TRATTATO DI ALGEBRA

DEL

P. ABATE

D. DOMENICO ANGELONI

DELLA CONGREGAZIONE CELESTINA

DELL' ORDINE

DI S. BENEDETTO.

IN NAPOLI MDCCXCIV.

Si vendono nella Libreria di Migliaccio.

Con licenza de' Superiori.

A S. E.

D. FRANCESCO D' AQUINO.

PRINCIPE DI CARAMANICO,
CONTE DI PALENA,
DUCA DI CASOLI
&c.

Dell' Insigne Ordine di San Gennaro.
Gentiluomo di Camera di Sua Maestà.
Vicerè di Sicilia &c. &c.

D. A.

L' Amore per le Filosofiche scienze fondato nell' E. V. dal possedimento di loro, e la familiar cortese accoglienza mostrata alla mia persona ai miei studj, certamente ad ogni buon dritto esiggeano ch' io avessi dovuto consegrare al vostro nome alcuna delle mie prime operette. Ma il riflettere che la multiplicità di seriosi affari annessi alla carica di un degno Ministro del nostro sapientissimo Sovra-

vevano presso diverse Corti, non potessero agevolmente permettervi di piegar l' animo, ed aggradir quelle discipline le quali non altrimenti, che le Muse l' ozio e 'l raccoglimento ricercano, me ne fece consideratamente astenere. Andava però sperando di dar fuori alcun matematico saggio frutto di quegli studj, che avendo trasportato il mio genio nell' età giovanile, non avrei avuto animo di abbandonarli del tutto; persuadendomi anzi che avrebbono avuta la forza di alleviarmi pure gl' incomodi della età vegnente penosa. Ho così nudrito in tale speranza il desiderio vivo di adempire in altro tempo ad un obbligo che sempre più mi stringea, e con soddisfazione tanto maggiore dell' E. V. quanto maggiore era stato il vostro gusto per le matematiche a preferenza o delle metafisiche scienze, o di quelle che la nostra mente dirigendo all' acquisto e al proponimento del vero, aveano ricerca-
ta

ta o niuna o poca attenzione di chi era stato abbondantemente fornito e del più fino criterio nel ragionare, e della più chiara maniera di communicar le sue idee. Se non che, quanto la materia mi è divenuta per una parte opportuna, altrettanto le circostanze sembra che la dichiarino totalmente per l'altra contraria. Mi sovviene benissimo, e la rimembranza mi è grata, che per provvidenza di un Principe ch' ama la felicità de' suoi Popoli vi ritrovate al presente costituito capo di un Regno, che tutte di riverbero sperimentando col mezzo vostro le beneficenze del suo amoroso Sovrano, siccome non vi permette di esserne un giorno solo lontano, così non vi da campo di rivolgere ad altri oggetti la mente, se non a quei che possano i suoi vantaggi, e la sua gloria aggrandire. Pur tutta volta io mi persuado, o di persuadermi mi giova, che dovendo avere alcun sollievo per divertire lo spirito oppresso da *tante cure possiate ritrovarlo nella lettùra di un' Operetta al vostro genio uniforme moltissimo. Ma quando mai per qual si voglia cagione la disavventura incontrasse di non venir percorsa da Voi; sarà ben sicura di esser a buon grado, e con ogni dimestichezza almen ricevuta; giacchè la cortesia e 'l gradimento è tutto proprio del cuore, nella di cui vastità non mancherà mai luogo alla compiacenza: e tanto più sarà sicura che gradirà l' animo riconoscente del deditissimo Autore, il quale non lascia di augurarvi lunghi e beati gli anni alla virtù alla beneficenza alla gloria.*

PRE-

PREFAZIONE

Delle Prime Nozioni dell' Algebra.

I. L'Algebra è la ſcienza delle quantità, delle quali eſpone la natura, le denominazioni, le regole di calcolarle, e ne deduce i metodi di riſolvere i problemi, che ſi propongono su le quantità.

II. Si dice quantità tutto ciò, che può aumentarſi, e diminuirſi. Moltiſſime ſono le ſpecie: Un mucchio di arena, una maſſa di argento, una miſura, un peſo &c., ſono tante quantità ſpecifiche; le quali ſono continue, o diſcrete.

III. Queſte due ſpecie di quantità continue, e diſcrete ſono gli oggetti di due ſcienze. L' una è l' Aritmetica, e queſta è la ſcienza delle quantità diſcrete eſpreſſe per numeri. L' altra è la Geometria, che tratta delle quantità continue, rappreſentate per linee, ſuperficie, e ſolidi.

L' Algebra abbraccia queſte due ſpecie conſiderando nelle quantità l' aumento, e la diminuzione.

IV. Le quantità Algebraiche ſono finite, infinite, e nulle.

1. Le quantità finite ſi contengono nei loro limiti, e ſi diſegnano con lettere alfabetiche, latine, e greche a, b, c, d *&c.*; α, β, γ, δ &c. perciò ſi dicono anche quantità letterali.

Ciaſcuna lettera diſegna una quantità finita, come ſe prefiſſa aveſſe l' unità. Così a, b, c vagliono lo ſteſſo, che $1a$, $1b$, $1c$; e $1a$, $1b$, $1c$ diſegnano quantità finite. Si adopera anche l' unità aritmetica per diſegnare una quantità algebraica.

2. Le quantità infinite oltrepaſſano qualunque limite, e ſi hanno con accreſcere ſucceſſivameute le quantità finite ſenza fine. Le quantità infinite ſi diſegnano con queſto carattere ∞. Così ſe a ſucceſſivamente ſi accreſce ſenza fine, a è ∞; ſe b ſi accreſce ſucceſſivamente ſenza fine,

b è

b è ∞; se c si accresce successivamente senza fine, c è ∞ &c.

3. Le quantità nulle non sono, che nullità di quantità; e queste si disegnano colla cifra aritmetica o. Così il nulla di a è o, il nulla di b è o, il nulla di c è o &c.

IV. L'uguaglianza delle quantità si disegna ponendo $=$ tra le quantità uguali. Così $m=n$ disegna, che m sia uguale ad n. L'espressione $m=n$ si dice equazione, la quale si compone di due parti divise col segno d'uguaglianza $=$; le quali si dicono membri dell'equazione. La parte a sinistra si dice primo membro, l'altra a destra secondo. Così m è primo membro, n secondo dell'equazione $m=n$.

V. Le quantità maggiori, o minori delle altre, si disegnano, ponendo tra le quantità uno di questi due segni $>$, $<$. Così $a>b$, $b<a$. Il primo disegna, che a è maggiore di b; l'altro, che b è minore di a.

VI. Le quantità algebraiche si sommano, si sottraggono, si moltiplicano, si dividono, si elevano a potenze, e se n'estraggono le radici. Queste operazioni si comprendono sotto il nome di calcolo, e di algoritmo. I problemi delle quantità si ſi riſolvono per le dette operazioni. Dimodochè l' Algebra può conſiderarſi diviſa in due parti. In una, che tratta del calcolo. Nell' altra de' metodi per riſolvere i problemi.

PAR-

PARTE PRIMA.

DEL CALCOLO.

I. I Vocaboli di addizione, e di somma; di sottrazione, e di differenza, o sia residuo; di moltiplicazione, di fattori, di moltiplicando, moltiplicatore, e prodotto; di divisione, di dividendo, divisore, e quoto; di frazione, di numeratore, e denominatore; di potenza, e radice, hanno lo stesso significato in Algebra, che in Aritmetica. Differiscono le operazioni algebraiche dalle aritmetiche nella diversa considerazione delle quantità, nell' espressioni, e nell' esecuzioni.

In Aritmetica le quantità si considerano discrete, si esprimono per numeri, e le operazioni si fanno nel modo esposto in Aritmetica. Nell' Algebra le quantità si considerano astratte nel genere; si esprimono con diversi caratteri, che costante-

men-

mente si ritengono; e le operazioni si fanno per segni, che danno risultati generali applicabili a tutti i casi particolari secondo i principj di Aritmetica, e di Geometria. In questo trattato l'Algebra si applica all'Aritmetica.

II. Le quantità Algebraiche sono semplici, o composte; intere, o fratte. Le semplici si rappresentano da ciascuna lettera, o da un prodotto di più lettere; come si vedrà nella moltiplicazione. Le quantità semplici si dicono monomj, e termini.

Le quantità composte contengono più termini per mezzo della somma, e della sottrazione delle quantità semplici. Le quantità composte di due termini si dicono binomj; di tre termini si dicono trimonj; di quattro, quatrimonj &c.. Generalmente le quantità composte si dicono polinomj.

Le quantità intere sono espresse da ciascuna lettera, o da un prodotto di più lettere. Le fratte sono espresse per numeratori, e denominatori.

III. I monomj, e i polinomj, che risultano dalle operazioni algebraiche, si dicono formule.

CA-

CAP. I.

Dell' Addizione, e della Sottrazione de' Monomj.

I. L'Addizione di due, e più monomj, si eseguisce scrivendo un monomio dopo l' altro col segno +, che significa più. La formula, che risulta dall' addizione, esprime la somma de' monomj.

Così la somma di a, b, è $a+b$; la somma di a, b, c, d, 1, è $a+b+c+d+1$. Se un monomio p si pone uguale ad $a+b$; un monomio q uguale ad $a+b+c+d+1$, si hanno due equazioni $a+b=p$, $a+b+c+d+1=q$.

Sia $a=3$, $b=5$, $c=2$, $d=9$, sarà $a+b=3+5=8=p$; $a+b+c+d+1=3+5+2+9+1=20=q$.

La prima formula $a+b$ è un polinomio di due termini; la seconda $a+b+c+d+1$ di cinque termini. Qualunque formula si distingue in termini pe'l segno +.

I valori delle formule sono i medesimi, comunque i termini si dispongono col segno +, uno dopo l'altro. Così le due formule $a+b$, $a+b+c+d+1$, sono le medesime, che $b+a$, $c+d+1+a+b$.

II.

II. Se trà le quantità da sommarsi, o nella formula della somma vi sono quantità espresse con simili lettere, poichè queste disegnano quantità uguali, i termini della formula si riducono a minor numero, scrivendo una delle lettere simili con porle avanti il numero delle simili lettere.

Così la somma di a, a, è $a+a=2a$; la somma di b, b, b, è $b+b+b=3b$; la somma di a, a, b, c, c, c, d, è $a+a+b+c+c+c+d=2a+b+3c+d$.

Sia $a=3$, $b=5$, $c=7$, $d=1$, sarà $a+a=2a=6$, $b+b+b=3b=15$, $a+a+b+c+c+c+d=2a+b+3c+d=6+5+21+1=33$.

I numeri, che si prepongono ai monomj letterali, si dicono coefficienti; i quali disegnano le quantità uguali dei monomj. Così di $2a$ il coefficiente 2 disegna, che le quantità $=a$ sono due; di $3c$ il coefficiente 3 disegna, che le quantità $=c$ sono tre &c.

Da ciò si fa manifesto di che utilità sia l'Aritmetica; e che questa debba premettersi all' Algebra, ed alla Geometria.

III. La sottrazione di uno, o più monomj, da uno, o da più altri monomj, si eseguisce scrivendo i monomj, dai quali si sottrae, uno dopo l'altro col segno +; e

cia-

ciascuno de' monomj da sottrarsi col segno —, che si dice meno. La formula, che risulta, esprime la differenza, o sia il residuo della sottrazione.

Così a si sottrae da b, scrivendo $b-a$; e $b-a$ esprime la differenza della sottrazione di a da b. Si sottraggono a, c da b, scrivendo $b-a-c$, e $b-a-c$ esprime la differenza della sottrazione di a, c da b. Si sottraggono a, c da b, d, scrivendo $b+d-a-c$; e $b+d-a-c$ esprime la differenza della sottrazione di a, c, da b, d.

Se le dette differenze si esprimono per m, n, r, si hanno l'equazioni $b-a=m$, $b-a-c=n$, $b+d-a-c=r$.

Sia $a=7$, $b=11$, $c=3$, $d=5$, sarà $b-a=11-7=4=m$; $b-a-c=11-7-3=1=n$; $b+d-a-c=11+5-7-3=16-10=6=r$.

Si distinguono nelle formule i termini pe'l segno —, come pe'l segno +. Così la formula $b-a$ è di due termini; la formula $b-a-c$ di tre termini; $b+d-a-c$ di quattro termini.

IV. Le formule delle sottrazioni non si alterano, comunque si dispongono i monomj sottratti, e i monomj, dai quali si sottraggono; ciascuno però col proprio segno di addizione, o di sottrazione. Perche

che

che i segni distinguono gli uni dagli altri monomj.

Così la formula $b-a$ vale lo stesso, che $-a+b$; la formula $b-a-c$ vale lo stesso, che $-a-c+b$, che $-a+b-c$.

Se tra i monomj vi sono termini simili, questi si riducono a minor numero, o col togliere i termini simili, che per la sottrazione si distruggono; o col ridurre i termini simili dello stesso segno ad un termine, preponendo il numero de' termini simili, come si è esposto nell' addizione.

Così a, a si sottraggono da b, scrivendo $b-2a=b-a-a$. Si sottraggono a, a da b, a, scrivendo $b-a=b+a-a-a$. Si sottraggono a, a, b, $2c$ da a, $3c$; scrivendo $c-a-b=a+3c-a-a-b-2c$.

La ragione di queste riduzioni è manifesta. Percha le differenze delle sottrazioni rimangono le medesime togliendosi i monomj da sottrarsi, e i monomj dai quali si sottraggono, trà loro simili; o riducendosi più monomj simili dello stesso segno ad un termine.

V. Qualunque formula di sottrazione può ridursi a due termini, esprimendosi i termini sottratti con un termine; e coll' altro i termini, dai quali si sottraggono.

Co-

Così la formula $a+b+c-d-m$ si riduce a due termini, ponendo $a+b+c=p$, $-d-m=q$, $a+b+c-d-m=p-q$. Se la differenza di $p-q$ si pone $=z$, si ha l' equazione $p-q=z$ di una qualunque formula di sottrazione.

VI. Le quantità da sottrarsi possono essere uguali, minori, e maggiori delle quantità, dalle quali si sottraggono.

1. Se le quantità da sottrarsi sono uguali alle quantità, dalle quali si sottraggono, le differenze sono nulle.

Così nella formula $p-q=z$, se $p=q$, sarà $p-q=z=0$. Sia $p=5$, $q=5$, sarà $p-q=5-5=0=z$.

2. Se le quantità da sottrarsi sono minori delle quantità, dalle quali si sottraggono; le differenze sono gli eccessi delle quantità, dalle quali si sottraggono, sopra le quantità sottratte.

Così nella formula $p-q=z$, se $p>q$, sarà $p-q=z$; differenza di p sopra q. Sia $p=7$, $q=5$, sarà $p-q=7-5=2=z$.

3. Se le quantità da sottrarsi sono maggiori delle quantità, dalle quali si sottraggono; le differenze sono gli eccessi delle quantità sottratte sopra le quantità, dalle quali si sottraggono; e non sono, che residui delle quantità sottratte, i quali ri-

mangono a sottrarsi.

Così nella formula $p-q=z$, se $p < q$, sarà $p-q=-z$ differenza di q sopra p, la quale è il residuo della quantità sottratta, che rimane a sottrarsi; e si nota col segno di sottrazione. Sia $p=5$, $q=7$, sarà $p-q=5-7=-2=-z$.

La differenza $-z$, e la formula $p-q$, se $p<q$, si dicono quantità negative. A distinzione di queste negative quantità, le altre quantità si dicono positive, come a, b, c, $p-q$, z, se $p>q$.

Siccome le quantità negative, che sono le differenze delle quantità sottratte sopra le quantità, dalle quali si sottraggono, si notano col segno $-$; così le quantità positive sogliono notarsi col segno $+$, per distinguerle dalle negative, il quale non indica altro, che le quantità medesime. E' lo stesso scrivere a, b, c, z, che $+a$, $+b$, $+c$, $+z$.

VII. Le quantità positive, e le negative possono considerarsi per mezzo dell' equazione $p-q=\pm z$. Si prepone alla differenza z l'uno, e l'altro segno $+$, $-$, per dinotare le differenze positive, e negative.

Poichè p può essere quanto si voglia maggiore, o minore di q, le differenze negative, e positive si aumentano, e dimiminuiscono all'infinito; e si ha una illimitata variazione di quantità negative, e positive per l'equazione $p-q=\pm z$. Da positive divengono le differenze negative; da negative tornano positive, riducendosi prima l' une, e l'altre nulle; dimodochè le quantità positive, e negative terminano nel zero.

Da questa considerazione deriva una doppia serie di numeri naturali, una positiva, e l' altra negativa. Suppongasi $p=q$; poi si aumenti p successivamente di 1; dall' equazione $p-q=z$ si ha la serie positiva 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c. Se q si aumenta successivamente di 1, dall' equazione $p-q=-z$ si ha la serie negativa 0, −1, −, 2, −3, −4, −5 &c. L' una, e l' altra serie procede all' infinito.

Nella stessa maniera secondo i varj valori di $p>q$, di $q>p$, risultano le serie di frazioni positive, e negative; di numeri interi, e fratti, positivi, e negativi senza fine.

Le quantità dunque negative sono quantità vere, e reali; come lo sono le quantità positive. Non altra differenza hanno trà loro, che di opposizione; la quale nasce dall' esser le quantità sottratte maggiori, o minori delle quantità, dalle quali si sottraggono.

VIII. Sogliono considerarsi le quantità negative minori del zero, e tanto minori, quanto più sono maggiori; per opposizione alle quantità positive, le quali sono maggiori del zero, e tanto maggiori, quanto più si aumentano. Così -2 è minore di -1, -3 minore di -2, -4 minore di -3 &c.

Perche nella formula $p-q$, se $p>q$, sarà $p-q<p$. Si sottragga p dall' una, e dall' altra parte; sarà $p-q-p<p-p$, e $-q<0$.

Nella stessa maniera si dimostrano le quantità positive minori del zero, e le negative maggiori. Perche nella formula $p-q$, se $q>p$, sarà $p-q<-q$. Si aggiunga q all' una, e all' altra parte, sarà $p-q+q<-q+q$, e $p<0$.

Se dall' una, e dall' altra parte dell' espressione $p<0$, si sottrae p, sarà $p-p<-p$, e $0<-p$.

Se all' una, e all' altra parte dell' espressione $-q<0$, si aggiunge q, sarà $-q+q<q$, e $0<q$.

Dunque $-q<0$ non dimostra, che le quantità negative sieno minori del zero; perche $p<0$ dimostrarebbe le quantità positive minori del zero; $0<-p$ dimostrarebbe le quantità negative maggiori del zero, $0<q$ dimostrarebbe le quantità positive maggiori del zero.

Queste espressioni $-q<0$, $0<q$, $p<0$, $0<-p$ sol-

ſoltanto dimoſtrano l'oppoſizione delle quantità poſitive, e negative; non altrimenti, che l' equazione $p-q=\pm z$ &c. Le quantità minori del zero ripugnano, e le quantità poſitive ſi paragonano colle negative nella loro quantità.

Dall' oppoſizione delle quantità poſitive, e negative parimente ſi deduce, che tra le quantità negative, e le poſitive non può darſi equazione. Perche ſe foſſe $a=-a$, coll' aggiugnere, e col ſottrarre a dall' uno, e dall' altro membro dell' equazione, ſi avrebbero due equazioni ripugnanti, $2a=0$, $0=-2a$.

IX. Si ſommano le quantità negative, ſcrivendole una dopo l' altra coi proprj ſegni. Così la ſomma di $-a$, $-b$, $-c$ ſi ha, ſcrivendo $-a-b-c$; la quale non è altra, che la ſomma de' reſidui delle quantità ſottratte maggiori delle quantità, dalle quali ſono ſottratte.

Si ſommano le quantità negative, e le poſitive, ſcrivendole una dopo l'altra, ciaſcuna col proprio ſegno. Così la ſomma di a, $-b$, c, $-d$ ſi ha, ſcrivendo $a+c-b-d$; la quale non è altra, che la differenza de' reſidui negativi $-b$, $-d$ dalle quantità poſitive a, c.

X. Si ſottraggono le quantità negative dalle negative, e dalle poſitive; le quantità positive dalle negative, con permutare i segni negativi in positivi, e i positivi in negativi, alle quantità da sottrarsi.

Così $-a$ si sottrae da $-b$, scrivendo $-b+a$. Si sottrae $-a$ da b, scrivendo $b+a$. Si sottrae a da $-b$, scrivendo $-b-a$. La formula $-b+a$ è la differenza di $-a$ da $-b$. La formula $b+a$ è la differenza di $-a$ da b. La formula $-b-a$ è la differenza di a da $-b$.

Se le quantità da sottrarsi, e le quantità, dalle quali si sottraggono, sono più; queste si sommano coi loro segni, e dalla somma di queste si sottraggono le altre, permutando i loro segni.

Così la sottrazione di a, $-b$, $-c$ da p, q, $-m$ si fà sommando $p+q-m$, e sottraendo a, $-b$, $-c$; la formula della differenza è $p+q-m-a+b+c$.

XI. La ragione della sottrazione si è, che questa è inversa dell'addizione. Dunque se dalle somme si sottraggono alcune delle quantità sommate, per differenza si hanno le altre quantità della somma; se alle differenze si aggiungono le quantità sottratte, per somma si hanno le quantità, dalle quali sono sottratte.

Così se dalla somma $-a+b$ di $-a$, b, si sottrae $-a$, si ha per differenza $-a+b+a=b$; se si sottrae b, si ha per differenza $-a+b-b=-a$.

Se

Se alla differenza $-a+b$ di a da b, si aggiugne a, si ha per somma $-a+b+a=b$.

Se dalla somma $-a-b$ di $-a$, $-b$, si sottrae $-a$, si ha per differenza $-a-b+a=-b$; se si sottrae $-b$, si ha per differenza $-a-b+b=-a$.

Se alla differenza $-a-b$ di a da $-b$, si aggiugne a, si ha per somma $-a-b+a=-b$.

Se dalla somma $a-b$ di a, $-b$, si sottrae a, si ha per differenza $a-b-a=-b$; se si sottrae $-b$, si ha per differenza $a-b+b=a$.

Finalmente se alla differenza $a-b$ di $-a$ da $-b$, si aggiugne $-a$, si ha per somma $a-b-a=-b$.

Questa varietà di somme, e di differenze nell' addizione, e nella sottrazione, dipende dall' opposizione delle quantità positive, e negative. Nella comune Aritmetica non si sottrae, che la quantità minore dalla maggiore; la differenza è sempre della quantità, dalla quale si sottrae, e non vi è idea di quantità positive, e negative.

XII. Dalle premesse nozioni si deduce, che i termini di una equazione si possono da un membro trasportare nell' altro, con permutare i loro segni $+$ in $-$, e $-$ in $+$, rimanendo sempre ferma l' equazione de' due membri in ciascuna disposizione.

Sia l' equazione $a+b-c=q$. Se i termini del primo membro tutti, o in parte si trasportano nel secondo; o pure il termine q dal secondo membro si trasporta nel primo, permutando a ciascun termine di trasporto il suo segno, rimarrà trà questi l'equazione. Così $a+b-c-q=0$, $0=q-a-b+c$, $a=q-b+c$, $a+b=q+c$, $b=q-a+c$, $-q=-a-b+c$.

La ragione si è, che trasportandosi da un membro all' altro i termini con segno contrario, si sottraggono, o si aggiungono all' uno, e all' altro membro dell' equazione quantità uguali. Nell' equazione $a+b-c=q$, trasportandosi q dal secondo membro nel primo, si sottrae q dall' uno, e dall' altro membro. Nel primo s' introduce $-q$, nel secondo rimane 0. Trasportandosi $a+b-c$ dal primo membro nel secondo, si sottraggono a, b dall' uno, e dall' altro membro; e all' uno, e all' altro si aggiugne c. Nel primo si annullano, e nel secondo a, b sono quantità negative, c positiva. Lo stesso è delle altre permutazioni.

Dunque in una equazione si hanno tutti i rapporti delle quantità di somme, e di differenze col semplice trasporto de' termini dall' uno all' altro membro, permutando i loro segni.

CAP-

CAP. II.

Della moltiplicazione de' Monomj.

I. DUe, e più monomj da moltiplicarsi possono essere positivi, o negativi; positivi, e negativi. La moltiplicazione s' indica ponendo tra i monomj un punto, o questo segno $\times$. Così la moltiplicazione di a per b, di $-a$ per $-b$, di $-a$ per b, di a per $-b$, s' indica in uno di questi due modi, $a.b$, $a\times b$; $-a.-b$, $-a\times-b$; $-a.b$, $-a\times b$; $a.-b$, $a\times-b$.

