Moltiplicando finalmente detta misurà del grado terrestre 64563 per 360 quanti sono i gradi dell' intiero cerchio della Terra, conchiuse, che tutto l'Ambito era di passi 23179680. Ciò, che &c.

IX. *Dal Teorema VIII. potrà un Campo di figura Quadrata dividersi in due o quattro parti uguali.*

Tav. I. Fig. 25. LA verità del Teorema stesso ce ne somministra il modo, ove si tiri la diagonale; questa dividerà il dato campo quadrato, o parallelogrammo in due triangoli uguali; e così resterà ugualmente divisa in due parti la figura data.

Se poi dagli altri due angoli si tirerà un' altra diagonale, questa intersecando l'altra, dividerà il quadrato, o paralellogrammo in quattro parti uguali; perciocchè formeransi quattro triangoli uguali per l'istessa ragione.

X. *Dal medesimo Teorema VIII. si scioglie il seguente Problema.*

SE dovesse dividersi tra due Fratelli un campo parallelogrammo in due parti uguali colla condizione, che 'l maggiore possa sciegliere nella la parte del fratello minore una porzione con Lasciargliene nella sua parte un' altra porzione uguale, si farà nel modo seguente.

Si tiri nel campo B A D E la diagonale AE; già sarà metà per ciascheduno; sarà del maggiore ABE, del minore EDA. Or voglia il maggiore la parte ELG nel campo del minore, e debba lasciargliene nel suo altrettanto. Tav.III. Fig.11.

Dal punto G, che comprende la parte desiderata, si tiri una retta, la quale passi per la metà della diagonale L fino all' altra parte nella sua porzione ABE.

Dico, che se si prenderà il trapezio BCLE col triangolo ELG, lasciando al minore il trapezio ALGD col triangolo CLA, saranno le parti tra loro uguali.

Dimostr. Ne' triangoli CLA, ELG gli angoli LAC, LEG per essere alterni sono uguali (*a*); ed uguali parimente sono gli angoli ad L, perchè opposti al vertice (*b*): e li lati LA, LE (che sono tra li detti angoli uguali) sono uguali per costruzione, mentre sono metà della diagonale: dunque gli altri due lati LC, CA sono uguali a LG, GE (*c*): e'l terzo angolo C sarà uguale al terzo G (*d*): e per conseguenza i due triangoli CLA, ELG sono uguali: se dunque in luogo di CLA si sustituisca ELG, resteranno il trapezio BCLE col triangolo E L G uguale al trapezio ADGL col triangolo CLA. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 2 *p.* 1.
(b) *Cor.* 1. *del Teor.* 1
(c) *Teor.* 5 *p.* 2.
(d) 2. *P. del cor.* 2. *del Teor.* 7

XI. *Dai Corollarii 1. e 2. del Teorema VIII. si deduce la maniera di misurare l'Altezza de' monti, e la Larghezza delle loro basi.*

Tav.III. Fig. 9. *Costruz.* Sia il monte AI: si situi nell' infimo piano del monte una norma in maniera, che il lato FL sia perpendicolare, e l'altro LC sia parallelo all' orizonte: nel punto C sia situata nella stessa maniera un' altra norma CEB: così dal B si fissi altra norma BDA, e successivamente si adattino altre norme fino all' estremità del monte, se sia più alto.

Dico, le perpendicolari insieme unite daranno l' altezza, come le orizontali unite daranno la larghezza richiesta del monte.

Dimostr. Si perfezionino i parallelogrammi. Nel primo parallelogrammo LI il lato LF è uguale (*a*) al lato HI; nell' altro parallelogrammo il lato CE è uguale ad HN, e BD ad NA: dunque se si uniranno tutti questi lati esterni paralleli agli interni daranno l'altezza tutta interna IA. Similmente nel parallelogrammo DI il lato AD è uguale al lato IO: nell' altro parallelogrammo EO il lato BE è uguale ad OM, e nel parallelogrammo LM il lato CL è uguale ad MF: se dunque si uniranno tutti questi lati esterni paralleli agli interni orizontali, daranno in somma la larghezza tutta orizontale interna FI fino alla perpendicolare interna del monte. Ciò, che &c.

(a) *Cor.2. del Teor.8*

XII. *Dai*

XII. *Da' Corollarii medeſimi ſi può dal numero de' Scalini uguali conoſcere l' Altezza del piano di una Caſa.*

D*imoſtr.* Ciaſcuno de'ſcalini ſi conſidera, come un parallelogrammo; che perciò i lati oppoſti ſono uguali (*a*), ed uguali per conſeguenza ſono le parti del muro, dove ciaſcuno de' ſcalini ſi appoggia: dunque uguali ſono l' altezze de' ſcalini ab, cd, ef, &c. alle parti corriſpondenti pq, qr, rs, &c. del muro da una parte, e dall'altra: dunque in tante parti è diviſo il muro, quanti ſono i ſcalini, che ad eſſe ſono appoggiati: tanto dunque d' altezza ha il muro zp, che giugne al piano, quanta ne formano tutti i ſcalini inſieme uniti: Se dunque 50 ſaranno eſſi di numero, di mezzo palmo, tutta l' Altezza ſarà di 25 palmi. Ciò, che &c. Tav. III. Fig. 10.

(a) *Cor. 2. del Teor. 8.*

XIII. *Dal Teorema X. Si può dimoſtrare la diſtanza, che paſſa tra l'Apice d'una torre, e l'Oſſervatore, purchè ſi ſappiano gli altri due lati.*

SIa il lato AB 8 canne: il lato CB 6 canne. Dico, il lato CA diſtanza della ſommità della Torre all' Oſſervatore eſſere di canne 10. Tav. III. Fig. 12.

Dimoſtr. Eſſendo l'angolo ABC retto, e'l lato CA oppoſto ad eſſo, ſarà il quadrato fatto ſopra CA uguale ai quadrati CB, AB (*b*): ma il quadrato CB è 36 canne, e'l quadrato AB 64: dunque il quadrato CA ſarà 100 canne: eſtratte le radici da quadrati 36, e 64 l' uno darà 6, l' altro

(b) *Teor. 10*

darà 8: ed estratta la radice da 100, darà 10: dunque dieci canne sarà la distanza tra la sommità della torre, e l' Osservatore. Ciò, che &c.

XIV. *Dal Teorema X. ancora si può conoscere, quanto un quadrato superi un' altro.*

Tav. II. Fig. 22. SI pigli un lato del maggiore quadrato AB, e si situi orizontale: si assuma per centro un' estremità di esso B, e si descriva un cerchio coll' intervallo di tutta la data AB: si adatti nel diametro un lato del quadrato minore BC, sicchè faccia una linea col lato AB del quadrato maggiore, la quale sarà AC: dal termine della linea minore C si eriga una perpendicolare, che termini nella periferia del cerchio, e sia CE.

Dico, CE esser la differenza tra il quadrato AB, BC.

Dimostr. Si tiri dal centro B la linea BE fino alla circonferenza. Il quadrato BE, come fatto sopra l' ipotenusa (*a*) è uguale a due quadrati BC, CE: mà BE è uguale ad AB, perchè raggi dell' istesso cerchio (*b*): dunque il quadrato AB è uguale ai due quadrati BC, CE: dunque il quadrato di AB supera il quadrato BC per tutto quello, che si contiene nel quadrato di CE, e conseguentemente il quadrato di CE è l'eccesso del Quadrato AB sopra il quadrato BC. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 10

(b) *Def.* 7.

XV. *Dal*

XV. *Dal Problema VI. conosciamo, come possa aversi una linea, in cui dee gittar l' ombra uno stile in tutto l'anno nel mezzo giorno, che dicesi Linea Meridiana.*

SI assuma in un piano quanto più perfetto si può un punto, e costituitolo centro, come nel caso è B, si tiri uno, o più circoli concentrici CMD, LNO. Tav. III. Fig. 13.

Nel centro stesso si erga uno stile BA, che sia perfettamente perpendicolare al piano, e d' una altezza proporzionata, acciò l' estremità dell'ombra di esso possa segar, o toccar la circonferenza di qualcheduno de' detti cerchi concentrici.

Un' ora (o più, secondo si crede) prima del mezzo giorno si osservi il punto, in cui l' ombra dello stile sega il cerchio, e si segni, come D. Un' ora o più doppo il mezzo giorno, si osservi dove segherà il cerchio l'ombra dell'istesso stile; e si segni quel punto, purchè corrisponda al tempo di prima, come in C. Da' punti segnati C, D tirando linee al centro si formerà l'angolo CBD. Si divida l'arco C D nel punto di mezzo M. Si tiri la linea BM, questa sarà la Meridiana.

Qualora lo stile butterà l'estremità dell'ombra in qualche punto della linea meridiana BNM, allora sarà il mezzo giorno.

L' istessa linea meridiana si avrebbe BNM, se l' ombra dell' estremità dello stile prima di mezzo giorno segnasse il punto O, e doppo il medesimo mezzo giorno segasse il punto L nell' uscire del cerchio LNO: poichè dividendo l' arco LO nel

pun-

punto di mezzo N dovrebbe tirarsi detta Linea Meridiana BNM.

Per metter in pratica quest' uso non sarà necessario tirar le linee CB, DB, che formano l' angolo CBD, mà basterà, che l arco compreso, ch' è misura di detto angolo, si divida in mezzo nel punto M, o sia N, se si tratta dell' arco LNO.

XVI. *Dal Problema VII. Si ha la maniera facile di descrivere le figure Ovali.*

Tav.II. Fig. 23.

Sopra una retta assunta a piacere AB si formino due triangoli equilateri (a) ACB, ADB, de'quali si prolunghino indefinitamente i lati CA in G; CB in H; DA in E; DB in F.

Dal punto A della commune base coll' intervallo, o sia apertura del compasso presa a piacere si descriva un' arco, che giunga a toccare i lati prodotti EG, e trasportato questo intervallo stesso nell' altro punto della base B, si descriva nell' istesso modo un' altro arco FH.

Indi fissato un piede del compasso nel vertice D del triangolo, e preso l'intervallo d' un' de'lati prolungati, come F, si tiri un' arco fino al congiungimento dell' arco FE; e fissata la punta del compasso per l'altro vertice C si descriva un' altro arco GH fino al congiungimento con gli altri archi già fatti, e si avrà la Ovale, che si vuole.

La grandezza maggiore, o minore dipende dal prendere l' intervallo nel descrivere il primo arco dell' un de' punti della base de' triangoli.

(a) *Probl.* 7

PAR-

PARTE II.

Il cerchio formerà l' argomento delle dimostrazioni di questa seconda Parte ; Le linee tirate dentro , e fuori di esso , gli angoli , e le figure che dentro di esso formar si possono , e quelle , che si formano intorno ad esse , ci daranno la materia delle proposizioni . Tutto sarà spedito per undici Teoremi , e dieci Problemi co' respettivi corollarii , cui aggiugneremo secondo il metodo propostoci alcuni usi . Oltre le definizioni già premesse nella prima Parte , alcune altre quì n' esporremo , che al cerchio più propriamente si affanno .

DEFINIZIONI.

1. I Cerchi diconsi uguali , se uguali saranno i Diametri , o Semidiametri , come AB , CD ; o se sovrapposto l' uno all' altro , esattamente combaceranno . Tav. IV. Fig. 1.

2. Una linea A B dicesi toccare il cerchio , quando lo tocca in un Punto , e per quanto si prolunghi , non lo sega . Tav. IV. Fig. 2.

3. Due cerchi diconsi toccarsi , quando o interiormente , come OCM , o esteriormente , come PML s' incontrano in un punto , come in C l' interiore , in M l'esteriore , mà non si segano . Tav. IV. Fig. 2.

4. Due linee sono ugualmente distanti dal centro, come sono FA, CB quando le Perpendicolari tirate dal centro ad esse , come DE , GE , sono Uguali . Tav.IV. Fig.3.

5. Segmento d' un cerchio è una porzione di esso diviso per una retta , che non passa pe'l centro . La dividente AB dicesi Corda : la porzione mino- Tav. IV. Fig. 4.

minore diceſi Segmento Minore ADB; la porzione maggiore ACB diceſi Segmento Maggiore.

Tav. IV. Fig. 5. 6. Angolo BAE nel ſegmento, o eſiſtente nel ſegmento diceſi quello, che ſi fa da due linee BA, EA, tirate dalle due eſtremità della corda dividente BE, o baſe del ſegmento, e ſi terminano facendo detto angolo in qualche punto A della circonferenza.

Diceſi ancora queſt' angolo Inſiſtere, o reggerſi ſopra quella porzione di circonferenza dell'iſteſſo cerchio, la quale eſſendo oppoſta a detto angolo, ſerve come di baſe, o ſoſtegno, come il ſegmento BFGE, benché non ſia tirata la corda BE, che divide detto cerchio in due ſegmenti BOAE, e BFGE: e così l' angolo BAE diceſi *eſiſtente* nel ſegmento BOAE, ed *inſiſtente* nell' altro ſegmento BFGE, ſopra di cui poſa le gambe, avendo il vertice A eſiſtente nell'altro ſegmento BOAE.

Tav. IV. Fig. 4. 7. Settore diceſi una figura formata da due ſemidiametri OM, ON, e dall'arco MN; e l'angolo MON chiamaſi Angolo del Settore.

Tav. IV. Fig. 2. 8. L'angolo ACO, che ſi fa dalla tangente AC, e dalla circonferenza CO, che tocca il cerchio nel punto C, dove la tangente tocca il cerchio, ſi chiama Angolo del contatto.

Tav. IV. Fig. 30. 9. Figura Ordinata, o Regolare è quella, ch' è equilatera, ed equiangola.

Tav. IV. Fig. 30. 10. Una figura rettilinea diceſi Iſcritta nel cerchio, quando tutti i vertici degli angoli toccano la circonferenza cava.

Tav. IV. Fig. 26. 11. Allora diraſſi la figura rettilinea Circoſcritta al cerchio, quando tutti i lati toccano il Cerchio, come A, C, B, D.

TEO-

TEOREMA I.

Se un' angolo posa sù la metà del cerchio, è Retto: se posa, o insiste sopra un segmento maggiore del semicerchio, sarà Maggior del retto, e se insiste sopra un segmento minore del semicerchio, sarà Minore del retto.

Dimostr. Sia l'angolo BAC, che posa sulla circonferenza BFC, metà di tutta la circonferenza del cerchio: (dell'angolo che posa, o insiste nel semicerchio, si può dire ancora, che esiste col vertice nell'altro semicerchio, o metà della circonferenza, secondo la definizione 6). Si tiri dal centro il Semidiametro DA. Nel triangolo isoscele DBA gli angoli B, e DAB sono uguali (*a*): per l' istessa ragione nel triangolo DCA gli angoli C, e DAC sono uguali: dunque li due angoli in A, cioè, tutto l'angolo A, è uguale agli altri due insieme B, e C: Mà come nel triangolo BAC tutti li tre angoli, cioè, B, e C, ed il totale A fanno due retti, o la somma di 180 gradi (*b*); quell' angolo totale A uguale a gli altri due B, e C, avrà la metà di 180, cioè, 90 gradi; dunque sarà Retto. Ciò, che &c.

Tav. IV. Fig. 5.

(a) *Cor. 2 del Teor. 4 P. I.*

(b) *Cor. 2. del Teor. 7 P. I.*

Dimostr. della 2. parte. Sia il segmento BFGE maggiore del semicerchio: sopra questo segmento insista, o posi l' angolo BAE. Quest'angolo è maggiore dell'angolo BAÇ, che insiste, o posa nel semicerchio BFC, il quale si è dimostrato retto per la prima parte: dunque BAE è Maggior dell'angolo retto. Ciò, che &c.

Di-

Dimostr. della 3. parte. Sia il segmento BFG minore del semicerchio BFGC; sopra questo segmento posi, o insista l'angolo BAG; quest'angolo è minore dell'altro BAC, che insiste, e posa nel semicerchio, il quale si è dimostrato retto: dunque BAG è Minore dell' angolo retto. Ciò, che &c.

TEOREMA II.

L' Angolo del centro è Doppio dell'Angolo della Periferia, se tutti e due posano su l' istesso arco.

Tav. IV. Fig. 6. D*Imostr.* Si tiri il diametro AE. Nel Triangolo isoscele DAB gli angoli DAB, DBA sono uguali tra loro (*a*) essendo opposti ad uguali semidiametri (l'angolo A si oppone a DB; l'angolo B si oppone ad AD, che per esser raggi dell' istesso cerchio sono uguali): Mà l'angolo BDE, per essere esteriore, è uguale ai due interiori, ed opposti DAB, DBA (*b*): dunque l' angolo BDE è Doppio del solo DAB.

Parimente gli angoli DAC, DCA, essendo opposti ad uguali semidiametri, sono tra loro uguali, mà l'angolo CDE, per essere esteriore, è uguale a tutti e due gli interiori, ed opposti C, ed A (*c*): dunque CDE è doppio del solo DAC: dunque tutto l'angolo nel centro CDB sarà Doppio di tutto BAC nella Periferia. Ciò, che &c.

(a) *Cor. 2. del Teor. 4 P. I.*

(b) *Cor. 1. del Teor. 7 P. I.*

(c) *Per l' istessa.*

Corollario.

GLi angoli della circonferenza ſono tutti Uguali tra loro, ſe avranno l' iſteſſo arco per baſe. Tav. IV. Fig. 7.

Dimoſtr. Ciaſcun' angolo della circonferenza BLC, BGC, BFC, è metà dell' angolo BAC nel centro (*a*): mà le metà dell'iſteſſo tutto ſono uguali tra loro (*b*): dunque gli angoli BLC, BGC, BFG, che ſono nella circonferenza, ed anno l'iſteſſo arco BC per baſe, ſono tra loro Uguali. Ciò, che &c. (a) *Teor.* 2 *P II.* (b) *Aſſ.* 5.

Eſſendo tutto l'arco, ſu cui poggia l'angolo al centro miſura di eſſo, la Metà di eſſo arco ſarà la miſura dell'angolo della periferia, eſſendo queſto metà dell'angolo al centro.

TEOREMA III.

Ne' cerchi uguali ſe le Corde ſaranno uguali ſaranno anche gli Archi uguali; e ſe gli Archi ſaranno uguali, ſaranno anch'eſſe le Corde uguali.

DImoſtr. *della* 1. *parte.* Eſſendo i triangoli BAC, EDF tra di loro equilateri (poichè BA, AC: ED, DF ſono raggi di cerchi uguali, e le baſi BC, EF ſono per l'ipoteſi uguali) ſono anche Equiangoli (*c*): dunque ſe ſi ſovrapporranno gli angoli B, C combaceranno cogli angoli E, F; e l'angolo al centro A combacerà coll' angolo al centro D, dunque l'arco BLC caderà ſopra l' arco EKF: e l' arco BSC ſopra l' arco EHF: dunque le Tav. IV. Fig. 8. (c) *Cor.* 1 *del Teor.* 4 *P. I.*

le corde BC , EF avranno i loro archi corriſpondenti anche uguali . Ciò , che &c.

Dimoſtr. della 2. parte. L' arco BLC è uguale all' arco EKF (*a*) : dunque ſe ſi ſovrapporranno, combaceranno : dunque i punti B, C caderanno eſattamente ſopra i punti E F : dunque la corda B C caderà eſattamente ſopra la corda EF. Ciò, che &c.

(a) 1. *Par. del Teor.* 3 *P.II.*

Corollario 1.

Tav.IV. Fig. 8.

SE gli Angoli ne' cerchi ſarannno Uguali anche gli Archi ſaranno Uguali .

Dimoſtr. I lati BA , AC : ED , DF per eſſer raggi di cerchi uguali, ſono uguali (*b*) : e l'angolo al centro A è per ipoteſi uguale all'angolo al centro D : dunque la baſe BC ſarà uguale alla baſe EF (*c*) : dunque l'Arco BLC ſarà uguale all'Arco EKF . (*d*) Ciò , che &c.

(b) *Def.* 7.
(c) *Teor.* 3 *P. I.*
(d) *Teor.* 3 *P.II.*

Corollario 2.

Tav.IV. Fig. 8.

CIò , che è dimoſtrato nel primo Corollario riſpetto agli angoli al centro , s' intende anche riſpetto agli angoli della Circonferenza .

Dimoſtr. Gli angoli alla periferia BSC , EHF ſono uguali (*e*) : ma gli angoli della periferia ſono metà degli angoli al centro BAC , EDF (*f*) : dunque queſti angoli nel centro ſono uguali tra di loro : dunque gli archi , BLC, EKF, corriſpondenti a queſti angoli uguali , ſaranno anche uguali , eſſendo anche oppoſti agli angoli BSC, EHF fatti nella Periferia . Ciò , che &c.

(e) *Cor. del Teor.* 2 *P.II.*
(f) *Teor.* 2 *P.II.*

Se-

Corollario 3.

SE gli Archi ſono uguali, gli Angoli ſono anche uguali, o ſiano gli Angoli al centro, o quelli nella periferia.

Dimoſtr. Se gli archi BLC, EKF ſono uguali, le corde BC, EF ſono anche uguali (*a*); e come gli altri lati BA, AC, ED, DF per eſſer raggi di cerchi uguali, ſono uguali, i triangoli ſaranno tra loro equilateri: Dunque ſaranno equiangoli (*b*): dunque gli angoli al centro BAC, EDF ſaranno uguali.

Gli angoli della periferia ſono tra loro uguali (*c*), mà queſti ſono metà degli angoli (*d*) al centro: e per conſeguenza Parti uguali di Tutti uguali (*e*): dunque ſaranno per gli archi uguali anch' eſſi Angoli uguali. Ciò, che &c.

Tav. IV. Fig. 8.

(a) *P.* 2. *del Teor.* 3 *della P. II*

(b) *Cor.* 1 *del Teor.* 4 *P. I.*

(c) *Cor. del Teor.* 2 *P. II.*

(d) *Teor.* 2 *P. II.*

(e) *Aſſ.* 5.

Corollario 4.

NEl Quadrilatero iſcritto nel cerchio, gli angoli oppoſti ſono uguali a due retti.

Coſtruz. Si tirino nel Quadrilatero due diagonali DB, AC, per le quali verrà diviſo il quadrilatero in triangoli.

Tav. IV. Fig. 9.

Dimoſtr. Come in ogni triangolo i tre angoli ſono uguali a due retti (*f*), nel triangolo DAB l'angolo A cogli altri due ſuoi D, B ſono uguali a due retti: ma l'angolo ADB è uguale all'angolo ACB (perciocchè tutti e due poggiano ſull' iſteſſo arco AB): e l'angolo ABD è uguale all' angolo DCA, poichè poggiano ſull' iſteſſo arco AD:

(f) *Teor.* 7 *P. I.*

dun-

dunque l' angolo DAB cogli altri due DCA, ed ACB (posti in vece degli angoli D, e B del triangolo DAB) cioè, con tutto l'angolo C, sono uguali a due retti. L' istesso dimostrasi degli altri due. Ciò, che &c.

TEOREMA IV.

Se un Diametro sega perpendicolarmente una linea retta nel cerchio, la segherà in due parti uguali; E se la segherà in due parti uguali, la segherà perpendicolarmente.

Tav. IV. Fig. 9.

COstruz. Si tiri nel cerchio in qualunque luogo di esso la CB, la quale sia perpendicolarmente segata dal diametro LD.

Dimostr. della 1. *parte*. Il Quadrato CA opposto all' angolo retto AOC, è uguale a due quadrati CO, AO (*a*): e'l quadrato AB, perchè opposto all' angolo AOB retto per ipotesi, sarà uguale ai due quadrati OB, AO: dunque sottratti i quadrati AO, (che per esser formati sù l' istessa AO sono uguali) resteranno i due quadrati CO, BO uguali (*b*): dunque uguali, anche saranno le rette CO BO, che però sarà ugualmente segata la CB. Ciò, che &c.

Dimostr. della 2. *parte*. Essendo il lato CO uguale ad OB per l' ipotesi, il lato CA ad AB, perchè raggi dell' istesso cerchio (*c*), ed AO commune, i triangoli COA, BOA saranno Equilateri: dunque saranno equiangoli (*d*): dunque

(a) *Teor.* 10 *P.* 1.
(b) *Ass.* 2.
(c) *Def.* 7.
(d) *Cor.* 1. *del Teor.* 4 *P.* I.

que gli angoli COA, BOA saranno uguali: dunque AO sarà perpendicolare (*a*). Ciò, che &c. (a) *Def.* 8.

TEOREMA V.

Le Linee, che sono uguali, distano ugualmente dal Centro del cerchio.

E se distano ugualmente dal Centro del cerchio, sono tra loro uguali.

C*ostruz.* Dal centro A si tirino due perpendicolari AB, AC alle metà delle linee DF, EG, indi si congiungano per le linee AD, AE. Tav. IV. Fig. 10.

Dimostr. della 1. *parte*. Essendo le linee AD, AE opposte agli angoli retti per ipotesi B, e C, i quadrati di esse (*b*) saranno uguali ai due quadrati DB, BA da una parte, ed EC, AC dall'altra parte: toltine dunque i due quadrati DB, EC uguali (perchè formati sopra metà di due linee per ipotesi uguali) rimarranno uguali i quadrati BA, CA (*c*): dunque uguali anche saranno le semplici perpendicolari BA, CA: che però saranno ugualmente distanti dal centro le due linee DF, EG (*d*). Ciò, che &c.

(b) *Teor.* 10 *P. I.*

(c) *Ass.* 2.

(d) *Def.* 4 *P. II.*

Dimostr. della 2. *parte*. Essendo per Ipotesi BA uguale a CA, il Quadrato BA sarà uguale ad AC; e come per la costruzione B è angolo retto, li due quadrati BA, BD saranno uguali (*e*) al quadrato dell'ipotenusa AD, ed il Quadrato AE per l'istessa ragione, è uguale a due quadrati CA, CE: dunque li due quadrati BA, BD sono uguali a CA, CE: sottratti dunque li due quadrati BA, CA

(e) *Teor.* 10 *P. I.*

uguali per l' ipotesi, come si è detto, restano li quadrati BD, CE uguali, e per conseguenza saranno uguali le loro radici, cioè, le linee BD, CE; ma queste per costruzione sono metà delle linee date FD, GE: dunque queste linee FD, GE sono uguali. Ciò, che &c.

TEOREMA VI.

Delle linee, che s' iscrivono nel cerchio la Massima è il Diametro; delle altre Quelle sono Maggiori, che sono meno distanti dal Centro.

Tav. IV. Fig. 11. *Costruz.* Si tiri nel cerchio una linea (che non sia il diametro) RS, e dal centro si tirino all' estremità di queste due linee AR, AS, che formino un Triangolo.

Dimostr. della 1. *parte*. Le linee AR, AS sono uguali al diametro FL (mentre ciascuna di esse è semidiametro dello stesso cerchio, di cui FL è Diametro): ma AR, AS sono Maggiori di RS (giacche si ha, come un'assioma, che due lati di un triangolo sono maggiori di un solo): dunque anche il Diametro FL è maggiore di RS. Ciò, che &c.

Costruzione per la 2. *parte*. Si tirino nel cerchio due linee RS, XZ, l' una più distante dell' altra dal centro, che per ciò nessuna sarà diametro: indi dal centro si tirino all' estremità della prima due raggi AR, AS, sicche formino un triangolo, e dall' istesso centro fin' all' estremità della seconda, si tirino AX, AZ, che formino un'altro triangolo.

Dimostr. della 2. *parte*. I lati AR, AS: AX,

AZ

AZ per essere raggi dell' istesso cerchio, sono uguali; mà l' angolo del triangolo RAS è maggiore dell'angolo XAZ (perche quello hà per misura un' arco maggiore, e questo un' arco minore): dunque la base RS è maggiore della base XZ (*a*): mà RS è più vicina al centro di XZ (*b*): dunque quella è maggiore, ch' è meno distante dal centro. Ciò, che &c.

(a) *Cor. 2. del Teor. 6 P. I.*
(b) *Costr.*

TEOREMA VII.

Se dentro del cerchio si assuma un punto, che non sia il Centro, e da esso si tirino delle linee alla Circonferenza.

DIco 1. la Massima esser quella, che passa pe'l Centro ciò è A F, .

Tav. IV. Fig. 12.

Costruz. Dal punto A si tiri pel centro ACF, si prolunghi in E, si tirino le linee AD, AB, AQ, AO

Dimostr. Nel triangolo DAC i lati AC, DC sono maggiori del solo lato DA (poiche si ha come un' assioma, che due lati di un triangolo sono maggiori di un solo): mà i due lati AC, DC sono uguali alla AF (perciocche CD, CF sono raggi dell' istesso cerchio, e CA è commune): dunque AF sarà maggiore di AD. Ciò, che &c.

Dico 2. AE, che sopravanza alla Massima esser la Minima di tutte.

Dimostr. Nel triangolo ABC i due lati AC, AB sono maggiori del solo lato BC (*c*): mà BC è uguale a CE (essendo raggi dell' istesso cerchio):

(c) *Assioma soddetto.*

 dun-

(a) *Ass.* 2. dunque BA, AC sono anche maggiori della sola CE: toltane AC commune, resterà BA (*a*) maggiore della AE, e per conseguenza AE, che sopravanza dalla suddetta Massima FA, sarà la Minima. Ciò, che &c:

L' istesso si potrebbe dimostrare, paragonando la linea AE con qualunque altra come AQ, tirando la CQ, che formi il triangolo QCA.

Dico 3. Delle altre quella esser la Maggiore, che è più vicina alla Massima, che nel caso sarà DA.

Dimostr. Ne' triangoli ACB, ACD li due lati CD, CB sono uguali, come raggi dell' istesso cerchio, l' altro lato CA è commune, e l' angolo compreso de' lati respettivi ACD è maggiore dell' angolo ACB: dunque la base DA opposta al maggior angolo, (*b*) è maggior della base BA opposta al minor angolo: Essendo dunque la DA più vicina alla massima FA, sarà anche maggiore della BA, che è più lontana

(b) *Cor.* 2. *del Teor.* 6 *P. I.*

L' istesso potrà dimostrarsi riguardo alla BA, che sia maggiore della QA, essendo nello stesso semicerchio le due linee, che paragonansi tra loro, come sono le suddette linee DA, BA, QA.

Dico 4. Dal detto punto assunto fuori del centro Due sole linee possono esser uguali, tirate dentro del cerchio alla circonferenza.

Dimostr. Si tiri AQ. Se potessero essere tre rette uguali, ciò è, AO, AB, AQ, sarebbero AB, AQ all' istessa parte uguali tra loro, ma quella è maggiore, ch'è più vicina al diametro(*c*): quella è minore, che più si discosta: dunque AB più vicina debb' esser maggiore di AQ: dunque

(c) *P.* 3. *di questo Teor.*

AB

AB, AQ non possono esser uguali. L'istesso dicasi di qualunque altra linea, che si tiri da qualunque altra parte. Ció, che &c.

TEOREMA VIII.

Se da un punto fuori del cerchio si tirino più rette AP, AC, AR.

Tav.IV. Fig. 13.

DIco 1. quella linea esser maggiore, che cadendo nella periferia passa pe'l centro, come AR.

Costruz. Dal centro Z si tiri ZC.

Dimostr. ZC, ZR sono uguali (perche raggi dell' istesso cerchio: dunque se vi si aggiunga a tutte e due AZ, saranno AZ,ZC uguali ad AR: (*a*) mà AZ, ZC sono maggiori di AC,(essendo i due lati d' un triangolo maggiori di un solo): dunque anche AR è maggiore di AC, e di qualunque altra possa tirarsene, che non passi pe 'l centro. Ciò, che &c.

(a) *Assiom.*

Dico 2. delle altre linee la maggiore sarà quella, ch' è più vicina alla massima, come è CA.

Dimostr. Si tiri la ZC. Ne' triangoli CZA, PZA i lati CZ, ZA sono uguali a i lati PZ, ZA; l' angolo però CZA è maggiore dell' angolo PZA contenuto nel CZA: dunque la base CA più vicina alla massima è maggiore della base PA più lontana (*b*).

(b) *Cor. 2. del Teor. 6 P. I.*

Dico 3. Delle linee, che cadono nel convesso del cerchio, come sono AO, AQ, AR, quella è la minima, che prodotta passa pe' l centro come AO.

Tav. IV. Fig. 14.

Dimostr. Dal centro Z si tiri la ZQ. Nel triangolo AZQ due lati insieme AQ, QZ sono maggiori del solo lato AZ (poiche due lati del triangolo sono maggiori di un solo): se dunque se ne sottraggano ZQ, ZO, che sono uguali (perche raggi dell' istesso cerchio), rimarrà AO minore di AQ (*a*). Ciò, che &c.

(a) *Assiom.* 3.

Dico 4. Delle altre quella è la minore, ch' e più vicina alla minima, come AQ, minore della AR.

Dimostr. Si tiri la ZR. Nel triangolo AQZ contenuto dentro del triangolo ARZ, li lati AQ, QZ, che dentro di esso congiungonsi, sono minori de' lati comprendenti AR, ZR (come è manifesto, ed anche lo dimostra Euclide nella proposizione 21. del libro I.): Levando dunque da una parte ZQ, e dall' altra ZR, che sono uguali, perche raggi dell' istesso cerchio, resterà QA minore della RA, essendo la QA più vicina all' AB, che passa pe' l centro. Ciò, che &c.

Dico 5. Non più che Due uguali tirar si possono nel concavo o nel convesso della periferia. Ciò è, due sole linee saranno uguali, che avranno uguale distanza della massima, essendo questa tra l' una, e l' altra linea.

Tav.IV. Fig. 13.

Dimostr. Delle linee, che cadono nel concavo, se una sarà più vicina alla massima, sarà maggiore di quella, che sarà più lontana dalla stessa parte (*b*) come AC maggiore di AP, non potendo esse cadere sull' istesso punto della periferia, mà una presso l' altra. L' istesso si dovrà dire delle linee, che fossero tirate dall'altra parte della massima: Dunque due sole ugualmente distanti dalla massi-

(b) *P. 2. di queste Teor.*

massima saranno uguali, come AC da una parte, ed AL dall' altra.

Di quelle linee, che cadono nel convesso; dovendo esser l' una presso l'altra nell' istessa parte della linea centrale, quella, ch' è più vicina alla minima, sarà minore di quella, ch' è più lontana (*a*), come AQ minore di AR; l' istesso dovrà dirsi dell' altre linee, se fossero tirate dall' altra parte, essendo la più vicina minore della piú lontana: Dunque sole due ugualmente distanti della minima saranno uguali, come sono AQ da una parte, ed AS dall' altra. Ciò, che &c.

Tav. IV. Fig. 14.

(a) *P. 3. di questo Teor.*

TEOREMA IX.

Se una retta sarà perpendicolare all' estremità del diametro, tutta caderà fuori del cerchio, che toccherà solo in un punto.

C*Ostruz.* Si tiri il Diametro FA alla di cui estremità A sia Perpendicolare DAC.

Tav. IV. Fig. 15.

Dimostr. Essendo AB perpendicolare, l' angolo A sarà retto (*b*): dunque nel triangolo ABC, l' angolo C sarà acuto (*c*): dunque il lato BC opposto all' angolo maggiore A, é maggiore del lato BA opposto all' angolo minore C (*d*): mà BA minore arriva solamente alla circonferenza del cerchio: dunque BC maggiore passa più avanti segando la circonferenza di detto cerchio; e per conseguenza niun punto fuori del punto A cade nel cerchio; poiche d' ogni altro punto, che si prenda nella DC, può farsi l' istessa dimostrazione. Ciò, che &c.

(b) *Def. 8.*
(c) *p. 3. del cor. 2. del Teor. 7 P. I.*
(d) *Teor. 6 P. I.*

Co.

Corollario 1.

Tav. V. Fig. 15.

LA retta BA tirata dal centro al punto del contatto A è perpendicolare alla Tangente DC.

Dimostr. Delle linee, che dal centro tirar si possono alla tangente, la minima è BA, (*a*) e per ciò non inclina ad una, o ad altra parte fuor del contatto: dunque sarà perpendicolare alla tangente formando con questa angoli retti (*b*). Ciò, che &c.

(a) *Teor 9 presente.*
(b) *Def. 8.*

Corollario 2.

SE una retta tocchi il cerchio, e dal punto del contatto si tiri una perpendicolare, in questa perpendicolare sarà il centro.

Tav. IV. Fig. 16.

Dimostr. Se non fusse in AI il centro, ma in altra, comè in AZ, sarebbe ZAC un' angolo retto (*c*); mà l' angolo IAC anch' è retto per ipotesi; essendo IA perpendicolare all' istessa tangente: dunque IAC che sarebbe il Tutto, sarebbe uguale a ZAC Parte. L' istesso dimostrasi d' ogni altra linea, che possa tirarsi fuori della AI: dunque in AI debbe essere, il centro. Ciò, che &c.

(c) *Cor. 1. di questo Teor.*

TEO-

TEOREMA X.

Se una retta tocch' il cerchio, ed un' altra retta dal punto del contatto lo seghi, l' angolo, che si formerà dalla tangente, e dalla secante, sarà uguale all' angolo, che si farà nel segmento alterno.

C*ostruz.* La retta CF tocchi il cerchio, ed AB tirata dal punto del contatto, lo seghi. Tav. IV. Fig. 17. 18

Dico, l'Angolo CAB essere uguale all'Angolo L nel segmento alterno ALB, e l' angolo FAB uguale all' angolo O nel segmento AOB.

Dimostr. Se la secante AB passerà pe'l centro, l' angolo CAB sarà retto, perche perpendicolare alla tangente (*a*), e sarà uguale all' angolo ALB, poiche anche esso è retto (*b*), poggiando sù la metà del cerchio. Tav. IV. Fig. 17. (a) *Cor.* 1 *del Teor.* 9 *P. II.* (b) *Teor.* 1 *P. II.*

Se l' *AB non passerà pe'l* centro, si tiri AQ, che passi pe'l centro, e si unisca BQ. *Fig.* 18.

L' angolo ABQ perch' è nel semicerchio, è retto (*c*): dunque gli angoli BQA con BAQ insieme saranno uguali ad un retto (*d*): mà CAQ anch' esso è retto (*e*): dunque i due angoli BQA, BAQ sono uguali all' angolo CAQ: se dunque se ne tolga l' angolo BAQ commune, rimarrà l' angolo BQA uguale all' angolo CAB: mà BQA è uguale all' angolo L (*f*); poiche l' uno, e l' altro poggiano co' loro lati sopra l' arco AOB, che loro serve di base: dunque l' angolo L è uguale all' angolo CAB.

(c) *Teor.* 1 *P. II.* (d) 3. *p. del cor.* 2. *del Teor.* 7 *P. I.* (e) *Cor.* 1. *del Teor.* 9 *P. II.* (f) *Cor. del Teor.* 2 *P. II.*

Si dimostrano anche uguali gli angoli FAB, ed O.

Gli

(a) 2. *Par. del Teor.* 1 *P. I.* Gli angoli FAB, CAB sono uguali a due retti (*a*); nel quadrilatero BOAL gli angoli opposti sono anche uguali a due retti (*b*): dunque i due angoli FAB, CAB uguagliano i due angoli O, ed L; tolgansi dunque da una parte CAB, dall' altra L dimostrati per la prima parte uguali, resteranno uguali FAB, ed O (*c*). Ciò, che &c.

(b) *Cor.* 4. *del Teor.* 3 *P. II.*

(c) *Assioma* 3.

TEOREMA XI.

I cerchi, che si segano, o che si toccano, non possono aver l' istesso Centro.

Tav. IV. Fig. 19, e 20.

COstruz. Dal centro A si tirino alla circonferenza le linee AF, AB.

Dimostr. Se A fosse centro commune a i due cerchi, o che si segassero LFB, LCB, o che interiormente si toccassero BOF, BMC, sarebbero tutti i raggi tra loro uguali, tirati dal loro centro commune (*d*): dunque sarebbero uguali AB, AF: mà AB è uguale ad AC, perche raggio dell' istesso cerchio: dunque AC sarebbe uguale ad AF; che per ipotesi avrebbe l'istesso centro: la parte sarebbe uguale al tutto: dunque i detti cerchi non possono aver l'istesso centro. Ciò, che &c.

(d) *Def.* 7.

Corollario 1.

Tav. IV. Fig. 19.

DUe cerchi non possono segarsi in più, che in due punti.

Dimostr. Se i due cerchi LFB, LBC oltre il segarsi ne' punti L, e B, si segassero ancora in un' altro terzo punto F, sarebbero le tre linee AB, AL

AL, AF tra loro uguali (*a*): dunque i cerchi dovrebbero aver l'istesso centro A a tutti e due commune; mà si è dimostrato, che i cerchi, che si segano, non possono aver l'istesso centro (*b*): dunque non possono i due cerchi segarsi oltre i due punti. Ciò, che &c.

(a) *Def.* 7.

(b) *Teor.* 11. *P. II.*

Corollario 2.

Tav. IV. Fig. 20.

SE due cerchi si toccheranno in un punto B, la linea che passa pe' due centri A, e P, passerà pe'l punto del contatto B.

Dimostr. Al punto del contatto B tirisi una tangente EC, e da due centri A, P due linee AB, PB. Tutte e due queste linee saranno perpendicolari alla tangente EC (*c*), ch'è tangente commune; che però le due linee formeranno una sola linea, che passa pe' due centri A, e P. L'istesso si dice, se i due cerchi si toccheranno di fuori. Ciò, che &c.

(4) *Cor.* 1 *del Teor.* 9. *P. II.*

PROBLEMI.

PROBLEMA I.

Da un dato punto tirare una Tangente aa un Cerchio dato.

Tav. IV. Fig. 21.

COstruz. Dal centro A del cerchio dato si tiri al punto dato B una retta AB, che seghi la periferia nel punto O: dall'istesso centro A coll' inter-

intervallo della retta tirata si descriva un'altro cerchio BC: da O si tiri una perpendicolare ad AB, e sia OC, la quale s'incontri in C nel cerchio BC: si tiri CA, che s' incontri in I nel cerchio OQ.

Dico, che la retta tirata da B ad I sarà la Tangente del cerchio OQ, che si vuole.

Dimostr. I triangoli IAB, OAC anno i lati BA, IA uguali respettivamente a i lati CA, OA (*a*) e l' angolo A commune: dunque anche gli angoli AOC, AIB sono uguali(*b*): mà AOC è retto, poichè per la costruzione CO è tirata perpendicolare ad AB: dunque anche AIB è retto: dunque la retta BI è la Tangente (*c*). Ciò, che far si dovea.

(a) *Def.7.*

(b) *Teor. 3. P. I.*

(c) *Teor. 9. P. II.*

PROBLEMA II.

Segare un' Arco dato in due parti uguali.

Tav. IV. Fig. 22.

COstruz. Sia l' Arco ABC. Tirata la corda AC, e costituiti per centri A, e C coll'intervallo maggior della metà della detta corda, si descrivano due archi dalla parte di sopra, che si segheranno in un punto, come in F, e due altri dalla parte di sotto, che si segheranno anch' essi in I: pe' punti dell' intersezioni si tiri una retta FI.

Dico, che la Retta FI dividerà l'Arco in due parti uguali.