La moltiplicazione di più monomj a, b, $-c$, d, s' indica scrivendo $a.b.-c.d$, o pure $a\times b\times-c\times d$. Queste espressioni indicano, che a debba moltiplicarsi per b, il prodotto di questi due per $-c$, il prodotto di questi tre per d &c..

Se i monomj hanno coefficienti, si scrive ciascun monomio col suo coefficiente; o ch' è lo stesso, prima s' indica il prodotto de' coefficienti, e poi delle quantità letterali per chiarezza. Così la moltiplicazione di $3a$, $5b$, $7c$, s' indica $3a.5b.7c$, o pure $3.5.7\ a.b.c.$

II. Di due monomj da moltiplicarsi il moltiplicatore può esser positivo, o negativo.

1. Il moltiplicatore positivo dimostra, che il moltiplicando dee prendersi nel suo senso di positivo, o di negativo; cioè nel senso di addizione, tante volte, quante unità si contengono nel moltiplicatore, e che il prodotto è nel senso del moltiplicando.

Così moltiplicandosi 5 per 7, il moltiplicatore positivo 7 dimostra, che il moltiplicando 5 dee prendersi sette volte nel suo senso di positivo, $5+5+5+5+5+5+5=35$, e che il prodotto 35 è nel senso positivo del moltiplicando 5. Moltiplicandosi -5 per 7, il moltiplicatore positivo 7 dimostra, che il moltiplicando -5 dee prendersi sette volte nel suo senso di negativo, $-5-5-5-5-5-5-5=-35$, e che il prodotto -35 è nel senso negativo del moltiplicando -5.

2. Il moltiplicatore negativo dimostra, che il moltiplicando dee prendersi nel contrario suo senso di positivo, o di negativo; cioè nel senso di sottrazione, tante volte, quante unità si contengono nel moltiplicatore, e che il prodotto è nel senso contrario del moltiplicando.

Così moltiplicandosi 5 per -7, il moltiplicatore -7 dimostra, che il moltiplicando 5 dee prendersi sette volte nel sen-

so

so negativo, $-5-5-5-5-5-5-5=-35$, e che il prodotto -35 è nel senso negativo contrario del moltiplicando 5. Moltiplicandosi -5 per -7, il moltiplicatore -7 dimostra, che il moltiplicando -5 dee prendersi sette volte nel senso positivo, $5+5+5+5+5+5+5=35$, e che il prodotto 35 è nel senso positivo contrario del moltiplicando -5.

3. Dunque il prodotto di due monomj positivi, o negativi, è positivo; di un monomio positivo, e dell'altro negativo, è negativo. Questa illazione deriva dalle premesse nozioni dell' addizione, e della sottrazione nel Cap. prec.

III. Se i monomj da moltiplicarsi sono più di due, colla stessa regola si moltiplica il primo pe'l secondo; il prodotto di questi due pe'l terzo; il prodotto di questi trè pe'l quarto &c. Dimodochè la moltiplicazione è sempre trà due monomj.

Se i due primi monomj sono positivi, o negativi, il prodotto è positivo. Se uno positivo, e l'altro negativo, il prodotto è negativo. Se questo primo prodotto, e il terzo monomio sono positivi, o negativi, il secondo prodotto è positivo; se uno positivo, e l'altro negativo, il secondo prodotto è negativo; e così suc-

successivamente. Dunque se il numero dei monomj negativi è paro, l' ultimo prodotto è positivo; se disparo è negativo.

Così moltiplicandosi − 5 per − 3, il prodotto è 15. Moltiplicandosi 15 per − 2, il prodotto è − 30. Moltiplicandosi − 30 per — 4, il prodotto è 120. &c.

IV. In una moltiplicazione il prodotto contiene il moltiplicando nel senso del moltiplicatore, come il moltiplicatore nello stesso senso contiene 1. Perche il prodotto non è, che il moltiplicando preso tante volte, quante sono le unità del moltiplicatore nel senso del moltiplicatore.

Così il prodotto −35, di −5 per 7, contiene −5 nel senso positivo di 7, come 7 nello stesso senso contiene 1; il prodotto 35, di −5 per −7, contiene −5 nel senso negativo di −7, come −7 contiene 1 nel senso negativo; il prodotto −35, di 5 per −7, contiene 5 nel senso negativo di −7, come −7 nel senso negativo contiene 1; il prodotto 35, di 5 per 7, contiene 5 nel senso positivo di 7, come 7 contiene 1.

Dunque tra due quantità negative; trà una negativa, e l' altra positiva, vi è lo stesso rapporto di continenza, che tra le positive. Con questa differenza, che tra

una

una quantità negativa, e l'altra positiva, il rapporto è di sottrazione; tra due quantità positive, e tra due negative, il rapporto è di addizione.

V. Le quantità letterali si moltiplicano con togliere i segni di moltiplicazione, scrivendo una lettera dopo l'altra. Tale unione di lettere esprime il prodotto delle quantità, il quale è positivo, o negativo, secondo l'esposta regola.

Così il prodotto di a per b, di $-a$ per $-b$, è ab; il prodotto di $-a$ per b, di a per $-b$, è $-ab$; il prodotto di a per b per $-c$ per d, è $-abc$; il prodotto di a per $-b$ per $-c$, è abc.

Se vi sono coefficienti, questi si moltiplicano tra loro; il prodotto di questi è il coefficiente del prodotto delle quantità letterali. Così il prodotto di $3a$ per $5b$, di $-3a$ per $-5b$, è $15ab$; di $-3a$ per $5b$, di $3a$ per $-5b$, è $-15ab$. Il coefficiente 15, che risulta dal prodotto de' due coefficienti 3, 5, esprime, che il prodotto ab, o $-ab$ dee prendersi quindeci volte. Il prodotto di $3a$ per $-5b$ per $2c$, è $-30abc$; il coefficiente 30 esprime, che $-abc$ dee prendersi 30 volte; o che abc dee prendersi -30 volte.

Nella medesima maniera si moltiplicano

tra

tra loro i prodotti. Così il prodotto di ab per $7cd$, è $7abcd$; il prodotto di $7abcd$ per $-fmn$, à $-7abcdfmn$ &c.

VI. I prodotti delle quantità letterali non formano, che un monomio positivo, o negativo, composto di tanti fattori, quante lettere vi si contengono. Così ab è un monomio di due fattori; $15mnspq$ è un monomio di cinque fattori &c.

Se il coefficiente di un monomio è un multiplo; questo ha tanti fattori, quanti sono i numeri primi, ne' quali si risolve. Sogliono questi designarsi con uno de' due segni della moltiplicazione. Così di $30ab$, il coefficiente 30 si risolve in tre fattori primi, e questi si disegnano $2.3.5.ab$.

Dunque un prodotto positivo può risolversi ne' suoi fattori letterali, e numerici; tutti positivi, o negativi di numero pari, i quali danno un prodotto positivo. Un prodotto negativo può risolversi ne' suoi fattori letterali, e numerici, positivi di numero pari, e negativi di numero dispari, i quali danno un prodotto negativo.

Così $-a$ si risolve in due fattori $-1.a$, o in $1.-a$; a si risolve in $-1.-a$, o pure in $1.a$; $-abc$ si risolve in $-1.a.b.c$, in $a.-b.c$, in $a.b.-c$, in $-a.-b.-c$; $15ab$ si risolve in $3.5.-a.-b$, in $-3.-5.-a.-b$ &c.

VII.

VII. Ciaſcuna quantità letterale ſi dice di una dimenſione. Un monomio dunque ha tante dimenſioni, quante lettere contiene. Così a, $-3b$, $-2c$ ſono monomj di una dimenſione; ab, $-ab$ ſono monomj di due dimenſioni; $3abc$, $-3abc$ di tre dimenſioni &c.

Una quantità letterale in un monomio può eſſere moltiplicata più volte per ſe ſteſſa. Per brevità, e chiarezza ſi ſcrive una volta, e un pò ſopra a deſtra ſi pone la cifra aritmetica, che eſprime la ſua dimenſione.

Così invece di aa, aaa, $aaaa$, ſi ſcrive a^2, a^3, a^4; in vece di $aabbbqqqq$, ſi ſcrive $a^2b^3q^4$. Le cifre aritmetiche, che eſpongono le dimenſioni delle quantità letterali, ſi dicono eſponenti. Una quantità letterale ſi ſcrive ſenza l'unità per eſponente; perche una lettera eſprime la ſua prima dimenſione.

Da ciò s' inferiſce, che ſe i fattori contengono lettere ſimili cogli ſteſſi, o con diverſi eſponenti, nel prodotto ſi ſcrive una delle ſimili lettere, e per eſponente la ſomma degli eſponenti delle lettere ſimili. Perche la ſomma degli eſponenti è il prodotto delle medesime. Così $a^3 . a^2 = a^{3+2} = a^5$ $= aaaaa$; $a^2 bc . mab^3 . c = ma^3 b^4 c^2$; $ab . cb^2 = acb^3$.

VIII. L'esponente della dimensione non si dee confondere col coefficiente. Perche il coefficiente esprime il numero delle volte, che si prende un monomio; l'esponente esprime il numero delle volte, che una quantità si moltiplica per se stessa.

Così $2a$ esprime, che a dee prendersi due volte; a^2 esprime il prodotto di $a . a$; $3a$ esprime, che a dee prendersi tre volte; a^3 il prodotto di $a . a . a$. Sia $a = 5$, sarà $2a = 10$, $3a = 15$; $a^2 = 25$, $a^3 = 125$.

CAP.

CAP. III.

Della Divisione de' Monomj.

I. IL dividendo, e il divisore possono essere positivi, o negativi; uno positivo, e l'altro negativo. S' indica la divisione in forma di frazione; o ponendo trà il dividendo, e il divisore due punti.

Così $a:b$, $-a:-b$, $-a:b$, $a:-b$; o pure $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}$, $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$, indicano, che a dee dividersi per b, $-a$ per $-b$, $-a$ per b, a per $-b$.

II. Se il dividendo, e il divisore sono positivi, o negativi; il quoziente è positivo. Perche il dividendo contiene il divisore nel suo proprio senso, e il quoziente positivo esprime il numero delle volte, che lo contiene.

Così il quoziene di -15 diviso per -5, di 15 diviso per 5, è 3; il quale esprime, che -15 contiene -5, che 15 contiene 5, tre volte nel suo proprio senso di negativo, o di positivo.

Se il dividendo, o il divisore è positivo; e l' altro negativo, il quoziente è negativo. Perche il dividendo contiene il divisore nel contrario suo senso, e il quoziente negativo esprime il numero delle volte, che lo contiene.

Così il quoziente di — 15 diviso per 5, di 15 diviso per — 5, è — 3; il quale esprime, che — 15 contiene 5, che 15 contiene — 5 nel senso negativo.

Alla divisione si appartiene quanto si è detto della moltiplicazione; prendendosi un fattore per quoziente, l' altro per divisore, e il prodotto per dividendo.

III. Il dividendo contiene il divisore nello stesso senso, che il quoziente contiene 1; il dividendo contiene il quoziente nello stesso senso, che il divisore contiene 1. Perche il dividendo contiene il divisore nel senso del quoziente, tante volte, quante unità contiene il quoziente nello stesso suo senso; il dividendo contiene il quoziente nel senso del divisore tante volte, quante unità contiene il divisore nello stesso suo senso.

Così — 15 contiene — 5, 15 contiene 5, tre volte nel senso del quoziente 3, come 3 contiene 1; — 15 contiene 3 cinque volte nel senso del divisore — 5, come — 5

con-

contiene 1 ; 15 contiene − 5 , tre volte nel ſenſo del quoziente − 3 , come − 3 contiene 1 ; 15 contiene − 3 nel ſenſo del diviſore − 5 , come − 5 contiene 1.

IV. Si divide un monomio per un monomio, ſe il diviſore è un fattore del dividendo ; ſiccome un numero non ſi divide , che pei ſuoi fattori .

Si fa la diviſione con ſottrarre l' eſponente di ciaſcuna lettera del diviſore dagli eſponenti delle conſimili nel dividendo . Perche gli eſponenti eſprimono le dimenſioni, ſottraendo gli eſponenti delle quantità del diviſore dagli eſponenti delle conſimili nel dividendo , ſi divide il dividendo pe'l diviſore . Il quoziente è poſitivo, ſe il dividendo , e il diviſore ſono poſitivi, o negativi ; ſe uno è poſitivo, e l' altro negativo , il quoziente è negativo .

Così $\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$; $\frac{-a^5}{a^2} = -a^{5-2} = -a^3$;

$$\frac{a^3 b^5 c^4}{a b^4 c^3} = a^{3-1} b^{5-4} c^{4-3} = a^2 bc;\ \frac{a}{a} = a^{1-1}$$

$$= a^0 = 1;\ \frac{a}{-a} = -a^{1-1} = -a^0 = -1;$$

$$\frac{ab}{ab} = a^{1-1} b^{1-1} = a^0 b^0 = 1;\ \frac{a^3 bc^2}{-a^2 bc}$$

$$= -a^{3-2} b^{1-1} c^{2-1} = -ab^0 c = -ac \text{ \&c.}$$

L'espressioni a^0 , b^0 , c^0 , non sono , che quozienti di quantità divise per se stesse ; il loro valore è 1 ; perche ogni quantità contiene se stessa una volta . L' esponente 0 disegna , che la dimensione della quantità è nulla , e che il suo valore è 1.

V. Se il divisore non è fattore del dividendo, il quoziente della divisione è una frazione , che ha per numeratore il dividendo , e per denominatore il divisore .

Così

Così il quoziente di a diviso per b, è $\frac{a}{b}$;

di $m^2 f$ diviso per $-n^3 d$, è $\frac{m^2 f}{-n^3 d}$.

V. Se nel dividendo, e nel divisore vi sono coefficienti; questi si dividono per le regole aritmetiche.

Così $\frac{15a^2b^3}{5ab} = 3ab^2$; $\frac{8a^2b^3}{12ab} = \frac{2}{3}ab^2$;

$\frac{15cd}{25ef} = \frac{3cd}{5ef}$.

Se i coefficienti si risolvono ne' fattori primi; questi si dividono, come i monomj, supprimendo dal dividendo, e dal divisore, i fattori simili. Così $\frac{525}{15} = \frac{1.3.5.5.7.}{1.3.5.}$

 $= 5.$

$$= 5 \cdot 7; \quad \frac{525}{120} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{35}{8}$$

VII. Le quattro esposte operazioni de' monomj sono le principali, e le basi di tutte le altre. Le quantità negative poste in calcolo colle positive producono varietà tra le operazioni algebraiche, e le aritmetiche. Le somme si cambiano in differenze, e le differenze in somme. La moltiplicazione, e la divisione scambievolmente dipendono dall'addizione, e dalla sottrazione, e si hanno prodotti, e quozienti negativi, e positivi. S'introducono nel calcolo le quantità contradittorie, che si dicono immaginarie; come si vedrà trattando delle potenze, e delle radici; oltre le irrazionali, che si considerano nella comune aritmetica.

CAP.

C A P. IV.

Delle Frazioni de' Monomj.

I. LE frazioni algebraiche, come le aritmetiche, ſono quozienti delle diviſioni. Il diviſore è il denominatore, che diſegna l' unità diviſa in parti; il dividendo è il numeratore, che eſprime il valore della frazione. Queſti quozienti non ſi poſſono enunciare, come i quozienti aritmetici, per numeratore, e denominatore, e ſi hanno ſolamente in eſpreſſione.

Così $\frac{a}{b}$ eſprime il quoziente di a diviſo per b; $\frac{-3mn}{5f}$ eſprime il quoziente di $-3mn$ diviſo per $5f$, o pure $\frac{3}{5}$ di $-mn$ diviſo per f; $\frac{a}{7}$ eſprime $\frac{1}{7}$ di a &c.

II. La dimenſione di una frazione è la differenza della dimenſione del denominatore dalla dimenſione del numeratore. Perche la dimenſione di un prodotto è la ſomma delle dimenſioni de' fattori. Così $\frac{a^3}{b}$ è di due dimenſioni; $\frac{a^5}{b}$ di quattro dimenſioni; $\frac{-a^3b^2c}{m^2n}$ di tre &c.

Le dimenſioni delle frazioni poſſono eſſere poſitive, nulle, e negative. Le dimenſioni ſono poſitive, ſe le dimenſioni de' numeratori ſono maggiori delle dimenſioni de' denominatori. Sono nulle, ſe le dimenſioni de' numeratori, e de' denominatori ſono uguali. Sono negative, ſe le dimenſioni de' numeratori ſono minori delle dimenſioni de' denominatori. Così di $\frac{a^3}{b}$.

la dimensione è 2; di $\frac{a^3}{b^3}$ la dimensione è nulla; di $\frac{a^3}{b^7}$ la dimensione è -4.

III. Le frazioni possono essere positive, e negarive. Se il numeratore, e il denominatore sono positivi, o negativi, la frazione è positiva. Così $\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}$ sono due frazioni positive; ed è lo stesso scrivere il numeratore, e il denominatore con segni positivi, o negativi.

Se il numeratore, o il denominatore è positivo, e l'altro negativo, la frazione è negativa. Così $\frac{-a}{b}$, $\frac{a}{-b}$ sono due frazioni negative.

Indifferentemente una frazione negativa può esprimersi col numeratore, o col denominatore negativo; o pure col porre avanti ti la frazione il segno negativo. Così $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$. Perche le frazioni sono quozienti delle divisioni; e questi sono negativi, se il dividendo, o il divisore, è negativo; sono positivi, se il dividendo, e il divisore sono positivi, o negativi.

IV. Se il numeratore, e il denominatore di una frazione, si moltiplicano per una quantità, la frazione varia ne' soli termini. Così se il numeratore, e il denominatore di $\frac{a}{b}$, si moltiplicano per c, $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$. Perche se il numeratore a si moltiplica per c, $\frac{ac}{b}$ è tanto maggiore di $\frac{a}{b}$, quante unità si contengono in c; se il denominatore b si moltiplica per c, $\frac{a}{bc}$ è altrettanto minore di $\frac{a}{b}$. Dunque $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$.

Se il numeratore, e il denominatore di una frazione si dividono per una quantità, parimente la frazione varia ne' soli termini.

ni. Così se il numeratore, e il denominatore di $\frac{a}{b}$, si dividono per c, $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$. Perchè se il denominatore si divide per c, $\frac{a}{\frac{b}{c}}$ è tanto maggiore di $\frac{a}{b}$, quante unità si contengono nel divisore c; dividendosi il numeratore per c, $\frac{\frac{a}{c}}{b}$ è altrettanto minore. Dunque se il numeratore, e il denominatore si dividono per c, sarà $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$.

Da

Da ciò s'inferiſce, che ſe il numeratore, e il denominatore di una frazione hanno fattori ſimili, e queſti ſi tolgano dall' uno, e dall' altro, la frazione rimane la medeſima, ridotta a ſemplice eſpreſſione.

Così $\frac{a^2 b}{am} = \frac{ab}{m}$; $\frac{a^3 b^2 n}{-a^3 b^2 m} = - \frac{n}{m}$.

V. Due, e più frazioni di diverſa denominazione, ſi riducono alla medeſima, moltiplicando i termini di una frazione pe'l prodotto de' denominatori delle altre.

Così $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ſi riducono alla medeſima denominazione, moltiplicando i termini di $\frac{a}{b}$ per d, i termini di $\frac{c}{d}$ per b, e le frazioni $\frac{ad}{bd}$, $\frac{cb}{bd}$ ſono della medeſima denominazione. Si riducono alla medeſima denonominazione $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, moltiplicando i termini di $\frac{a}{b}$ per df, i termini di $\frac{c}{d}$ per bf, i termini di $\frac{e}{f}$ per bd, e le frazioni $\frac{adf}{bdf}, \frac{bcf}{bdf}, \frac{bde}{bdf}$ ſono della medeſima denominazione.

Se i denominatori hanno comune fattore, come $\frac{a}{bc}, \frac{d}{bf}$; le frazioni ſi riducono al comune denominatore, moltiplicando i termini della prima per f, della ſeconda per c, $\frac{af}{bcf}, \frac{cd}{bcf}$.

Si riducono due, e più frazione di diverſo numeratore al medeſimo, moltiplicando i termini di ciaſcuna frazione pe'l prodotto de' numeratori delle altre. Così $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ ſi riducono al medeſimo numeratore.

re $\frac{ac}{bc}, \frac{ac}{ad}$, moltiplicando i termini della prima per c, i termini della ſeconda per a. Si riducono al medeſimo numeratore $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, moltiplicando i termini della prima per ce, della ſeconda per ae, della della terza per ac, e le frazioni ridotte

ſono, $\frac{ace}{bce}, \frac{ace}{ade}, \frac{ace}{acf}$. Se nei numeratori delle frazioni da ridurſi vi è qualche ſimile fattore, queſto ſi tralaſcia nel prodotto de' fattori.

Una quantità intera ſi riduce in frazione di un dato denominatore, moltiplicando la quantità pe'l dato denominatore, e dividendo il prodotto pe'l denominatore. Così ad ſi riduce in frazione del denominatore c, moltiplicando ad per c, e dividendo il prodotto per c, $\frac{adc}{c} = ad$.

VI. Si ſommano le frazioni; le frazioni, e gl'interi per mezzo de' loro ſegni negativi, o poſitivi, come ſi è detto delle quanti-

tà

tà intere nel Cap. I. Così la ſomma di $\frac{md}{c}$, $\frac{-ds}{f}$; $\frac{ms}{e}$, n, è $\frac{md}{c}+\frac{ms}{e}-\frac{ds}{f}+n$.

Si ſottraggono le frazioni dalle frazioni, le frazioni dagl' interi, e gl' interi dalle frazioni, con permutare i ſegni alle quantità da ſottrarſi. Così ſi ſottrae $\frac{ad}{c}$ da $\frac{ms}{e}$, ſcrivendo $\frac{ms}{e}-\frac{ad}{c}$; ſi ſottrae $-\frac{ad}{c}+\frac{ms}{e}-f$ da $\frac{pq}{r}-a$, ſcrivendo $\frac{pq}{r}-a+\frac{ad}{c}-\frac{ms}{e}+f$.

Una formula di più frazioni, e interi, che ſi ha tanto nell' addizione, che nella ſottrazione; ſi riduce ad una eſpreſſione fratta di un comune denominatore, riducendo le frazioni, e gl' interi al comune denominatore; perchè la ſomma di tutti i numeri con un comune denominatore è uguale a tutte le frazioni.

Così la ſomma delle frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{-c}{d}$,

$\frac{e}{f}$, è $\frac{adf - cbf + ebd}{bdf}$. La differenza di $\frac{b}{a}$ da $\frac{-c}{d}$, è $\frac{-ac-bd}{ad}$. Queſte frazioni ſono compoſte di tanti termini, quanti ſono i termini del numeratore.

VII. La moltiplicazione delle frazioni; delle frazioni, e degl' interi, s' indica, ponendo trà fattori uno de' due ſegni della moltiplicazione. Così la moltiplicazione di $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, s'indica $\frac{a}{b} . \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$; la moltiplicazione di $\frac{a}{b}$ per c, s' indica $\frac{a}{b} \times c$, $\frac{a}{b} . c$.

Se i fattori fratti, e interi ſono più di due, trà l' uno, e l'altro ſi pone uno de' due segni. Così $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{e}{f}.m$, $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\times m$, indicano la moltiplicazione de' quattro fattori.

1. Si moltiplica un' intero per una frazione, una frazione per l'intero, moltiplicando il numeratore per l'intero, e dividendo il prodotto pe'l denominatore. Così $\frac{a}{b}.c=\frac{ac}{b}$; $ab^2.\frac{mds}{cq}=\frac{mdsab^2}{cq}$ &c.

2. Si moltiplica una frazione per una frazione, moltiplicando i numeratori, e dividendo il prodotto pe'l prodotto de' denominatori. Così $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}.\frac{c}{d}.\frac{f}{e}=\frac{acf}{bde}$.

VIII. La divisione d'una frazione per un intero, di un intero per una frazione, d'una frazione per una frazione; s'indica ponendo tra il dividendo, e il divisore, uno de' due segni della divisione. Così $a:\frac{b}{c}$, $\frac{b}{c}:a$; o pure $\frac{a}{\frac{b}{c}}$, $\frac{\frac{b}{c}}{a}$, indicano a divisa per $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{c}$ per a.

1. Si divide l' intero per la frazione, moltiplicando l'intero pe'l denominatore, e dividendo il prodotto pe'l numeratore. Così $a:\frac{b}{c}=\frac{ca}{b}$; $a^2:\frac{a^3}{b}=\frac{a^2b}{a^3}=\frac{b}{a}$; $ba^5:\frac{m}{n}=\frac{ba^5n}{m}$.

2 Si divide una frazione per l' intero, moltiplicando il denominatore per l' intero.

Co-

$$\text{Così } \frac{b}{a} : a = \frac{b}{a^2};\ \frac{15b^4}{2m^2} : c^3 = \frac{15b^4}{2m^2c^3}.$$

3. Si divide una frazione per una frazione, moltiplicando il numeratore di una pe'l denominatore dell'altra. Così $\frac{b}{c} : \frac{d}{e} = \frac{be}{cd}$; $\frac{3ms}{a^2} : \frac{-2n}{3f} = \frac{-9msf}{2na^2}$.

Le ragioni di queste operazioni, come della moltiplicazione, e di tutte le altre, sono esposte nel Cap. X. dell' Aritmetica.

IX. Il numeratore, e il denominatore di una frazione, si possono permutare, permutando i loro esponenti da positivi in negativi; e il valore della frazione rimane lo stesso.

$$\text{Così } \frac{ab^3c}{mn^2} = ab^3cm^{-1}n^{-2} = \frac{m^{-1}n^{-2}}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}}$$

$$= \frac{1}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}mn^{2}}\,;\ \frac{-ab^{3}c}{mn^{2}} = -ab^{3}cm^{-1}n^{-2}.$$

$$= \frac{-m^{-1}n^{-2}}{a^{-1}b^{-3}c^{-1}} = \frac{-1}{a^{-1}b^{-3}c^{-2}mn^{2}}.$$

La ragione di queste diverse espressioni si è: che si divide a^{4} per a, per a^{2}, a^{3}, a^{4}, sottraendo gli esponenti dei divisori dagli esponenti del dividendo, e si hanno $\frac{a^{4}}{a} = a^{3}$, $\frac{a^{4}}{a^{2}} = a^{2}$, $\frac{a^{4}}{a^{3}} = a$, $\frac{a^{4}}{a^{4}} = a^{0} = 1$. Dunque se l'esponente del dividendo è minore dell'esponente del divisore, e si prosiegue la divisione di 1 per a, a^{2},

a^{3}

a^3 &c., si hanno $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ &c.

Se dalla frazione $\frac{1}{a}$ il numeratore, e il denominatore si dividono per a, a^2, a^3 &c., si hanno $\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{a}{a}} = \frac{a^{-1}}{a^0} = a^{-1}$, $\frac{1}{a} = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{a}{a^2}} = \frac{a^{-2}}{a^{1-2}} = \frac{a^{-2}}{a^{-1}}$,

$$\frac{1}{a} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a\,a^{\frac{1}{3}}} = \frac{a^{-3}}{a^{1-3}} = \frac{a^{-3}}{a^{-2}} \ \&c.$$

Dunque il numeratore , e il denominatore di una frazione cogli esponenti negativi non esprimono , che frazioni inverse, e i termini di una frazione si possono permutare , permutando i loro esponenti da positivi in negativi , e da negativi in positivi .

X. In una equazione tra due , e più quantità intere , e fratte si possono avere tutti i rapporti delle quantità, moltiplicando, e dividendo i termini dell' equazione per la medesima quantità. Perche le quantità uguali moltiplicate , o divise per la medesima quantità, danno prodotti , e quozienti uguali.

Sia $ab + \frac{c^2 d}{n} = m^2$; se tutti i termini

si

ſi moltiplicano per n, ſarà $abn + c^2d = nm^2$. Se tutti i termini ſi dividono per b, ſarà $a + \frac{c^2d}{bn} = \frac{m^2}{b}$; ſe ſi dividono per c^2d, ſarà $\frac{ab}{c^2d} + \frac{1}{n} = \frac{m^2}{c^2d}$; ſe ſi dividono per m^2, ſarà $\frac{ab}{m^2} + \frac{c^2d}{nm^2} = 1$ &c.

C A P. V.

Delle Potenze de' Monomj.

I. LE potenze de' monomj interi, e fratti, ſono i prodotti ſucceſſivi de' monomj moltiplicati per ſe ſteſſi. Si diſtinguono queſte potenze in gradi; come ſi è detto delle potenze de' numeri in Aritmetica.

Potenza di primo grado di un monomio è lo ſteſſo monomio; di ſecondo grado è il prodotto del monomio per se ſteſſo; di terzo grado è il prodotto della potenza di ſecondo grado per lo ſteſſo monomio &c. La potenza di ſecondo grado ſi dice comunemente quadrato, e la potenza di terzo grado cubo.

Così di a la prima potenza è a, la ſeconda $a^2 = a.a$, la terza $a^3 = a^2. a$, la quarta $a^4 = a^3. a$ &c.

Di abc la prima potenza è abc, la ſeconda $a^2 b^2 c^2 = abc . abc$, la terza $a^3 b^3 c^3$.

$c^3 = a^2 b^2 c^2 \,.\, abc$, la quarta $a^4 b^4 c^4 = a^3 b^3 c^3 \,.\, abc$ &c.

Di a^2 la prima potenza è a^2, seconda $a^4 = a^2 \,.\, a^2$, la terza $a^6 = a^4 \,.\, a^2$, la quata $a^8 = a^6 \,.\, a^2$ &c.

Di ab^3 la prima potenza è ab^3, la seconda $a^2 b^6 = ab^3 \,.\, ab^3$, la terza $a^3 b^9 = a^2 \,.\, b^6 \,.\, ab^3$, la quarta $a^4 b^{12} = a^3 b^9 \,.\, ab^3$ &c.

Di $ab^3 c^2$ la prima potenza è $ab^3 c^2$, la seconda $a^2 b^6 c^4 = ab^3 c^2 \,.\, ab^3 c^2$, la terza $a^3 b^9 c^6 = a^2 b^6 c^4 \,.\, ab^3 c^2$, la quarta $a^4 b^{12} \,.\, c^8 = a^3 b^9 c^6 \,.\, ab^3 c^2$ &c.

Di

Di $\frac{a}{b}$ la prima potenza è $\frac{a}{b}$, la secon-

da $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b}.\frac{a}{b}$, la terza $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a^2}{b^2}.\frac{a}{b}$,

la quarta $\frac{a^4}{b^4} = \frac{a^3}{b^3}.\frac{a}{b}$ &c.

Di $\frac{ab^2}{cd}$ la prima potenza è $\frac{ab^2}{cd}$, la secon-

da $\frac{a^2b^4}{c^2d^2} = \frac{ab^2}{cd}.\frac{ab^2}{cd}$, la terza $\frac{a^3b^6}{c^3d^3} =$

a^2

$\frac{a^2 b^4}{c^2 d^2} . \frac{a b^2}{c d}$ &c.

II. Se i monomj interi, e fratti hanno coefficienti oltre 1, i successivi prodotti de' coefficienti sono le loro potenze.

Così di $3ab$, la prima potenza è $3ab$; la seconda è $9a^2 b^2$, la terza $27a^3 b^3$ &c.

Di $\frac{2ab^2}{3c}$ la prima potenza è $\frac{2ab^2}{3c}$, la seconda $\frac{4a^2 b^4}{9c^2}$, la terza $\frac{8a^3 b^6}{27c^3}$ &c.

Le potenze de' coefficienti si possono parimente esprimere per gli esponenti. Così di $2ab$ la seconda potenza è $2^2 a^2 b^2$, la

ter-

terza $2^3 a^3 b^3$ &c.

Di $\frac{2ab^2}{3c}$ la seconda potenza è $\frac{2^2 a^2 b^4}{3^2 c^2}$,

la terza $\frac{2^3 a^3 b^6}{3^3 c^3}$ &c.

III. Dai riferiti esempj delle potenze è manifesto, che gli esponenti delle potenze non sono altro, che gli esponenti delle dimensioni delle quantità del monomio; e che gli esponenti della seconda, terza, quarta &c. potenza delle quantità di un monomio, sono doppj, tripli, quatrupli &c. degli esponenti delle quantità del monomio.

Dunque un monomio si eleva ad una potenza, e si hanno varj ordini di potenze del monomio, moltiplicando gli esponenti delle quantità del monomio pei gradi delle potenze.

Così di a la seconda, terza &c. potenza, za, sono a^2, a^3, a^4 &c.

Di a^2 la seconda, terza &c. potenza, sono a^4, a^6, a^8 &c.

Di a^3 la seconda, terza &c. potenza, sono a^6, a^9, a^{12}, a^{15} &c.

Di a^p la seconda, terza &c. potenza, sono a^{2p}, a^{3p}, a^{4p} &c.

Di $a^p b^q$ la seconda, terza &c. potenza, sono $a^{2p} b^{2q}$, $a^{3p} b^{3q}$, $a^{4p} b^{4q}$ &c.

Di $\dfrac{a^p b^q}{c^r}$, la seconda, terza &c. potenza sono $\frac{a^{2p} b^{2q}}{c^{2r}}$, $\frac{a^{3p} b^{3q}}{c^{3r}}$, $\frac{a^{4p} b^{4q}}{c^{4r}}$ &c.

IV. S'indicano le potenze di un monomio di più quantità, scrivendo il monomio tra parentesi, e a destra un pò sopra il grado della potenza; o pure con soprapporre una linea orizontale alle quantità, e a destra della linea il grado della potenza.

Così $\left(ab^2 cd^3\right)^3$, $\overline{ab^2 cd^3}^{\,3}$ indicano la terza potenza di $ab^2 cd^3$; $\left(\frac{3}{4} abfe^2\right)^n$, $\overline{\frac{3}{4} abfe^2}^{\,n}$, indicano la potenza n di $\frac{3}{4} abfe^2$;

$\left(\frac{ab}{4c}\right)^n$, $\frac{\overline{ab}^{\,n}}{\overline{4c}^{\,n}}$ indicano la potenza n di $\frac{ab}{4c}$.

Le

Le potenze delle frazioni sogliono indicarsi, permutando il denominatore in numeratore coll' esponente negativo. Così $\frac{1}{\overline{ab}^{\,n}}$

$$= \overline{ab}^{\,-n} \; ; \; \frac{\overline{ab^2}^{\,n}}{\overline{4c}^{\,n}} = \overline{ab^2}^{\,n} . \overline{4c}^{\,-n} .$$

V. La prima potenza di un monomio s'è positiva, la seconda, terza, quarta &c. sono potenze positive; perche successivamente si moltiplica un positivo per un positivo.

Se la prima potenza è negativa, tutte le potenze pari sono positive, e le dispari negative; perche le potenze pari sono prodotti di un negativo per un negativo, e le dispari di un positivo per un negativo. Così di $-a$ la seconda potenza è $a^2 = -a$. $-a$, la terza è $a^3 = a^2 . -a$, la quarta è $a^4 = -a^3 . -a$ &c.

Dun-

Dunque le potenze dispari sono positive, se la prima potenza è positiva; sono negative, se la prima potenza è negativa. Le potenze pari sono sempre positive, tanto se la prima potenza è positiva, che negativa; e le potenze pari negative sono quantità ripugnanti. Così se $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$ &c. si considerano come potenze, sono quantità ripugnanti.

Le quantità $-a^2$, $-a^4$, $-a^6$ &c. non sono, che residui di quantità maggiori sottratte dalle minori; o pure prodotti delle medesime quantità, prese in senso positivo, e negativo. Così $-a^2$ è prodotto di a, $-a$, o di $a^2 . -1$; $-a^4$ è prodotto di $a^2 . -a^2$, di $a^4 . -1$, di $-a^3 . a$, di $a^3 . -a$; ovvero sono residui di $a^2 - 2a^2 = -a^2$, di $a^4 - 2a^4 = -a^4$ &c., delle quali non si ha prima potenza.

CAP.

CAP. VI.

Delle Radici de' Monomj.

1. Le radici sono quelle quantità, dalle quali si formano le potenze. Si distinguono le radici in gradi per rapporto alle potenze.

Radice prima, e prima potenza sono lo stesso. La radice seconda, o quadra, è della seconda potenza. La radice terza, o cuba, è della terza potenza. La radice quarta è della quarta potenza &c.

Cosí ab^2 è prima potenza, radice prima di se stessa; è radice seconda di a^2b^4, terza di a^3b^6 &c.

$\frac{mq}{c}$ è prima potenza, e radice prima, radice seconda di $\frac{m^2q^2}{c^2}$, terza di

$$\frac{m^3 q^3}{c^3} \text{ \&c.}$$

II. Di un monomio intero, e fratto può ricercarsi la radice seconda, terza, quarta &c. Un monomio per rapporto a diverse radici si considera potenza delle radici; e siccome un monomio può elevarsi a diversi ordini di potenze, così di un monomio possono ricercarsi le radici di ordini diversi. Per rapporto a diversi ordini di radici, il monomio si considera una potenza di ordini diversi di potenze.

Si è dimostrato nel Cap. V. N. III., che l' esponente della seconda potenza è doppio dell' esponente della prima potenza; che l'esponente della terza è triplo &c. Dunque se gli esponenti di un monomio si dividono per 2, 3, 4 &c.; i quozienti sono gli esponenti della seconda, terza &c. radice.

Così di a la radice seconda è $a^{\frac{1}{2}}$, la

ter-

terza $a^{\frac{1}{3}}$, la quarta $a^{\frac{1}{4}}$ &c.

Di a^3 la radice ſeconda è $a^{\frac{3}{2}}$, la terza $a^{\frac{3}{3}}$, la quarta $a^{\frac{3}{4}}$ &c.

Di ab^2c^3 la radice ſeconda è $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}}c^{\frac{3}{2}}$, la terza $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{3}{3}}$, la quarta $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{2}{4}}c^{\frac{3}{4}}$ &c.

Di $\frac{a}{b}$ la radice seconda è $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$, la terza $\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$, la quarta $\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}$ &c.

Di $\frac{ab^4}{cd^2}$ la radice seconda è $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{2}}}{c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{2}{2}}}$;

la

la terza $\frac{a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{1}{3}}\, d^{\frac{2}{3}}}$, la quarta $\frac{a^{\frac{1}{4}}\, b^{\frac{4}{4}}}{c^{\frac{1}{4}}\, d^{\frac{2}{4}}}$ &c.

II. S' indicano le radici di un monomio intero, o fratto di più quantità in uno di questi due modi. Così $\left(a^2 b^3 c^5\right)^{\frac{1}{2}}$, $\overline{a^2 b^3 c^5}^{\,\frac{1}{2}}$ indicano la radice seconda; $\left(\frac{ab^2}{mn}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\frac{\overline{ab^2}^{\,\frac{1}{3}}}{\overline{mn}^{\,\frac{1}{3}}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$ indicano la radice terza.

Le radici delle frazioni ſogliono indicarſi, permutando il denominatore in numeratore coll' eſponente fratto negativo.

Così $\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = a^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{ab}{mn}\right) = ab^{\frac{1}{3}}$. $mn^{-\frac{1}{3}}$.

III. Le radici delle radici ſi hanno dividendo gli eſponenti fratti pe'l grado delle nuove radici.

Così la radice ſeconda di $a^{\frac{3}{2}}$ è $a^{\frac{3}{2.2}} = a^{\frac{3}{4}}$; cioè radice quarta di a^{3}. La radice terza

di

di $a^{\frac{3}{2}}$ è $a^{\frac{3}{2.3}} = a^{\frac{3}{6}}$; cioè radice sesta di a^3. La radice quarta di $\overline{a^2 b^3 c^5}^{\frac{1}{2}}$ è $\overline{a^2 b^3 c^5}^{\frac{1}{8}}$; cioè radice ottava di $a^2 b^3 c^5$.

Con una successiva divisione degli esponenti fratti pei gradi delle radici, che si ricercano, si hanno le radici delle radici del monomio. Le prime radici si considerano potenze delle seconde, le seconde potenze delle terze &c.

IV. I numeratori degli esponenti esprimono il grado delle potenze, i denominatori il grado delle radici, e i quozienti le radici delle quantità del monomio. Possono i quozienti degli esponenti essere interi, fratti, e misti. I quozienti interi espongono le radici delle quantità. I fratti indicano le radici da estrarsi. I misti espongono parte della radice, ed indicano la parte da estrarsi.

Così la radice seconda di a^6 è $a^{\frac{6}{2}} = a^3$; la radice terza di a^6 è $a^{\frac{6}{3}} = a^2$; la radice sesta di a^6 è $a^{\frac{6}{6}} = a$; la radice terza di $a^6 b^{12} c^9$ è $a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{12}{3}} c^{\frac{9}{3}} = a^2 b^4 c^3$;

La radice terza di a^2 è $a^{\frac{2}{3}}$; la radice se-

seconda di ab è $a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$; la radice quinta di $a^2 b^3 c^4$ è $a^{\frac{2}{5}} b^{\frac{3}{5}} c^{\frac{4}{5}}$.

La radice seconda di a^3 è $a^{\frac{3}{2}}$ $= a^{1+\frac{1}{2}} = a . a^{\frac{1}{2}}$; la radice terza di $a^5 =$ $a^{1+\frac{2}{3}}$; la radice quarta di $a^4 b^5 c^2$ è $a^{\frac{4}{4}} b^{\frac{5}{4}} c^{\frac{2}{4}} = abb^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{2}}$.

V. Se i monomj, dai quali si estraggono le radici, sono positivi; le radici dispari, e pari sono reali; le radici dispari sono positive, e le pari possono essere positive, e negative. Se i monomj sono negativi, le radici dispari sono reali, e negative; le pari sono ripugnanti, assurde, ed immaginarie.

Perche si è dimostrato nel Cap. V. N.V, che le potenze dispari d' un monomio positivo sono positive, di un monomio negativo, sono negative; che le potenze pari di un monomio positivo, o negativo, sono positive; e che le potenze pari negative sono quantità ripugnanti.

S'introducono nel calcolo le radici immaginarie, quante volte dalle quantità negative si estraggono radici pari; le quali dimostrano la ripugnanza di qualche condizione, come si vedrà nella seconda parte. In questo Cap. si espone il metodo di calcolarle.

I monomj reali, che hanno quozienti interi per esponenti, si dicono razionali, e commensurabili. I monomj reali, che hanno per esponenti quozienti fratti, o in parte fratti, si dicono irrazionali, incommensurabili, sordi, potenze imperfette, e fratte; perche le loro radici non sono es-

eſprimibili in tutto, o in parte.

VI. Nelle radici pari, nelle radici delle radici diſpari, e pari, ſe ſi conſiderano i ſoli eſponenti; le radici poſitive, e negative; le reali, e immaginarie, ſi confondono.

Per diſtinzione, e chiarezza ſi diſegnano le radici, ponendo avanti il monomio il ſegno $\sqrt{\ }$, che ſi dice radicale, e ſopra il ſegno l'indice della radice.

Così $\sqrt[3]{a^2}$ indica la radice terza di a^2;

$\sqrt[4]{ac^3}$ indica la radice quarta di ac^3;

$\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$, o pure $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{b}}$, indicano la radice quinta di $\frac{a}{b}$.

Alla radice ſeconda ſi tralaſcia l' indice radicale. Così $\sqrt{b}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ indicano la radidice di b, di $\frac{a}{b}$.

Le radici dispari non avendo, che il segno della potenza; questo s' è negativo si può porre sotto il segno radicale avanti il monomio, o pure avanti il segno radicale; perche l' uno, e l'altro esprimono la radice negativa del monomio. Così la radice terza di ab si esprime $\sqrt[3]{ab}$; la radice terza di $-ab$ si esprime $-\sqrt[3]{ab}$, o pure $\sqrt[3]{-ab}$.

Le radici pari positive, e negative si esprimono con premettere al radicale il doppio segno, negativo, e positivo. Così la radice seconda di ab, si esprime $\pm\sqrt{ab}$; la radice quarta di m, si esprime $\pm\sqrt[4]{m}$.

Le radici immaginarie ritengono il loro segno negativo sotto il radicale, e al radicale si premette il doppio segno positivo, e negativo; perche l' impossibilità si estende alle due radici, positiva, e negativa. Così $\pm\sqrt{-a}$; $\sqrt{-a}$, esprime la radice immaginaria di $-a$; il $+$, $-$ avanti il radicale

cale esprime l'impossibilità della radice $-a$ nel senso positivo, e negativo.

Se in un monomio vi sono fattori, dai quali possono estrarsi le radici, queste si pongono avanti il segno radicale. Così di $\pm\sqrt{a^2 b^3}$, poichè a è radice di a^2 si pone a avanti il radicale $\pm a\sqrt{b^3}$, che significa a moltiplicata in $\pm\sqrt{b^3}$; poichè b^3 è prodotto di b in b^2, e di b^2 la radice è b, si scrive $\pm ab\sqrt{b}$, che significa $\pm ab$ moltiplicato in $\sqrt{b}$, o pure ab moltiplicato in $\pm\sqrt{b}$, e $\pm\sqrt{a^2 b^3} = \pm ab\sqrt{b}$.

Di $\pm\sqrt{25dc^2}$, poichè 5 è radice di 25, e c radice di c^2, si ha $\pm\sqrt{25c^2d} = \pm 5c\sqrt{d}$.

Di $\pm\sqrt{50c^3d^2}$, poichè 50 è prodotto di 25. 2, di 25 la radice è 5, e c^3 è prodotto di $c^2 . c$, di c^2 la radice è c;

di

di d^2 la radice è d, ſi ha $\pm\sqrt{50c^3d^2} = \pm 5cd\sqrt{2c}$.

Di $\pm\sqrt{-a^2}$, poichè $-a^2$ è prodotto di $a^2 \cdot -1$, e a è radice di a^2, ſi ha $\pm\sqrt{-a^2} = \pm a\sqrt{-1}$, prodotto imaginario.

Parimente $\sqrt[3]{a^4c^5} = ac\sqrt[3]{ac^2}$; $\sqrt[4]{16a^5} = 2a\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[3]{\frac{8a}{27}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{a}$ &c.

VIII. Le radici delle radici ſi eſprimono con replicare i ſegni radicali. Così la radice ſeconda di $\pm\sqrt{a} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{a}}$. Il ſegno poſitivo, e negativo del ſecondo radicale eſprimono, che tanto il ſegno poſitivo, che il negativo del primo radicale, ſi debbano prendere nel doppio ſenſo di poſitivo, e di negativo, e ſi hanno quattro radici di $\pm\sqrt{a}$; una poſitiva, e l'altra negativa di $+\sqrt{a}$; e queſte corriſpondono alle due radici reali $\pm\sqrt{\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{a}$; una

una poſitiva, e l'altra negativa di $-\sqrt{a}$, e queſte ſono due radici imaginarie

$$\pm\sqrt{-\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{-a}.$$

La radice ſeconda di $\pm\sqrt{\pm\sqrt{a}} = \pm\sqrt{\pm\sqrt{\pm\sqrt{a}}}$. Il ſegno poſitivo, e negativo del terzo radicale eſprimono, che tanto il ſegno poſitivo, che il negativo del ſecondo radicale ſi debbano prendere nel ſenſo poſitivo, e negativo; e ſi hanno otto radici di $\pm\sqrt{\pm\sqrt{a}}$; delle quali due ſono reali $\pm\sqrt{+\sqrt{+\sqrt{a}}} = \pm\sqrt[8]{a}$ della formula $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a}$, e ſei ſono imaginarie; cioè due $\pm\sqrt{-\sqrt{+\sqrt{a}}}$ della formula $-\sqrt{\sqrt{a}} = -\sqrt[4]{a}$, e quattro $\pm\sqrt{\pm\sqrt[4]{-a}}$ della ſeconda forma $\pm\sqrt{-\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{-a}$.

La radice terza di $\pm\sqrt{a} = \sqrt[3]{\pm\sqrt{a}}$, delle quali una è poſitiva $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$, e l'altra ne-

negativa $\sqrt[3]{-\sqrt{a}}$; l' una, e l' altra reale:

La radice quarta di $\sqrt[3]{\pm\sqrt{a}} = \pm\sqrt[4]{\sqrt[3]{\pm\sqrt{a}}}$. Della radice seconda di a si hanno due radici terze, una positiva, e l' altra negativa, reali. Delle due radici terze si hanno due radici quarte immaginarie, una positiva, e l' altra negativa $\pm\sqrt[4]{-\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$; e e due reali, una positiva, negativa l' altra $\pm\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$.

Di $\pm\sqrt{-a}$ le radici pari, e dispari sono immaginarie. Così $\sqrt[3]{\pm\sqrt{-a}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{\pm\sqrt{-a}}}$ sono quantità immaginarie.

Delle radici dispari di un monomio positivo, o negativo, non avendosi, che una radice reale positiva, o negativa; le radici dispari delle radici dispari non sono, che una radice reale positiva, o negativa, Così $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}} = \sqrt[45]{a}$ non è che una radice reale positiva; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{-a}}} = -\sqrt[45]{a}$ è una radice negativa.