Dimostr. Si tirino le rette AB, CB: Ne' Triangoli ABO, CBO, i lati AO, CO sono uguali per costruzione fatta secondo il Problema I. della Parte I. OB è commune: gli angoli ad O sono uguali perche retti secondo l' istesso Problema I. Part. I.: dunque le basi AB, BC sono uguali(*d*): dun-

(d) *Teor. 3. P. I.*

dunque gli Archi, che ad esse corrispondono sono uguali (a): dunque l' Arco dato sarà diviso in due parti uguali. Ciò, che &c. (a) *Teor.* 3 *P. II.*

PROBLEMA III.

Trovar il Centro di un dato Cerchio.

Tav. IV. Fig. 23.

C*ostruz.* Nel Cerchio dato si tiri ad arbitrio una retta BC questa si divida in due parti uguali in Q: pe'l punto della divisione si faccia passare una perpendicolare LF: se questa divideraſsi in due parti uguali, come in A.

Dico A essere il Centro del dato cerchio.

Dimostr. Se si neghi A esser il centro, si assuma un' altro punto fuori della linea FL: (poiche se si volesse assumere altro punto nella medesima FL, non sarebbe questa divisa in due uguali parti contro la costrúzione) si stabilisca dunque per centro il punto O: Da questo preteso centro si tirino tre rette OB, OC, OQ. Che perciò i due triangoli BQO, CQO saranno equilateri; poiche i lati OB, OC essendo raggi tirati del preteso centro, supporre si debbono uguali (*b*): e per esser stata tutta la BC ugualmente divisa, sono anche uguali, BQ, CQ ed il lato OQ è commune: dunque detti triangoli sono anche equiangoli (*c*): e per conseguenza l'angolo OQC è uguale all'angolo OQB retto, (essendo fatto dalla supposta perpendicolare OQ) (*d*): dunque l' angolo BQO, parte, sarebbe uguale all' angolo BQA, ch' è un tutto anch' esso per costruzione retto: dunque nè O, nè qualunque altro punto fuor che A, puol'esser Centro. Ciò, che &c.

(b) *Def.* 7.

(c) *Cor.* 1. *del Teor.* 4 *P. I.*

(d) *Def.* 8.

Co.

Corollario 1.

Trovare il Centro di un' Arco dato ABC.

Tav. IV. Fig. 24. COstruz. Da due punti si tirino nell' Arco due rette AB, CB, le quali vengano ugualmente divise in I, ed L. (Per facilitar la pratica di questa divisione, facendo le solite intersezioni in
(b) *Probl.* 1. *P. I.* D, X, E, Z (*a*) da punti della divisione I, ed L si tirino due perpendicolari IX, LZ, che in un punto si segheranno, come in O).

Dico, O essere il Centro del Cerchio, che avrà l' Arco, qual' ora sarà compiuto.

Dimostr. Il Centro è nella perpendicolare, che dentro del cerchio sega un' altra retta in due
(b) *Probl.* 3. *P. II.* parti uguali (*b*): dunque essendo per la costruzione le rette AB, CB segate ugualmente in I, ed L per le perpendicolari IX, LZ, nella mutua sezione delle perpendicolari, o sia nel loro concorso in O dovrà essere il Centro. Ciò, che &c.

Corollario 2.

Dati tre punti, che non sieno disposti in linea retta, trovare il Centro di un Cerchio, la di cui circonferenza passi per essi.

Tav. IV. Fig. 25. COstruz. Sieno i tre punti, A, B, G: dall' A si tiri AB, la quale sia divisa in due parti uguali, come in O, e si eriga la perpendicolare OQ: nella maniera stessa tirata la BG, dividasi in due parti uguali in E, dalla quale si tiri la perpendicolare ED.

Di.

Dico nel punto C, in cui le due perpendicolari si segano, essere il centro. Per la dimostrazione stessa del Corollario 1.

PROBLEMA IV.

Iscrivere nel Cerchio un Quadrato, ed un' Ottogono.

C*ostruz.* Si tirino nel Cerchio due diametri AB, CD ad angoli retti: si congiunghano l' estremità de' detti diametri per le rette AC, CB, BD, DA. Tav. IV. Fig. 26.

Dico ACBD essere il Quadrato Iscritto nel cerchio.

Dimostr. I Quattro angoli A, C, B, D sono retti, poggiando ciascuno sulla metà del cerchio (*a*): le quattro linee sono uguali tra loro; perciocche opponendosi ciascuna di esse all' angolo retto E, sarà il suo Quadrato uguale a i due Quadrati de' raggi: che perciò il Quadrato AD sarà uguale a i due Quadrati AE, DE, e'l Quadrato CB sarà uguale a i Quadrati CE DE (*b*); e così CA, BD &c.: dunque saranno tra loro uguali; e perciò uguali saranno le quattro linee AD, DB, BC, CA, sarà dunque iscritto il Quadrato nel Cerchio (*c*). Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 1 *P. II.*

(b) *Teor.* 10 *P. I.*

(c) *Def.* 12

Per iscrivere poi un' Ottogono non altro avrassi a fare, che dividere in due parti uguali ciascun' Arco corrispondente a ciascun lato del Quadrato, tirando dal centro E alla periferia le perpendicolari EL, EO, EN, EM, e congiungendo con rette suttense gli otto punti di detta periferia, e sarà iscritto l' Ottogono; (Questo non si rappresenta nella figura, per non far confusione).

PROBLEMA V.

Iscrivere nel Cerchio un' Esagono, o Dodecagono, o un Triangolo Equilatero.

Tav. IV. Fig. 27.

C*Ostruz.* Si tiri nel dato cerchio un Diametro AQ. stabiliti per centri A, Q, coll' intervallo del raggio AC, si descrivano due archi BCM, DCO, i quali incontreranno la periferia del cerchio in B, M, D, O: Si tirino le linee BA, AM, MO, OQ, QD, DB.

Dico essere Iscritto l' Esagono.

Dimostr. Si tirino dal centro C le rette CM, CO, CD, CB (essendo già tirati per la costruzione i due raggi CA, CQ.) I Triangoli QCO, QCD sono equilateri, (poiche i lati CO, CD sono raggi dell' istesso Cerchio, e CQ, è commune: ed i lati QD, QO, sono raggi di un cerchio al primo cerchio uguale, essendo l' intervallo l' istesso QC: dunque tutti i tre angoli de' detti triangoli QCO, QCD sono uguali (*a*): Sarà ancora ciascun' angolo, come DCQ, OCQ una terza parte di due retti (poiche come in ogni triangolo i tre angoli sono uguali a due retti (*b*), ed essendo i tre angoli tutti e tre uguali, ciascuno sarà la terza parte di due retti, ciò è, di gradi 60.): anche le basi QO, QD saranno uguali (*c*): dell' istessa maniera si dimostrano uguali le altre basi: dunque i sei lati sono uguali. Sono anche uguali gli angoli, QOM, OMA &c. essendo, ciascuno composto da due angoli di triangolo equilatero,

(a) *Cor.5. del Teor.4 P. I.*

(b) *Teor. 7. P. I.*

(c) *Cor.1 del Teor.3 P. I.*

ro, e perciò gli angoli, QOM, OMA &c. saranno anche tra loro uguali. Sarà dunque Iscritto l' Esagono ordinato. Ciò, che &c.

Sarà facile d' Iscrivere il Dodecagono col solo dividere ugualmente ciascun' Arco dell' Esagono, e se questi del Dodecagono ulteriormente si divideranno, si avrà un Poligono di 24 lati.

Nella maniera stessa s' Iscriverà un Triangolo Equilatero. Si tiri un diametro FB: stabilito per centro B, coll' intervallo BA, si descriva un' arco CAD: dal punto C ad F, da F a D, da D a C si tirino tre rette, e si avrà il Triangolo Equilatero Iscritto CFD. Mentre ciascun lato di detto Triangolo è Corda di un Arco di 120 gradi doppio di quello dell' Esagono; e perciò ciascun lato corrisponde ad un terzo di tutta la Periferia. Tav. IV. Fig. 28.

Qualunque Poligono, che avrà i lati di numero pari s' iscriverà col dividere ciascun' Arco in due parti uguali, e dal Quadrato si avrà l' Ottogono: e dividendolo di nuovo si avrà un Poligono di 16 lati. Così l' Esagono darà un Dodecagono, e questo diviso darà un Poligono di 24. lati, ed ulteriormente dividendosi gli archi in due uguali parti, si avrà sempre il doppio. Mà se il Poligono sarà di lati impari, si dirà nel Problema VII.

PROBLEMA VI.

Iscrivere nel cerchio un qualunque Triangolo ch' abbia gli Angoli uguali ad un qualunque dato Triangolo.

C*ostruz.* Si tiri una Tangente EF (*a*), che tocchi il Cerchio in un qualche punto, sia D: si for- Tav. IV. Fig. 29.

(a) *Probl.* 1. *P.II.*

(a) Probl. 5. P. I. si formi l' angolo EDG, uguale all' angolo C (*a*): similmente FDH uguale all' angolo B: si tiri GH, che congiunga i due lati,

Dico il Triangolo GDH essere Iscritto nel Cerchio, ed uguale al Triangolo BAC dato.

Dimostr. L' angolo H è uguale all' angolo EDG (*b*), perchè nel segmento alterno; mà EDG è uguale a C per la costruzione: dunque gli angoli H, e C sono uguali. Similmente l'angolo G è uguale all' angolo FDH, per essere nel segmento alterno (*c*): mà per la costruzione l' angolo FDH è uguale all' angolo B: dunque G, e B sono uguali: dunque l'angolo GDH anche sarà uguale all' angolo A (*d*). Ciò, che &c.

(b) Teor. 10 P. II.

(c) Teor. 10 P. II.

(d) Cor. 2. del Teor. 7. P. I.

PROBLEMA VIII.

Iscrivere nel cerchio qualunque Poligono anche di lati nel numero Impari.

Tav. IV. Fig. 5.

COme il cerchio vien considerato di 360 gradi, così si dividono i 360 gradi pe'l numero de' lati del Poligono da Iscriversi: come se il Poligono sarà Pentagono, il divisore sarà 5, che dividendo 360, darà per quoto 72; se sarà Eptagono, il divisore sarà 7, e'l quoto $51\frac{3}{7}$

Indi si prenda nel cerchio un' arco di tanti gradi, quanti ne darà il quoto: ovvero (ciò, che vale lo stesso) si formi nel centro un' angolo di tanti gradi, quanti ne risultano dalla divisione; nel Pentagono a cagion d' esempio 72; nell'Eptagono $51\frac{3}{7}$.

Si tiri una linea che segni l' arco preso giusta i gradi, che gli competono: Questa si adatti, nel cer.

cerchio qnante volte si potrà, e si avrà il Poligono, che si cerca.

Perchè resti più agevole la costruzione de' Poligoni, mettiamo il numero de' lati di alcuni Poligoni co' rispettivi loro angoli, nella Tavola seguente.

Lati de' Poligoni.		*Gradi degli angoli al centro.*	*Gradi degli angoli, che i lati fanno nell' Ambito.*
Trigono	III	120	60
Quadrato	IV	90	90
Pentagono	V	72	108
Esagono	VI	60	120
Eptagono	VII	$51 \frac{3}{7}$	$128 \frac{4}{7}$
Ottogono	VIII	45	135
Eneagono	IX	40	140
Decagono	X	36	144
Endecagono	XI	$32 \frac{8}{11}$	$147 \frac{3}{11}$
Dodecagono	XII	30	150
Tredecagono	XIII	$27 \frac{9}{13}$	$152 \frac{3}{13}$
Quaterdecagono	XIV	$25 \frac{10}{14}$	$154 \frac{4}{14}$
Quindecagono	XV	24	156
Sexdecagono	XVI	$22 \frac{1}{2}$	$157 \frac{8}{16}$ ovvero $\frac{1}{2}$

Se voglia dunque Iscriversi un Pentagono, il Tav. IV. Fig. 30.
di cui Angolo al centro, o il di cui Arco, che serve per base, dovrà essere di 72 gradi, questi si segnino dal centro A sull'arco, tirando due linee,

come AB, AC: l'intervallo, che paſſa tra'l punto B, e C ſegnato per la linea BC, darà il lato del Pentagono, che Iſcrivendoſi cinque volte, che ſarà quel, che ſi può, non avanzando altro ſpazio) darà il Pentagono BDOFC richieſto.

Per iſcrivere con facilità nel cerchio qualunque Poligono uſando della Tavola ſuddetta, e cavando da eſſa il numero de' gradi dell' angolo formato da' raggi del Poligono nel centro, ſi farà nella ſeguente maniera.

Tav.IV. Fig.31. Si fiſſi nel piano dato il ſemicerchio di ottone, o di altra materia, in modo, che il centro di eſſo corriſponda al punto, che vuolſi aſſumere per centro, come il punto b, e ſi noti l' altro punto, cui corriſponde al principio de' gradi notati nel ſemicerchio, come A: ſi noti ancora l' altro punto, cui debbe corriſpondere il numero de' gradi, di cui ſi vuole l' angolo, come F a 72 gradi per formar l'angolo del centro del Pentagono. Si tirino dunque le linee b A, b F, che formeranno l' angolo AbF, ovvero abf, il quale ſarà di gradi 72, quanti ne formano l' angolo nel centro del Pentagono, ſecondo ſi moſtra nella Tavola precedente. Finalmente tirando le linee, o corde AF, FD, DG, GE, EA, ovvero af, fd, dg, ge, ea, che ſottendono l'angolo di 72 gradi, ſi avrà il richieſto Pentagono Iſcritto nel ſuo cerchio.

Tav. IV. Fig.27. Più ſpedita ſarà la coſtruzione dell'Eſagono: Perciocchè formando nel cerchio ſei Triangoli Equilateri QCO, OCM, MCA, ACB, BCD, DCQ, avendo ciaſcuno di eſſi un' angolo nel centro, ſarà la baſe, o ſia la corda corriſpondente all'arco, uguale ai lati: ma i lati ſono i raggi del cer-

cerchio: dunque per iscrivere l' Esagono basterà adattare sei volte intorno la circonferenza il raggio dell' istesso cerchio.

PROBLEMA VIII.

Circoscrivere al Cerchio qualunque Poligono.

S' Iscriva nel cerchio il Poligono: indi pe' Vertici degli angoli dell' istessa figura si tirino le Tangenti, che si congiungeranno tra loro; Queste daranno la figura simile all' Iscritta, come è il Quadrato MLON, descritto intorno al dato cerchio ADBC. Tav. IV. Fig. 26.

PROBLEMA IX.

Ritrovar l' Area di qualunque Poligono Iscritto, o Circoscritto nel Cerchio.

COme qualunque Poligono ordinato col tirar dal Centro linee fino agli angoli dell' ambito della figura può risolversi in tanti triangoli quanti sono i lati componenti la figura; quindi osservando la regola data per l' area de' triangoli (*a*); se quest' aree si uniranno insieme, daranno l' area de' Poligoni, come ELD, DLC, CLB, &c. Tav. IV. Fig. 32.

(a) *Probl.* 10. *P. I.* §. 7. 8. 9.

O potranno insieme unirsi in una retta tutti i lati del Poligono, che formeranno, come la base EE, e la perpendicolare LO sarà la retta, che cade dall' angolo di uno de' triangoli, e si opererà nella maniera stessa, come si è detto nella Parte I. pe' i triangoli, moltiplicando la perpendicodicolare per la metà della retta EE composta da tutti i lati dell'ambito del Poligono; e nel prodotto si avrà l'Area del dato Poligono.

L'istesso s'intende del Poligono Circoscritto, assumendosi per base tutti i lati del Poligono Circoscritto, e per l'altezza, o perpendicolo il raggio del cerchio: moltiplicandosi dunque tutto il raggio nella metà della base totale, si avrà l'area del Poligono.

PROBLEMA X.

Ritrovare il Diametro, la Circonferenza, e l'Area del Cerchio.

Quale sia l'esatta ragione tra'l Diametro, la Circonferenza, e l'Area del Cerchio, è quella difficoltà, che da' tempi di Archimede fino a dì nostri ha defatigati gl'ingegni de' più sublimi Matematici.

Il famoso Archimede dimostra nella proposizione 2 della Misura del Cerchio, il Diametro essere al Cerchio, come 7, a 22 incirca. Ho detto *incirca*, non essendo esatta questa proporzione: Imperciocchè la Circonferenza conterrebbe l Diametro più, o meno di tre volte, ed una settima, cioè $3\frac{1}{7}$ o $\frac{10}{70}$; e più di 3, e $\frac{10}{71}$. Giusta l'esposta proporzione o di eccesso, o di mancanza, la differenza sarebbe meno di una quadringentesima nonagesima settima parte del diametro. $\frac{1}{497}$

Più accurata, o sia di minor differenza la stabilì Adriano Mezio, determinando il Diametro esse-

essere come 113 alla Circonferenza 355: nella quale proporzione l' improporzione sarebbe poco più di due particelle decimillionesime del diametro.

Due n' esibì Ludolfo da Ceulen di Colonia; una, che costa d' una unità, e 20 Cifre, o sieno zeri, per cui la differenza dal vero sarebbe una centesima millionesima di un millione di millionesime.

L' altra è composta di una unità, e 35 cifre, la differenza della quale dal vero sarebbe una centesima millesima d' un quinquemillione, come un picciolissimo granellino d' arena a tutto il globo della Terra. I primi numeri del diametro sono 100, della circonfereaza 314.

Ma perchè il calcolar sì fatti numeri di Ludolfo sarebbe operoso non men che nojoso, perciò si assumono le tre prime figure del diametro, e le tre prime della circonferenza: Onde nell' operazione di

Archimede è il diametro $3\frac{1}{7}$; la circonferenza 22

Mezio, è il diametro 113; la circonferenza 355

Ludolfo è il diametro 100; la circonferenza 314.

Data la Circonferenza, trovare il Diametro.

Di una delle tre spiegate proporzioni o sia quella di Archimede (la quale ne' piccioli cerchi usandosi, non porterà error grande; non così nella misura de' cerchi grandi) o di Mezio, o di Ludolfo, si stabilica nel primo luogo il numero maggiore; nel secondo loco il minore, nel terzo la data circonferenza,

Si

Si moltiplichi il terzo pe'l ſecondo: il prodotto di queſta moltiplicazione ſi divida pe'l primo: il quoto, che naſce dalla diviſione, darà il diametro, che ſi cerca.

Dato il Diametro, trovar la Circonferenza.

Di una delle date proporzioni ſi ſtabiliſca nel primo loco il numero minore: nel ſecondo luogo il maggiore; nel terzo il numero del Diametro.

Si moltiplichi il terzo pe'l ſecondo, il prodotto ſi divida pe'l primo: il quoto darà la Circonferenza.

Ritrovar l' Area del Cerchio.

Si moltiplichi il Semidiametro, o ſia Raggio del Cerchio per la Metà della Circonferenza, e'l Prodotto ne darà l' Area.

Che peró ſe ſi moltiplichi o il Raggio per tutta la Circonferenza, o la Metà della Circonferenza per tutto il Diametro, l'Area ſarà doppia.

Se tutto il Diametro per tutta la Circonferenza verrà moltiplicato, ſarà Quadrupla.

Quindi ſcioglieſi il ſeguente Problema.

Coſtruire un cerchio Doppio, Quadruplo &c. del Dato.

Moltiplicando il Raggio per tutta la Circonferenza, coll' intervallo di queſto prodotto deſcrivendoſi un Cerchio, ſarà Doppio del Primo.

Moltiplicando tutto il Diametro per tutta la Circonferenza, coll' intervallo di queſto prodotto deſcrivaſi un cerchio, verrà Quadruplo del Cerchio dato.

USI.

U S I.

I. *Dal Teorema 1. si può conoscere, se la Squadra sia perfetta.*

SI adatti la Squadra NOR in maniera che'l vertice, o sia l'angolo O venga situato in una parte della circonferenza. Se i lati NO, OR verranno a passar per l'estremità del Diametro NR, ella essendo ad angolo retto, sarà perfetta: Se i lati caderanno più in dentro, o più in fuori di detta estremità del diametro, farà l'angolo o Acuto, o Ottuso, e perciò non sarà giusta; mentre, per esser perfetta, debbe far l'Angolo Retto. Tav.III. Fig. 14.

Ciò è chiaro della dimostrazione del Teorema citato.

II. *Dal Teorema 2. Si dà la ragione perchè da un qualche punto nel Cerchio l'obietto apparisca il doppio di quello, che appariva nell'Angolo dato.*

DAll' Ottica sappiamo, che l'obietto apparisce presso a poco, maggiore, o minore giusta l'angolo, che i due raggi, che dall' estremità dell' obietto partendosi, vengono a formar nell' occhio; supposta l'uguaglianza in tutto l'altro, (come si è detto nella Parte I. uso II.) ciò posto. Tav.III. Fig. 15.

Costruz. Sia l'obietto AB, il quale si vegga sotto l'angolo AOB: per li tre punti A, O, B, si faccia passar la Circonferenza (*a*).

(a) *Cor. 2. del Problema 3. P. II*

Di.

Dico l' obietto AB veduto sotto l'angolo fatto nel centro A C B apparirà Doppio di quello, che apparisce sotto l' angolo AOB. Poichè l'Angolo del Centro è Doppio (*a*) dell' angolo della Circonferenza, essendo l' istesso arco, o corda AB Base di amendue.

(a) *Teor. 2 P. II.*

III. *Dal Corollario del Teorema 2. Si rende la ragione, perchè un' Obietto apparisca sempre dell' istessa Grandezza, benchè l' Osservatore stia più, o meno lontano da esso.*

Tav. III. Fig. 15, e 16.

SIa la stessa Costruzione. Si formino gli Angoli AOB, ASB, APB. Dico l' obietto AB o si miri dal punto O più lontano, o da punti più vicini S, P, sempre apparirà l' istesso nella Grandezza.

Da qualunque de' tre punti si rimiri, sempre verrà rimirato sotto un'angolo fatto nella Periferia del cerchio. Or in questi punti gli Angoli sono uguali (*b*): dunque, se l' obietto si rimiri da qualunque punto della circonferenza, dove gli Angoli sono uguali, come in O, S, P, apparirà uguale, cioè dell' istessa Grandezza.