VIII. Se i termini d' una frazione espo-

nen-

nenziale si moltiplicano, o si dividono per la medesima quantità, la frazione esponenziale è la stessa. Perche moltiplicando, o dividendo il numeratore della frazione per una quantità, il grado della potenza è altrettanto maggiore, o minore; moltiplicando, o dividendo il denominatore per la medesima quantità, il grado della radice è altrettanto maggiore, o minore. Dunque se il numeratore, e il denominatore si moltiplicano, o si dividono per la medesima quantità, la frazione esponenziale è la stessa.

Così il quadrato di $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2m}{n}}$, il cubo di $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{3m}{n}}$ &c. La radice quadra di $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{2n}}$, la cuba di $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{3n}}$ &c. Dunque $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{2m}{2n}} = a^{\frac{3m}{3n}} = a^{\frac{pm}{pn}}$.

Da ciò si deduce, che due, e più frazioni esponenziali di diverso numeratore, e di diverso denominatore, si possono ridurre allo stesso numeratore, o denominatore col metodo delle comuni frazioni; e le frazioni esponenziali saranno della medesima potenza, o della medesima radice.

Così $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt{c}$, si riducono alla stessa radice, riducendo le due frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ alla medesima denominazione $\frac{4}{6}$, $\frac{3}{6}$; e $\sqrt[6]{b^4} = \sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[6]{c^3} = \sqrt{c}$. Si riducono alla medesima potenza, riducendo le due frazioni al medesimo numeratore $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$; e le radici sono $\sqrt[3]{b^2}$, $\sqrt[4]{c^2}$.

IX. Si sommano i monomj radicali; radicali, e razionali, scrivendo un monomio dopo l'altro coi proprj segni.

Così la somma di a, $-\sqrt[3]{mn}$, c, è

$a+c$

$a+c-\sqrt[3]{mn} = a+c+\sqrt[3]{-mn}$. La somma di $\sqrt[3]{b}$, $\pm\sqrt{cd}$, q^2, è $\sqrt[3]{b\pm\sqrt{cd}+q^2}$; la quale si divide in due somme $\sqrt[3]{b+\sqrt{cd}+q^2}$, $\sqrt[3]{b-\sqrt{cd}+q^2}$, per la doppia radice $\pm\sqrt{cd}$. La somma di $\pm\sqrt{-b}$, $\pm\sqrt{a}$, $-q^2$, è $\pm\sqrt{-b}\pm\sqrt{a}-q^2$; che si divide in quattro somme, $+\sqrt{-b}+\sqrt{a}-q^2$, $+\sqrt{-b}-\sqrt{a}-q^2$, $-\sqrt{-b}+\sqrt{a}-q^2$, $-\sqrt{-b}-\sqrt{d}-q^2$, pei segni positivi, e negativi delle due radici seconde.

Se nella somma vi sono termini simili; questi si riducono sommando, o sottraendo i coefficienti. Così la somma di $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $2\sqrt{a}$, $-3\sqrt[3]{b}$, è $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}+2\sqrt{a}-3\sqrt[3]{b} = 3\sqrt{a}-2\sqrt[3]{b}$.

X. Si sottraggono i monomj radicali, e razionali, da razionali, e radicali; mutando i segni ai monomj da sottrarsi, e riducendo i termini simili.

Così la differenza di $\sqrt[3]{a}$ da bc, è $bc -\sqrt[3]{a}$; la differenza di $-\sqrt[3]{a}$ da bc, è $bc + \sqrt[3]{a}$; di bc da $\sqrt[3]{a}$, è $\sqrt[3]{a}-bc$; di $-bc$ da $-\sqrt[3]{a}$, è $-\sqrt[3]{a}+bc$ &c.

La differenza di $\sqrt[3]{a}$ da $\sqrt[5]{bc}$, è $\sqrt[5]{bc}-\sqrt[3]{a}$; di $-\sqrt[3]{a}$ da $\sqrt[5]{bc}$, è $\sqrt[5]{bc}+\sqrt[3]{a}$; di $-\sqrt[3]{a}$ da $-\sqrt[5]{bc}$, è $-\sqrt[5]{bc}+\sqrt[3]{a}$ &c.

Le radici pari prese nel senso di positivo, e di negativo, si sottraggono, permutando l'uno, e l'altro senso. Così la differenza di $\pm\sqrt{a}$ da $\sqrt[3]{c}$, è $\sqrt[3]{c}\mp\sqrt{a}$; ed è lo stesso, che scrivere le due differenze $\sqrt[3]{c}-\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{c}+\sqrt{a}$.

La sottrazione delle quantità immaginarie si fa per mezzo del segno, che precede il radicale, il quale può essere positivo, e negativo. Perchè il segno negativo sotto il radicale è proprio delle quantità immagmaginarie. Così la differenza di $\sqrt{-a}$ da $\sqrt[5]{bc}$, è $\sqrt[5]{bc}-\sqrt{-a}$; la differenza di $-\sqrt{-a}$ da $\sqrt[5]{bc}$, è $\sqrt[5]{bc}+\sqrt{-a}$ &c.

XI. Si moltiplicano i monomj radicali; radicali, e razionali. Queste moltiplicazioni s'indicano, ponendo uno de' segni della moltiplicazione tra i fattori; come si è detto de' monomj razionali.

Così $\sqrt[3]{b}\,.\,\sqrt[4]{ac}$, $\sqrt[3]{b}\times\sqrt[4]{ac}$, indicano, che $\sqrt[3]{b}$ debba moltiplicarsi per $\sqrt[4]{ac}$; parimente $-ab\,.\,\sqrt[3]{nm}\,.\,\sqrt[5]{cd}$, indicano il prodotto di tre fattori.

1. Si moltiplica un monomio radicale per un razionale, scrivendo il razionale a sinistra del radicale; o pure elevando il razionale al grado della potenza del radicale, e scrivendolo sotto il radicale. Il prodotto sarà positivo, se i due fattori sono positivi, o negativi; se uno positivo, e l' altro negativo, il prodotto è negativo.

Così il prodotto di $b\,.\,\sqrt[3]{m}=b\sqrt[3]{m}=\sqrt[3]{mb^3}$.

 Il

Il prodotto di $-b.\sqrt[3]{m} = -b\sqrt[3]{m} = -\sqrt[3]{b^3 m}$ $= \sqrt[3]{-b^3 m}$.

2. Si moltiplica un monomio radicale per un radicale, riducendo i radicali allo ſteſſo grado, ſe ſono di grado diverſi, e moltiplicando i monomj ſotto il ſegno radicale.

Così il prodotto di $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab}$; di $\sqrt{a}.-\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$; di $-\sqrt{a}.\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$; di $-\sqrt{a}.-\sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Le radici pari eſſendo poſitive, e negative, nel prodotto ſi dee aver conto dell' uno, e dell' altro ſegno; e delle radici pari ſi hanno prodotti poſitivi, e negativi.

Il prodotto di $\sqrt[3]{ac} \times -\sqrt[3]{b} = -\sqrt[3]{abc}$. Il prodotto di $-\sqrt[3]{ac} \times -\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{abc}$ &c. Il prodotto di $\pm\sqrt{a}.\sqrt[3]{b} = \pm\sqrt[6]{a^3 b^2}$ &c.

3. Se i due monomj ſono immaginarj; o uno immaginario, e l' altro reale, ſi

dee

dee aver conto nella moltiplicazione del ſegno negativo dell' immaginario, e del ſegno poſitivo, e negativo del radicale,

Così il prodotto di $\sqrt{b} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-ab}$. Perche un monomio negativo per un poſitivo dà un prodotto negativo; e un immaginario per un reale dà un prodotto immaginario.

Il prodotto di $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = -a$. Perche la radice di $-a$, è $\sqrt{-a}$; dunque $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = -a$, quadrato di $\sqrt{-a}$; di $\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1} = -1$, quadrato di $\sqrt{-1}$.

Il prodotto di $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$. Perche $-\sqrt{-a}$ ſi riſolve in $-1 \,.\, \sqrt{-a}$, e $-1 \,.\, \sqrt{-a} \times -1 \,.\, \sqrt{-a} = -\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a}$. Ma $-1 \,.\, -1 = 1$, $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = -a$. Dunque $-\sqrt{-a} \,.\, -\sqrt{-a} = -1 \,.\, \sqrt{-a} \times -1 \,.\, \sqrt{-a} = 1 \,.\, -a = -a$.

Il prodotto di $-\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = a$. Perche $-\sqrt{-a}$ ſi riſolve in $-1 \,.\, \sqrt{-a}$, $\sqrt{-a}$ in $1 \,.\, \sqrt{-a}$; ma $-1 \,.\, 1 = -1$, $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$. Dunque $-\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-a} = -1 \,.\, \sqrt{-a} \times 1 \,.\, \sqrt{-a} = -1 \,.\, -a = a$.

Il prodotto di $\sqrt{-a} \,.\, \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. Perche $\sqrt{-a}$ ſi riſolve in $\sqrt{a \,.\, -1} = \sqrt{-1} \times \sqrt{a}$, e $\sqrt{-b}$ ſi riſolve in $\sqrt{b \,.\, -1} = \sqrt{-1} \,.\, \sqrt{b}$. Ma il prodotto di $\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1} = -1$, di

 $\sqrt{b}$.

$\sqrt{b}.\sqrt{a}=\sqrt{ab}$. Dunque il prodotto di $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=-\sqrt{ab}$.

Il prodotto di $-\sqrt{-a}.\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$. Perche $-\sqrt{-a}$ si risolve in $-1.\sqrt{-a}$, $\sqrt{-b}$ in $1.\sqrt{-b}$; ma $-1.1=-1$, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}$ $=-\sqrt{ab}$. Dunque il prodotto di $-\sqrt{-a}.$ $\sqrt{-b}=\sqrt{ab}$.

XII. Si dividono i monomj radicali pei razionali, i razionali pei radicali, e i radicali pei radicali. Le divisioni s'indicano in forma di frazione, o con due punti tra il dividendo, e il divisore. Così

$$\frac{a}{\sqrt{b}};\ a:\sqrt{b};\ \frac{-8\sqrt[3]{a^2c^2}}{3\sqrt{mn}};\ -8\sqrt[3]{a^2c^2}:$$

$3\sqrt{mn}$.

1. Si divide un monomio razionale per un radicale, se il divisore è fattore del dividendo. Il dividendo si trasforma in radicale del grado del divisore, e si divide. Il quoziente è positivo, o negativo, secondo le regole della divisione.

Così a^2b si divide per $\sqrt{a}$, trasforman-

do

do a^2b in $\sqrt{a^4b^2}$, e diviso $\sqrt{a^4b^2}$ per $\sqrt{a}$, il quoziente è $\sqrt{a^3b^2} = ab\sqrt{a}$. Si divide abc per $\sqrt[3]{b^2c}$, trasformando abc in $\sqrt[3]{a^3b^3c^3}$, e dividendo per $\sqrt[3]{b^2c}$, il quoziente è $\sqrt[3]{a^3bc^2} = a\sqrt[3]{bc^2}$.

Se il divisore non è fattore del dividendo, il quoziente è fratto, che si riduce a minima espressione, se il dividendo, e il divisore contengono simili fattori. Così il quoziente di $-8ac$ per $2\sqrt{ab}$

$$\frac{-8ac}{2\sqrt{ab}} = \frac{-4c\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Il quoziente della divisione di un radicale per un razionale è una frazione, che si riduce a minimi termini, se il dividendo, e il divisore contengono fattori simili. Così il quoziente di $8a\sqrt{c}$ per $2ab$, è $\frac{8a\sqrt{c}}{2ab} = \frac{4\sqrt{c}}{b}$.

3. Un radicale si divide per un radicale,

le , se il divisore è fattore del dividendo, riducendo i radicali allo stesso grado , se sono di grado diverso .

Così $\sqrt[3]{a^2}$ si divide per $\sqrt{a}$, riducendo i due radicali al medesimo grado, $\sqrt[6]{a^4}$, $\sqrt[6]{a^3}$; il quoziente è $\dfrac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a^3}} = \sqrt[6]{a}$.

Il quoziente di $\dfrac{\sqrt{-bc}}{\sqrt{-c}} = \sqrt{b}$. Perche $\sqrt{-bc} = \sqrt{-1} \, . \, \sqrt{bc}$, $\sqrt{-c} = \sqrt{-1} \, . \, \sqrt{c}$.

Ma $\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 1$, perche moltiplicandosi i due termini della frazione per $\sqrt{-1}$, si ha $\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \dfrac{-1}{-1} = 1$. Dunque $\dfrac{\sqrt{-1} \, . \, \sqrt{bc}}{\sqrt{-1} \, . \, \sqrt{c}} =$

$= \sqrt{b}$.

Il quoziente di $\dfrac{\sqrt{-bc}}{\sqrt{c}} = \sqrt{-b}$. Perchè $\dfrac{\sqrt{-bc}}{\sqrt{c}} = \dfrac{\sqrt{-1}.\sqrt{bc}}{\sqrt{c}} = \sqrt{-1}.\sqrt{b}$

$= \sqrt{-b}$.

Se il dividendo non è divisibile pe'l divisore, il quoziente è fratto. Così il quoziente di $\sqrt[3]{a^2 b}$ diviso per $\sqrt{mn}$, è $\dfrac{\sqrt[3]{a^2 b}}{\sqrt{mn}}$.

Le ragioni delle esposte operazioni sono da se manifeste; e derivano dalla nozione de' radicali, e dai principj della moltiplicazione, e della divisione.

XIII. Le dimensioni delle radici, seconda, terza, quarta &c.; sono la metà, il terzo, il quarto &c. delle dimensioni della seconda, terza, quarta &c. potenza. Dunque le dimensioni delle radici, seconda, terza, quarta &c. de' monomj; sono la metà, il terzo, il quarto &c. delle dimensioni de' monomj.

Co-

Così la dimensione di $\sqrt{ab}$ è una, perche ab è di due dimensioni. La dimensione di $\sqrt{abc}$, è $\frac{3}{2}$; perche abc è di tre dimensioni. La dimensione di $\sqrt[3]{ab}$, è $\frac{2}{3}$; perche ab è di due dimensioni. La dimensione di $\sqrt[4]{a}$, è $\frac{1}{4}$; perche a è di una dimensione &c.

XIV. Di due quantità uguali le loro potenze simili sono uguali, ed uguali le simili radici. Così se $a=b$, sarà $a^2=b^2$, $a^3=b^3$ &c.; $\sqrt{a}=\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$ &c. Dunque se dall' uno, e dall' altro membro di una equazione si estraggono radici simili; o l' uno, e l' altro membro si elevano a potenze simili, vi sarà equazione tra le potenze, come tra le radici.

CAP.

C A P. VII.

De' Polinomj.

I. I Polinomj ſono quantità compoſte di più termini diſtinti col ſegno +, e −. Queſti termini poſſono eſſere ſemplici lettere, prodotti di più lettere, frazioni, potenze, quantità irrazionali, ed immaginarie.

Così $a+b-c$ è un trinomio di ſemplici lettere; $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$, è un polinomio di cinque termini, e queſti ſono prodotti di lettere, e di potenze delle medeſime; $ab+cd-\sqrt[3]{fghkm^2}$, è un trinomio di due termini razionali, e del terzo irrazionale; $9x^5-\frac{3b^2c^5}{4ad}+\sqrt{\frac{a^5b^7}{dc}}$, è

un

un trinomio di un intero, di una frazione razionale, e di una frazione irrazionale; $a^2 b - m^3 + \sqrt{-d^5}$, è un trimonio di due interi termini, e di uno immaginario.

Se tra i termini di un polinomio vi sono termini fratti, irrazionali, o immaginarj; il polinomio è fratto, irrazionale, o immaginario. Perche un polinomio non è, che la somma de' termini.

II. I termini di un polinomio possono avere tutti il segno +, o il segno —; o parte de' termini il segno +, e parte il segno —: Questi due segni esprimono addizione, e sottrazione; e si considerano come positivi, e negativi.

Se tutti i termini di un polinomio hanno il segno +, il valore del polinomio è positivo; uguale alla somma de' termini. Se i termini di un polinomio hanno il segno —, il suo valore è negativo; uguale alla somma de' termini. Se altri hanno il segno +, altri —; l' intero valore del polinomio può esser positivo, negativo, e nullo; secondo che il valore della somma de' termini positivi, è maggiore, minore, o uguale al valore della somma de'

ter-

termini negativi ; come si è dichiarato nel Cap. I. N. VI.

Se i segni de' termini di un polinomio si mutano da positivi in negativi , e da negativi in positivi ; il valore del polinomio da positivo diviene negativo , e da negativo positivo. Se il valore del polinomio è nullo ; nell' uno , e nell' altro caso, è nullo . Perche mutandosi i segni de' termini, i valori di questi da positivi si mutano in negativi , e da negativi in positivi.

Così se il valore di $a+b-c$, è positivo ; di $c-a-b$, è negativo ; e se il primo è nullo , nullo è anche il secondo .

III. Un polinomio è un risultato di varie operazioni su le semplici lettere . Si dice un polinomio omogeneo, che ha tutti i termini della medesima dimensione .

Così $a^4 + a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; $ab+cd - \sqrt[3]{fghkm^2}$; $9x^5 - \frac{3b^2c^5}{4ad} + \sqrt{\frac{a^5b^7}{dc}}$; $a^2b - mn^2 + \sqrt{d^6}$, sono polinomj omogenei ; per-

perche in ciascun polinomio i termini sono della medesima dimensione. $ab^3 - d^5 + \frac{mf}{n} - \sqrt{dq}$, non è un polinomio omogeneo; perche le dimensioni de' termini sono varie.

In un medesimo calcolo su ciascuna lettera si fanno le medesime operazioni, e i termini di un polinomio risultano della medesima dimensione. Variano le dimensioni de' termini, se in vece di una lettera si adopera l'unità; o in vece di un prodotto, di una frazione, di un radicale, si sostituisce una quantità letterale di minor dimensione.

Così se invece di b si pone 1, il prodotto $ab = a$; se in vece di abm si sostituisce c, $abm = c$. In questi casi i termini di un polinomio sembrano di varie dimensioni, e in realtà sono della medesima; come si vedrà nel decorso di questo trattato.

Quante volte dunque in un calcolo non si sostituiscono termini di minor dimensione, nè si adopra l' unità in vece di qualche quantità letterale; se i termini risultano di varie dimensioni, è segno, esservi errore.

IV. I termini di un polinomio si possono no disporre coi proprj segni l'uno dopo l'altro in varie maniere, senza che il valore si alteri. Si dice ordinare un polinomio secondo una lettera, se i termini, che contengono questa lettera, si dispongono da sinistra a destra in modo, che il primo la contenga di esponente maggiore; che il secondo la contenga di maggior esponente dopo il primo; che il terzo la contenga di maggior esponente dopo il secondo &c; poi si pongono, uno dopo l'altro, gli altri termini del polinomio.

Così il trimonio $2ab + a^2 + b^2$ si ordina secondo la lettera a, disponendo i suoi termini in questo modo, $a^2 + 2ba + b^2$; si ordina secondo la lettera b, disponendolo in questo altro modo, $b^2 + 2ab + a^2$. Il polinomio $a^5 - b^5$, è ordinato secondo la lettera a; $-b^5 + a^5$, è ordinato secondo la lettera b.

Il polinomio $-15a^4 + 37dba^2 - 29fca^2 - 20b^2d^2 + 44bdef - 8c^2f^2$, è ordinato

se-

secondo la lettera a. Si ordina secondo la lettera b, $-20d^2b^2 + 37a^2db + 44fdeb - 15a^4 - 29a^2cf - 8c^2f^2$. Si ordina secondo la lettera f, $-8c^2f^2 + 44bdef - 29a^2cf - 15a^4 + 37a^2bd - 20b^2d^2$.

Due, e più termini di un polinomio, che contengono la medesima lettera, secondo la quale si è ordinato, col medesimo esponente; si considerano come un termine, e si dispongono in maniera, che formino due fattori. Così nell' esempio addotto i due termini $37bda^2 - 29cfa^2$, che contengono la lettera a col medesimo esponente, si considerano come un termine, e si dispongono in uno di questi modi, $\overline{37bd - 29cf}.a^2$, $\left(37bd - 29cf\right)a^2$, $\begin{matrix}37bd\\-29cf\end{matrix}.a^2$; quest'espressioni indicano, che l' uno, e l'altro termine dee moltiplicarsi per a^2. I due termini $37a^2db+44defb$ del polinomio ordinato per b, si considerano co-

me

me un termine, e si dispongono in uno de' detti modi &c.

In ciascun termine del polinomio ordinato secondo una lettera, le altre quantità si hanno per coefficiente di detta lettera. Così nel primo termine $-15a^4$ del polinomio ordinato per a, -15 è coefficiente di a^4; nel secondo termine, $37bd - 29fc$ è coefficiente di a^2.

Nel primo termine del polinomio ordinato per b, $-20d^2$ è coefficiente di b^2; nel secondo termine, $37a^2d + 44def$ è coefficiente di b &c.

CAP. VIII.

Dell' Addizione, e della Sottrazione de' Polinomj.

I. SI sommano i polinomj, riunendo tutti i loro termini, uno dopo l'altro, coi proprj segni. Se vi sono termini simili, questi si riducono sommando, e sottraendo, secondo l'uniformità, e difformità de' loro segni. La formula, che risulta, è la somma de' polinomj.

Per chiarezza si scrive un polinomio sotto l'altro in maniera, che i termini simili si corrispondano. Sotto i polinomj si tira una linea, e si sommano i termini, come ne' seguenti esempj.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sieno da ſommarſi i due polinomj, $a^3 - 2a^2 b + 2ab^2$; $-b^3 + 2ab^2 - a^2 b$. Il primo ſi dica A, il ſecondo B.

Si diſpongono i due polinomj in queſto modo.

$$
\begin{array}{ll}
A. & a^3 - 2a^2 b + 2ab^2 \\
B. & \quad\;\; - a^2 b + 2ab^2 - b^3 \\
\hline
\text{Som.} & a^3 - 3a^2 b + 4ab^2 - b^3
\end{array}
$$

Primieramente ſotto la linea a ſiniſtra ſi ſcrive a^3. Poi ſi ſommano i due termini ſimili, $-2a^2 b - a^2 b = -3a^2 b$. In terzo luogo ſi ſommano, $2ab^2 + 2ab^2 = 4ab^2$. Finalmente ſi ſcrive nella ſomma $-b^3$, e ſi ha la ſomma totale de' due polinomj.

ESEMPIO II.

Sieno tre polinomj da sommarsi, *A.* $-3a^2x+4ax^2-2x^3+a^3$; *B.* $x^3-2ax^2+2a^3-a^2x$; C. $2x^3+2ax^2-a^3+b^3$.

Si dispongono questi tre polinomj *A*, *B*, C nella descritta maniera.

$$
\begin{array}{ll}
A. & a^3 - 3a^2x + 4ax^2 - 2x^3 \\
B. & 2a^3 - a^2x - 2ax^2 + x^3 \\
C. & -a^3 \quad + 2ax^2 + 2x^3 + b^3 \\
\hline
\text{Som.} & 2a^3 - 4a^2x + 4ax^2 + x^3 + b^3
\end{array}
$$

La somma di $a^3 + 2a^3 - a^3 = 2a^3$. La somma di $-3a^2x - a^2x = -4a^2x$. La somma di $4ax^2 - 2ax^2 + 2ax^2 = 4ax^2$. La somma di $-2x^3 + x^3 + 2x^3 = x^3$. Finalmente te te b^3 non ha termini simili. La somma de' termini di queste somme parziali con b^3 è la somma totale de' tre polinomj.

ESEMPIO III.

Sieno da sommarsi i due disposti polinomj A, B.

$$
\begin{array}{lcccc}
A. & 6a^2 & -\ 5bc & +\ 3k\sqrt{de} \\
B. & -\ 7a^2 & +\ 3bc & -\ 2k\sqrt{de} \\
\hline
\text{Som.} & -\ a^2 & -\ 2bc & +\ k\sqrt{de}
\end{array}
$$

Rassomando

La dimostrazione di questa operazione è da se manifesta; perchè la somma è uguale a tutte le sue parti, che sono i termini de' polinomj. Se i termini sono tutti positivi, o negativi; questi partitamente si contengono nella somma totale. Se altri sono positivi, altri negativi; nella somma totale si contiene la totale differenza delle differenze parziali; perche nella somma totale riunendosi tutti i termini positivi, e negativi, vi si riuniscono tutte le differenze parziali.

II. La sottrazione di un polinomio da un polinomio s' indica, ponendo prima tra parentesi il polinomio, dal quale si sottrae; poi l'altro da sottrarsi; e tra l'uno, e l'altro il segno $-$.