(b) *Cor. del Teor. 2 P. II.*

IV. *Dal Teorema 7. Si espone come gli Antichi Astronomi spiegavano l'Apparenze Irregolari de' Pianeti.*

PER ben' intendere ciò, è da sapersi, che'l Diametro Apparente del Pianeta è il lato opposto a quell' angolo, che i due raggi di luce partendo da punti opposti nell' estremità del disco del Pia-

Pianeta, vengono a formar nell' occhio dell'Osservatore, per cui apparisce maggiore, o minore.

Or il diametro del Sole circa il Solstizio d' Inverno apparisce Massimo; và indi diminuendosi, quanto più si accosta al Solstizio Estivo: e Menomo apparisce, qual' ora è nel Solstizio Estivo: benchè in se stesso sempre l' istesso sia. Il che così dimostravano.

Sia l' Orbita Solare CEAFD, nella quale esattamente *il Sole si muove*, secondo il loro sistema: T *sia la terra Eccentrica*, (cioè, fuor del centro C dell'orbita solare) NT, OT due linee, che dall' estremità del corpo solare formano l'angolo NTO nell' occhio dell' osservatore. Similmente essendo il sole in F, le linee visuali KT, LT formeranno l'angolo KTL misura del Diametro Solare Apparente KL. Tav. III. Fig. 17.

Sia il Sole in F, che supponghiamo esser il punto del Solstizio Iberno, che occupa verso i 20 di Decembre. Sia in E, che supponghiamo essere il Solstizio Estivo, dove si aggira circa i 20 di Giugno.

Essendo il Sole in E, la sua distanza sarà ET: Dunque se delle linee tirate da un punto, che non sia il centro, la Maggiore è il Diametro (*a*); e Quella la Minore, ch' è il restante del Diametro, essendo il Sole in E, sarà più lontano; essendo in F, sarà più vicino al punto T, che rappresenta la Terra. Dunque se per la maggior, o minor vicinanza gli angoli Ottici si formano maggiori, o minori, l' angolo KTL sarà maggiore dell' angolo NTO, e perciò il sole apparirà Maggiore in F solstizio Iber-

(a) 1. e 2. *del Teor. 7 P. II.*

Iberno, e Minore in E solstizio Estivo. L'istesso è delle distanze intermedie in D, A, I, R, quelle essendo delle altre maggiori, che alla Massima sono più Vicine, ed al contrario Minori quelle che alla Minima sono più vicine.

V. *Dal Teorema 8. Si spiega l'esto marino, supposto il Sistema dell'Attrazion della Luna.*

Tav. III. Fig. 18. L'Esto marino è l'Inalzamento delle Acque del Mare sopra il proprio Livello.

Figurisi il Livello del Mare AOB: inalzandosi, forma la figura ARB. Questo inalzamento principalmente accade nel Plenilunio, e nel Novilunio.

Spiegano ciò i Newtoniani, supponendo due Leggi: L'una che un Corpo attrae a sè l'altro a ragion della Massa da cui vien composto, vale a dire; se maggiore è la massa, maggior sarà l'Attrazione. L'altra, che giusta la Diminuzione della distanza dell'un corpo dall'altro con maggior forza opera la virtù attraente; come si esperimenta nell'azion del fuoco, dal quale quanto meno si sia distante, o (ch'è l'istesso) quanto più si stà ad esso di appresso, con tanta maggior forza se n'esperimenta l'attività nel sentirsi riscaldato.

Or figuriamoci, che la Luna in un certo grado della sua orbita si trovi distante della Terra circa 30 diametri terrestri: ecco la dimostrazione dell'Esto Marino.

Sia la Luna in L, l'Orbe Terraqueo ABGD. Delle linee, che si tirano da un punto preso fuori del cerchio fino al suo convesso, quella è la Minima, che passerebbe pe'l centro del globo; che nel caso dell' Orbe Terraqueo, LO è la minima rappresentata dalla Figura (*a*): Dunque essendo la Luna in L, sarà più vicina alle acque: che però attrarrà a se le acque con forza maggiore; sicchè sorgeranno sopra il loro Livello. E come va proporzionalmente discostandosi da quel punto, e và verso M, va crescendo la lontananza, e diminuendosi l' Attrazione, finchè non ritornino all' antico livello. E benchè un tal Fenomeno si osservi anche nell'altro Emispero, ch' è l'obiezione, che da taluni formasi contro il Sistema de' Newtoniani; pure dalle leggi stesse pensano essi ciò spiegarsi; il che a noi qui diciferar non si appartiene.

(a) 3. Parte del Teor. 8. P. II.

PAR-

PARTE III.

DELLE PROPORZIONI

La dottrina delle Proporzioni, la più Utile, e Dilettevole parte della Piana Geometria, verrà giusta il nostro metodo ristretta a dodici Teoremi, ed otto Problemi co' loro Corollarii, ed alcuni usi di essi.

Perchè però con chiarezza, e facilità s' intenda ciò, che dovrà dimostrarsi, premetteremo delle Definizioni proprie, e delle Spiegazioni delle voci da usarsi nel decorso.

DEFINIZIONI.

1. QUalsivoglia Tutto ha le sue parti: queste parti o sono Aliquote, o Aliquante.

Parte Aliquota è quella, che ove si ripeta alcune volte, corrisponde esattamente al suo Tutto, cioè, nè manca cosa alcuna, nè alcuna cosa avvanza per adequare il Tutto. Così 4 è parte aliquota di 12, perciocchè ove si ripeta tre volte, adequa esattamente il 12.

Aliquanta poi è quella parte, che ove si ripeta alcune volte, o Sopravvanza, o Manca nel misurare il suo Tutto. Così 4 rispetto 13 è Aliquanta, perciocchè o si ripeta tre volte, dà 12, onde sopravvanza una unità al Tutto 13; o si ripeta 4 volte, e dà 16, onde mancano tre unità al suddetto 13.

3. Proporzione, e Ragione (si sogliono usar que-

queſte voci a ſignificar lo ſteſſo) (*a*) é una certa Relazione, o Mutua Convenienza, o ſia un riſpetto ſcambievole, che paſſa tra due Grandezze Finite dell' iſteſſa ſpecie, ſicchè poſſa dirſi l' una eſſer maggiore dell' altra con una certa Denominazione di Eceſſo: così paragonando due linee, una di 6 palmi, l' altra di tre, ſi poſſa dire quella eſſer maggiore di queſta, e quella eſſer doppia di queſta.

E' da ſaperſi, che nelle Proporzioni de' termini, che ſi paragonano, quelle Quantità, che ſi nominano in primo loco, ſi chiamano Antecedenti; quelle, che ſi nominano nel ſecondo loco, diconſi Conſeguenti, e ſoglionſi ſcrivere nella ſeguente maniera 4: 8:: 6: 12. 4, e 6 ſono Antecedenti, 8, e 12 Conſeguenti, e ſi leggono 4 è ad 8, come 6 è a 12.

3. Le Proporzioni poſſono eſſere Diſcrete, e Continue: le Diſcrete ſono, quando ciaſcun Antecedente ha il ſuo Conſeguente, come 4: 8: : 10: 20. 4 è Anteeedente di 8; 10 è Antecedente di 20. Qual'ora la ſteſſa Quantità, ch' è Conſeguente riſpetto alla prima ragione, Ella ſteſſa è Antecedente della ſeconda ragione; allora ſarà Continua, come 4: 8: : 8: 16. dove l' 8 è Conſeguente riſpetto a 4, ed è Antecedente riſpetto a 16.

Notiſi, che talvolta confondeſi la Proporzione colla Progreſſione, in rigore però la Proporzione

G è li-

(*a*) Differiſce in rigore la Ragione dalla Proporzione, eſſendo la Ragione la Relazione, che paſſa tra due quantità, tra loro ſenza l' intervento di altra, come la Ragione di 10, a 5, è 2; La Proporzione poi è la ſomiglianza di queſte due Ragioni, trà 5, e 10 è la ſteſſa di quella, che paſſa tra 8, e 16.

è limitata da tre termini; la Progressione può andar all'infinito, come 3: 6: 12: 24: 48. &c.

4. Le proporzioni inoltre possono essere Razionali, ed Irrazionali. Razionali diconsi quelle, che possono avere una misura, che sia a tutte e due le quantità Commune, le quali perciò diransi anche Commensurabili, come 2, e 11; perciocchè vi hà una parte Aliquota, che replicata alcune volte esattamente misura l'una, e l'altra, e sarebbe l'Unità: dal che si scorge chiaro, che qualsivogliano numeri intieri sono tutti commensurabili, potendo essere per tutti la misura commune l'Unità. Irrazionali diconsi quelle proporzioni, che non possono esprimersi co' numeri; e perciò saranno Incommensurabili; poichè non avranno una parte Aliquota Commune, ma la parte, che servirà per misura, sarà sempre Aliquanta: tal è il lato del Quadrato rispetto la sua Diagonale; perciocchè per quanto minima, si prenda la particella assunta per misura, sempre o ne mancherà, o ne avvanzerà.

5. Se le due grandezze sono Uguali la Proporzione, o Ragione sarà d'Ugualità: se saranno Inuguali sarà ragione d'Inugualità.

Se l'Antecedente sarà Maggiore del suo Conseguente, dirassi Ragione di Maggiore Inugualità: se sarà minore, la proporzione dirassi di Minore Inugualità.

6. Allora dirassi, che due Ragioni sono Simili, o Uguali, quando l'Antecedente di una Ragione tante volte contiene, o è contenuto nel suo Conseguente, quante l'Antecedente dell'altra ragione contiene, o è contenuto nel suo Conseguen-

guente, e diransi le due Ragioni Proporzionali, come 4: 8:: 6: 12; poichè ugualmente gli Antecedenti sono contenuti ne' loro Conseguenti; così parimenti Proporzionali saranno 8: 2:: 16: 4; poichè quattro volte gli Antecedenti contengono i loro Conseguenti.

Avrà poi maggior Ragione la Prima sopra la seconda, quando quella ha in se qualche volta di più una qualunque parte Aliquota, dell' altra; così 21 a 5 ha Maggior Proporzione, che non ha 40 a 10; poichè l' *unità* (*ch'* è parte aliquota di *tutte* e *due le* quantità) è contenuta una volta di più nella Prima, che nella Seconda Ragione sopra i denominatori delle proporzioni (cosa sieno li Denominatori delle Proporzioni, si dirà in appresso al seguente numero 7). Minor Ragione avrà l' una Proporzione all' altra, se mancherà nella prima una parte aliquota, che sarà nella seconda; come 49 a 10, 200 a 40.

7. Moltiplice dicesi una Proporzione, quando l' Antecedente più volte contiene in se il suo Conseguente, come 16 a 4; poichè il 16 contiene 4 volte il suo Conseguente 4. Qual' ora l' Antecedente più volte è contenuto nel suo Conseguente, dirassi allora Submoltiplice; come 4 a 16, l' antecedente 4 è contenuto quattro volte nel conseguente 16.

La specifica denominazione della Proporzione si prende dal numero delle volte, che l' Antecedente contiene il suo Conseguente; se lo conterrà due, o tre, o quattro volte, sarà doppia, tripla, quadrupla: così nell' addotto esempio 16: 4 è in proporzione quadrupla; già che quattro volte il

 16 ha

16 ha in se il 4: così Doppia sarà la Ragione di 8 a 4, Tripla di 30 a 10.

Dal detto chiaro si vede, come possa facilmente conoscersi il denominatore, dividendosi il maggiore numero pe'l minore, il quoto darà la denominazione della ragione. Così se voglia sapersi la denominazione, o sia la specifica Ragione, che passa tra 30, e 5, dividendosi il 30 per 5, il quoto sarà 6: dunque saranno in Ragione Sestupla. Il Denominatore poi della Submoltiplice si noterà, come frazione, o minuzia, come $\frac{1}{2}$ sarà Denominatore della Subdupla; $\frac{1}{100}$ sarà Denominatore della Subcentesima; $\frac{1}{10}$ Subdecupla.

8. Se però il maggior termine conterrà il minore una volta, e vi sopravvanzi una parte aliquota del minore, la Ragione dirassi Superparticolare, come 12: 9, mentre 12 contiene una volta 9, ed avvanzano 3, ch'è parte aliquota del 9.

Se questa parte aliquota sarà metà, allora sarà Superparticolare Sesquialtera, se sarà terza, Sesquiterza; se sarà quarta parte del minore, sarà detta Sesquiquarta: nell'esempio addotto 12: 9, la Ragione sarà Superparticolare Sesquiterza; poichè 12 contiene una volta il 9, ed avvanza il 3, ch'è parte aliquota del 9, ed essendo terza parte dell' istesso 9, sarà Sesquiterza; come 5 : 4 sarà Superparticolare Sesquiquarta; poichè l' aliquota 1, che avvanza, è quarta parte del termine minore 4.

La Ragione Superparticolare si esprimerà nella seguente maniera $1\frac{1}{9}$, $1\frac{1}{2}$. $1\frac{1}{10}$. Poichè l'unità intera denoterà, che una volta sola il Conseguente è contenuto nell' Antecedente maggiore,

e di

e di più la frazione denoterà quale spezie di parte aliquota sia ciò, che sopravvanza, cioè una parte del termine minore, o metà, o decima parte.

9. Se il termine maggiore conterrà il minore più volte, ed avvanzerà una parte aliquota, nominerassi Ragione Moltiplice Superparticolare: come 5: 2 sarà Ragione Moltiplice Superparticolare Sesquialtera: *Moltiplice*, perchè più volte il due è contenuto nel 5 (e come propriamente è contenuto due volte, dirassi Doppia; e se, come è detto sopra nella definizione 7, sarà contenuto tre, o quattro, o cinque, o più volte, chiamerassi Tripla, Quadrupla, Quintupla &c.) *Superparticolare*, perchè avvanza l'aliquota del termine minore; e perchè la detta aliquota nel riferito esempio di 5: 2 è metà del termine minore, si nominerà *Superparticolare Sesquialtera*. Che se una tale aliquota fusse una terza parte del termine minore, direbbesi Sesquiterza: così 22: 7 è Ragion Tripla Superparticolare Sesquisettima: *Tripla*, poichè il 7 è contenuto tre volte nel 22; *Superparticolare*, perchè avvanza l'unità, ch'è parte aliquota; *Sesquisettima*, perchè quella unità è la parte settima del termine minore 7, e si espressa $22: 7 = 3\frac{1}{7}$.

10. Se il maggior termine conterrà il minore una volta, ed avvanzeranno alcune parti, che saranno aliquote rispetto al minore, la Ragione nominerassi Superparziente, come 5: 3. Il 3 è contenuto una volta nel 5, ed avvanzano due unità, che sono parti aliquote rispetto al minore 3.

Se dette aliquote saranno due terze parti, o tre quarte parti &c. del termine minore, la denomineremo Superparziente le terze, Superparziente le quarte &c. Sia la Ragione 7: 4; questa sarà Superparziente le quarte, poichè il termine minore 4 è contenuto una volta sola nell' Antecedente, o sia Maggior Termine 7, e perchè avvanzano tre unità, è Supertriparziente; e perchè ciascuna di esse unità è quarta parte del minor termine 4, si aggiugne alla voce *Supertriparziente* le quarte: Se elleno fussero la terza parte del termine minore, come 5:3, sarebbe Ragione Superparziente le terze; e così delle altre, e si scrive $1\frac{2}{3}$.

Se il Maggiore Termine conterrà più volte il Minore, si dirà Dupla, Tripla, giusta le volte, ch' è contenuto; e le aliquote daranno il nome proprio, giusta il poc'anzi detto: Così 8: 3 sarà Ragion Dupla Superbiparziente le terze. *Dupla*, perchè il 3 due volte è contenuto nell' 8, *Super*, perchè avvanzano alcune unità; *biparziente*, perchè queste unità sono due; *le terze*, perchè ciascuna di queste unità è terza parte del termine minore 3; e si nota nella seguente maniera $8:3 = 2\frac{2}{3}$.

Tutto ciò, che replicatamente si è detto della Ragione Superparticolare, e Superparziente, quando il Maggior Termine è Antecedente, e contiene il Termine Minore per Conseguente, si dice, quando il Termine Minore sarà Antecedente, e 'l maggiore Conseguente, con questo sol divario, che alla Ragione, che specificamente darà la denominazione, dovrà premettersi la particella *Sub*: così 3: 6 sarà Subdupla: 3: 9. Subtripla, e la frazione esprimerà il Submoltiplice, come $\frac{1}{2}$ &c.

L' istes-

L'iſteſſo diceſi della Ragione Subſuperparticolare, come 3: 4, è Subſuperparticolare Subſeſquiterza; 3 : 7 ſarà Subdupla Subſeſquiterza, poichè il 3 è contenuto due volte in 7 $\frac{1}{3}$ Il Numeratore della minuzia dovrà eſprimere, quante ſono le aliquote; e 'l Denominatore eſprimerà ſe ſarà terza, o quarta parte; che però avvanzando una ſola unità dal 7, ſi mette eſſa per Numeratore; ed eſſendo queſta unità terza parte del Termine Minore, il 3 ſi metterà per Denominatore.

Non altrimenti è della Subſuperparziente; onde la Ragione di 9. 13 è Subſuperquadriparziente le none, e ſi ſcriverà 1 $\frac{4}{9}$.

Qualora più Quantità ſono proporzionatamente Proporzionali, vale a dire, che ritengono ſucceſſivamente ſempre l' iſteſſa proporzione tra loro, la prima avrà ragione duplicata alla terza, triplicata alla quarta &c. come 1, 3, 9, 27; 1 avrà ragione duplicata a 9, ed 1 triplicata a 27. Ciò, che è lo ſteſſo, 1: 9 è duplicata della ragione, o proporzione di 1. a 3; poichè 1: 3 è in ragion tripla; 3: 9 anche in ragion tripla, ſi moltiplichino queſte due ragioni 3 per 3 daranno il prodotto 9; Sicchè il terzo numero è il prodotto delle due ragioni, che tra i numeri proporzionali paſſano: Così 1: 27 è triplicata ragione, poichè è compoſto il 27 di tre ragioni uguali, cioè 3, 3, 3, le quali moltiplicate ſeguitamente daranno il 27; e così ulteriormente ſi procede nelle altre proporzioni geometriche.

Quindi è, che la Ragion Duplicata chiamaſi anche Ragion del Quadrato, e la Triplicata diceſi la Ragion del Quadrato Cubo; perciocchè la Ragion del Quadrato alla unità prima menſura della ſua radice, é una Ragion compoſta da due Ragioni uguali, cioè, dalla Ragione del Quadrato alla ſua radice, e di queſta alla unità: e per l' iſteſſa cagione la Ragione del Cubo alla unità è compoſta di tre Ragioni uguali: così negli altri Quadrati maggiori. Onde a trovar la Ragion duplicata, baſterà una Ragion ſola moltiplicata continuatamente in tre termini, come $1\times3\times3=9$; e continuando la moltiplicazione di queſto Quadrato 9 per l' iſteſſa radice 3, darà nel quarto termine il Cubo 27, che avrà alla unità Ragione Triplicata, o Compoſta delle tre di mezzo, e così ulteriormente.

Se più Quantità non ſieno continuamente proporzionali, ma abbiano diverſe ragioni, ſe tutte le quantità componenti ſi moltiplichino inſieme, gli Eſponenti delle ragioni (o ſia il numero delle proporzioni) tra loro, è'l prodotto riſpetto all' unità, moſtrerà la Ragion Compoſta come 8:4:: 12: 3. L'eſponente, o ſia il numero della prima è 2, della ſeconda è 4, i quali moltiplicati danno 8, il quale riguardo all' unità moſtra, che la proporzione di 8: 1 è compoſta dalle due ragioni, che paſſano tra 8: 4; 12: 3, che ſono 2 e, 4.

Altri vogliono, che allora due proporzioni compongano una terza ragione; o veramente allora dicaſi Ragion Compoſta di più ragioni, quando il Prodotto de'due Denominatori delle due proporzioni è uguale al Denominatore della proporzione, che ſi dice Compoſta: così nell' addotto eſempio 8: 4; 12: 3, moltiplicando gli antecedenti 8, e 12, il prodotto ſarà 96: 12 è in ragione ottupla,

tupla, la quale è uguale al prodotto de' due denominatori delle due proporzioni 2, e 4, che danno il prodotto 8. Così il Wolfio nel Tom. I.

Riflettasi, che tanto la Ragion Duplicata, Triplicata &c. quanto la Ragion Composta risultano dalla Composizione di altre Ragioni con questo sol divario, che la Ragion Duplicata debb' esser Composta da ragioni uguali geometricamente proporzionali: Nella Ragion Composta possono essere le Ragioni differenti, e dissuguali, onde ne siegue, che ogni ragion duplicata può chiamarsi Composta, ed è veramente tale; ma non ogni Ragion Composta può dirsi Duplicata.

Inoltre riflettasi la differenza tra il Duplo, Triplo, Quadruplo, e Duplicato, Triplicato, Quadruplicato; poichè il Duplo, Triplo, Quadruplo &c. è una quantità radoppiata due, tre, o quattro volte. Duplicato, Triplicato, Quadruplicato &c. è quando la quantità è composta dalle ragioni intermedie, come si è detto.

Debbesi ancora distinguere tra la Proporzione Geometrica ed Aritmetica. La prima, di cui parliamo, e la quale spetta alla Geometria è una similitudine di eccessi trà più termini, i quali si contengono l' uno nell' altro nell' istessa maniera, come 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; poichè ciascuno di essi è doppio dell'altro, e crescono sempre in ragion Doppia, come in ragion Tripla sarebbe 1, 3, 9, 27 &c; poichè ciascuno contiene il suo Antecedente tre volte; ed una tal proporzione si conosce per mezzo della divisione, dando il Quoto la Proporzione, come si è detto.

La Proporzione Aritmetica è quando gli eccessi

cessi sono tra loro sempre uguali, come 1, 2, 3, 4, 5, 6: o così 2, 4, 6, 8: o così 3, 6, 9, 12. Nella prima serie costantemente l'uno eccede l'altro per l'unità: nella seconda costantemente si superano per due: nella terza si eccedono costantemente per 3, e questo eccesso si ha per mezzo della sottrazione, dando il residuo l'eccesso: come volendosi ritrovar l'eccesso tra 12, e 9, si sottrae il 9 da 12, il residuo, che sarà 3, darà l'eccesso.

PROPRIETA' DELLE PROPORZIONI.

Queste, che quì soggiugniamo sotto il titolo di Proprietà sono proposizioni, le quali nel libro 5. di Euclide si dimostrano; mà come sono esse per se stesse chiare, le assumiamo, come verità note, mettendole sotto gli occhi per mezzo de' numeri.

1. Se due Quantità sono Uguali tra loro, anno l'istessa proporzione ad una data terza quantita; come 8, ed 8 anno tutte e due ragion doppia al 4.

2. Se due quantità anno l'istessa proporzione ad una terza quantità sono uguali fra loro: come se i due 8, ed 8 sono in Ragion Dupla all' istesso 4, saranno uguali tra loro.

3. Se due quantità saranno simili, Uguali, o l'istesse con una terza, saranno simili tra loro: come se

$$8 : 4 :: 32 : 16$$
$$10 : 5 :: 32 : 16$$

avranno l'istessa proporzione dupla 10: 5; e 8: 4.

Ciò, che si dice quì delle Quantità Simili, o Uguali, puó anche affermarsi delle Ragioni Simili, li, o Uguali. Essendo dunque nell' istesso esempio la ragione di 32 a 16 simile a quella di 8 a 4, ed anche simile a quella di 10 a 5, viene in conseguenza, che le ragioni di 8 a 4, e di 10 a 5 sono simili anch' esse tra loro. E questa è la proposizione 11 del libro 5 di Euclide.

4. Se ciascuna quantità di una serie avrà l'istessa proporzione a ciascuna di un'altra serie, tutte insieme la Quantità della prima serie riterranno la Proporzione a tutte le altre prese insieme. Che però se ciascuno Antecedente è proporzionale al suo Conseguente, tutti gli Antecedenti saranno proporzionali a tutti i Conseguenti insieme; come se avran proporzione Dupla 8: 4: : 6 : 3. viene in conseguenza, che l' istessa ragion Dupla avranno 8, e 6 uniti insieme, a 4, e 3 uniti insieme. L'istesso sarà degli Antecedenti uniti a' Conseguenti uniti rispetto agli stessi separati; cioè, ciascun Antecedente rispetto al suo Conseguente, dovendo ritenere la proporzione stessa, che aveano, quando erano insieme uniti.

Quindi se ai Tutti proporzionali si aggiungano, o da essi si tolgano parte simili, ciò, che sopravvanza, sarà anche simile, o proporzionale. Che però se un Tutto è ad un' altro Tutto, come è ciò, che si sottrae dall' uno al sottratto dall' altro, resterà un Tutto al suo residuo, come l' altro Tutto al residuo suo. Così se

12: 6: : 8: 4 in proporzione dupla se da 6 se ne sottraggono 3, e da 4 se ne sottragano 2, resteranno

12: 3: : 8: 2 in ragion quadrupla.

5. Se due Quantità si moltiplichino per l'istessa

ſa Terza Quantità riterranno l' iſteſſa Proporzione, che prima aveano; come ſe 4, ed 8 ſi moltiplichino tutte e due per l' iſteſſa quantità 3, dando la prima per prodotto 12, e la ſeconda 24, riterranno l' iſteſſa Proporzione Doppia, che prima aveano 4, ed 8; come chiaro ſi ſcorge in 12 riſpetto a 24.

6. Nell'iſteſſo modo ſe due Quantità ſi dividano per una terza ſteſſa, i Quoti riterranno la proporzione ſteſſa de' dividendi, come dividendoſi 40, ed 80 per 5, i quoti 8, e 16 ſaranno anch' eſſi in ragion dupla, come 40, ed 80.

7. Proporzione Diretta è quella, il di cui Antecedente è al ſuo Conſeguente, come l' altro Antecedente al Conſeguente ſuo; come in queſt' eſempio 8: 4: : 12: 6.

8. Proporzione Inverſa, o Reciproca ſarà, quando l' Antecedente di una ragione è al ſuo Conſeguente, come in ſenſo contrario il Conſeguente dell' altro è all' Antecedente ſuo; come 12: 3: : 2: 8. Vale a dire tante volte contiene 12 il 3, quante il 2 è contenuto nell' 8. Dove è da notarſi, che i quoti ſono uguali, cioè 4; il primo però naſce della diviſione dell' antecedente 12 pe'l conſeguente 3. Il ſecondo dalla diviſione del conſeguente 8 per l' antecedente 2. Quindi diceſi da' Fiſici, i pori de' corpi eſſere in Ragion' Inverſa della materia; e vale a dire, tanto meno quantità di pori eſſere in un corpo, quanto più vi ha di materia.

LEM-

LEMMA.

SE sieno Quattro Quantità geometricamente proporzionali, il prodotto delle due estreme sarà uguale al prodotto delle due medie.

8: 4: : 12: 6

Se si moltiplichi 8 per 6, quantità estreme, il prodotto sarà 48, e 48 sarà parimente il prodotto di 4 per 12, che sono le quantità medie.

Corollario 1.

SE'l prodotto delle Quantità estreme sarà Uguale al prodotto delle medie, le quattro quantità saranno proporzionali.

Corollario 2.

SE tre grandezze saranno continuamente proporzionali, il rettangolo dell' estreme, o sia il prodotto delle due estreme, che nasce della loro moltiplicazione sarà uguale al quadrato della media.

4, 8, 16

Se si moltiplica 4 per 16, darà 64: e se si moltiplica 8 per se stesso, darà parimente 64.

Corollario 3.

SE sieno quante si vogliano quantità geometricamente proporzionali, l' Equidistanti dalle medie daranno il prodotto uguale al prodotto delle medie, se sieno pari in numero.

Sieno 2, 4, 8, 16, 32, 64

Moltiplicandosi le due estreme 2, e 64 daranno no il prodotto 128, che daranno anche 8, e 16 medie; e se si moltiplichino 4, e 32, daranno l'istesso prodotto.

Corollario 4.

DElle quantità geometricamente proporzionali, essendo impari nel numero, ed essendo anche in serie continuata, il prodotto dell'Estreme sarà uguale al prodotto o al Quadrato della Media.

Sieno 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.

Se si moltiplichino le due estreme quantità 2, e 128, il prodotto sarà 256, e 256 sarà il prodotto, o il quadrato di 16 Media fra le date quantità.

L'esposto Lemma è il fondamento di tutte le Argomentazioni, che nelle proporzioni formano i Matematici, e sono le seguenti, nelle quali si riconosce sempre la verità del Lemma.

Argomentare per ragione Inversa, o Invertendo.

SE quattro ragioni saranno geometricamente proporzionali, il Conseguente avrà l'istessa ragione al suo Antecedente, che l'altro Conseguente ha al suo Antecedente.

8: 4: : 6: 3.	3 × 8	4 × 6
dunque	24	24
4: 8: : 3: 6.	4 × 6	8 × 3
	24	24

Poichè l'Antecedente 8 contiene due volte il suo Conseguente 4, e l'Antecedente 6 due volte parimente contiene il suo Conseguente 3: tante volte il Conseguente sarà contenuto nel suo Antecedentecedente, come l' altro Conseguente nel suo Antecedente.

Argomentare per Alternazione, o Alternando.

SE quattro quantità saranno Geometricamente proporzionali, sarà l' Antecedente della prima ragione all' Antecedente della seconda, come il Consequente della prima al Consequente della seconda.

8: 4: : 6: 3	8×3	4×6
sarà Alternando	24	24
8: 6: : 4: 3	8×3	6×4
	24	24

Perciocchè siccome l' 8 eccede il 6 per una quarta parte, cioè per 2, così il 4 eccede il 3 per una quarta parte, cioè, per 1.

Argomentare per Composizione di Ragione, o Componendo.

SE quattro quantità saranno geometricamente proporzionali, l' Antecedente, e 'l Conseguente insieme uniti della prima ragione saranno all' istesso Conseguente, come l' Antecedente, e Conseguente della seconda ragione al Conseguente suo.

8: 4: : 6: 3	8×3	4×6
sarà Componendo	24	24
12: 4: : 9: 3	12×3	4×9
	36	36

Poichè crescono in ugual proporzione: tutte e due le ragioni erano per l' avanti in proporzion Dupla, crescono ora tutte e due in ragion Tripla.

Ar-

Argomentare per Division di Ragione.

Se quattro quantità saranno geometricamente proporzionali, sarà l' Eccesso, o sia la differenza dell' Antecedente, al suo Conseguente nella prima ragione, come l' Eccesso dell' Antecedente, al Conseguente suo nella seconda.

12: 3: : 8: 2	12×2	3×8
sarà Dividendo	24	24
9: 3: : 6: 2	9×2	3×6
	18	18

L' Eccesso, o la Differenza è ciò, per cui una quantità supera l' altra: nell' esempio proposto 12 eccede 3 per 9; ed 8 supera 2 per 6; e l' istessa ragione passa tra 9 differenza della prima parte, e'l suo conseguente 3, che passa tra 6 differenza della seconda parte, e'l suo conseguente 2. In tutte queste due parti la proporzione è Tripla; è ciò chiaro per la Proprietà 4 delle proporzioni; se da simili parti se ne sottragono parti simili, simili ancora saranno i residui.

Argomentare per Conversione di Ragione.

Se quattro quantità saranno geometricamente proporzionali, sarà l' Antecedente della prima ragione alla differenza del suo Conseguente, come l' Antecedente della seconda ragione alla differenza del suo Conseguente.

9: 3: : 6: 2	9×2	3×6
sarà per Conversione	18	18
di Ragione	9×4	6×6
9: 6: : 6: 4	36	36

Poichè 6 è la Differenza, che passa tra 9, e 3; e 4

e 4 è la Differenza tra 6, e 2; La ragione sarà chiara per l'istessa proprietà 4. di sopra accennata.

Argomentare per Ragione Ordinata.

Se in due date serie saranno più ragioni ordinatamente disposte, e la prima sarà alla seconda nella prima serie, come la prima alla seconda nella seconda serie; sarà anche la prima all' ultima nella prima serie, come la prima all' ultima nella seconda serie.

12: 6: 3 $\qquad 12\times3 \qquad 6\times6$
8: 4: 2 $\qquad 36 \qquad 36$
sarà per Ordinazion di Ragione $8\times2 \qquad 4\times4$
12, 3: : 8: 2 $\qquad 16 \qquad 16$
$12\times2 \qquad 3\times8$
$24 \qquad 24$

Poichè sono in tutte e due le serie l' intermedie ragioni respettivamente proporzionali.

Argomentare per Ragion Perturbata.

Se si daranno due serie di quantità geometricamente proporzionali, tra le quali non si serbi; ma si perturbi l' ordine delle proporzioni, anche sarà la prima all' ultima in una serie, come la prima all' ultima nella seconda serie di ordine perturbato.

12: 6: 2
24: 8: 4
sarà anche
12: 2: : 24: 4

Ciò si spiega in un' altra maniera, come segue.

Dispongasi una serie di proporzioni (per esempio) di questi numeri 12: 6: 2. Nel formare l' altra serie si serbi l' ordine tra li primi due termini, mettendo (per esempio) 8: 4, come termini corrispondenti agli altri 12: 6, (mentre 8: 4 anno l' istessa ragione tra di loro, che hà il 12 al 6.) seguitando però la seconda serie per farla corrispondente alla prima. siccome il 6 della prima serie si prende per antecedente al conseguente 2, così si dovrebbe prendere il 4 nella seconda serie per antecedente ad un' altro termine suo conseguente. Se così si facesse, sarebbe la Proporzione Ordinata, come si è detto nell' argomentazione precedente; mà in quest' altra argomentazione non si fa così, mentre in questa si perturba quì l' ordine (che perciò chiamasi *Ragion Perturbata*) e si assume un' altro Antecedente di fuori, ch' è il 24, il quale abbia al primo termine della sua serie, ch' è l' 8, l'istessa ragione, che hà il 6 al suo Conseguente 2. Allora dunque essendosi così disposta la Proporzione (li numeri Romani significano solamente l'Ordine de' termini) si fá l'argomentazione in questa forma.

Se in una serie sarà il Primo termine al Secondo, come nell'Altra serie parimente il Primo al Secondo; e come nella prima serie il Secondo al Terzo, così nell' altra serie perturbatamente un Terzo termine al Primo, sarà come il Primo al Terzo nella prima serie, così il Terzo al Secondo nell' altra serie

I.	II.	III.
12:	6:	2
24:	8:	4:
III.	I.	II.

L' esem-

L' esempio della proporzione ne' numeri proposti, chiaramente dimostra la verità di quest'Argomentazione; poichè essendo il 12 al 6, come l' 8 al 4, e come il 6 al 2, così 24 all' 8, sarà il 12 al 2, come il 24 al 4.

DEFINIZIONI.

Per applicare le dette Proporzioni.

1. Figure simili si chiamano quelle, che anno ciascun' Angolo a ciascun'Angolo uguale, ed i Lati; che si oppongono agli Angoli uguali, Proporzionali.

2. L' altezza della Figura è la Perpendicolare, che dal vertice alla base si fà cadere, come nel Triangolo ABC, l' Altezza è la Perpendicolare BE. Se non può cadere la perpendicolare dentro il triangolo, come in ABM, si prolunghi la base AB in C, e facendo cadere dal vertice M la linea MC, questa Perpendicolare sarà l' altezza di essa figura. Tav. II. Fig. 19. Tav. II. Fig. 20.

3. Archi simili de' cerchi saranno quelli, che avranno l' istessa Ragione alla loro Circonferenza, cioè, se tutti e due saranno la terza, la quarta, o la decima parte de proprii Cerchi. L' istesso dicasi de' Segmenti simili, e de settori simili nella proporzione, che avranno col resto de' loro cerchi.

TEOREMA I.

Se i Triangoli avranno l' istessa Altezza, saranno in Ragion delle loro Basi;

Tav. V. Fig. 1.

C*ostruz.* Sieno due Triangoli DLE, BQG fra l' istesse parallele LH, DG: si divida la Base BG in parti aliquote per quanto ne sarà capace, che sieno commune misura, come BA, AC, CD, DE, EG, e la Base DE nelle parti DI, IF, FE: da i punti delle divisioni si tirino al vertice linee; sicchè formino tanti Triangoletti, quante sono le divisioni.

Dimostr. La Base maggiore BG divisa per la misura, ch'è commune alla Base minore DE, contiene più parti aliquote, che non ha la Base minore DE: dunque conterrà ancora maggior numero di Triangoletti il Triangolo BQG, che il Triangolo DLE: dunque tante volte l'uno sarà maggiore dell' altro, quante più saranno le parti aliquote nell' uno, che nell' altro (*a*): saranno dunque tra loro, come le Basi. Ciò, che &c.

(a) *Def. 6. delle Proporzioni P. III.*

Corollario I.

Tav. V. Fig. 1.

I Parallelogrammi uguali nell' Altezza sono come le Basi.

Dimostr. I Parallelogrammi sono doppii de' Triangoli (*b*): dunque anch' essi sono in ragione delle loro Basi.

(b) *Cor. 2 del Teor. 9 P. I.*

Co-

Corollario 2.

SE due Triangoli avranno l' istessa Base, saranno tra loro, come l' Altezze.

Costruz. Si formino sopra l' istessa Base due Triangoli ACB, ADB. L' Altezza del primo sia CE, del secondo DP. Dico CE: DP: : il Triangolo ACB: al Triangolo ADB. Si faccia la perpendicolare OP uguale a CE col tirar dal punto C una parallela ad AP. Indi si faccia la PS uguale ad AB, e si tiri la OS, ed ultimamente la SD. Tav. V. Fig. 2.

Per comprender subito la dimostrazione, osservisi, che i due Triangoli; de' quali l'Altezza proporzionale dee dimostrar la Ragione, che passa tra loro, sono trasportati nel Triangolo POS, e PSD, e ciò ch'è l' Altezza ne' primi, è Base ne' secondi, essendo PS l' Altezza di tutti e due Triangoli POS, PDS.

Dimostr. PO: PD: : il Triangolo POS: al Triangolo PDS (*a*): mà POS è uguale ad ACB (*b*); e 'l Triangolo PDS è uguale al Triangolo ADB (*c*): dunqne PO: PD: : ACB: ADB; mà PO per la costruzione è uguale a CE, Altezza del Triangolo ACB, DP è Perpendicolare, o sia l' Altezza del Triangolo ADB: dunque l' Altezza CE: DP: : il Triangolo ACB: al Triangolo ADB. Ciò, che &c.

(a) *Teor. 1 P. III.*
(b) *Cor. 1. del Teor. 9 P. I.*
(c) *Per l' istessa.*

L' istesso sarà de' Parallelogrammi, i quali sono Doppii de' Triangoli.

TEOREMA II.

Se tra i Lati di un Triangolo si tiri una Parallela, questa dividerà i Lati Proporzionalmente.

E se li segherà Proporzionalmente, la linea sarà Parallela.

Tav.V. Fig. 3. COstruz. Sia FL Parallela alla Base BC: dall' estremità di tutte, e due si tirino FC, LB, le quali formeranno due Triangoli, cioè, LFB, LFC, i quali per esser tra l' istesse Parallele FL, BC, e sopra l' istessa Base FL (*a*) saranno uguali.

(a) *Cor.* 1 *del Teor.* 9 *P. I.*

Dimostr. della 1. *parte*. Il Triangolo X è al Triangolo FLB, come l' istesso Triangolo X all' altro Triangolo uguale LFC (*b*). ma il Triangolo X: al Triangolo FLB: : la Base AF: alla Base FB (*c*); e'l Triangolo *X*: al Triangolo LFC: : la Base AL: alla Base LC: dunque (*d*) AF: FB: : AL: LC.. Ciò, che &c.

(b) *Propr.* 2. *P. III.*
(c) *Teor.* 1 *P. III.*
(d) *Proprietà* 3.

Dimostr. della 2. *parte*. Avendo i due Triangoli FLB, LFC l' istessa Proporzione (come si è dimostrato nella 1. parte) all' istesso Triangolo X (*e*), saranno tra loro uguali: dunque avendo l' istessa Base, sarà la linea BC, che passa pe' loro vertici Parallela alla loro Base FL. Ció, che &c.

(e) *Proprietà* 2. *delle Proporzioni*.

Corollario.

SE si tireranno più Parallele ad un lato del Triangolo, tutte le porzioni del lato segato saranno Proporzionali.

Costruz. Si tiri FQ Parallela ad LC. Tav. V. Fig. 4.

Dimostr. Le due rette QS, SF sono uguali a CO, OL, perchè sono lati opposti de' Parallelogrammi QCOS, SOLF (*a*); ma nel Triangolo BFQ, la BI: IF:: QS, ST: (*b*) dunque anche sarà BI: IE: : CO: OL (*c*) Ciò, che &c.

(a) *Cor.2. del Teor.8 P. I.*
(b) *Teor.2 P. III*
(c) *Proprietà 1. delle Proporzioni.*

TEOREMA III.

Se due Triangoli saranno Equiangoli, i Lati saranno scambievolmente Proporzionali.
E se i Lati saranno scambievolmente Proporzionali, i due Triangoli saranno tra loro Equiangoli.

Sieno i Triangoli BAC, LDH Equiangoli: Tav. V. Fig. 5.

Dico, i loro Lati essere Proporzionali.

Costruz. Nel Triangolo BAC si tiri EF Parallela a BC, in modo, che il Triangolo EAF sia uguale al Triangolo LDH.

Dimostr. Se L' angolo D si ponga sopra l' angolo A suo uguale per l' ipotesi, i due lati DL, DH caderanno sopra li lati AE, AI: e congiungendo le loro estremità colla EF, risulterà il Triangolo AEF in tutto uguale al Triangolo DLH: onde sarà l' Angolo AEF uguale a B, e l' Angolo AFE uguale a C: Essendo dunque l'Angolo esterno AFE uguale all' interno C, saranno Parallele EF, BC (*d*): Dunque (*e*) BE: EA: : CF: FA; e Componendo BA: EA: : CA: FA: (*f*) Ma EA è uguale ad LD, per la costruzione, ed FA è uguale ad HD: dunque BA: LD: : CA: HD.

Inoltre si ponga l'Angolo L sopra il suo ugua-

(d) *Cor. del Teor.2 P. I.*
(e) *Teor.2 P.III.*
(f) *3. Modo di argomentare*

le B; caderanno li lati LH, LD sopra li lati BO, BE, e congiungendo l' estremità loro colla linea OE, risulterà il Triangolo BOE in tutto uguale al Triangolo LHD: dunque l' Angolo BEO esterno, essendo uguale all' interno A, le due linee EO, AC (*a*) saranno Parallele: dunque AE: EB:: CO: OB; (*b*) e Componendo AB: EB: : CB: OB : ma EB è uguale aDL, ed OB è uguale ad HL: dunque AB: DL: : CB: HL. Ciò, che &c.

(a) *Cor. del Teor.* 2 *P. I.*
(b) *Teor.* 2 *P. III.*

Coll' istesso raziocinio si dimostrerà essere BC: LH:: CA:HD; considerando tirata la OF Parallela ad AB, onde verrà in conseguenza essere BC: OC: : AC: FC; e per l' ngualità di OC ad LH, e di FC aDH, sarà BC : LH: . CA : HD : Ciò, che &c,

Tav. V. Fig. 6.