Così la sottrazione di $b^2 - cm + ad$ da $a^2 + c^2 - n^2$, s' indica in questa forma

$$\left(a^2 + c^2 - n^2\right) - \left(b^2 - cm + ad\right).$$ Il segno $-$ indica, che il secondo dee sottrarsi dal primo. Se più fossero i polinomj da sottrarsi; ciascuno si pone tra parentesi uno dopo l' altro col segno $-$.

Si sottrae un polinomio da un altro, con permutare tutti i segni de' termini del polinomio da sottrarsi, da positivi in negativi, e da negativi in positivi; e sommando i termini dell' uno, e dell' altro polinomio nel modo esposto.

ESEM-

ESEMPIO I.

Sia da sottrarsi $b^2 - cm + ad$ da $a^2 + c^2 - n^2$.

$$\begin{array}{ll} A. & a^2 + c^2 - n^2 \\ B. & -b^2 + cm - ad \\ \hline \text{Diff.} & a^2 + c^2 - n^2 - b^2 + cm - ad \end{array}$$

ESEMPIO II.

Sia da sottrarsi $3a^5 - 2a^2b^3 + 4a^4b - 4a^4y$ da $b^4y - 3a^2b^3 + a^5 + 3a^4b$

$$\begin{array}{ll} A. & a^5 - 3a^2b^3 + 3a^4b + b^4y \\ B. & -3a^5 + 2a^2b^3 - 4a^4b + 4a^4y \\ \hline \text{Diff.} & -2a^5 - a^2b^3 - a^4b + b^4y + 4a^4y. \end{array}$$

III.

III La ragione di questa operazione è la medesima, che della sottrazione de'monomj. Si sottrae un monomio positivo, o negativo, da un monomio negativo, o positivo; permutando il segno al monomio da sottrarsi. Parimente si sottrae un polimonio da polimonio, con permutare tutti i segni de' termini del polinomio da sottrarsi. Perche se tutti i termini del polinomio da sottrarsi sono positivi, questi si sottraggono permutandoli in negativi. Se tutti i termini del polinomio da sottrarsi sono negativi, si sottraggono permutandoli in positivi. Se altri sono positivi, e altri negativi; permutando i positivi in negativi, e i negativi in positivi, non si sottrae, che la differenza de' termini del polinomio da sottrarsi; come ne' due addotti esempj.

Dunque il segno $-$, che si prepone al polinomio da sottrarsi per indicare la sottrazione, esprime, che i segni positivi de' termini debbano mutarsi in negativi, e i negativi in positivi. E' lo stesso, che preporre al polimonio -1, il quale dimostra, che i termini del polinomio debbano prendersi in senso contrario.

L'addizione de' polinomj parimente può indicarsi, ponendoli tra parentesi, e tra le

pa-

parentesi il segno +, o + 1; il quale dimostra, che i termini de' polinomj debbano congiungersi coi proprj segni. Così $(a + b - c) + (2a - b + d)$; il segno + tra l' una, e l' altra parentesi dimostra, che i termini del secondo polinomio debbano aggiungnersi coi proprj segni ai termini del primo.

Queste illazioni derivano dai premessi principj dell' addizione, e della sottrazione nel Cap. I; e della moltiplicazione nel Cap. II.

IV. L'addizione, e la sottrazione scambievolmente possono servire di prova, l'una all' altra. Se alla differenza d' una sottrazione si aggiugne il polinomio sottratto, la somma è il polinomio, dal quale si è sottratto. Se dalla somma di due, e più polinomj, se ne sottrae uno, la differenza è la somma degli altri polinomj. Nel primo esempio si è sottratto, $b^2 - cm + db$ da $a^2 + c^2 - n^2$. Se alla differenza $a^2 + c^2 - n^2 - b^2 + cm - ab$ si aggiugne $b^2 - cm + ab$, la somma è il polinomio $a^2 + c^2 - n^2$, dal quale si è sottratto. Se dalla somma de' due

due polinomj ſe ne ſottrae uno, per differenza ſi ha l'altro.

CAP. IX.

Della Moltiplicazione de' Polinomj.

I. I Due fattori poſſono eſſere un monomio, e un polinomio; o due polinomj. Se i due fattori ſono due polinomj, s'indica la moltiplicazione, ponendo un fattore dopo l'altro tra parenteſi, e tra le parenteſi uno de' due ſegni della moltiplicazione, o ſenza. In vece delle parenteſi ſi pongono le linee orizzontali ſopra l'uno, e l'altro polinomio. Se un fattore è monomio, il polinomio ſi pone tra parenteſi, e il monomio prima, o dopo della parenteſi.

Così la moltiplicazione di $a-b+c$ per $d+e-f$, s'indica in uno di queſti modi; $(a-b+c)(d+e-f)$, $(a-b+c) \times (d+e-f)$, $\overline{a-b+c} \times \overline{d+e-f}$. La moltiplicazione di $a-b+c$ per y, s'indi-

ca

ca $(a-b+c)\,y$, $\overline{a-b+c}\,.\,y$.

Se i fattori sono più di due, o tutti polinomj; o misti di polinomj, e monomj; i polinomj si pongono uno dopo l' altro nel modo esposto, e prima, o dopo il prodotto de' monomj. Così $(a-b+c) \times (d+e-f) \times (m+r+q) \times xyz$; o

o pure, $xyz \times \overline{a-b+c} \times \overline{d+e-f} \times \overline{m+r+q}$, indicano, che il primo debba moltiplicarsi pe'l secondo, il prodotto di questi due pe'l terzo &c. La moltiplicazione si riduce a moltiplicare un fattore per l' altro.

II. Si moltiplica un polinomio per un monomio, moltiplicando ciascun termine del polinomio pe'l monomio, secondo le regole del Cap. II. La somma di tutti i prodotti parziali è la formula dell' intero prodotto. Perche la somma de' prodotti parziali non è altro, che l' intero moltiplicando preso tante volte nel senso del moltiplicatore, quante unità contiene il moltiplicatore nello stesso senso.

ESEM-

ESEMPIO I.

Debba moltiplicarſi $a+b$ per c.

Si moltiplica primieramente a per c, il prodotto è ac. Poi ſi moltiplica b per c, il prodotto è bc. La ſomma di queſti due prodotti $ac+bc$, è il prodotto di $a+b$ per c. Perche $a+b$ ſi è preſo tante volte nel ſuo proprio ſenſo, quante ſono le unità di c. Se $a+b=m$, il prodotto di $a+b$ per c è uguale al prodotto di m per c, e ſarà $ac+bc=mc$.

Se doveſſe moltiplicarſi $-a-b=-m$ per c; i due prodotti $-ac-bc=-cm$ ſarebbero negativi. Se $-a-b=-m$ ſi moltiplicano per $-c$, i due prodotti $ac+bc=mc$ ſono poſitivi; perche $-a-b$ ſi prendono nel ſenſo di $-c$.

ESEMPIO II.

Debba moltiplicarſi $a-b$ per c.

Se $a>b$, la differenza $a-b$ è poſitiva; ſe $a<b$, la differenza è negativa. Il prodotto di $a-b$ per c non è altro, che il prodotto della differenza di $a-b$ per c; e ſi ha molti-

tiplicando a per c, $-b$ per c. La somma di questi due prodotti $ac-bc$ è il prodotto della differenza. Perche se $a>b$, la differenza di $ac-bc$ è il prodotto dell' eccesso di a sopra b per c; se $a<b$, la differenza di $ac-bc$ è il prodotto dell' eccesso di $-b$ sopra a per c.

Così se $a-b=m$, sarà $ac-bc=cm$. Se $a-b=-m$, sarà $ac-bc=-cm$.

Se dovesse moltiplicarsi $a-b$ per $-c$; il prodotto della differenza sarebbe $-ac+bc$. Se $a-b=m$, sarebbe $-ac+bc=-cm$. Se $a-b=-m$, sarebbe $-ac+bc=cm$.

ESEMPIO III.

Debba moltiplicarsi $a^2-5ab+7cd$ per $5ac$.

Il prodotto di questi due fattori è il prodotto della differenza de' due termini positivi, e del negativo, del primo fattore, pe'l secondo fattore $5ac$. Dunque la somma de' prodotti parziali è il prodotto della differenza.

Pro.

$$
\begin{array}{l}
a^2-5ab+7cd \\
5ac \\
\hline
\end{array}
$$

Pro. $5a^3c-25a^2bc+35ac^2d$

Il prodotto di a^2 per $5ac$, è $5a^3c$. Il prodotto di $-5ab$ per $5ac$, è $-25a^2bc$. Il prodotto di $7cd$ per $5ac$, è $35ac^2d$. La somma di questi tre prodotti è il prodotto della differenza di $a^2-5ab+7cd$ per $5ac$; il quale è positivo se $a^2+7cd > 5ab$, è negativo se $a^2+7cd < 5ab$.

Se dovesse moltiplicarsi, $a^2-5ab+7cd$ per $-5ac$; l' intero prodotto $-5ac+25a^3bc$ $-35ac^2d$ sarebbe positivo, se $a^2+7cd <$ $5ab$

$5ab$; negativo, se $a^2b+7cd>5ab$.

III. Si moltiplica un polinomio per un polinomio, moltiplicando i termini di un polinomio per ciascun termine dell' altro. La somma di questi prodotti parziali è il prodotto di un polinomio moltiplicato per l' altro.

ESEMPIO I.

Debba moltiplicarsi $a+b$ per $c+d$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ c+d \\ \hline \text{Pr. } ac+cb+da+db \end{array}$$

Il prodotto di $a+b$ per $c+d$ si ha, moltiplicando prima $a+b$ per c; poi $a+b$ per d. La somma di questi quattro prodotti, è il prodotto totale di $a+b$ per $c+d$.

ESEMPIO II.

Debba moltiplicarsi $ab+cd+\sqrt[3]{q}$ per $ef+mp+\sqrt{p}$.

$$
\begin{array}{l}
ab+cd+\sqrt[3]{q} \\
ef+mp+\sqrt{p}
\end{array}
$$

Pro. $abef+cdef+ef\sqrt[3]{q}+abmp+cdmp+mp\sqrt[3]{q}$
$+ab\sqrt{p}+cd\sqrt{p}+\sqrt[6]{p^3q^2}$

Si moltiplica primieramenre il fattore superiore per ef, poi per mp, finalmente per $\sqrt{p}$. La somma di tutti questi prodotti parziali è il prodotto d' un fattore per l' altro.

ESEM-

ESEMPIO III.

Debba moltiplicarsi $a+b$ per $c-d$.

$$\begin{array}{l} a+b \\ c-d \\ \hline \text{Pr. } ac+bc-ad-bd \end{array}$$

Il prodotto di $a+b$ per $c-d$, è il prodotto di $a+b$ per la differenza $c-d$. Questo prodotto si ha moltiplicando $a+b$ per c, e $a+b$ per $-d$. La somma di questi quattro prodotti è il prodotto di $a+b$ per la differenza $c-d$.

Se $c>d$, il prodotto della differenza è positivo; se $c<d$, il prodotto della differenza è negativo. Perche nel primo caso la differenza è positiva, e i due prodotti positivi sono maggiori de' due negativi; nel secondo la differenza è negativa, e i due prodotti positivi sono minori.

Se i due fattori sono $a+b$, $a-b$; i due prodotti positivi sono a^2+ab, e i due negativi $-ab-b^2$; poichè ab, $-ab$ per la contrarietà de' segni si distruggono, l' intero prodotto è $a^2 - b^2$.

Se i due fattori sono $a+a$, $a-a$, il prodotto è $a^2 - a^2 = 0$, perche $a-a=0$.

Da ciò s' inferisce 1., che il prodotto della somma di due numeri nella loro differenza è uguale alla differenza de' loro quadrati. 2., che la differenza di due numeri quadrati, è il prodotto della somma delle loro radici nella differenza delle medesime. 3., che la differenza di due numeri quadrati non può essere un numero primo.

ESEMPIO IV.

Debba moltiplicarsi $a-b$ per $c-d$

$$\begin{array}{l} a-b \\ c-d \\ \hline \end{array}$$

Pro· $ac-bc-ad+db$

Il prodotto di $a-b$ per $c-d$, è il prodotto di due differenze, il quale si ha moltiplicando $a-b$ per c, $a-b$ per $-d$. La somma di questi quattro prodotti è il prodotto delie due differenze.

Se $a>b$, $c>d$, il prodotto delle differenze è positivo. Perche $ac-ad=a(c-d)$, $db-$

bc

$bc = b.(d-c)$; la differenza $c-d$ è positiva, la differenza $d-c$ è negativa, ed uguale alla positiva ; ma $a>b$. Dunque $ac-da > db-bc$; e il prodotto delle due differenze positive $a-b$, $c-d$, è positiva.

Per la stessa ragione se $a<b$, $c<d$, le due differenze sono negative, e il prodotto è positivo. Se una delle due differenze è negativa, e l'altra positiva, il prodotto è negativo. Dunque il prodotto di $(a-b)$ $(a-b)$ è sempre positivo, o che $a>b$, o che $a<b$. Queste illazioni derivano dagli esposti principj nel Cap. II. della moltiplicazione delle quantità positive, e negative.

ESEMPIO V.

Debba moltiplicarsi $3a^2-5bd+cf$ per $4bd-5a^2-8cf$.

$$
\begin{array}{l}
3a^2 - 5bd + cf \\
4bd - 5a^2 - 8cf \\
\hline
12a^2bd - 20b^2d^2 + 4bdcf - 15a^4 - 5a^2cf - 8c^2f^2 \\
25a^2bd \qquad + 40cfbd \qquad - 24a^2cf \\
\hline
\text{Pr. } 37a^2bd - 20b^2d^2 + 44cfbd - 15a^4 - 29a^2cf - 8c^2f^2
\end{array}
$$

L' intero prodotto è positivo, o negativo, secondo che le differenze de' due fattori sono positive, e negative, o una positiva, e l' altra negativa. I termini positivi, e negativi de'due polinomj, si possono esprimere per due binomj; e quanto si è dimostrato del prodotto de' binomj, può applicarsi al prodotto de' polinomj.

IV.

IV. Dagli addotti eſempj è manifeſto, che il numero de' termini del prodotto è uguale al prodotto de' numeri de' termini de' due fattori. Se ne' prodotti parziali vi ſono termini ſimili, queſti ſi riducono nella ſomma a minor numero. Se tutti i termini ſono diverſi, diſtintamente i termini de' prodotti parziali ſi hanno nella ſomma.

CAP. X.

Della Diviſione de' Polinomj.

I. IL dividendo, e il diviſore poſſono eſſere due polinomj; un polinomio, e un monomio. La diviſione s' indica in forma di frazione; o pure ponendo prima il dividendo, e poi il diviſore tra parenteſi; o ſopra l' uno e l' altro una linea; e tra l' uno, e l' altro due punti. Se il dividendo, o il diviſore, è un monomio, è ſuperfluo porlo tra parenteſi.

Così la diviſione di a^2+b^2 per $c-d$, s' indica in queſte diverſe forme (a^2+b^2): $(c-d)$; $\overline{a^2+b^2}:\overline{c-d}$; $\dfrac{a^2+b^2}{c-d}$. S' indica la diviſione di a^2+b^2 per ay, e di ay per a^2+b^2; $(a^2+b^2):ay$; $\overline{a^2+b^2}:ay$; ay:

$\overline{\quad\quad}$

a^2+b^2 ; $ay:\left(a^2+b^2\right)$; $\dfrac{a^2+b^2}{ay}$; $\dfrac{ay}{a^2+b^2}$.

II. La divisione di un monomio per un polinomio appartiene alle frazioni. Un polinomio si divide per un monomio, se il divisore è fattore di ciascun termine del polinomio; se di alcuni termini è fattore, i quozienti parziali in parte sono interi, è in parte fratti. Se di niuno de' termini è fattore, il quoziente è fratto.

Così $2a^2b^2-2a^3d+4a^4-4a^2cd$, si divide per $-2a^2$; il quoziente è $-b^2+ad-2a^2+2cd$. Se il divisore è b^2, i quozienti parziali sarebbero $2a^2-\dfrac{2a^3d}{b^2}+\dfrac{4a^4}{b^2}-\dfrac{4a^2cd}{b^2}$. Se il divisore è mf, i quozienti ti ſarebbero $\frac{2a^2b^2}{mf} - \frac{2a^3d}{mf} + \frac{4a^4}{mf} -$

$$\frac{4a^2cd}{mf} = \frac{2a^2b^2 - 2a^3d + 4a^4 - 4a^2cd}{mf}.$$

III. Si divide un polinomio per un polinomio, ſe il diviſore è fattore del dividendo. La diviſione ſi eſeguiſce in queſto modo.

Si ordinano i termini del dividendo, e del diviſore per una lettera comune. Poi ſi divide il primo termine del dividendo pe'l primo termine del diviſore; e ſi nota il quoziente.

Il prodotto del diviſore pe'l quoziente ſi ſottrae dal dividendo. Il reſiduo, e il diviſore, ſi ordinano per una comune lettera, e ſi divide il primo termine del reſiduo pe'l primo termine del diviſore; il quoziente ſi nota dopo il primo.

Il prodotto del diviſore pe'l ſecondo quoziente, ſi ſottrae dal reſiduo. Il ſecondo reſiduo, e il diviſore, ſi ordinano per una comune lettera; e ſi procede alla diviſio-

ne

ne da reſiduo in reſiduo pe'l diviſore, finchè il reſiduo ſia nullo. La ſomma de' quozienti parziali è l' intero quoziente della diviſione.

Se il reſiduo non è diviſibile; il quoziente è parte intero, e parte fratto.

ESEMPIO I.

Debba dividerſi $a^2 - b^2$ per $b+a$.

$$
\begin{array}{rr|l}
a^2 & - b^2 & a + b \\
\cline{3-3}
 & & a - b \\
-a^2 - ab & & \\
\hline
-ab & - b^2 & \\
ab & + b^2 & \\
\hline
0 & 0 &
\end{array}
$$

Il dividendo, e il diviſore poſſono indifferentemente ordinarſi per a, e per b. Si ordinino per a,

Si

Si divide a^2 per a, il quoziente è a. Il prodotto di $a+b$ per a, si sottrae dal dividendo $a^2 - b^2$. Il residuo è $-ab - b^2$.

Si divide $-ab$ per a, il quoziente è $-b$. Il prodotto di $a+b$ per $-b$ si sottrae dal residuo $- ab - b^2$. Il residuo è nullo.

Dunque l' intero quoziente di $a^2 - b^2$ diviso per $a+b$, è $a - b$.

ESEM-

ESEMPIO II.

Debba dividersi $a^5 + b^5$ per $a+b$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^5 + b^5 & a+b \\
\hline
-a^5 - ba^4 & a^4 - ba^3 + b^2a^2 - b^3a + b^4 \\
\hline
-ba^4 + b^5 & \\
ba^4 + b^2a^3 & \\
\hline
b^2a^3 + b^5 & \\
-b^2a^3 - b^3a^2 & \\
\hline
-b^3a^2 + b^5 & \\
b^3a^2 + b^4a & \\
\text{\&c.} \quad \text{\&c.} &
\end{array}
$$

Si divide a^5 per a; il quoziente è a^4.

Il prodotto di $a+b$ per a^4, si sottrae da $a^5 + b^5$. Il residuo è $-ba^4 + b^5$.

Si divide $-ba^4$ per a, il quoziente è $-ba^3$. Il prodotto di $a+b$ pe'l quoziente $-ba^3$, si sottrae da $-ba^4 + b^5$.

Il residuo è $b^2a^3 + b^5$.

Si divide b^2a^3 per a. Il quoziente è a^2b^2. Il prodotto di $a+b$ per a^2b^2 si sottrae da $b^2a^3 + b^5$; il residuo è $-b^3a^2 + b^5$.

Si divide $-b^3a^2$ per a; il quoziente è $-ab^3$. Il prodotto di $a+b$ pe'l quoziente $-b^3a$ si sottrae da $-b^3a^2 + b^5$. Il residuo è $b^4a + b^5$.

Si

Si divide $b^4 a$ per a, il quoziente è b^4.

Il prodotto di $a+b$ per b^4 si sottrae da $b^4 a + b^5$. Il residuo è nullo. Dunque il quoziente di $a^5 + b^5$ diviso per $a+b$, è $a^4 - ba^3 + b^2 a^2 - b^3 a + b^4$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Debba dividersi $a^m - a^n$ per $a - 1$. Si suppone $m > n$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^m - a^n & a - 1 \\
\cline{2-2}
-a^m + a^{m-1} & a^{m-1} + a^{m-2} + \\
\cline{1-1}
a^{m-1} - a^n & a^{m-3} + \text{\&c.} \\
-a^{m-1} + a^{m-2} & \\
\cline{1-1}
a^{m-2} - a^n & \\
-a^{m-2} + a^{m-3} & \\
\cline{1-1}
a^{m-3} - a^n & \\
\text{\&c. \&c.} &
\end{array}
$$

Si divide a^m per a; il quoziente è a^{m-1}. Il prodotto di $a-1$ per a^{m-1} si sottrae dal dividendo. Il residuo è $a^{m-1}-a^n$.

Si divide a^{m-1} per a; il quoziente è a^{m-2}. Il prodotto di $a-1$ per a^{m-2} si sottrae da $a^{m-1}-a^n$. Il residuo $a^{m-2}-a^n$.

Si divide a^{m-2} per a; il quoziente è a^{m-3}. Il prodotto di $a-1$ per a^{m-3} si sottrae da $a^{m-2}-a^n$. Il residuo è $a^{m-3}-a^n$.

La divisione procede fino ad $m-p=n$, e il numero de'termini del quoziente è $m-n$.

Sia $m=7$, $n=5$, il quoziente è a^6+a^5.

Sia $n=4$, il quoziente è $a^6+a^5+a^4$. Sia $n=3$, il quoziente è $a^6+a^5+a^4+a^3$. &c.

ESEMPIO IV.

Debba dividersi a^2+b^2 per $a+\sqrt{-b^2}$.

$$
\begin{array}{rl}
 & \underline{a+b\sqrt{-1}} \\
a^2+b^2 & a-b\sqrt{-1} \\
\underline{-a^2-ab\sqrt{-1}\qquad} & \\
-ab\sqrt{-1}+b^2 & \\
\underline{ab\sqrt{-1}-b^2\quad} & \\
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Si

Si divide a^2 per a; il quoziente è a. Il prodotto del divisore pe'l quoziente si sottrae dal dividendo. Il residuo è

$$-ab\sqrt{-1}+b^2.$$

Si divide $-ab\sqrt{-1}$ per a; il quoziente è $-b\sqrt{-1}$. Il prodotto del divisore per $-b\sqrt{-1}$ si sottrae dal residuo. Il secondo residuo è nullo. Dunque il quoziente è $a-b\sqrt{-1}$.

ESEMPIO V.

Debba dividersi $19a^2b^2+13ba^3-20a^4$

$-10a^3c-6cba^2+2ab^2c-5ab^3$ per $-3ab$

$-5a^2+b^2$.

Si ordinino il dividendo, e il divisore per la lettera a; dimodochè i termini del dividendo, che hanno la lettera a collo stesso esponente, si sottopongano l'uno all' altro.

$$\left\{\begin{array}{l} -20a^4 + 13ba^3 + 19b^2a^2 - 5b^3a \\ \quad -10ca^3 - 6cba^2 + 2cb^2a \end{array}\right.$$

$$20a^4 + 12ba^3 - 4b^2a^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} 25ba^3 + 15b^2a^2 - 5b^3a \\ -10ca^3 - 6cba^2 + 2cb^2a \end{array}\right.$$

$$-25ba^3 - 15b^2a^2 + 5b^3a$$

$$-10ca^3 - 6cba^2 + 2cb^2a$$

$$10ca^3 + 6cba^2 - 2cb^2a$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

$$-5a^2 - 3ba + b^2$$

$$4a^2 - 5ba + 2ca$$

Si divide il primo termine $-20a^4$ del divividendo pe'l primo termine $-5a^2$ del divisore; il quoziente è $4a^2$. Il prodotto del divisore pe'l quoziente si sottrae dal dividendo, e si ha il primo residuo.

Si divide il primo termine $25ba^3$ del residuo per $-5a^2$ primo termine del divisore; il quoziente è $-5ab$. Il prodotto del divisore pe'l quoziente $-5ab$ si sottrae dal residuo, e si ha un secondo residuo.

Si divide il primo termine $-10ca^3$ del secondo residuo pe'l primo termine $-5a^2$ del divisore; il quoziente è $2ca$. Il prodotto del divisore pe'l quoziente $2ca$ si sottrae dal secondo residuo; il terzo residuo è nullo. Dunque il quoziente della divisione è $4a^2 - 5ab + 2ca$.

ESEMPIO VI.