Dim. della 2. *par.* Costr. Alla base del Triangolo S, proporzionale al P, si formino due Angoli X, e Z uguali ad A, e C, i lati de'quali si vadano a congiungere in N; sarà anche l' Angolo B nell' altro Triangolo P uguale al terzo angolo N (*c*).

Essendo i Triangoli P, e T Equiangoli per la costruzione, sarà AB : RN: : AC: RQ(*d*); ma per l' ipotesi AB : RF : : AC : RQ: dunque AB: RF: : l' istessa AB: RN (*e*) : dunque RN, RF sono uguali (*f*). Saranno per l'istessa ragione uguali QN, QF; dunque i Triangoli T, ed S saranno Equilateri : dunque (*g*) saranno Equiangoli. Ma il Triangolo T per la costruzione è Equiangolo al Triangolo P, dunque il Triangolo S sarà anch' esso Equiangolo al Proporzionale P (*h*). Ciò, che &c.

(c) *Cor.* 2. *del Teor.* 7 *P. I.*
(d) *Teor.* 3. *part.* 1 *di questa P. III.*
(e) *Proprietà* 3.
(f) *Proprietà* 3.
(g) *Cor.* 1. *del Teor.* 4 *P. I.*
(h) *Assioma* 4.

Co-

Corollario 1.

SE ad un lato d' un Triangolo si tiri una Parallela, il Minor Triangolo sarà Proporzionale al Maggiore. Tav.V. Fig. 7.

Dimostr. I due Triangoli EAF, BAC sono Equiangoli, (poichè l' angolo esterno AFE é uguale all' interno BCF, e l'angolo AEF all'altro interno ABC (*a*), e l'angolo A è commune); ma se sono Equiangoli, sono Proporzionali (*b*): dunque il Triangolo EAF Minore sarà Proporzionale al Maggiore BAC. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 2 *P. I.*
(b) *Teor.* 3 *P. III.*

Corollario 2.

SE due Triangoli abbiano un' Angolo uguale, ed i Lati, che comprendono quell' Angolo, Proporzionali, saranno i Triangoli stessi Proporzionali.

Costruz. Si tiri una parallela nel maggior Triangolo, cioè EF, sicchè venga a formare il Triangolo EAF uguale al minore dato LDM. Tav. V. Fig. 7.

Dimostr. Essendo l' Angolo A uguale all' Angolo D, se questo si ponga sopra quello, caderanno li lati DL, DM sopra AB, AD insino ai punti E, F; onde tirando la EF, risulterà il Triangolò EAF, in tutto uguale al Triangolo DLM (*c*). Sarà la EF parallela alla base BC, come si è dimostrato nel Corollario precedente. Dunque essendo il Triangolo BAC Proporzionale al Triangolo EAF (per l' istesso corollario precedente) sarà ancora Proporzionale all' altro Triangolo DLM, ch' è uguale al detto Triangolo EBF. Ciò, che &c.

(c) *Teor.* 3 *P. I.*

TEO-

TEOREMA IV.

Nel Triangolo Rettangolo se una linea caderà perpendicolarmente dall' Angolo Retto sù la Base, formerà due Triangoli, i quali saranno Proporzionali tra Loro, e Ciascuno all' Intero.

Tav. V. Fig. 8.

(a) *Ipotesi*

(b) *Cor. 2 del Teor. 7 P. I.*

(c) *Assioma 4.*

(d) *Teor. 3. P. III.*

D*imostr.* Il Triangolo ABD è Equiangolo ad APB, poichè essendo in ABD l' Angolo B retto (*a*), sarà in APB l'Angolo P anche retto (per ipotesi); l'Angolo BAD è commune, e'l terzo D sarà uguale al terzo ABP (*b*): Mà l'istesso Triangolo ABD è Equiangolo all' altro BPD; poichè per le ragioni addotte B, e P sono retti, D è commune, e'l terzo A è uguale al terzo PBD; dunque i due Triangoli APB, DPB sono Equiangoli coll' intero ABD: dunque saranno Equiangoli tra loro (*c*): ma gli Equiangoli sono Proporzionali (*d*): saranno dunque fra Loro, ed all' Intero Proporzionali. Ciò, che &c.

TEOREMA V.

Se quattro rette saranno Proporzionali, il Rettangolo fatto dall'estreme sarà uguale al rettangolo fatto dalle medie.

Tav. V. Fig. 9.

(e) *Lemma.*

D*imostr.* AB : FI : : IL : BC : dunque A B in BC, cioè il Rettangolo X, sarà uguale al Rettangolo fatto da FI in IL, cioè al Rettangolo M (*e*). Ciò, che &c.

Co-

Corollario.

SE saranno Tre rette continuamente Proporzionali, sarà il Rettangolo dell'estreme uguale al Quadrato della Media. Tav. V. Fig. 10.

Dimostr. Si assuma O uguale alla Media FL. Sarà AB : FL : : FL : BC: mà O, per ipotesi, è uguale ad FL; dunque sarà AB : FL : : O : BC : Ma il Rettangolo di AB prima in BC ultima è uguale al Rettangolo di FL Media moltiplicata per l' altra media O (*a*) : dunque il Rettangolo di AB in BC, cioè, Rettangolo D è uguale al Quadrato di FL (essendo O uguale ad FL, la moltiplicazione da nel prodotto un Quadrato) cioè G. Ciò, che &c.

(a) *Lemma.*

TEOREMA VI.

Se due Parallelogrammi saranno Uguali, ed avranno un' Angolo Uguale, avranno i lati Reciprocamente Proporzionali.
E se i lati saranno Reciprocamente Proporzionali, essi saranno uguali.

COstruz. Si formino due Parallelogrammi AD, DG, Uguali, e l' Angolo BDC Uguale all' Angolo EDF: Si prolunghino i due lati AB, GE, finchè s' incontrino in H. Tav. V. Fig. 11.

Dimostr. della 1. parte. Il Parallelogrammo AD: al Parallelogrammo BE: : la Base CD: alla Base DE(*b*); e'l Parallelogrammo GD: al Parallelogrammo EB: : la Base FD: alla DB (*c*) : Ma il Parallelogrammo AD è uguale al Parallelogram-

(b) *Cor. I. del Teor. I P. III.*
(c) *Per l' istesso.*

mo

mo GD per l' ipotesi; dunque tutti e due AD, GD anno l' istessa proporzione al Parallelogrammo EB (a): dunque la proporzione di CD alla DE è la stessa, che la proporzione di FD a DB; dunque CD: DE: : FD: DB. Ciò, che &c.

(a) *Proprietà* 1.

Dimostr. della 2. *parte*. CD: DE: : FD: DB (per la prima parte); dunque il Parallelogrammo AD: al Parallelogrammo BE: : il Parallelogrammo GD: al Parallelogrammo BE (b); dunque il Parallelogrammo AD è uguale al Parallelogrammo DG (c). Ciò, che &c.

(b) *Cor.* 1. *del Teor.* 1 *P. III.*

(c) *Proprietà* 2.

Corollario 1.

Tav. V. Fig. 11.

L' Istesso dicasi de' Triangoli, come si è detto de' Parallelogrammi.

Dimostr. Essendo i Triangoli metà de' Parallelogrammi, se saranno uguali, ed avranno un' angolo uguale, avranno i lati, che formano gli angoli uguali Reciprocamente Proporzionali; Poichè sono anch' essi in ragione delle Basi CD, DE; FD, DB.

Corollario 2.

Tav. V. Fig. 11.

NE' Parallelogrammi, e Triangoli Uguali le Altezze sono Reciprocamente, come le Basi.

E se le Altezze sono Reciprocamente come le basi, sono Uguali.

Dimostr. I due Parallelogrammi GD, EB anno l' istessa Base DE: dunque saranno, come l' Altezza FP, all' Altezza BO (d); e 'l Parallelogrammo AD: BE: : la Base CD: alla Base DE.

(d) *Cor.* 2. *del Teor.* 1 *P. III.*

DE: (*a*); Dunque essendo Uguali i Parallelogrammi AD, GD, sarà C D: D E: : F P: B O. Ciò, che &c.

(a) *Per l' istesso*.

TEOREMA VII.

I Triangoli Proporzionali sono in Ragion Duplicata de' Lati Omologi; cioè, de' lati, che si oppongono a gli Angoli Uguali.

COstruz. Sieno due Triangoli ABC, DEF: si faccia cadere dall' Angolo B del maggior Triangolo alla Base, la linea BO; sicchè le Basi abbiano la seguente Proporzione AC: DF: : DF: C O.

Tav. V. Fig. 14.

Dico, il Triangolo ABC: al Triangolo DEF:: AC: CO; cioè, come la Prima alla Terza*, ch'è la ragion Duplicata.

Dimostr. Essendo i Triangoli Proporzionali, sarà AC: DF: : BC: E F (*b*); mà per l' ipotesi AC: DF: : DF: OC: dunque (*c*) sarà BC: EF: : DF: CO: mà essendo il Triangolo B O C uguale (*d*) al Triangolo DEF (perchè l' angolo C è uguale all' angolo F, ed i lati, che li comprendono, proporzionali) sarà il Triangolo ABC: al Triangolo DEF: : il Triangolo ABC: al Triangolo BOC: mà ABC: CBO:: AC: CO (*e*) dunque anche il Triangolo ABC: al Triangolo D E F: : A C: C O. Ciò, che &c.

(b) *Teor.* 3 *P. III.*
(c) *Proprietà* 3.
(d) *Cor.* 1. *del Teor.* 6 *P. III.*
(e) *Teor.* 1. *P.III.*

Corollario.

TUtti i Poligoni avran la Ragione Duplicata de' loro lati Omologi.

Dimostr. Tutti i Poligoni possono dividersi in altret-

altrettanti Triangoli proporzionali, quanti ſono i lati, da cui vengono compoſti: dunque ogni Triangolo ſimile ſarà al ſuo ſimile in Ragion Duplicata: dunque ſe ciaſcun' Antecedente è al ſuo Conſeguente, come l'altro Antecedente è al ſuo; così tutti gli Antecedenti inſieme ſaranno a loro Conſeguenti inſieme (*a*): Così ſe ciaſcun Triangolo de' Poligoni è in Ragion Duplicata de' lati omologi, ſarà tutto il Poligono a tutto l'altro Poligono proporzionale anche in Ragion duplicata degli ſteſſi lati omologi.

(a) *Proprietà* 4.

Tav. V. Fig. 13. Per ben intendere queſta Ragion duplicata, baſta riflettere che ſe la Baſe GA ſia doppia della baſe AD, e ſimilmente la baſe BA ſia doppia della baſe AF, ſarà il Rettangolo O doppio del rettangolo X; mà il Rettangolo X è doppio del Rettangolo Z, dunque il Rettangolo O ſarà Quadruplo del Rettangolo Z.

Che ſe le baſi ſaranno triple, ſarà il rettangolo X triplo del Z; e 'l rettangolo O nonuplo di Z.

Mà ſe la baſe BA ſarà doppia della baſe AF, e la baſe GA tripla della baſe AD, il rettangolo O al rettangolo Z avrà la ragion Prodotta, o ſia Compoſta dalla Tripla, e Dupla degl' iſteſſi lati. Cioè, il Rettangolo O ſarà Seſtuplo del Rettangolo Z; perchè triplo del Rettangolo X; il quale X è doppio del Rettangolo Z.

TEO.

TEOREMA VIII.

I Parallelogrammi, ed i Triangoli Equiangoli sono in Ragion composta della Ragione de' loro lati.

COstruz. Sieno due Parallelogrammi CB, DG: si collochino in maniera, che i lati AB, GE allungandosi concorrano nel punto H: indi si faccia DE ad IM, come BD ad DF. Tav. V. Fig. 11.

Dico, Li due Parallelogrammi AD, DG esser tra di loro in Ragion Composta di quella de' loro lati, cioè come CD ad IM.

Dimostr. Il Parallelogrammo AD: al Parallelogrammo BE: : la Base CD: alla Base DE (a): ed il Parallelogrammo BE: al Parallelogrammo DG:: BD: DF (b); (cioè come DE ad IM per costruzione) dunque per ragione ordinata sarà il Parallelogrammo AD: al Parallelogrammo DG: : CD: IM, ch'è la Ragion Composta sudetta. Ciò, che &c.

(a) *Cor. 1. del Teor. 1 P. III.*
(b) *Pe'l medesimo.*

Essendo i Triangoli metà de' Parallelogrammi, saranno in ragione Composta del lato CD al lato DE; e del lato BD al lato DF, la quale Ragion Composta è quella, che passa tra CD ad IM.

TEOREMA IX.

Se sopra i lati d'un Triangolo Rettangolo si descrivano tre Poligoni simili, quello, che sarà formato sopra l'Ipotenusa, sarà uguale ai due formati sopra i due Lati.

COstruz. Si descriva un Triangolo Rettangolo ABD: sopra l'Ipotenusa AD si formi il Poligono Tav. V. Fig. 14.

gono F: sopra i Lati AB, BD si formino i Poligoni G, I, simili al Poligono F.

Dico, i due Poligoni G, I, essere tutti e due insieme uguali al solo Poligono F.

Dimostr. Si tiri dall' angolo B alla base AD la perpendicolare BO. Essendo AD: DB: : DB: DO (*a*) sarà il Poligono F al suo simile I in ragion Duplicata di AD a DB (*b*) cioè, come AD prima a DO terza. In oltre essendo DA: BA: : BA: AO (*c*) sarà il Poligono F al suo simile G in ragione anch' esso Duplicata di DA a BA (*d*) cioè, come la prima DA alla terza AO; ma il Poligono F: al Poligono I:: AD: DO, e l'istesso Poligono F: al Poligono G:: AD: AO: dunque il Poligono F: ai due Poligoni I, e G insieme:: AD: DO: e:: AD: AO insieme; Ma AD è uguale a DO, OA insieme; dunque anche il Poligono F è uguale ai due Poligoni I, G insieme. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 4 *P. III.*
(b) *Cor. del Teor.* 7 *P. III.*
(c) *Dal Teor.* 4. *P. III.*
(d) *Cor. del Teor.* 7 *P. III.*

TEOREMA X.

Se due rette si segheranno nel Cerchio in un punto, che non sia il Centro, si segheranno Proporzionalmente.

Tav. V. Fig. 15. *Costruz.* Si seghino nel punto Q le due rette AB, CD; si tirino le dette AC, DB.

Dico, esser AQ: QC: : DQ: QB.

Dimostr. I Triangoli AQC, BQD sono Equiangoli: (poichè gli angoli opposti fatti nel vertice Q sono uguali (*e*); uguali anche sono gli angoli CAB, CDB; poichè insistono sopra l' istesso arco CB (*f*) e'l terzo angolo ACQ è uguale al ter-

(e) *Cor.* 1. *del Teor.* 1 *P. I.*
(f) *Cor.* 3. *del Teor.* 3 *P. II.*

zo DBQ (*a*) : dunque sono Proporzionali, cioè, AQ: QC: : DQ: QB (*b*). Ciò, che &c.

(a) *Cor.2. del Teor.7 P. I.*

(b) *Teor.3 P. III.*

Corollario 1.

Tav. V. Fig. 15.

SE nel Cerchio due Rette si segheranno, il Rettangolo fatto da' segmenti di una retta, sarà uguale al Rettangolo fatto da' Segmenti dell' altra.

Dimostr. A Q: Q C: : D Q: QB (*c*) : dunque AQ prima moltiplicata per QB ultima è uguale a QC seconda in DQ terza (*d*) ; mà AQ in QB dà per prodotto il Rettangolo da' Segmenti A Q, QB ; e QC in DQ dà per prodotto il Rettangolo fatto da' Segmenti QC, DQ: dunque &c.

(c) *Teor. 10. P.III.*

(d) *Lemma P.III.*

Corollario 2.

Tav. V. Fig. 16.

SE da un punto fuori del Cerchio si tirino due rette, l' una, che tocchi, l'altra, che seghi il cerchio; il Quadrato della Tangente è uguale al Rettangolo fatto da tutta la Secante, e dal Segmento fuori del cerchio.

Costruz. Dal punto A si tiri AB, che tocchi, ed ACD, che seghi il Cerchio. Si tirino inoltre BD, BC.

Dimostr. I due Triangoli A B D, A B C sono Equiangoli: poichè l' angolo A è commune, e l' angolo ABC, fatto dalla Tangente e Secante è uguale all' angolo D nel segmento alterno (*e*) ; dunque AD: AB: : AB: AC (*f*) dunque il Rettangolo di AD in AC è uguale al Quadrato AB (*g*). Ciò, che &c.

(e) *Teor.10 P. II.*

(f) *Teor.3 P. III.*

(g) *Cor. del Teor.5 P.III.*

TEOREMA XI.

Ne' Cerchi uguali gli Angoli al Centro, ed alla Periferia sono in Ragione degli Archi, sù quali poggiano. E l'istessa Proporzione è de' Settori.

Tav. V. Fig. 17. DImostr. Quante volte la parte aliquota DN sarà contenuta nell'Arco C A, tante volte l'Angolo DON sarà contenuto nell'Angolo CBA: dunque l'Angolo DOR: all'Angolo CBA:: l'Arco DR: all'Arco CA.

Essendo gli Angoli della Circonferenza metà degli Angoli al Centro(*a*), sarà S:M:: le Basi DR: CA, sù cui poggiano. Ciò, che &c.

(b) *Teor. 2. P. II.*

Dimostr. della 2. parte. L' istessa dimostrazione è pe' Settori; perciocchè colla divisione dell' arco D R, e dell' arco CA in parti aliquote di commune misura, saranno tanti piccioli Settori, quante divisioni può contener l' arco; dunque come è l'Arco DR: all' Arco C A:: sarà il Settore DON al Settore CBH. Ciò, che &c.

Corollario 1.

Tav. V. Fig. 18. L'Angolo BAC al Centro: ai quattro Angoli retti:: l'Arco BC, sù cui poggia, a tutta la Periferia.

Dimostr. L' Angolo BAC: all' Angolo retto BAF:: l'Arco BC: al Quadrante BF (*b*): dunque l' Angolo BAC: ai quattro Retti:: l' Arco BC ai quattro Quadranti, cioè, a tutta la Periferia. Ció, che &c.

(b) *Teor. 11 P. III.*

Co-

Corollario 2.

LE Corde, e gli Archi ſono tra loro, come i Raggi. Tav.V. Fig.19.

Coſtruz. Si deſcriva una ſeſta parte di cerchio CD, ed un' altra F E, che per eſſer minore, le ſarà proporzionale. Si tirino le corde CD, FE; indi dal commune Angolo B ſi tirino raggii BFC, BED.

Dimoſtr. I Triangoli C B D, FBE, (eſſendo l' angolo B commune, e per le due parallele CD, FE, e per gli angoli uguali C ad F, e D ad E per eſſere angoli interni, ed eſterni fatti dalle parallele (*a*), ſaranno Equiangoli: dunque (*b*) ſaranno ſimili; dunque la Corda CD: alla Corda FE: : il Raggio CB: al Raggio FB. Ciò, che &c.

(a) 2 *Par. del Teor.* 2 *P. I.*
(b) *Teor.* 3 *P. III.*

Dimoſtr. della 2. parte. Siccome ne' cerchi uguali corriſpondono uguali corde agli archi uguali (*c*), così in diverſi cerchi la proporzione delle corde ſarà ſimile a quella degli archi; cioè, una Corda ſarà all' altra, come l' Arco ſubtenſo da eſſa Corda all'Arco dell' altra: mà le corde ſono tra loro, come li Raggii de' loro Cerchi, come ſi è dimoſtrato nella prima parte: dunque anche gli Archi ſaranno tra loro, come li Raggii de' loro Cerchi (*d*): cioè, ſarà l'Arco CPGMD: all'Arco FRHNE: : come il Raggio CB: al Raggio FB. Ciò, che &c.

(c) *Teor.* 3. *P. II.*
(d) *Prop.* 5

TEOREMA XII.

Le Figure Simili Iscritte nel Cerchio sono tra loro in ragion Duplicata de' Raggi .

Tav. V. Fig. 19.

SIa CD lato di un Poligono Iscritto nel Cerchio maggiore , ed omologo al lato FE di un' altro Poligono Iscritto nel cerchio minore ; si tirino li raggi CB, DB .

Dimostr. Essendo li Triangoli G B D, F B E Equiangoli, e Simili (*a*) , sarà il primo al secondo in ragion Duplicata de' lati CD: FE (*b*) Mà CD: FE: : CB : FB : dunque l' istessi Triangoli , e tutti gli altri iscritti, cioè , li Poligoni formati dagl' istessi Triangoli tutti iscritti anno tra loro la ragion Duplicata de' Raggi CB: FB . Ciò, che &c.

(a) *Vedi il Cor. 2. del Teor. antec.*

(b) *Teor. 7. P.III.*

Corollario .

Tav. V. Fig. 19.

I Cerchi anch' essi anno la ragion Duplicata de' Raggi .

Dimostr. I Triangoli BCD, BFE, CBG, FBH anno la ragion Duplicata de' lati , o raggi CB , FB, GB, HB (*c*) , Mà il Cerchio è uguale a tutta la somma de' triangoli , che può iscriversi nel Cerchio stesso (*d*); dunque i Cerchi sono tra loro in ragion Duplicata de' suoi Raggi . Ciò , che &c.

(c) *Teor. 7. P.III.*

(d) *Vedi il Cor. del Teor. 7. P. III.*

PRO-

PROBLEMI.

PROBLEMA I.

Dividere una Linea secondo una data Proporzione.

COstruz. Sia la linea AC divisa in più parti, e giusta questa debba dividersi la linea AB. Tav. V. Fig. 20.

Si congiungano insieme le due linee, sicchè formino qualunque angolo come CAB; dall' altra estremità si tiri altra linea BI, che formi l'Angolo IBA uguale a CAB, dal che si avrà, che AC, IB saranno parallele (*a*): indici coll' apertura del Compasso giusta la voluta Proporzione si segnino nella linea AC, cominciando da A, i punti di divisione, i quali si segnino parimenti nella IB, cominciando da B.

(a) *Cor. del Teor. 7 P. I.*

Dico, che le Linee, che da rispettivi punti partiranno ad incontrarsi con gli altri punti corrispondenti, divideranno la linea AB nella data Proporzione.

Dimostr. Se in un Triangolo si tirino più parallele, queste divideranno i Lati Proporzionalmente (*b*): dunque nel Triangolo CAB per le parallele CB, DL, EM, FG i Lati AC, AB saranno Proporzionalmente divisi. Ciò, che &c.

(b) *Cor. del Teor. 2. P. III.*

PROBLEMA II.

Ritrovare una Media Proporzionale tra le due date linee AB, BC.

COstruz. Si diano due proporzionali AB, BC, tra le quali debbe ritrovarsi la Media proporzionale. Tav. V. Fig. 21.

 Si

Si congiungano le due rette, sicchè formino una retta sola ABC: indi aperto il compasso per la metà di tutta la linea formata dalle due, stabilita essa metà per raggio, essendo centro il punto E, si descriva un cerchio: finalmente dal punto, dove le due linee si sono unite insieme B, si erigga una perpendicolare BD (*a*), che incontri la circonferenza del cerchio.

(a) *Probl. 2. P. I.*

Dico la BD esser la Media Proporzionale cercata.

Dimostr. Si tirino DA, DC. Il Triangolo ADC è Rettangolo (*b*) e dall' angolo retto D cade la Perpendicolare nella Base AC: dunque AB: DB:: DB: BC (*c*). Ciò, che &c.

(b) *Teor. 1 P. II.*
(c) *Teor. 4 P. III.*

PROBLEMA III.

Ritrovare una Terza Continua Proporzionale date due rette DA, DB.

Tav. V. Fig. 22.

C*ostruz.* Si mettano ad angolo retto la DB colla DA, e si congiungano per la B A: si tiri BC perpendicolare alla BA, si prolunghi A D, che s' incontri colla CB nel punto C.

Dico D C essere la Terza Continua Proporzionale.

Dimostr. I due Triangoli DBA, DBC sono proporzionali (*d*) dunque AD: DB:: DB: DC; dunque DC sarà la Terza Continua Proporzionale. Ciò, che &c.

(d) *Teor. 4 P. III.*

PRO-

PROBLEMA IV.

Date Tre Proporzionali, ritrovar la Quarta.

C*ostruz.* Sieno le tre proporzionali date AB, BC, AD; le prime AB, BC si congiungano in linea retta: la terza AD faccia qualsivoglia angolo colla prima AB: indi si tiri la DB, che congiunga dette linee AB, AD; e dal punto C si tiri CE, che sia parallela a BD, la quale s' incontri in E colla AD prolungata. Tav.V. Fig. 23.

Dico, DE essere la Quarta Proporzionale.

Dimostr. AB: BC:: AD: DE (*a*): dunque DE sarà la Quarta Proporzionale richiesta. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 2 *P. III.*

In altro modo.

C*ostruz.* La seconda CB, e la terza proporzionale DB si mettano diritte, e queste vengano toccate dalla prima AB, qualunque sia l' angolo che possan formare: pe' punti C, A, D si descriva un cerchio (*b*); sicchè prolungata la prima A B s' incontri nella circonferenza in Z. Tav. V. Fig. 24.

Dico BZ essere la Quarta Proporzionale.

Dimostr. I rettangoli ABZ, CBD sono uguali (*c*): dunque AB: BC:: BD BZ, (*d*): sarà dunque BZ la Quarta Proporzionale cercata. Ciò, che &c.

(b) *Cor.* 2 *del Probl.* 3. *P. II.*

(c) *Cor.* 1 *del Teor.* 10 *P. III.*

(d) *Teor.* 6 *P. III.*

Nella maniera medesima date le due proporzionali AB, BC, si potrà trovar una Terza Proporzionale. Tav.V. Fig. 25.

Costruz. Si situi la seconda BC, e si prolunghi, ſicchè ſi formi un' altra linea BD ad eſſa uguale indi ſi adatti la prima, ſicchè faccia qualunque angolo colla ſeconda, toccando la CD nel punto B: pe'tre punti C, A, D ſi deſcriva un cerchio (*a*), e ſi prolunghi la prima AB fino alla circonferenza.

(a) *Cor. 2. del Problema 3. P.II*

Dico la BZ eſſere la Terza Proporzionale.

Dimoſtr. I rettangoli ABZ, CBD ſono uguali (*b*): dunque (*c*) AB: BC: : BD: BZ; mà BD, B C per coſtruzione ſono uguali: dunque A B: BC: : BC: BZ: dunque BZ è la Terza Proporzionale. Ciò, che &c.

(b) *Cor. 1 del Teor. 10 P. III.*
(c) *Teor. 6 P. III.*

PROBLEMA V.

Dividere una retta in Mezzana, ed Eſtrema Ragione. Vale a dire, Che Tutta la Retta ſia ad un Segmento, come l'isteſſo Segmento è all' altro Segmento.

Tav. V. Fig. 26.

COſtruz. Si deſcriva un cerchio, ſia ABD, ſi tiri una Tangente CB Uguale al diametro del detto Cerchio; dalla ſua eſtremità C ſi tiri pe'l Centro E del Cerchio la linea CA.

Dico, eſſer fatta la diviſione della linea AC, ed eſſer D A la Media Proporzionale tra Tutta l' AC, e la Minor parte DC.

Dimoſtr. Il Quadrato della Tangente BC è uguale al Rettangolo ACD fatto da tutta la Secante, e dal Segmento fuori del cerchio (*d*): mà BC per coſtruzione è uguale al diametro AD: dunque il Quadrato di AD è uguale al Rettangolo di AC in CD: dunque (*e*) AC: AD: : AD: DC.

(d) *Cor. 2. del Teor. 10. P.III*
(e) *Teor. 6 P. III.*

Reſterà parimente diviſa nella Media, ed Eſtre-

Estrema Ragione anche la Tangente BC, se BC sarà uguale al diametro del cerchio, e la divisione in essa si faccia in F in modo, che sia FC uguale a DC, segmento fuori del cerchio.

Dimostr. Essendo il Rettangolo di AC in DC uguale al Quadrato della Tangente BC (*a*); sarà AC: BC: : BC: DC; e perchè BC, è uguale ad AD, e la DC alla FC (per Costruzione) sarà Tutta l'istessa AC, a Tutta l'istessa BC come la Parte AD alla Parte FC, e come questa parte AD è all' istessa parte FC, così il Residuo DC è al Residuo BF (*b*).

(a) *Cor.* 2 *del Teor.* 10. *P. III*

Sarà dunque - - - - - - - AD: FC: : DC: BF. sustituendo poi gli altri termini uguali, come si è detto, sarà - - - - - - - - - - - BC: FC: : FC: BF.

(b) *Proprietà* 4.

Dunque essendo il Segmento FC la Media, e'l suo Quadrato Uguale al Rettangolo dell' Estreme BC, BF (*c*) cioè, di Tutta la BC, e dell' altro Segmento BF, resterà in questa maniera la retta BC anche divisa in Mezzana, ed Estrema Ragione. Ciò, che &c.

(c) *Lemma*.

PROBLEMA VI.

Formare un Rettilineo simile, e Proporzionale al dato sopra una data Retta EF.

Tav. V. Fig. 27.

Costruz. Si tiri agli angoli opposti la retta AB, e sopra la data retta EF si formi il Triangolo EGF (*d*), che abbia gli angoli uguali al Triangolo DAB (*e*); indi si formi il Triangolo GHF Equiangolo ad ACB. (*f*)

(d) *Dal Prob.* 7. *P. I*
(e) *Dall' istess.*
(f) *Dall' istess.*

Dico tutto il Rettilineo EFHG essere proporzionale al Rettilineo DBCA.

Dimostr. Per costruzione il Rettilineo EFHG è Equiangolo a DBCA: e come ciascuno de' due Triangoli, che compongono il suo rettilineo è Equiangolo al triangolo corrispondente dell' altro rettilineo, e perciò uno proporzionale all' altro (*a*), saranno tutti e due triangoli di un Rettilineo proporzionali agli altri due dell' altro Rettilineo, e tutto il Rettilineo sarà proporzionale all' altro. (*b*) Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 3 *P. III.*

(b) *Proprietà* 4.

PROBLEMA VII.

Dati qualsivogliano Cerchi, o Poligoni, formarne Uno, che sia uguale a tutti.

Tav. V. Fig. 28.

Sieno le quattro rette date AB, CD, EF, GH, le quali si suppongano diametri di quattro Cerchi, o quattro lati di quattro Poligoni.

Si dispongano le due rette AB, GH in tal sito, che formino l' angolo retto ABH, e dalle loro estremità si consideri tirata l'Ipotenusa AH. Questa ipotenusa si trasporti nella retta IB. Se IB fosse il diametro di un cerchio, o il lato omologo di un Poligono, sarebbe il cerchio, o il Poligono formato sù di esso, uguale a due cerchi, o due Poligoni, che si formassero sopra i lati AB, GH. (*c*)

(c) *Teor.* 9 *P. III.*

Si prenda EF, e si trasporti da B in F, facendo angolo retto colla BI (che era la Ipotenusa AH): indi si consideri tirata l' Ipotenusa IF, la quale se fosse diametro di un cerchio, e lato omologo di un Poligono, si formerebbe da essa un cer-

cerchio, o Poligono uguale a tre cerchi, o Poligoni dell' istessa specie formati nelle AB, GH, EF (a).

Finalmente l' istesso può farsi di CD, mettendola da B in L, e facendo angolo retto colla BC (ch' era la Ipotenusa IF) e considerandosi tirata la Ipotenusa CL, se questa fosse diametro di un cerchio, o lato omologo di un Poligono, che si descrivesse, sarebbe uguale alli quattro Cerchj, o Poligoni formati nelle quattro rette date. La dimostrazione è l' istessa del Teorema IX della III. Parte.

(a) *Per l' istess.*

Corollario I.

POter Diminuire una Figura Regolare nella Proporzione, che si voglia.

Costruz. Sia la Figura BAC, di cui voglia formarsene altra Subtripla. Sul lato BC della figura si descriva un Semicerchio: l' istesso lato, o diametro si divida in tre parti BL, LD, DC: Al punto dell' intersezione di una terza parte come, nel caso DC, ergasi una perpendicolare DA. Essendo tirata la CA, sarà la figura sopra AC la Terza Parte di tutta la data simile sopra BC.

Tav. V. Fig. 29.

Dimostr. Nel Triangolo BAC, la BC: AC :: AC: DC: (*b*) onde AC è Media Proporzionale tra la BC prima, e la DC terza: mà il Triangolo BAC è al Triangolo simile sopra AC in Ragione Duplicata de' lati omologi BC, AC (*c*), cioè, come la BC prima, alla DC terza: dunque essendo la BC Tripla della DC, la figura fatta sopra la BC, sarà Tripla della fatta sopra la AC; cioè, il triangolo CAD simile al totale dato BAC sarà Subtriplo dell' istesso BAC.

(b) *Teor.* 4 *P. III.*

(c) *Teor.* 7 *P. III.*

Si-

Similmente si potrà discorrere della proporzione delle altre figure simili descritte sopra i lati, che abbiano tra loro una certa proporzione.

Corollario 2.

Tav. V. Fig. 29. POtrà similmente Accrescersi la Figura, se vogliasi accresciuta in Ragion Sesquialtera.

Costruz. Alla BD si aggiunga la sua metà, come DC, e sopra tutta la composta si descriva il Semicerchio; ergasi una perpendicolare nel punto del Congiungimento delle due line CD, DB: si tiri l' Ipotenusa AB.

Sarà la Figura descritta sopra AB in Ragione Sesquialtera della descritta sopra BD.

Dimostr. La BA è Media tra la prima BC, e la terza BD (*a*), cioè, BC: BA: : BA: BD; mà il Triangolo BAC (*b*) è al suo simile Triangolo sopra BA in Ragion Duplicata de'lati omologi BC, BA, cioè, come BC prima alla BD terza: Essendo dunque la BC alla BD in Ragion Sesquialtera (per la costruz.) sarà anche il Triangolo BAC in ragion Sesquialtera al Triangolo BAD, simile al Totale dato BAC, cioè, il Triangolo BAC conterrà il Triangolo BAD, e di più Una Metà dell' istesso Triangolo BAD. Ciò, che &c.

(a) *Teor.* 4 *P. III.*
(b) *Teor.* 7 *P. III.*

PROBLEMA VIII.

Dati due Poligoni differenti l' uno dell' altro, formarne un' Terzo, che sia simile ad uno, ed Uguale all' altro.

Tav. V. Fig. 30. SIa dato il Pentagono ABCDE, ed il Quadrilatero, o Parallelogrammo Q: si desidera un Ter-

Terzo Poligono uguale al Primo, e ſimile al Secondo.

Coſtruz. Si formi il Rettangolo LM uguale al Poligono ABCED. Ciò nella preſente figura Pentagona ſi farà, tirando linee dal centro a ciaſcun' angolo della figura, eſſendo così queſta diviſa in tanti triangoli, quanti ſono i lati di eſſa; indi prendendo le altezze de' triangoli, faranno queſte un lato del parallelogrammo L M; e ſimilmente formando l' altro lato di queſto parallelogrammo colle mezze baſi di detti triangoli, reſterà formato il rettangolo LM uguale al dato poligono: Accanto a queſto rettangolo ſopra il Lato RM ſi formi un rettangolo RS uguale al quadrilatero, o ſia parallelogrammo Q, rappreſentando RO l' altezza del Quadrilatero Q, ed RM la Baſe dell'iſteſſo Quadrilatero Q: (il che più ampiamente ſi eſpone nella 45. del Lib. I. di Euclide.) Indi ſi trovi una media proporzionale fra il lato LR, ed il lato RO (*a*). La quale ſi avrà mettendo amendue LR, RO in ſito, che formino una linea LRO, e dividendo queſta per mezzo in p, ivi facendo centro, coll'intervallo Lp fatto il ſemicerchio LNO, e dal punto R ergendo la perpendicolare RN, queſta ſarà la Media proporzionale cercata.

(a) *Per il Probl. 2. di queſta III. parte*

Dico, che ſe ſopra queſta Media Proporzionale RN ſi formi una figura Pentagona ſimile alla figura data ABCDE, ſarà queſta anche Uguale all' altra Q.

Dimoſtr. Eſſendo le tre linee L R, R N, R O continuamente proporzionali (*b*), conſeguentemente la prima LR è alla terza RO in ragione Dupli.

(b) *Probl. 2 P. III.*

plicata della prima LR alla seconda RN, sarà il Poligono, sopra LR è alla figura simile sopra RN in ragione Duplicata de' loro lati LR, RN, cioè, come la linea LR prima alla RO terza delle dette
(a) Teor. 1 P. III. tre proporzionali: vale a dire (*a*), come il Rettangolo LM è al Rettangolo RS: dunque Permutando il Poligono sopra LR è al Rettangolo LM, come, il Poligono sopra RN al Rettangolo RS:

Mà per la costruzione il Poligono sopra L R, cioè, il poligono dato ABCDE è Uguale al Rettangolo LM: dunque il Poligono sopra RN simile al dato ABCDE sarà anche Uguale al Rettangolo RS, cioè, al Quadrilatero dato Q. Ciò, che &c.

PROBLEMA IX.

Conoscere la proporzione, che passa tra le figure Poligone Dissimili.

Tav. V. Fig. 1. C*ostruz.* Si tirino dagli Angoli alle Basi linee rette: sicchè si risolvano tutti e due i Poligoni in Triangoli.

Dico, La proporzione de' Poligoni tra di loro essere come la somma delle proporzioni unite, che ha ciascun Triangolo a ciascuno.

Dimostr. Poichè ogni Tutto è uguale alle parti insieme unite: se dunque ciascun Triangolo di un Poligono è proporzionale a ciascuno dell'altro Poligono: tutti insieme saranno proporzionali a tutti: dunque quella proporzione avranno i Poligoni tra di loro, che ha la somma di tutti i Triangoli contenuti in esso alla somma di tutti gli altri Tri-
(b) Propr. 4 angoli contenuti nell' altro Poligono. (*b*) Ciò, che &c.

USI.

U S I.

I. *Dal Teorema 2 si dimostra l' Angolo fatto dall' obietto più vicino esser maggiore dell' angolo, che si forma dall' obietto più lontano, benchè gli obietti sieno in se stessi Uguali.*

AVendo negli Usi della prima Parte toccata questa verità, cadendo ora di nuovo in acconcio, la confermiamo dimostrandola per altri principi.

Costruz. Sia l' Obietto più Lontano BA, il più Vicino DE: ed uguale l' uno all' altro; Tav. V. Fig. 31.

Si tirino i Raggi, che formar debbono gli angoli BFA, DFE.

Dico l' angolo DFE formato nell' occhio dall' obietto DE più vicino esser Maggiore dell'angolo BFA formato dall' obietto BA, più lontano, salva, come sopra si è detto, l'uguaglianza nel resto.

Dimostr. Ne' Triangoli DCF, BAF essendo DC, BA parallele (*a*), sarà BF: DF: : BA: DC; e così DC sarà minore di BA, e per conseguenza anche minore di ED, essendo ED, AB uguali: dunque anche l' Angolo DFC, o sia BFA sarà minore dell' Angolo DFE, essendo l' Angolo DFC parte solamente di esso DFE.

(a) *Teor.* 2 *P. III.*

Onde de' due Obietti DE, BA Uguali, quello, ch' è più lontano, comparisce più Picciolo, essendo rappresentato sotto la grandezza DC opposta all' istesso Angolo BFA, o DFC: Laonde l' obietto DE più Vicino, ed Uguale a BA è rapprepresentato sotto l' Angolo maggiore DFE eccedendo la grandezza rappresentata DC, (che corrisponde a BA) nella parte CE. Cioè, essendo veduti due obietti BA, DE uguali, uno nell' istessa direzione dell' altro, il più vicino DE comparirà più grande, ed eccedente il piú lontano nella parte CE.

L' istesso sarà, ancorchè gli Obietti non sieno situati nell' istessa direzione, potendosi per formar la dimostrazione situare nella maniera presente, ritenendo la data distanza.

Quindi è, che vedendosi più obietti ugualmente tra se distanti, mà uno più distante dall'occhio dell' Osservatore, quelli, che più si discostano dall' occhio, sembrano più vicini trà loro: e se saranno distanti assai, appariranno insieme uniti, come tutto giorno si vede in due serie di alberi piantati in linea retta; perciocchè quanto sono essi più lontani dall' occhio, piú picciolo formano l' Angolo, fintanto, che non potendo formar angolo sensibile per la gran lontananza, sembrano una cosa sola.

II. *Dal Teorema 2. possiamo aver la maniera di saper l'Altezza di un' Edificio.*

Tav. V. Fig. 32. Sia la Torre AB, la quale butti la sua ombra BX: verso il fine di quest'ombra si fissi nel suolo un Bastone DE perpendicolarmente, e perciò parallelo alla Torre; sicchè passi il raggio del Sole per l' apice del Bastone, essendo il punto X l' estremità dell' ombra del bastone, e dell'ombra della torre.

Dico

Dico l' Altezza della Torre esser Cognita.

Dimostr. Essendo il Bastone parallelo alla Torre, sarà il triangolo AXB formato, e diviso proporzionalmente dalla parallela DE; dunque sarà XE: ED: : XB: BA. (a) Sicchè potendosi misurar XE, DE, XB, si determinerà per la regola del tre l' altezza della torre AB; ciò è, Se XE sarà 6, ED sarà 9, e BX sarà 20; Si farà, Se 6 dà 9; 20 darà 30, l' Altezza cercata.

(a) *Teor.* 2 *P. III.*

III. *Dal Teorema* 3. *si avrà anche in altra maniera l' istessa Altezza di una Torre o Edifizio.*

Tav. V. Fig. 33.

SI metta il Bastone, come si è detto nell' uso antecedente, in qualsivoglia parte, in maniera però, che butti la sua ombra. Ciò posto.

I due Triangoli, l' uno formato dal Bastone, e dalla sua Ombra, e dal Raggio del sole, che passa per l' apice del Bastone, DEF, e l' altro BAC formato dalla Torre, dall' Ombra, e dal Raggio del sole AC, che passa per l' apice della Torre, saranno equiangoli: dunque saranno proporzionali: Come dunque sarà l' ombra EF all' altezza del bastone ED, così sarà l' ombra BC della Torre all' Altezza di essa BA.

Tav. V. Fig. 34.

Che se non possiamo accostarci alla Base della Torre per qualche fosso, lago, o simil cosa, si farà nel seguente modo.

Si aspetti, che la Torre butti l'ombra in quella parte, dove possiamo accostarci; e si pianti in altro luogo il bastone A B; poi si segnino i punti dell'Ombra tanto F della Torre, quanto E del bastone

ſtone : Dopo qualche tempo la Torre butterà (per eſempio) in H la ſua ombra , ed il baſtone in G. I Triangoli, che riſultano dal Baſtone, e dalla Torre, ſono proporzionali : Si congiungano i reſpettivi punti FH , EG ; è ſarà dunque ultimamente come EG a AB ; così FH a DC : operandoſi per la regola del tre , ſi avrà l'altezza cercata .

IV. *Dal Teorema 7, ſi dimostra , che le Qualità de' corpi , le quali equabilmente in giro ſi diffondono, ſi diminuiscbono in ragione duplicata delle distanze : O , (che è l' isteſſo) sono in Ragion Reciproca de' Quadrati delle distanze .*

SIa un corpo luminoſo L , da cui diffondanſi i raggi LA , LC i quali paſſando oltre , termineranno ne' punti D , E.