Debba dividersi $a^2 + 2ab + b^2 + c^2 - n^2$ per $a+b$.

$$
\begin{array}{l|l}
a^2 + 2ab + b^2 + c^2 - n^2 & a+b \\
\cline{2-2}
-a^2 - ab & a+b\,\dfrac{c^2 - n^2}{a+b} \\
\hline
ab + b^2 + c^2 - n^2 & \\
-ab - b^2 & \\
\hline
c^2 - n^2 &
\end{array}
$$

Si divide a^2 per a; il quoziente è a. Il prodotto di $a+b$ per a si sottrae dal dividendo, e si ha il primo residuo $ab+b^2$ $+c^2 - n^2$.

Si

Si divide il primo termine ab del reſiduo per a; il quoziente è b. Il prodotto del diviſore pe'l quoziente b ſi ſottrae dal reſiduo. Il ſecondo reſiduo è $c^2 - n^2$, il quale non è diviſibile per $a+b$. Dunque il quoziente della diviſione è in parte intero, e in parte fratto.

IV. La ragione dell' eſpoſta diviſione ſi è, che queſta è inverſa della moltiplicazione. Il dividendo è un prodotto del diviſore pe'l quoziente, e contiene tanti prodotti parziali, quanti ſono i termini del quoziente.

Se il diviſore è un monomio, ſi rinviene il quoziente, col dividere tutti i termini del dividendo pe'l diviſore.

Se il diviſore è un polinomio, e il quoziente è un monomio, queſto ſi rinviene col dividere il primo termine del dividendo pe'l primo termine del diviſore; perche il prodotto del diviſore per detto quoziente è il dividendo; il reſiduo della ſottrazione è nullo.

Se il quoziente è un binomio; il reſiduo della ſottrazione è il prodotto del diviſore pe'l ſecondo termine del quoziente, il quale ſi rinviene col dividere il primo termine del reſiduo pe'l primo termine del divisore. Il prodotto del divisore pe'l secondo termine del quoziente non è, che il residuo.

Se il quoziente ha più termini, questi successivamente si rinvengono; perche i successivi residui sono prodotti del divisore pei restanti termini del quoziente.

Se nel dividendo vi sono termini ridotti de' prodotti parziali; ne' residui delle parziali divisioni si contengono nuovi termini, i quali successivamente si elidono; e non sono, che prodotti del divisore pei quozienti parziali; come si è osservato negli addotti esempj.

V. Il dividendo, o parte del dividendo, se non è divisibile pe'l divisore; il residuo del quoziente, o il quoziente intero si ha in frazione. Il numeratore, e il denominatore possono avere comuni fattori, e la frazione si riduce a minor espressione, col dividere l'uno, e l'altro pe'l massimo comune fattore, che può essere un monomio, o un polinomio.

Un monomio moltiplica distintamente tutti i termini del numeratore, e del denominatore; dividendosi l'uno, e l'altro pe'l monomio, la frazione si riduce a mi-

nor

nor espressione. Così $\frac{3x^2}{3a^2x^2+3b^2x^2}=\frac{1}{a^2+b^2}$, dividendosi i termini della frazione per $3x^2$;

$\frac{4a^2x^3+3a^3b^2x}{a^2x-a^2bx}=\frac{4x^2+3ab^2}{1-b}$, dividendosi i termini per a^2x.

Un fattore polinomio si contiene nella somma de' prodotti parziali del numeratore, e del denominatore; e si rinviene, come nel seguente Cap.

CAP.

CAP. XI.

Del massimo comune Divisore di due Polinomj.

I. SE due polinomj contengono un massimo comune divisore, questo si rinviene con un simil metodo esposto nel Cap. VII. dell' Aritmetica.

Si ordinano i due polinomj per una lettera comune, e si divide il più grande per l'altro. Se la divisione è senza residuo, il polinomio minore è il massimo divisore di se stesso, e dell' altro.

Se vi è residuo, si divide il polinomio minore pe'l residuo. Se lo divide esattamente, il residuo è il massimo divisore dei due polinomj.

Se nella divisione vi è residuo, si divide il primo residuo pe'l secondo. Se la divisione è senza residuo, il secondo residuo è il massimo divisore.

Se vi è residuo, si divide il secondo residuo pe'l terzo &c. Si procede da residuo in residuo, finchè si perviene ad una esatta divisione. Se niuno de' residui divide

l'all'altro, i due polinomj non hanno comune divisore, che l' unità.

II. Di due quantità se una si moltiplica, o si divide per una quantità, che non ha comune divisore coll' altra; il comune divisore delle due quantità rimane lo stesso.

Così se uno de' due termini di $\frac{ab}{ac}$ si moltiplica per m, il comune divisore di $\frac{abm}{ac}$, di $\frac{ab}{acm}$, è lo stesso a divisore comune di $\frac{ab}{ac}$. Ma se il numeratore di $\frac{ab}{ac}$ si moltiplica per mc, o il denominatore per mb; il comune divisore di $\frac{abmc}{ac}$, è ac; di $\frac{ab}{acmb}$ è ab, l' uno, e l'altro diverso dal divisore comune di $\frac{ab}{ac}$.

Da ciò si deduce, che se uno de' due polinomj si moltiplica, o si divide per una quantità, che non ha comune divisore coll' altro

altro, il comune divisore de' polinomj rimane lo stesso. Con questo principio nelle divisioni si evitano i quozienti fratti, e con minor difficoltà si rinviene il comune divisore de' polinomj; come ne' seguenti esempj.

ESEMPIO I.

Si domanda il massimo comune divisore di A. $a^2-3ab+2b^2$, e di B. $a^2-ab-2b^2$.

$$\begin{array}{lll}
\text{A. } a^2-3ab+2b^2 & \text{B. } a^2-ab-2b^2 & \text{quoz.} \\
\quad -a^2+ab+2b^2 & \quad -a^2+2ab & \quad 1 \\
\hline
 & & \quad -a \\
\text{C. } -2ab+4b^2 & \text{C}'.\ ab-2b^2 & \quad -1 \\
\quad -a \quad +2b & \quad a-2b & \\
 & \quad -a+2b & \\
\hline
 & \quad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

Si divide A per B. Il quoziente è 1. Il residuo C$-2ab+4b^2$ ha per fattore $2b$, e $2b$ non ha comune divisore con B. Dunque

que

que ſi divide C per $2b$, e ſi ha $-a+2b$ per reſiduo.

Si divide B per $-a+2b$. Il quoziente è $-a$, e il reſiduo C' $ab-2b^2$ ha per fattore b, e b non divide $-a+2b$. Si divide dunque C' per b, e ſi ha $a-2b$ per reſiduo.

Si divide C $-a+2b$ per C' $a-2b$. Il quoziente è -1, e il reſiduo nullo. Dunque il comune diviſore di A, B, è $+a-2b$.

Se non ſi divideſſero il primo, e il ſecondo reſiduo, pei loro fattori, la diviſione darebbe quozienti fratti, e l' operazione ſarebbe meno ſpedita.

ESEMPIO II.

Si domanda il maſſimo diviſore di A. x^4-z^4, e di B. $x^5-x^3z^2$.

I termini di B hanno per fattore x^3; ed x^3 non ha comune diviſore con A. Si divide dunque B per x^3. Il quoziente è x^2-z^2, del quale con A ſi cerca il comune diviſore.

A. $x^4 - z^4$	B. $x^2 - z^2$	quoz.
$-x^4 + x^2 z^2$	$-x^2 + z^2$	x^2
	$0 \quad 0$	1
C. $x^2 z^2 - z^4$		
$x^2 - z^2$		

Si divide A per B. Il quoziente è x^2.

Il reſiduo C $x^2 z^2 - z^4$ ha per ſattore z^2, e z^2 non ha comune fattore con B. Si divide dunque il reſiduo C per z^2, il e ſarà $x^2 - z^2$.

Si divide B per $x^2 - z^2$. Il quoziente è 1, ed il reſiduo nullo. Dunque il comune diviſore di A, B, è $x^2 - z^2$.

ESEM-

ESEMPIO III.

Si domanda il maſſimo comune diviſore di A. $2mp^2q^2 - 4mp^4 - mp^3q + 3mpq^3$; B. $qnp^3 + 3np^2q^2 - 2npq^3 - 2nq^4$.

I termini di A. hanno *pm* per comune diviſore, e i termini di B. *qn* ; nè il diviſore dell' una e dell' altra hanno comune diviſore . Si dividono dunque A , B pei loro diviſori, e ſi ordinino per la lettera *p*.

A.

A. $-4p^3 - p^2q + 2pq^2 + 3q^3$;	Quoz. -4
$4p^3 + 12p^2q - 8pq^2 - 8q^3$	p
	11
	$-39p$
	-1

B. $p^3 + 3p^2q - 2pq^2 - 2q^3$

$11p^3 + 33p^2q - 22pq^2 - 22pq^3$

$-11p^3 + 6p^2q + 5pq^2$

C. $11p^2q - 6pq^2 - 5q^3$

$11p^2 - 6pq - 5q^2$

C'. $39p^2q - 17pq^2 - 22q^3$

$39p^2 - 17pq - 22q^2$

C.

$$
\begin{array}{ll}
C. & 429p^2 - 234pq - 195q^2 \\
 & -429p^2 + 187pq + 242q^2 \\
\hline
C''. & \dfrac{-47pq + 47q^2}{-p + q} \\
 & \\
C'. & 39p^2 - 17pq - 22q^2 \\
 & -39p^2 + 39pq \\
\hline
C''' & \dfrac{22pq - 22q^2}{p - q}
\end{array}
$$

Si divida A per B; il quoziente è -4, e il residuo C. I termini di C hanno per fattore q, e q non divide B. Si divida C per q.

Si divida B per C ridotto. Il primo termine p^3 di B non è divisibile per $11p^2$ primo termine di C. Si moltiplichino i termini di B per 11, coefficiente di p^2; perche 11 non ha comune divisore coi termini di C ridotto. Il prodotto di B per

11, si divida per C. Il quoziente è p. Il residuo C' ha per fattore q, e q non divide il primo residuo C. Si dividano i termini di C' per q.

Si divida il primo residuo C ridotto pe'l secondo residuo ridotto C'. Il primo termine di C non è divisibile pe'l primo termine di C', se i termini di C non si moltiplicano per 39, coefficiente del primo termine di C', che non ha comune divisore coi termini di C'. Il prodotto di C per 39 si divida pe'l secondo residuo C'; il quoziente è 11. Il residuo C'' ha per fattore $47q$, che non ha comune divisore col secondo residuo C'. Diviso il terzo residuo C'' per $47q$, si ha $-p+q$.

Si divida il secondo residuo C' ridotto pe'l terzo ridotto C''. Il quoziente è $-39p$. Il residuo C''' ha per fattore $22q$, che non ha comune fattore col terzo residuo $-p+q$. Diviso il quarto residuo C''' per $22q$, si ha per residuo, $p-q$.

Si divida il terzo residuo $-p+q$ pe'l quarto $p-q$, il quoziente è -1, ed il residuo nullo. Dunque il comune divisore di A, B, è $p-q$.

ESEM-

ESEMPIO IV.

Si domanda il massimo comune divisore di A. $ab+2a^2-3b^2-4bc-ac-c^2$; B. $9ac+2a^2-5ab+4c^2+8bc-12b^2$.

Si ordinino A, B per a.

$$
\begin{array}{ll}
\text{A.} & 2a^2+\overline{b-c}\,.\,a-3b^2-4bc-c^2\,; \\
 & -2a^2+\overline{5b-9c}\,.\,a+12b^2-8bc \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad -4c^2 \\
\hline
\text{B.} & 2a^2+\overline{9c-5b}\,.\,a-12b^2+8bc+4c^2 \\
\hline
\end{array}
$$

quoz.

$$
\text{C.}\ \overline{6b-10c}\,.\,a+9b^2-12bc-5c^2 \qquad 1 \qquad 2a+3b+c
$$

Si divida A per B. Il quoziente è 1, e il residuo C.

Non si può dividere B per C, se non si moltiplica B per $3b-5c$, metà del coefficiente del primo termine del residuo C. Dalla semplice considerazione de' termini di C non è manifesto, se $3b-5c$ sia divisore di C. Si divida dunque C per $3b-5c$. La divisione è esatta, e il quoziente è $2a+3b+c$.

Si divida B pe'l quoziente $2a+3b+c$. La divisione è anche esatta. Dunque $2a+3b+c$ è divisore di B, C, e di A.

ESEMPIO V.

Si domanda il massimo comune divisore di A. $c^4+d^2a^2-c^2a^2-d^2c^2$; B. $c^3-2cda-c^2a+2da^2$.

Si ordinino A, B per a. quoz.

A. $(d^2-c^2)a^2+c^4-d^2c^2$; $\qquad d^2-c^2$

$(2d^3-2c^2d)a^2+2c^4d-2c^2d^3$

$(-2d^3+2c^2d)a^2+(2cd^3+d^2c^2-c^4-2c^3d)a$

$-c^3d^2-c^5$

B. $2da^2-(2cd+c^2)a+c^3$

C. $(2cd^3+d^2c^2-c^4-2c^3d)a-c^3d^2+c^5+2c^4d-2c^2d^3$.

La

La divisione di A per B non può effettuirsi, se i termini di A non si moltiplicano per $2d$. Il quoziente è $d^2 - c^2$, ed il residuo C.

La divisione di B per C non può farsi, se non si moltiplicano i termini di B pe'l coefficiente del primo termine di C. Ma i restanti termini di C non differiscono da detto coefficiente, che pe'l fattore $-c$. Dunque il residuo C ha per fattore $a-c$. Ma $a-c$ divide anche B. Dunque il comune divisore di A, B, è $a-c$.

III. Un secondo metodo di rinvenire il massimo divisore di due polinomj, consiste nel risolvere uno de' due polinomj, o tutti due ne' loro fattori. Il fattore maggiore di un polinomio, che divide l'altro, è il massimo comune divisore. Che se non hanno fattore comune, i due polinomj non hanno massimo divisore. Di questo metodo non vi è altra regola, che l'industria di risolvere i polinomj ne' fattori, la quale si acquista coll' esercizio del calcolo.

ESEMPIO I.

I due polinomj dell' esempio V. A. $c^4 + d^2a^2 - c^2a^2 - d^2c^2$; B $c^3 - 2cda - c^2a + 2da^2$, si ordinino per d in questa forma $(a^2 - c^2)\,d^2 + c^4 - a^2c^2$, $(2a^2 - 2ca)\,d + c^3 - c^2a$. Dalla disposizione de' termini di questi due polinomj è manifesto, che $a^2 - c^2$ è un divisore del primo, e $a - c$, o $c - a$ è divisore del secondo; ma $a^2 - c^2$ si divide per $a - c$, e per $c - a$. Dunque $c - a$ è divisore de' due polinomj. Si divida il primo per $c - a$, il quoziente è $(c^2 - d^2).(c + a)$. Si divida il secondo per $c - a$. il quoziente è $c^2 - 2da$. Questi due quozienti non hanno comune divisore. Dunque $c - a$ è il massimo comune divisore de' due polinomj.

ESEMPIO II.

Sieno i due polinomj A. $ab^2 - b^2 f + x^2 a - x^2 f$, B. $ab - bf + ca - cf$. Ne' termini del secondo non vi è x, che si ritrova in due termini del primo. Dunque x non è parte del comune divisore. Si ordinino i due polinomj per la lettera b, e si risolvano in fattori $(a-f)\,b^2 + (a-f)\,x^2$; $(a-f)\,b + (a-f)\,c$. Dalla semplice disposizione de' termini è chiaro, che il massimo comune divisore è $a-f$.

ESEMPIO III.

Si domanda il massimo comune divisore di A. $6a^5+15a^4b-4a^3c^2-10a^2bc^2$; e di B. $9a^3b-27a^2bc-6abc^2+18bc^3$.

Il primo polinomio si divide per a^2, e il secondo per $3b$. Diviso l' uno, e l' altro, i due polinomj sono $6a^3+15a^2b-4ac^2-10bc^2$; $3a^3-9a^2c-2ac^2+6c^3$. Del primo due soli termini contengono b, e niun termine del secondo; dunque b non è parte del massimo comune divisore, il quale si dee contenere tra a, c. Si divida il primo polinomio in due parti $6a^3-4ac^2$, $15a^2b-10bc^2$. L' una, e l' altra di queste due parti si divide per $3a^2-2c^2$; il quale divisore divide anche il secondo polinomio. Dunque è il massimo comune divisore.

CAP.

C A P. XII.

Delle Frazioni de' Polinomj.

I. LE frazioni de' polinomj si riducono al medesimo numeratore, o denominatore; si sottraggono, si sommano, si moltiplicano, e si dividono, colle medesime regole delle frazioni de' monomj, sostituendo alle operazioni de' monomj le corrispondenti esposte operazioni de' polinomj.

II. Se tutti i termini del numeratore, e del denominatore d' una frazione sono della medesima dimensione; la dimensione della frazione si ha, sottraendo la dimensione di un termine del denominatore dalla dimensione di un termine del numeratore.

Se i termini del numeratore, e del denominatore non hanno esplicitamente la medesima dimensione; la dimensione della frazione si ha, sottraendo la dimensione di un termine di maggior dimensione del denominatore dalla dimensione di un termine di maggior dimensione del numeratore.

La differenza della dimensione del denominatore dalla dimensione del numeratore

può

può esser positiva, negativa, e nulla; come si è osservato nelle dimensioni delle frazioni de' monomj.

III. Se i termini del numeratore, e del denominatore della frazione, si mutano da positivi in negativi, e da negativi in positivi; il valore della frazione non si altera. Perche i termini del numeratore, e del denominatore, o sono tutti positivi, o tutti negativi; o altri positivi, e altri negativi.

Se tutti sono positivi, o negativi, il valore della frazione è positivo; mutandosi i termini da positivi in negativi, e da negativi in positivi, il valore della frazione è positivo.

Se altri sono positivi, altri negativi, la frazione è positiva, o negativa, secondo che i valori del numeratore, e del denominatore sono positivi, o negativi; o uno positivo, e l'altro negativo: mutandosi i termini da positivi in negativi, da negativi in positivi; i valori del numeratore, e del denominatore, da positivi si fanno negativi, da negativi positivi, e la frazione rimane negativa, o positiva. Così

$$\frac{a+b}{c-d} = \frac{-a-b}{-c+d}; \quad \frac{a-b}{c-d} = \frac{b-a}{d-c}.$$

IV.

IV. Il valore di una frazione può essere positivo, negativo, nullo, infinito, razionale, irrazionale, e immaginario. Nella frazione $\frac{a-b}{c-d}$, se $a>b$, $c>d$; se $a<b$, $c<d$; il valore è positivo. Se $a<b$, o $c<d$, il valore è negativo. Se $a=b$, il valore è nullo. Se $c=d$, il valore è infinito; e dall' infinito torna positivo, o negativo, siccome c si fà maggiore, o minore di d.

La frazione è razionale, se tutti i termini del numeratore, e del denominatore sono razionali. E' irrazionale, o immaginaria, se il numeratore, o il denominatore, o uno de' termini del numeratore, o de denominatore è irrazionale, o immaginario.

V. Una frazione composta di più termini nel numeratore, e nel denominatore, può considerarsi sotto una di queste due formule, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a-b}$; designando il monomio c i termini del numeratore, e i binomj $a+b$, $a-c$ i termini positivi, e negativi del denominatore.

Co-

Così di $\frac{e+d-f}{g+h-n}$ si pone $c=e+d-f$, $a=g+h$, $b=n$; o pure $a=g$, $b=h-n$; di $\frac{e+d+f}{g+b+n}$, si pone $e+d+f=c$, $g+b=a$, $n=b$.

Il denominatore d' una frazione di più termini può sempre dividersi in due parti positive, o una positiva, e l' altra negativa. Il numeratore può farsi sempre positivo da negativo, mutando i segni de' termini del numeratore, e del denominatore.

VI. Le frazioni $\frac{c}{a-b}$, $\frac{c}{a+b}$ per l'esposte regole della divisione possono trasformarsi in serie infinite.

Si divide c pe'l primo termine del divisore $a-b$, o $a+b$. Il quoziente fratto si moltiplica pe'l divisore, e il prodotto si sottrae dal dividendo.

Si divide il residuo pe'l primo termine del divisore, e si ha un secondo quoziente fratto. Si moltiplica questo secondo quoziente pe'l divisore, e il prodotto si sottrae dal residuo.

Si

Si divide il secondo residuo, e si continua la divisione da residuo in residuo pe'l divisore; e il quoziente si ha in una serie infinita di termini.

Ne' termini del quoziente se in vece di *c*, di *a*, *b*, e delle loro potenze, si sostistituiscono i corrispondenti valori de' termini della frazione; si trasforma la frazione in una serie di frazioni.

VII. Si divida c per $a+b$

Divid. Divis.

$$a+b$$

$$c$$

$$-c-\frac{cb}{a} \qquad \text{quo.}\ \frac{c}{a}-\frac{cb}{a^2}+\frac{cb^2}{a^3}-\ \&c.$$

$$\text{1. ref.}\ \frac{-cb}{a}$$

$$\frac{cb}{a}+\frac{cb^2}{a^2}$$

$$\text{2. ref.}\ \frac{cb^2}{a^2}$$

$$-\frac{cb^2}{a^2}-\frac{cb^3}{a^3}$$

&c.

Di-

Diviso c per $a+b$, il quoziente è $\frac{c}{a}$. Il prodotto di $\frac{c}{a}$ per $a+b$, è $c+\frac{cb}{a}$; che sottratto da c, il residuo è $\frac{-cb}{a}$.

Diviso $\frac{-cb}{a}$ per $a+b$, il quoziente è $-\frac{cb}{a^2}$. Il prodotto di $-\frac{cb}{a^2}$ per $a+b$, è $\frac{-cb}{a}-\frac{cb^2}{a^2}$; che sottratto da $-\frac{cb}{a}$, il residuo è $\frac{cb^2}{a^2}$.

Di-

Diviso $\frac{cb^2}{a^2}$ per $a+b$, il quoziente è $\frac{cb^2}{a^3}$.

Il prodotto di $\frac{cb^2}{a^3}$ per $a+b$, è $\frac{cb^2}{a^2} + \frac{cb^3}{a^3}$;

che sottratto da $\frac{cb^2}{a^2}$, il residuo è

$-\frac{cb^3}{a^3}$ &c.

I termini del quoziente sono alternativamente positivi, e negativi. Il primo tormine è $\frac{c}{a}$, e tutti gli altri sono successivi prodotti del termine antecedente

per

per $\frac{b}{a}$. Così il secondo termine $\frac{cb}{a^2}$ è prodotto di $\frac{c}{a}$ per $\frac{b}{a}$; il terzo $\frac{cb^2}{a^3}$ è prodotto di $\frac{cb}{a^2}$ per $\frac{b}{a}$; il quarto è prodotto di $\frac{cb^2}{a^3}$ per $\frac{b}{a}$ &c.

La somma di un qualunque numero de' termini del quoziente, e del suo residuo diviso per $a+b$, non è altro, che la frazione medesima. Così se al primo termine della serie $\frac{c}{a}$ si aggiugne il suo residuo $\frac{-cb}{a}$

diviſo per $a+b$, ſi ha $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a.(a+b)} = \frac{c}{a+b}$.

Se ai due primi termini $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2}$ della ſerie ſi aggiugne il ſuo reſiduo $\frac{cb^2}{a^2}$ diviſo per $a+b$, ſi ha $\frac{c}{a} - \frac{cb}{a^2} + \frac{cb^2}{a^2.(a+b)} = \frac{c}{a+b}$ &c.

Dunque il valore della ſerie infinita del quoziente è uguale al valore della frazione riſoluta in ſerie.

VIII. Il primo termine $\frac{c}{a}$ della ſerie del

quo-

quoziente è maggiore di $\frac{c}{a+b}$; perche il suo denominatore è minore. Tutti gli altri termini, e i residui, diminuiscono, si aumentano, o sono i medesimi; siccome a è uguale, maggiore, o minore di b. Perche i termini susseguenti, e i residui non sono, che prodotti degli antecedenti per $\frac{b}{a}$. Se $a>b$, $\frac{b}{a}<1$, e i prodotti coi residui successivamente diminuiscono. Se $a<b$, $\frac{b}{a}>1$, e i prodotti coi residui successivamente si aumentano. Se $a=b$, $\frac{b}{a}=1$, e i prodotti coi residui sono sempre i medesimi.

IX. Se $a>b$, i termini della serie $\frac{c}{a}$ $-\frac{cb}{a^2}+\frac{cb^2}{a^3}$ &c., e i corrispondenti reſidui $\frac{cb}{a}$, $\frac{cb^2}{a^2}$, $\frac{cb^3}{a^3}$ &c., tanto maggiormente diminuiſcono, quanto più $a>b$. Poichè i termini del quoziente ſono alternativamente poſitivi, e negativi; e il primo termine maggiore del ſecondo, il ſecondo del terzo &c., la ſomma de' termini pari ſucceſſivamente ſi aumenta, accoſtandoſi al valore della frazione $\frac{c}{a+b}$; la ſomma de' termini diſpari ſucceſſivamente ſi diminuiſce, accoſtandoſi al valore della frazione.