Dico la diminuzione de'raggi eſſere in Ragione duplicata della diſtanza LD , LA.

Dimostr. I due triangoli LAC , LDF ſono Equiangoli (poiche eſſendo DF , AC , parallele; ſaranno gli angoli A,e C uguali agli angoli D,e F,e l'angolo L commune) ; dunque i detti Triangoli LAC , LDF ſaranno in Ragion Duplicata de' lati omogi ,cioè , di LA ad LD. , : Se dunque il Triangolo LAC rappreſenta la rarità della luce nel minore , e 'l Triangolo LDF la rarità della luce nel maggiore , eſſendo i triangoli in ragion duplicata de' detti lati LA ad LD ; in raggion duplicata ſarà anch' eſſa la rarità della luce pe' due triangoli rappreſentata . Vale a dire ; la luce , o la ſua diminuzione nel Triangolo LDF è tanto minore del-

la

la luce nello ſpazio del Triangolo LAC, quanto in Ragion duplicata è maggiore, o eccede la diſtanza LD la diſtanza LA.

Si avverta, che quì ſi conſidera principalmente la luce, o il ſuo chiarore nello ſpazio DACF, paragonandola colla luce dello ſpazio, o triangolo LAC, non conſiderando nello ſpazio commune la luce competente al triangolo grande, ne altrettanta competente al piccolo; reſtando, per così dire, tanti gradi di una compenſati con tanti gradi dell' altra in ciaſcun triangolo.

Ciò, che nella luce dimoſtraſi, è l' iſteſſo nelle altre qualità, che ſi diffondono Equabilmente per lo ſpazio competente alla ſua sfera di attività.

F I N E.

I M-

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Sacri Palatii Apostolici Magistro.

Franciscus Antonius Marcucci ab I. C. Episc. Montis-Alti Vicesgerens.

Fr. Bruno Toma Ordinis Prædicatorum Sacri Palatii Apostolici Magistri Socius.

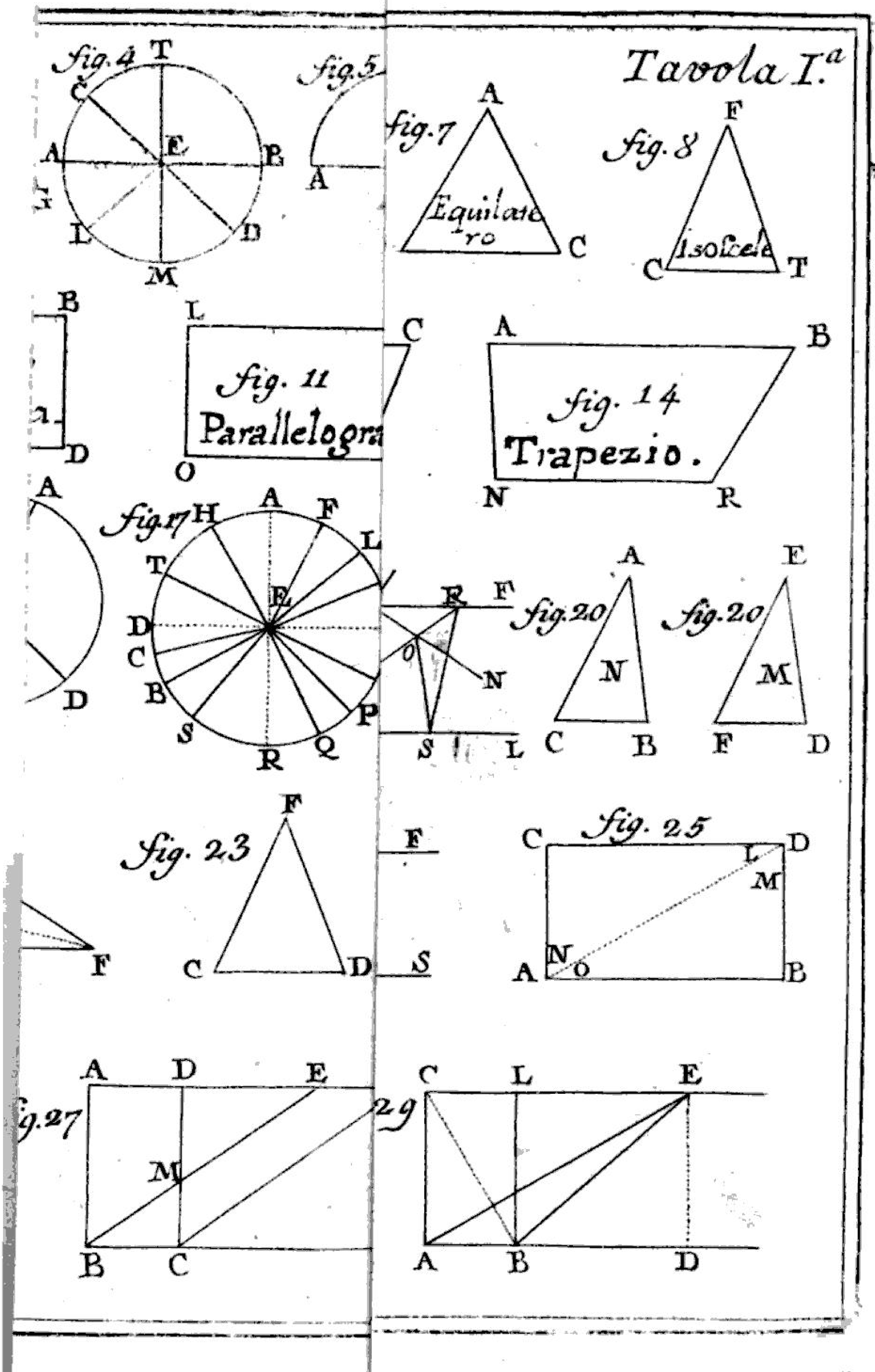


Tavola I.ª
fig. 4
fig. 5
fig. 7
Equilatero
fig. 8
Isoscele
fig. 11
Parallelogra
fig. 14
Trapezio.
fig. 17
fig. 20
fig. 20
fig. 23
fig. 25
g. 27
29

Tavola II[a]

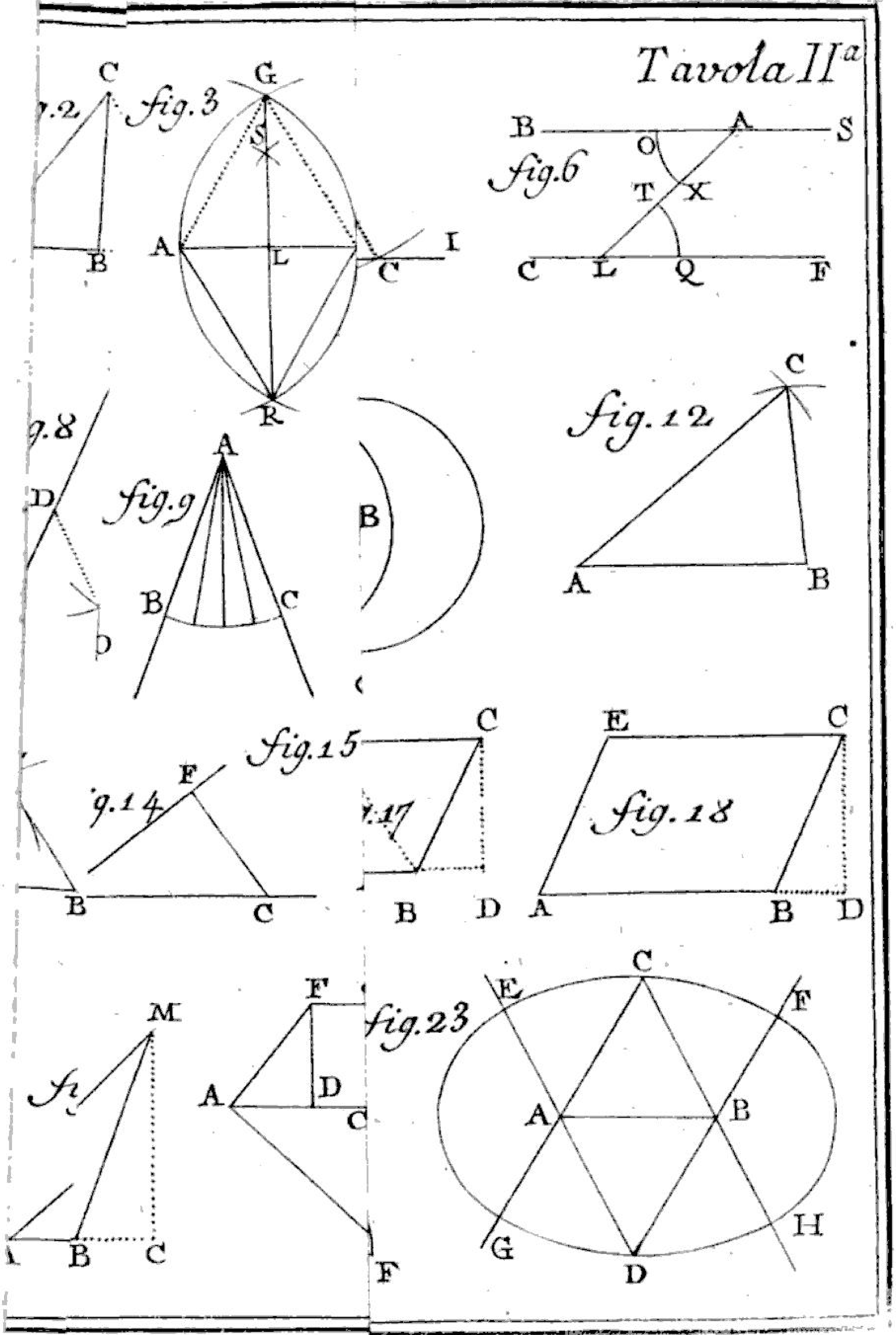
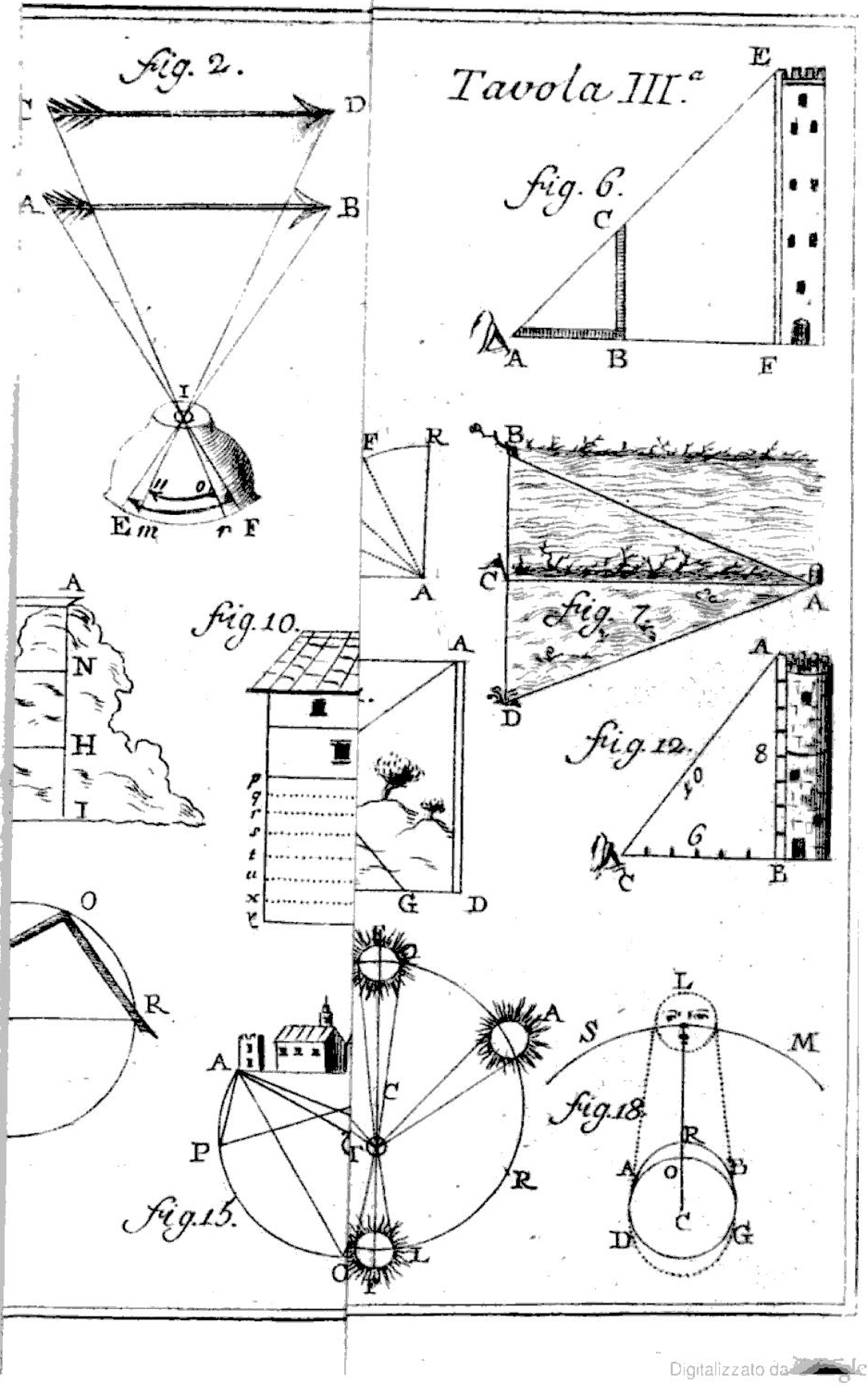


fig. 3
fig. 6
B A S O T X C L Q F
G S A L C I R
fig. 8
fig. 9
A B C D
fig. 12
fig. 14
fig. 15
fig. 17
fig. 18
E C A B D
fig. 23
C E F A B G H D
M F D A C

Tavola III.a



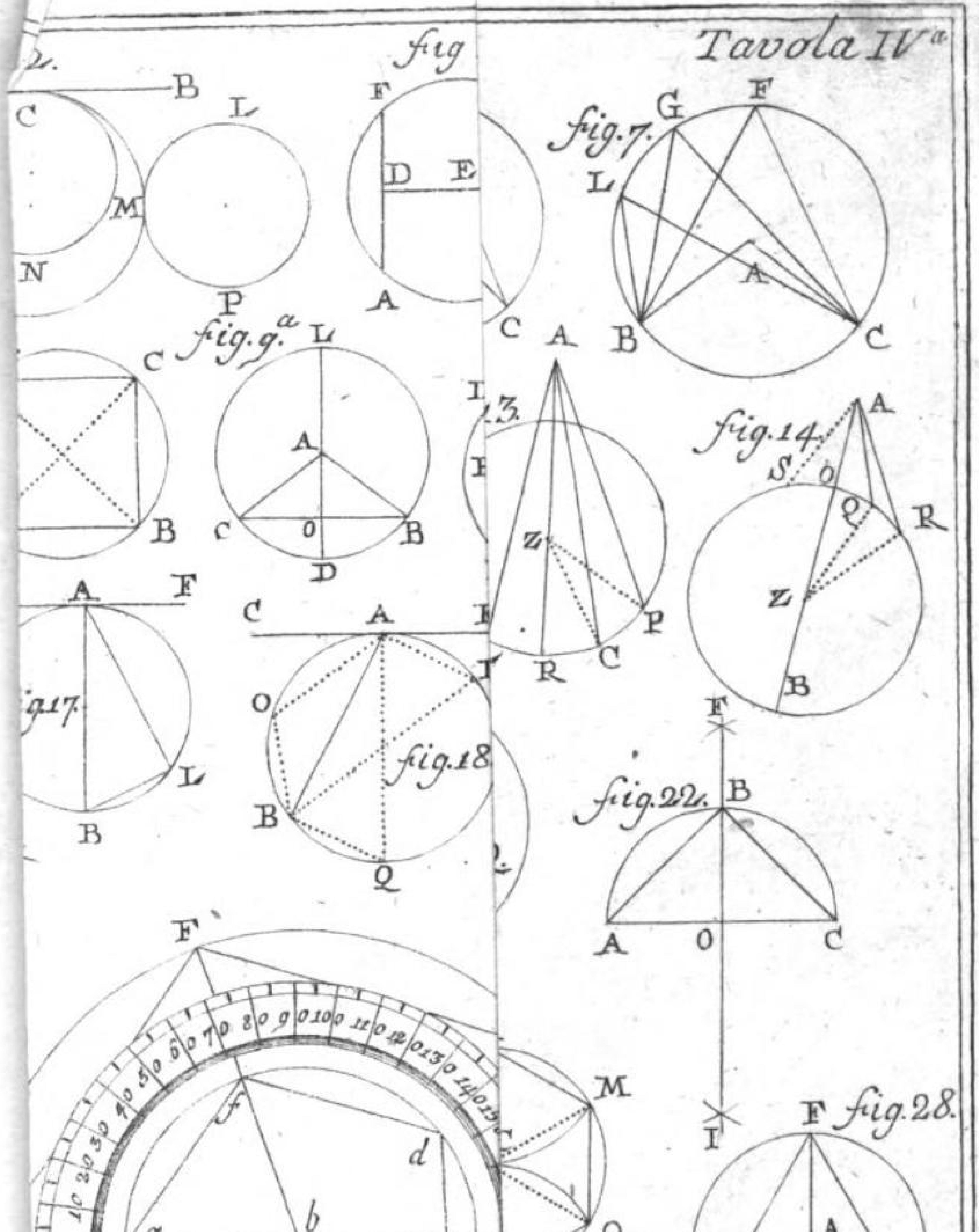


Tavola IVa
fig
fig. 7.
fig. 9.a
13.
fig. 14.
fig. 17.
fig. 18.
fig. 22.
fig. 28.
. 31.

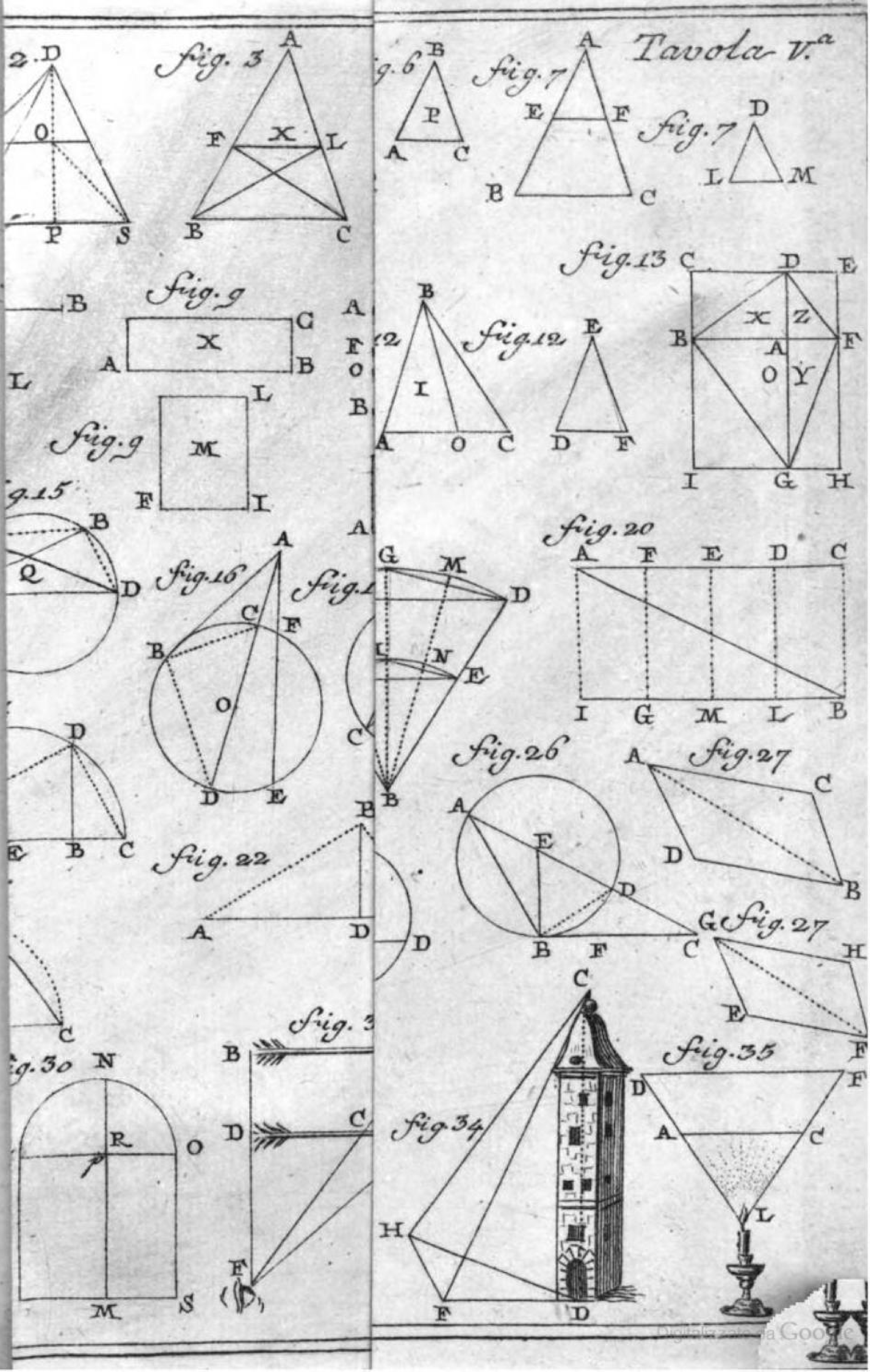


Tavola V.a
fig. 3
fig. 7
fig. 7
fig. 13
fig. 9
fig. 9
fig. 12
fig. 16
fig. 20
fig. 22
fig. 26
fig. 27
fig. 27
fig. 30
fig. 34
fig. 35