Sia $c=b=1$, $a=2$, $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c. Il primo termine $\frac{1}{2}$ è maggiore della frazione $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{6}$; i termi-

ni-

ni susseguenti $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ &c. diminuiscono. La somma de' due primi termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, è minore della frazione $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{12}$. La somma di tre termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, è maggiore di $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{24}$. La somma di quattro termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$, è minore di $\frac{1}{3}$ in $\frac{1}{48}$; successivamente il valore de' termini pari minore di $\frac{1}{3}$, si accosta al valore della frazione con accrescersi; il va-

valore de' termini dispari maggiore di $\frac{1}{3}$, si accosta alla frazione con diminuirsi. Questo accrescimento, e diminuimento di valore della serie è tanto più prossimo, quanto più $a>b$.

Queste serie si dicono convergenti. La somma de' termini pari si dice accostarsi per difetto; la somma de' termini dispari, per eccesso, al valore della frazione. Per l' una e l' altra somma si determinano i valori quanto prossimi si vogliano al valore della frazione.

X. Se $a<b$, il primo termine della serie è minore del secondo, il secondo del terzo &c. La somma de' termini pari è di valore negativo, la somma de' dispari di valore positivo; l' uno e l' altro valore sono maggiori di $\frac{c}{a+b}$, che successivamente nel senso positivo, e negativo tanto più si discostano dal valore della frazione, quanto più $b>a$.

Sia $c=a=1$, $b=2$, $\frac{c}{a+b}=\frac{1}{1+2}=1-2+4-8+16$ &c. Il primo termine

$1>$

$1 > \frac{1}{1+2}$, il secondo $2 > 1$, l' terzo $4 > 2$ &c.

La somma de' due primi termini $1 - 2 = -1$; de' tre primi termini $1 - 2 + 4 = 3$; di quattro termini $1 - 2 + 4 - 8 = -5$ &c. Dunque la somma de' termini pari è negativa, e de' dispari positiva; l' una e l' altra successivamente si aumentano nel senso positivo, e negativo, quanto più $b > a$.

Queste serie si dicono divergenti, le quali non sono di alcun uso per determinare i valori delle frazioni. Si fanno convergenti, permutando il secondo termine del denominatore nel primo. Così in vece di dividere c per $a+b$, si divide c per $b+a$,

e la serie diviene convergente $\frac{c}{b} - \frac{ca}{b^2} + \frac{ca^2}{b^3} - \frac{ca^3}{b^4}$ &c.

XI. Se $a = b$, la frazione $\frac{c}{a+a}$ riso-

 lu-

luta in ſerie è $\frac{c}{a} - \frac{c}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a}$ &c.; della quale i termini pari ſono $= 0$, e i diſpari $= \frac{c}{a}$. Dunque il valore della ſerie ne' termini pari è minore della frazione per la frazione medeſima, e nei termini diſpari altrettanto maggiore. Queſte ſerie ſi dicono parallele, le quali parimente non ſono di alcun uſo per determinare i valori proſſimi delle frazioni.

Sia $a = b = 1$, ſarà $\frac{c}{1+1} = c - c + c - c + c - c$ &c., poſto $c = 1$, ſarà $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ &c. I termini pari ſono $= 0$, e i diſpari $= 1$. Nel primo caſo il valore della ſerie è minore della frazione in $\frac{1}{2}$; nel ſecondo maggiore; perche $\frac{1}{2}$ ſottrat-

ta

ta da 1 si ha $\frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$.

XII. Collo stesso metodo si risolve la frazione $\frac{c}{a-b}$ in serie, dividendo c, e i successivi residui per $a-b$.

Di-

Divid. Divis.

$c.$ $a-b$

$$-c+\frac{cb}{a} \qquad \text{Quoz.}\ \frac{c}{a}+\frac{cb}{a^{2}}\ \&c.$$

1\. Res. $\frac{cb}{a}$

$$-\frac{cb}{a}+\frac{cb^{2}}{a^{2}}$$

2\. Res. $\frac{cb^{2}}{a^{2}}$

$$-\frac{cb^{2}}{a^{2}}+\frac{cb^{3}}{a^{3}}$$

&c.

Que-

La serie del quoziente ha tutti i termini positivi, e in ciò differisce dall' altra. Si formano i termini colla stessa legge moltiplicando l' antecedente per $\frac{b}{a}$. La somma di qualunque numero di termini col residuo diviso per $a-b$, è $\frac{c}{a-b}$. Così se ai due primi termini si aggiugne il residuo $\frac{cb^2}{a^2}$ diviso per $a-b$, sarà $\frac{c}{a}+\frac{cb}{a^2}+\frac{cb^2}{a^2.(a-b)}=\frac{c}{a-b}$. &c.

1. Se $a=b$, la serie è parallela, $c+c+c+c$ &c. all' infinito. Di fatti il valore di $\frac{c}{a-b}$, posto $a=b$, è $\frac{c}{0}$ infinito.

2. Se $a>b$, la serie è convergente. Sia

$c=a$

$c = a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, farà $\frac{c}{a-b} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} =$

$\frac{2}{2-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ &c.

Sia $c = 1$, $b = 2$, $a = 5$, farà $\frac{1}{5-2}$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125}$ &c. la quale fempre fi accofta al valore di $\frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$.

3. Se $a<b$ la ferie è divergente. Sia $c = 1$, $b = 5$, $a = 2$, farà $\frac{1}{2-5} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{25}{8}$. Quefte ferie fi fanno convergenti dividendo c per $-b+a$, e l'intera ferie da pofitiva diviene negativa, $\frac{1}{-5+2} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{25}$ &c.

ac-

accoſtandoſi ſempre al valore negativo della frazione.

XIII. Una frazione aritmetica può traſformarſi in una delle due ſerie. Si pone il numeratore $= c$, e il denominatore ſi diſpone in una delle due forme, $a+b$, $a-b$. Si diſpone nella prima, ſe il denominatore ſi divide in due parti eguali, e la maggiore ſi pone $= a$, la minore $= b$. Nella ſeconda ſe il denominatore ſi pone uguale alla differenza di due numeri, de' quali uno ſia a, e l' altro b.

$$\text{Così } \frac{3}{7} = \frac{3}{4+3} = \frac{3}{5+2} = \frac{3}{6+1}$$

$$= \frac{3}{8-1} = \frac{3}{9-2} = \frac{3}{10-3} \text{ \&c.}$$

CAP.

CAP. XIII.

Delle Frazioni Continue.

I. Le frazioni continue sono serie di frazioni in questa forma,

$$\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f\ \&c.}}}}}$$

delle quali la prima ha per numeratore 1, e per denominatore b più le seguenti frazioni; la seconda ha per numeratore 1, e per denominatore c più le seguenti frazioni; la terza ha per numeratore 1, e per denominatore d più le seguenti frazioni ni &c. Le frazioni $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{d}$ &c. si dicono parziali, integranti, e termini della frazione continua.

Si risolvono in frazioni continue i numeri irrazionali, e le frazioni razionali. Se n' espone il metodo, si applica alle frazioni razionali, e si dimostrano le proprietà delle continue frazioni.

II. Sia a un numero irrazionale, o fratto, maggiore di un intero, e c un numero intero prossimamente minore di a; sarà $a-c$ una frazione minore di 1, è $\frac{1}{a-c}$ maggiore di 1.

Sia $\frac{1}{a-c} = a'$, e c' l' intero prossimamente minore di a'; sarà $a'-c'$ una frazione minore di 1, e $\frac{1}{a'-c'}$ maggiore di 1.

Sia $\frac{1}{a'-c'} = a''$, e c'' l' intero prossimamente minore di a''; sarà $a''-c''$ una fraziozione minore di 1, e $\frac{1}{a''-c''}$ maggiore di 1.

Sia $\frac{1}{a''-c''}=a'''$, e c''' l'intero prossimamente minore di a'''; sarà $a'''-c'''$ una frazione minore di 1, e $\frac{1}{a'''-c'''}$ maggiore di 1.

Proseguendo con quest' ordine si ha $\frac{1}{a'''-c'''}$ $=a^{\text{IV}}$, $\frac{1}{a^{\text{IV}}-c^{\text{IV}}}=a^{\text{V}}$ &c. Tutte queste equazioni si contengono nell'equazione $\frac{1}{a^{p}-c^{p}}$ $=a^{p+1}$; l' esponente p disegna l' ordine delle quantità a, a', a'', a''' &c., c, c', c'', c''', &c. Risulta l'equazione $\frac{1}{a^{p}-c^{p}}$ $=$

$= a^{p+1}$ dalle espressioni delle diverse quantità per le medesime lettere segnate secondo l' ordine della progressione.

III. Se i termini di ciascuna equazione

$$a' = \frac{1}{a-c}, \quad a'' = \frac{1}{a'-c'}, \quad a''' = \frac{1}{a''-c''},$$

$a^{iv} = \frac{1}{a'''-c'''}$ &c. si moltiplicano pe'l denominatore del secondo membro, e si dividono pe'l termine del primo; si hanno le seguenti equazioni $a = c + \frac{1}{a'}$, $a' = c' + \frac{1}{a''}$, a''

$$= c'' + \frac{1}{a'''}, \quad a''' = c''' + \frac{1}{a^{iv}} \text{ \&c.}$$

Nella prima equazione $a = c + \frac{1}{a'}$, se in vece di a' si sostituisce il corrispondente

 va-

valore ; farà $a = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{a''}}$.

In questa se in vece di a'' si sostituisce il corrispondente valore ; farà

$$a = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{c'' + \cfrac{1}{a'''}}}$$

Successivamente se in vece di a''', a^{IV}, a^{V} &c., si sostituiscono i rispettivi valori; farà

$$a = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{c'' + \cfrac{1}{c''' + \cfrac{1}{c^{IV}\ \&c.}}}}$$

IV.

IV. Se a è irrazionale, irrazionali sono $a-c$, $\frac{1}{a-c}=a'$; $a'-c'$, $\frac{1}{a'-c'}=a''$; $a''-c''$, $\frac{1}{a''-c''}=a'''$ &c.; e la frazione continua, nella quale si risolve a, è di termini tutti razionali, ed infinita.

V. Se a è una frazione razionale, frazioni razionali sono, $a-c$, $\frac{1}{a-c}=a'$; $a'-c'$, $\frac{1}{a'-c'}=a''$ &c. Gl' interi c, c', c'', c''', &c., prossimamente minori di a, a', a'', a''' &c., sono quozienti delle divisioni de' numeratori pei loro denominatori. I residui delle divisioni sono $a-c$, $a'-c'$, $a''-c''$ &c. Le frazioni a', a'', a''' &c. sono inverse de' residui; in modo, che i numeratori di a', a'', a''' &c. sono i denominatori, e i denominatori sono i numeratori di $a-c$, $a'-c'$, $a''-c''$ &c. I numeratori di $a-c$, $a'-c'$, $a''-c''$ &c. diminuiscono fino all' unità, e la serie delle frazioni termina in uno de' residui $a^p - c^p$, che ha per numeratore l' unità; perche sarà $\frac{1}{a^p - c^p} = a^{p+1} = c^{p+1}$, $a^{p+1} - c^{p+1} = 0$, $\frac{1}{a^{p+1} - c^{p+1}} = \infty$, e $\frac{1}{\infty} = 0$. Dunque il denominatore dell' ultimo termine della frazione continua è $c^{p+1} = a^{p+1}$.

Sia $a = \frac{m}{n}$, c il quoziente di m diviso per n, ed r il residuo; sarà $m = cn + r$, $\frac{m}{n} - c = \frac{r}{n}$, e $\frac{n}{r} = a'$. Il quoziente di n diviso per r sia c', ed r' il residuo; sarà $n = r\,c' + r'$, $\frac{n}{r} - c' = \frac{r'}{r}$, e $\frac{r}{r'} = a''$. Il quoziente di r diviso per r' sia c'', e r'' il il residuo; sarà $r = r' c'' + r''$, $\frac{r}{r'} - c'' = \frac{r''}{r'}$,

e $\frac{r'}{r''} = a'''$ &c. Si procede finchè il resi-

duo r^{p} sia 1; perche $a^{p+1} = c^{p+1}$ sarà l' ultimo quoziente della divisione, e

$$\frac{m}{n} = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{c'' + \cfrac{1}{c''' \text{ \&c.} + \cfrac{1}{c^{p+1}}}}}$$

VI. Una frazione dunque razionale si risolve in frazione continua, dividendo il numeratore pe'l denominatore, il denominatore pe'l primo residuo; il primo residuo pe'l secondo; il secondo pe'l terzo &c.; finchè l' ultimo residuo sia l' unità. I quozienti di queste divisioni sono i denominatori della frazione continua .

Se il numeratore della frazione è minore del denominatore , si dividono il numeratore e il denominatore pe'l numeratore , e si avrà una seconda frazione maggiore dell' unità . Di questa frazione si divide il numeratore pe'l denominatore , il denominarore pe'l residuo , il primo residuo pe'l secondo &c.

Sia $\frac{1103}{887}$. Si divide 1103 per 887 ; il quoziente è 1 , e il residuo 216 . Si divide 887 per 216 ; il quoziente è 4 , e il residuo 23. Si divide 216 per 23 ; il quoziente è 9 , e il residuo 9 . Si divide 23 per 9 ; il quoziente è 2 , e il residuo 5 . Si divide 9 per 5 ; il quoziente è 1 , e il residuo 4 . Si divide 5 per 4 ; il quoziente è 1 , e il residuo 1 . Si divide 4 per 1 ; il quoziente è 4 , e il residuo nullo .

Dun-

Dunque

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$$

Sia $\frac{887}{1103}$. Si divide l' uno, e l' altro termine per 887; sarà $\frac{887}{1103} = \cfrac{1}{\cfrac{1103}{887}}$. Si divide 1103 per 887; il quoziente è 1, e il residuo 216. Si divide 887 per 216; il quoziente è 4, e il residuo 23. Si divide 216 per 23; il quoziente è 9, e il resi-

residuo 9 &c. Dunque

$$\frac{887}{1103} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

VII. La prima proprietà delle frazioni continue, dalla quale derivano le altre, è, che se da sinistra a destra si prende il primo termine, poi due, tre &c. termini, e questi si riducono in frazioni ordinarie; si hanno valori sempre più prossimi al valore della quantità risoluta in frazione continua.

La ragione si è, che $a = c + \frac{1}{a'}$, $a' =$

c'

$c' + \frac{1}{a''}$, $a'' = c'' + \frac{1}{a'''}$ &c.; e c è minore di a in $\frac{1}{a'}$, c' minore di a' in $\frac{1}{a''}$, c'' minore di a'' in $\frac{1}{a'''}$ &c. Dunque se nella prima equazione $a = c + \frac{1}{a'}$, in vece di a' si pone il corrispondente valore; sarà $a = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{a''}}$, e $c + \frac{1}{c'} = \frac{c'c+1}{c'}$ un valore più prossimo ad a, che c. Se in vece di a'' si pone il corrispondente valore, sarà $a = c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{c'' + \cfrac{1}{a'''}}}$, e $c + \cfrac{1}{c' + \cfrac{1}{c''}} = \frac{c''(c'c+1)+c}{c''c'+1}$ più prossimo ad a, che $\frac{c'c+1}{c'}$ &c.

VIII. Si dispongano dopo il primo ter-

mi-

mine, due, tre, quattro &c. termini ridotti in frazioni ordinarie nel modo seguente.

$$\frac{c}{1}$$

$$\frac{c'c+1}{c'}$$

$$\frac{c''(c'c+1)+c}{c''c'+1}$$

$$\frac{c'''(c''(c'c+1)+c)+c'c+1}{c'''(c''c+1)+c'}$$

$$\frac{c^{iv}\left(c'''(c''(c'c+1)+c)+c'c+1\right)+c''(c'c+1)+c}{c^{iv}\,(c'''(c''c'+1)+c')+c''c'+1}$$

&c. &c. &c.

Dalla disposizione delle quantità c, c', c'' &c. nel numeratore, e nel denominatore di ciascuna frazione si fa manifesto, che

che il numeratore della terza frazione è il prodotto di c'' nel numeratore della seconda, più il numeratore della prima; e il denominatore è il prodotto di c'' nel denominatore della seconda, più il denominatore della prima: che il numeratore della quarta è il prodotto di c''' nel numeratore della terza, più il numeratore della seconda; e il denominatore è il prodotto di c''' nel denominatore della terza, più il denominatore della seconda. Così delle seguenti. Dunque dai due primi termini con facilità si riduce in frazioni ordinarie la serie de' termini d'una frazione continua.

Le quantità tanto del numeratore, che del denominatore esprimono numeri interi positivi; l'uno e l'altro successivamente si aumentano, e le frazioni si accostano al valore di a.

Se a è irrazionale, i termini della frazione continua sono infiniti, e si hanno valori tanto più prossimi, quanto più termini si riducono in frazioni ordinarie.

Se a è una frazione razionale, i termini della frazione continua sono di numero finiti, e l'ultima frazione, che risulta dalla serie di tutti i termini, è la medesima frazione razionale a.

IX. Si ponga $A=c$, $B=1$, $A'=c'A+1$,

B'

$B'=c'$; i numeratori, e i denominatori dell' esposte frazioni, si riducono ai seguenti.

$$A = c \qquad\qquad B = 1$$

$$A' = c'A + 1 \qquad\qquad B' = c'$$

$$A'' = c''A' + A \qquad\qquad B'' = c''B' + B$$

$$A''' = c'''A'' + A' \qquad\qquad B''' = c'''B'' + B'$$

$$A^{IV} = c^{IV}A''' + A'' \qquad\qquad B^{IV} = c^{IV}B''' + B''$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A^{p+1} = c^{p+1}A^{p} + A^{p-1} \qquad\qquad B^{p+1} = c^{p+1}B^{p} + B^{p-1}$$

Dalle premesse formule de' numeratori, e de' denominatori della serie de' termini ridotti in frazioni ordinarie; si hanno queste espressioni.

$$\frac{A}{B},\ \frac{A'}{B'},\ \frac{A''}{B''},\ \frac{A'''}{B'''},\ \frac{A^{IV}}{B^{IV}},\ \frac{A^{V}}{B^{V}},\ \ldots \frac{A^{p+1}}{B^{p+1}}$$

X. Si sottragga la prima frazione $\frac{A}{B}$

dalla

dalla seconda $\frac{A'}{B'}$; la seconda $\frac{A'}{B'}$ dalla terza $\frac{A''}{B''}$; la terza dalla quarta &c., si avranno le seguenti equazioni.

$$\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} = \frac{A'B - AB'}{B'B}$$

$$\frac{A''}{B''} - \frac{A'}{B'} = \frac{A''B' - A'B''}{B''B'}$$

$$\frac{A'''}{B'''} - \frac{A''}{B''} = \frac{A'''B'' - A''B'''}{B'''B''}$$

$$\frac{A^{iv}}{B^{iv}} - \frac{A'''}{B'''} = \frac{A^{iv}B''' - A'''B^{iv}}{B^{iv}B'''}$$

&c. &c.

XI. Se nel numeratore $A'B - AB'$ della prima differenza si pongono i valori di A', B', A, B; sarà $A'B - AB'$ =

$= c'c+1-c'c=1$.

Se nel numeratore $A''B'-A'B''$ della ſeconda differenza ſi pongono i valori di A'', B''; ſarà $A''B'-A'B''=c''A'B'+AB'-c''A'B'-A'B=AB'-A'B=-1$.

Se nel numeratore $A'''B''-A''B'''$ della terza differenza ſi pongono i valori di A''', B'''; ſarà $A'''B''-A''B'''=c'''A''B''+A'B''-c'''A''B''-A''B'=A'B''-A''B'=1$.

Da queſta ſucceſſiva ſoſtituzione dei valori de' numeratori è manifeſto, che i numeratori delle differenze degli ordini pari ſono -1, e degli ordini diſpari 1. Dunque

$$\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}=\frac{1}{B'B}$$

$$\frac{A''}{B''}-\frac{A'}{B'}=\frac{-1}{B''B'}$$

$$\frac{A'''}{B'''}-\frac{A''}{B''}=\frac{1}{B'''B''}$$

$$\cdots\cdots\cdots\quad\cdots\cdots$$

$$\frac{\overset{p}{A}}{\overset{p}{B}}-\frac{\overset{p-1}{A}}{\overset{p-1}{B}}=\frac{\pm 1}{\overset{p}{B}\,\overset{p-1}{B}}.$$

Il segno + ha luogo se l' esponente p è disparo; il segno − se l' esponente p è paro.

XII. Dalle differenze $\frac{1}{B'B}$, $\frac{-1}{B''B'}$, $\frac{1}{B'''B''}$, $\frac{-1}{B^{iv}B'''}$ &c. positive, e negative, di $\frac{A}{B}$ da $\frac{A'}{B'}$, di $\frac{A'}{B'}$ da $\frac{A''}{B''}$, di $\frac{A''}{B''}$ da $\frac{A'''}{B'''}$ &c. s'inferisce 1., che $\frac{A}{B} < \frac{A'}{B'}$, $\frac{A'}{B'} > \frac{A''}{B''}$, $\frac{A''}{B''} < \frac{A'''}{B'''}$ &c.

2. Che le differenze positive, e negative successivamente diminuiscono; perche i numeratori $1, -1, 1, -1$, sono i medesimi, e i denominatori $B'B$, $B''B'$, $B'''B''$ &c. successivamente sono maggiori N. IX. Dunque

que la ſerie delle frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A'''}{B'''}$ &c., alternativamente minori e maggiori, è convergente per eccesso, e per difetto.

3. Che il valore di a ſi contiene tra due proſſime frazioni, una maggiore, e l'altra minore. Così $a > \frac{A}{B}$, $a < \frac{A'}{B'}$, $a > \frac{A''}{B''}$, $a < \frac{A'''}{B'''}$, $a > \frac{A^{iv}}{B^{iv}}$ &c.. Perchè le frazioni ſucceſſivamente ſi approſſimano ad a; e queſte poichè convergenti per eccesso, e per difetto, a ſi contiene tra due proſſime frazioni, maggiore, e minore. Dunque la differenza della frazione minore da a, e la differenza di a dalla frazione maggiore, è minore della differenza delle due proſ-

prossime frazioni.

4. Che tra due prossime frazioni si esclude ogni altra frazione, la quale possa aver luogo nella serie delle frazioni. Perche la differenza di $\frac{A}{B}$ da $\frac{A'}{B'}$ essendo $\frac{1}{B'B}$, se tra $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ avesse luogo una frazione $\frac{m}{n}$; la differenza di $\frac{A}{B}$ da $\frac{m}{n}$ sarebbe $\frac{Bm-An}{Bn}$ $=\frac{1}{Bn}$. Ma $n<B'$, perche i denominatori della serie sono crescenti. Dunque $\frac{1}{Bn}>\frac{1}{B'B}$, contro la condizione delle differenze.

Parimente la differenza di $\frac{m}{n}$ da $\frac{A'}{B'}$, è

$\dfrac{1}{B'n}$; ma $n > B$. Dunque la differenza

$\dfrac{1}{B'n} < \dfrac{1}{B'B}$, contro la condizione delle

differenze della serie delle frazioni.

5. Che i termini delle frazioni $\dfrac{A}{B}, \dfrac{A'}{B'}, \dfrac{A''}{B''}$ &c. sono termini primi; cioè, che non hanno altro comune divisore fuori dell' unità. Perche essendo $A'B - AB' = 1$, $A''B' - A'B'' = -1$ &c., se $\dfrac{A}{B}, \dfrac{A'}{B'}, \dfrac{A''}{B''}$ &c. avessero altro comune divisore; le differenze $A'B - AB'$, $A''B' - A'B''$ &c. avrebbero anche un comune divisore oltre l' unità, e non sarebbero $1, -1$.

XIII.

XIII. Sia $\frac{1103}{887}$. I quozienti della successiva divisione 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, N. VI., si dispongano in linea orizontale.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 4 & 9 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ \frac{1}{1}, & \frac{5}{4}, & \frac{46}{37}, & \frac{97}{78}, & \frac{143}{115}, & \frac{240}{193}, & \frac{1103}{887}. \end{array}$$

Pei N. N. VIII., e IX. il primo quoziente intero 1 è numeratore e denominatore della prima frazione.

La seconda frazione $\frac{5}{4}$ ha per numeratore il prodotto del secondo quoziente 4 pe'l numeratore 1 della prima frazione, più 1, che fanno 5; e per denominatore il quoziente 4.

La terza frazione $\frac{46}{37}$ ha per numeratore il prodotto del terzo quoziente 9 pe'l numeratore 5 della seconda frazione, più il numeratore 1 della prima; e per denominatore il prodotto del terzo quoziente 9 pe'l denominatore 4 della seconda frazione, più il denominatore 1 della prima.

La quarta frazione $\frac{87}{78}$ ha per numeratore il prodotto del quarto quoziente 2 pe'l numeratore 46 della terza frazione, più il numeratore 5 della seconda; e per denominatore il prodotto di 2 per 37 denominatore della terza frazione, più il denominatore 4. della seconda.

La quinta, la sesta, e la settima frazione si formano dalle due precedenti, e dal quoziente nel modo esposto.

La prima frazione $\frac{1}{1} < \frac{5}{4}$; la seconda $\frac{5}{4} > \frac{46}{37}$; la terza $\frac{46}{37} < \frac{97}{78}$ &c.; l' ultima è $\frac{1103}{887}$, alla quale per eccesso e per difetto si approssimano le precedenti.

I ter-

I termini di ciascuna frazione sono tra loro numeri primi, e tra due prossime frazioni non può collocarsi altra frazione, che abbia il denominatore maggiore del denominatore della precedente, e minore del denominatore della seguente.

Tra due prossime frazioni, la differenza ha per numeratore 1,0−1; e per denominatore il prodotto de' due denominatori delle frazioni. Così la differenza di $\frac{97}{78}$ da $\frac{143}{115}$, è $\frac{-1}{78.115}$.

Il valore di $\frac{1103}{887}$ si contiene tra due prossime frazioni, una maggiore, e l' altra minore; e differisce da una delle due frazioni di una frazione minore della frazione, che ha per numeratore 1, e per denominatore il prodotto de' due denominatori. Così $\frac{1103}{887}$ differisce da $\frac{97}{78}$, d' una

 fra-

frazione minore di $\frac{1}{78.115}$; e $\frac{143}{115}$ differisce da $\frac{1103}{887}$, d'una frazione minore di $\frac{1}{78.115}$.

XIV. Poichè la serie delle frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A'''}{B'''}$, $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$, $\frac{A^{V}}{B^{V}}$, &c. è composta di frazioni maggiori e minori, convergenti ad a; può questa serie dividersi nelle due seguenti, delle quali una contiene le frazioni convergenti per difetto al valore di a, e l'altra le frazioni convergenti per eccesso.

$$\frac{A}{B},\ \frac{A''}{B''},\ \frac{A^{iv}}{B^{iv}},\ \frac{A^{vi}}{B^{vi}}\ \&c.$$

$$\frac{A'}{B'},\ \frac{A'''}{B'''},\ \frac{A^{v}}{B^{v}},\ \frac{A^{vii}}{B^{vii}}\ \&c.$$

XV. Nella prima ſerie ſi ſottragga la prima frazione dalla ſeconda, la ſeconda dalla terza, la terza dalla quarta &c., ſarà.

$$\frac{A''}{B''} - \frac{A}{B} = \frac{A''B - AB''}{B''B}$$

$$\frac{A^{iv}}{B^{iv}} - \frac{A''}{B''} = \frac{A^{iv}B'' - A''B^{iv}}{B^{iv}B''}$$

$$\frac{A^{vi}}{B^{vi}} - \frac{A^{iv}}{B^{iv}} = \frac{A^{vi}B^{iv} - A^{iv}B^{vi}}{B^{vi}B^{iv}}$$

&c. &c.

Se nella prima differenza $A''B - AB''$ si pongono i valori di A'', B, A, B''; nella seconda $A^{iv}B'' - A''B^{iv}$ si pongono i valori di A^{iv}, B'', A'', B^{iv}; nella terza $A^{vi}B^{iv} - A^{iv}B^{vi}$ si pongono i valori di A^{vi}, B^{iv}, A^{iv}, B^{vi} &c., sarà

$$\frac{A''}{B''} - \frac{A}{B} = \frac{c''}{B''B}$$

$$\frac{A^{IV}}{B^{IV}} - \frac{A''}{B''} = \frac{c^{IV}}{B^{IV} B''}$$

$$\frac{A^{VI}}{B^{VI}} - \frac{A^{IV}}{B^{IV}} = \frac{c^{VI}}{B^{VI} B^{IV}}$$

&c. &c.

Le differenze $\frac{c''}{B'' B}$, $\frac{c^{IV}}{B^{IV} B''}$, $\frac{c^{VI}}{B^{VI} B^{IV}}$

&c. ſono tutte poſitive ; perche la ſerie è creſcente , e ſi ſottrae la frazione minore della maggiore .

Se c'' , c^{IV} , c^{VI} &c. ſono $=$ 1 ; tra

due

due proſſime frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A^{IV}}{B^{IV}}$ &c. non può collocarſi altra frazione, che abbia un denominatore maggiore del denominatore della precedente, e minore del denominatore della ſeguente, N. XII. 4

Se c'', c^{IV}, c^{VI} &c., o alcuno di queſti numeratori è maggiore di 1, tra la frazione antecedente, e la ſeguente ſi poſſono collocare tante frazioni, quante ſono le unità di $c^{p} - 1$. Le frazioni medie ſi rinvengono per mezzo de' valori A^{p}, B^{p}.

Così se $c'' = 4$, ſarà $\frac{A''}{B''} = \frac{4A'+A}{4B'+B}$, e tra $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$ avranno luogo tre frazioni

in

in serie $\frac{A}{B}$, $\frac{A'+A}{B'+B}$, $\frac{2A'+A}{2B'+B}$, $\frac{3A'+A}{3B'+B}$, $\frac{4A'+A}{4B'+B} = \frac{A''}{B''}$.

Se $c'' = 5$, sarà $\frac{A''}{B''} = \frac{5A'+A}{5B'+B}$; e tra $\frac{A}{B}$, $\frac{A''}{B''}$ avranno luogo quattro frazioni $\frac{A}{B}$, $\frac{A'+B}{B'+B}$, $\frac{2A'+B}{2B'+B}$, $\frac{3A'+A}{3B'+B}$, $\frac{4A'+A}{4B'+B}$, $\frac{5A'+A}{5B'+B} = \frac{A''}{B''}$.

Si sottragga $\frac{A}{B}$ da $\frac{A'+A}{B'+B}$, $\frac{A'+A}{B'+B}$ da

2A'

$$\frac{2A'+A}{2B'+B}, \frac{2A'+A}{2B'+B} \text{ da } \frac{3A'+A}{3B'+B} \text{ \&c., farà}$$

$$\frac{A'+A}{B'+B} - \frac{A}{B} = \frac{A'B-AB'}{B.(B'+B)}$$

$$\frac{2A'+A}{2B'+B} - \frac{A'+A}{B'+B} = \frac{A'B-AB'}{(2B'+B)(B'+B)}$$

$$\frac{3A'+A}{3B'+B} - \frac{2A'+A}{2B'+B} = \frac{A'B-AB'}{(3B'+B)(2B'+B)}$$

&c. &c. &c.

Ma $A'B-AB'=1$, N. XI. Dunque i numeratori delle differenze sono tutti positivi, ed $=1$. La serie dunque $\frac{A}{B}$, $\frac{A'+A}{B'+B}$, $\frac{2A'+A}{2B'+B}$ &c. $\frac{A''}{B''}$, è crescente per una quantità, che successivamente diminuisce; perche i denominatori si aumentano. Si dimostra parimente, come nel N.

XII.

XII. 4., che tra due proſſime frazioni non ha luogo altra frazione, che abbia il numeratore in ſerie.

Se ciaſcuna di queſte frazioni ſi ſottrae dalla prima frazione della ſerie convergente per eccesso, ſarà

$$\frac{A'}{B'} - \frac{A}{B} = \frac{A'B - AB'}{B'B}$$

$$\frac{A'}{B'} - \frac{A'+A}{B'+B} = \frac{A'B - AB'}{B'(B'+B)}$$

$$\frac{A'}{B'} - \frac{2A'+A}{2B'+B} = \frac{A'B - AB'}{B'(2B'+B)}$$

. . . .

$$\frac{A'}{B'} - \frac{A''}{B''} = \frac{A'B'' - A''B'}{B'B''}$$

Ma $A'B - AB' = 1$, e $A'B'' - A''B' = 1$. Dunque le differenze ſono tutte poſitive, ed $= 1$; e tra $\frac{A'}{B'}$, e ciaſcuna delle dette frazioni non ha luogo altra frazione.

Lo

Lo stesso si dice delle altre frazioni medie della serie crescente $\frac{A}{B}$, $\frac{A''}{B''}$, $\frac{A^{iv}}{B^{iv}}$, $\frac{A^{vi}}{B^{vi}}$ &c. se e^{iv}, e^{vi} &c. sono maggiori dell'unità. Dunque le frazioni medie colle principali formano una serie convergente per difetto verso a.

XVI. Nella seconda serie $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A'''}{B'''}$, $\frac{A^{v}}{B^{v}}$ &c., che converge ad a per eccesso, sottratta la prima frazione dalla seconda, la seconda dalla terza &c.; sarà

$$\frac{A'''}{B'''} - \frac{A'}{B'} = \frac{A'''B' - A'B'''}{B'''B'},$$

A^{v}

$$\frac{A^{v}}{B^{v}} - \frac{A'''}{B'''} = \frac{A^{v} B''' - A''' B^{v}}{B^{v} B'''}$$

$$\frac{A^{vii}}{B^{vii}} - \frac{A^{v}}{B^{v}} = \frac{A^{vii} B^{v} - A^{v} B^{vii}}{B^{vii} B^{v}}$$

&c. &c.

Se nella prima differenza $A''' B' - A' B'''$ si pongono i valori di A''', B''', A', B'; nella seconda $A^{v} B''' - A''' B^{v}$ si pongono i valori di A^{v}, B''', A''', B^{v}; nella terza $A^{vii} B^{v} - A^{v} B^{vii}$ si pongono i valori di A^{vii}, B^{v}, A^{v}, B^{vii}; sarà

$$\frac{A'''}{B'''} - \frac{A'}{B'} = \frac{-c'''}{B''' B'}$$

A^{v}

$$\frac{A^{v}}{B^{v}} - \frac{A'''}{B'''} = \frac{-c^{v}}{B^{v}B'''}$$

$$\frac{A^{vi}}{B^{vi}} - \frac{A^{v}}{B^{v}} = \frac{-c^{vi}}{B^{vi}B^{v}}$$

&c. &c.

Le differenze sono negative ; perche la serie è convergente per eccesso.

Se c''', c^{v}, c^{vi} sono $= 1$, tra due frazioni prossime $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A'''}{B'''}$, $\frac{A^{v}}{B^{v}}$ &c. non ha luogo alcuna frazione media. Se sono maggiori di 1, hanno luogo tante medie frazioni, quante sono le unità di $c^{p} - 1$. Si rinvengono le frazioni medie per mezzo de' valori A^{p}, B^{p}.

Co-

Così se $c''' = 4$, sarà $\frac{A'''}{B'''} = \frac{4A''+A'}{4B''+B'}$,

e tra $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A'''}{B'''}$ si collocano tre frazioni $\frac{A'}{B'}$,

$$\frac{A''+A'}{B''+B'},\ \frac{2A''+A'}{2B''+B'},\ \frac{3A''+A'}{3B''+B'},\ \frac{4A''+A'}{4B''+B'} = \frac{A'''}{B'''}.$$

Di queste frazioni sottratta la prima dalla seconda, la seconda dalla terza &c.; sarà

$$\frac{A''+A'}{B''+B'} - \frac{A'}{B'} = \frac{A''B'-A'B''}{B'(B''+B')}$$

$$\frac{2A''+A'}{2B''+B'} - \frac{A''+A'}{B''+B'} = \frac{A''B'-A'B''}{(2B''+B')(B''+B')}$$

$$\frac{3A''+A'}{3B''+B'} - \frac{2A''+A'}{2B''+B'} = \frac{A''B'-A'B''}{(3B''+B')(2B''+B')}$$

&c. &c.

Ma $A''B' - A'B'' = -1$, N. XI.; il denominatore della seconda frazione è maggiore del denominatore della prima; il denominatore della terza è maggiore del denominatore della seconda &c. Dunque $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''+A'}{B''+B'}$, $\frac{2A''+A'}{2B''+B'}$ &c. è una serie convergente per eccesso.

Lo stesso si dice delle altre frazioni prossime della serie $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A'''}{B'''}$, $\frac{\overset{v}{A}}{\overset{v}{B}}$ &c., se $\overset{v}{c}$, $\overset{vu}{c}$ &c. sono numeri maggiori dell'unità; e tutta la serie delle frazioni principali e medie, sarà convergente ad a per eccesso.

Se c' è un numero maggiore dell'unità, si possono porre avanti $\frac{A'}{B'}$ tante frazioni in serie, quante sono le unità $c'-1$.

Sia $c'=5$, sarà $\frac{A'}{B'}=\frac{5A+1}{5}$, e le frazioni $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, $\frac{4A+1}{4}$, $\frac{5A+1}{5}=\frac{A'}{B'}$ sono in serie convergenti per eccesso.

XVII. Se a è irrazionale, le due serie con-

convergenti per eccesso e per difetto saranno infinite; perche la serie principale

$$\frac{A}{B}, \frac{A'}{B'}, \frac{A''}{B''}, \frac{A'''}{B'''} \text{ \&c. è infinita.}$$

Se a è una frazione razionale, l' intera serie principale, che contiene l' una e l' altra per eccesso e per difetto, è finita; della quale l' ultima frazione è la medesima a, e questa sarà una frazione delle due serie. Suppongasi, che l'ultima frazione sia della serie convergente per eccesso; la penultima sarà della serie convergente per difetto. Si è osservato nel N. V., che nella frazione continua il denominatore dell' ultimo termine è il quoziente del residuo antecedente diviso per l' unità, e che il denominatore del termine seguente è infinito. Dunque la serie convergente per difetto può prodursi all' infinito. Se l' ultima frazione è della serie convergente per difetto, la serie convergente per eccesso può prodursi all' infinito.

Sia $\dfrac{A^{vii}}{B^{vii}} = a$, sarà $\dfrac{A^{vi}}{B^{vi}}$ l'ultima frazione della serie convergente per difetto, e $c^{viii} \mp \infty$. Dunque $\frac{A^{viii}}{B^{viii}} = \frac{\infty A^{vii} + A^{vi}}{\infty B^{vii} + B^{vi}}$, e tra le frazioni $\frac{A^{vi}}{B^{vi}}$, $\frac{A^{viii}}{B^{viii}}$ può collocarsi una serie infinita di frazioni medie

$$\frac{A^{vii} + A^{vi}}{B^{vii} + B^{vi}},\ \frac{2A^{vii} + A^{vi}}{2B^{vii} + B^{vi}},\ \frac{3A^{vii} + A^{vi}}{3B^{vii} + B^{vi}}\ \&c.$$

$$\frac{\infty A^{vii} + A^{vi}}{\infty B^{vii} + B^{vi}} = \frac{A^{viii}}{B^{viii}}.$$

Se

Se $\frac{A^{vi}}{B^{vi}} = a$, sarà $\frac{A^{v}}{B^{v}}$ l'ultima frazione della serie convergente per eccesso; e $c^{vii} = \infty$. Dunque $\frac{A^{vii}}{B^{vii}} = \frac{\infty A^{vi} + A^{v}}{\infty B^{vi} + B^{v}}$, e tra $\frac{A^{v}}{B^{v}}$, $\frac{A^{vii}}{B^{vii}}$ si può collocare una serie infinita di frazioni medie $\frac{A^{vi} + A^{v}}{B^{vi} + B^{v}}$;

$$\frac{2A^{vi} + A^{v}}{2B^{vi} + B^{v}} \text{ \&c. } \frac{\infty A^{vi} + A^{v}}{\infty B^{vi} + B^{v}} = \frac{A^{vii}}{B^{vii}}.$$

XVIII. La serie delle frazioni del N. XIII si divida in due, in una convergente per difetto, e nell'altra per eccesso.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 9 & 1 & 4 \\ \frac{1}{1}, & \frac{46}{37}, & \frac{143}{115}, & \frac{1103}{887}. \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ \frac{5}{4}, & \frac{97}{78}, & \frac{240}{193}, \end{array}$$

1. Nella prima serie per difetto $c'' = 9$; dunque $\frac{A''}{B''} = \frac{9A' + A}{9B' + B}$, e tra $\frac{1}{1}$, $\frac{46}{37}$ si

pos-

possono collocare otto medie frazioni $\frac{A'+A}{B'+B}$, $\frac{2A'+A}{2B'+B}$ &c. Si sostituiscono i valori di

$A = 1$, $A' = 5$, $B = 1$, $B' = 4$; sarà $\frac{1}{1}$,

$$\frac{5+1}{4+1}, \quad \frac{2.\,5+1}{2.\,4+1}, \quad \frac{3.\,5+1}{3.\,4+1}, \quad \frac{4.\,5+1}{4.\,4+1};$$

$$\frac{5.\,5+1}{5.\,4+1}, \quad \frac{6.\,5+1}{6.\,4+1}, \quad \frac{7.\,5+1}{7.\,4+1}; \quad \frac{8.\,5+1}{8.\,4+1}, \quad \frac{46}{37}.$$

$c^{iv} = 1$; dunque tra $\frac{46}{37}$, $\frac{143}{115}$ non si può collocare alcuna media frazione.

$e^{vi} = 4$; dunque $\frac{A^{vi}}{B^{vi}} = \frac{4A^{v} + A^{iv}}{4B^{v} + B^{iv}}$,

O 4 e tra

e tra $\frac{143}{115}$, $\frac{1103}{887}$ si possono collocare tre

frazioni $\frac{\overset{v}{A} + \overset{iv}{A}}{\overset{v}{B} + \overset{iv}{B}}$, $\frac{2\overset{v}{A} + \overset{iv}{A}}{2\overset{v}{B} + \overset{iv}{B}}$, $\frac{3\overset{v}{A} + \overset{iv}{A}}{3\overset{v}{B} + \overset{iv}{B}}$.

Si pongono i valori di $\overset{v}{A} = 240$, di $\overset{iv}{A} = 143$, di $\overset{v}{B} = 193$, di $\overset{iv}{B} = 115$; sarà $\frac{143}{115}$; $\frac{240+143}{193+115}$, $\frac{2.\ 240+143}{2.\ 193+115}$, $\frac{3 \cdot 240+143}{3 \cdot 193+115}$, $\frac{1103}{887}$.

L' intera dunque serie convergente per difetto è $\frac{1}{1}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{16}{13}$, $\frac{21}{17}$, $\frac{26}{21}$, $\frac{31}{25}$;

$\frac{36}{29}, \frac{41}{33}, \frac{46}{37}, \frac{143}{115}, \frac{383}{308}, \frac{623}{501}, \frac{863}{694},$

$\frac{1103}{887}$.

2. Nella serie convergente per eccesso

$c' = 4$; dunque $\frac{A'}{B'} = \frac{4A+1}{4}$, e avanti $\frac{A'}{B'}$ precedono tre frazioni $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$. Si pongono i valori di $A = 1$, sarà $\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$.

$c''' = 2$; dunque $\frac{A''}{B''} = \frac{2A''+A'}{2B''+B'}$, e tra

$\frac{5}{4}$, $\frac{97}{78}$ si colloca una frazione media. Si pongono i valori di $A'' = 46$, di $A' = 5$, di $B'' = 37$, di $B' = 4$, sarà $\frac{5}{4}$, $\frac{46+5}{37+4}$, $\frac{97}{78}$.

$\overset{v}{c} = 1$; dunque tra $\frac{97}{78}$, $\frac{240}{193}$ non ha luogo alcuna media frazione.

$\overset{vii}{c} = \infty$; dunque $\frac{\overset{vii}{A}}{\overset{vii}{B}} = \frac{\infty \overset{vi}{A} + \overset{v}{A}}{\infty \overset{vi}{B} + \overset{v}{B}}$, e dopo $\frac{240}{193}$ la serie convergente per ec-

ces-

cesso può proseguirsi all' infinito $\frac{A^{vi}+A^{v}}{B^{vi}+B^{v}}$, $\frac{2A^{vi}+A^{v}}{2B^{vi}+B^{v}}$, $\frac{3A^{vi}+A^{v}}{3B^{vi}+B^{v}}$ &c. Si pongano i valori di $A^{vi}=1103$, di $A^{v}=240$, di $B^{vi}=887$, di $B^{v}=193$; sarà $\frac{1103+240}{887+193}$, $\frac{2.1103+240}{2.887+193}$, $\frac{3.1103+240}{3.887+193}$ &c.

La serie dunque convergente per eccesso è $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{51}{41}$, $\frac{97}{78}$, $\frac{240}{193}$, $\frac{1343}{1080}$; $\frac{2446}{1967}$ &c.

XIX. Quanto ſi è dimoſtrato della frazione continua, che ha per primo termine un numero intero; ſi dimoſtra collo ſteſſo metodo della frazione continua, della quale il primo termine è una frazione. Vi è ſoltanto la differenza, che il primo termine, perche fratto, è maggiore del ſecondo, il ſecondo minore del terzo, il terzo maggiore del quarto &c.

CAP.

C A P. XIV.

Delle Permutazioni, e Combinazioni delle Quantità.

I. LA permutazione delle quantità è l'ordine diverso, nel quale può disporsi un dato numero di quantità collocandole una dopo l'altra. Si cerca in quanti diversi modi un dato numero di quantità possa disporsi, conservando in ciascuna disposizione lo stesso numero delle quantità.

1. Una quantità a non può disporsi, che in un modo.

2. Due quantità a, b possono disporsi in due diversi modi, ponendo prima una, e dopo l'altra. Così ab, ba. Il numero dunque delle permutazioni di due quantità è $2 = 2.1$.

3. Tre quantità a, b, c possono disporsi in sei diversi modi, ponendo prima ciascuna delle tre, e permutando le altre due ne' detti due modi.

Così ponendo prima a, le altre due b, e si permutano in due diversi modi *abc*, *acb*; ponendo prima *b*, le altre due *a*, *c* si permutano in due diversi modi *bac*, *bca*; ponendo prima *c*, le altre due *a*, *b* si permutano in due diversi modi *cab*, *cba*. Dunque il numero delle permutazioni di tre quantità è $6 = 3 . 2 . 1$.

4. Quattro quantità *a*, *b*, *c*, *d* possono disporsi in 24 diversi modi, ponendo prima ciascuna delle quattro quantità, e permutando le altre tre ne' sei detti modi.

Così ponendo prima *a*, le altre tre si permutano in sei diversi modi *abcd*, *abdc*, *acdb*, *acbd*, *adbc*, *adcb*; ponendo prima *b*, le altre tre si permutano in sei diversi modi *bacd*, *badc*, *bdac*, *bdca*, *bcad*, *bcda*; ponendo prima *c*, le altre tre si permutano in sei diversi modi; ponendo prima *d*, le altre tre si permutano in sei diversi modi. Dunque il numero delle permutazioni di quattro quantità è $24 = 4 . 3 . 2 . 1$.

5. Cinque quantità *a*, *b*, *c*, *d*, *e* possono disporsi in 120 diversi modi, ponendo prima ciascuna delle cinque quantità, e permutando le quattro in 24 diversi modi. Dunque il numero delle permutazioni di cinque quantità è $120 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1$.

6. Parimente il numero delle permutazio-

zioni di sei quantità è 720 = 6. 5. 4. 3. 2. 1.; il numero delle permutazioni di sette quantità è 5040 = 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.; di otto quantita è 40320 = 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. &c. Dunque il numero delle permutazioni di un qualunque numero di quantità è uguale al prodotto di tanti numeri presi nella serie de' numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. &c. quante sono le quantità da permutarsi.

II. L' esposta legge delle permutazioni dipende dal numero delle quantità da permutarsi, le quali possono essere simili, e dissimili. Delle quantità simili, le permutazioni sono tutte simili; delle quantità dissimili, sono tutte dissimili; delle quantità simili e dissimili le permutazioni sono altre simili, altre dissimili. Il numero delle dissimili permutazioni delle quantità simili e dissimili si determina in questo modo.

1. Di due quantità simili *a*, *a*, le due permutazioni *aa*, *aa* sono simili.

2. Di tre quantità, se due sono simili, il numero delle dissimili permutazioni è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di tre quantità dissimili. Perche di tre quantità *a*,

a

a, *b*, delle quali due ſono ſimili, ponendo prima ciaſcuna delle due ſimili *a*, *a*, ſi hanno le medeſime permutazioni delle due quantità diſſimili *aab*, *aba*; ponendo prima la terza *b* diſſimile, ſi hanno due ſimili permutazioni *baa*, *baa* delle due quantità ſimili. Dunque il numero delle permutazioni delle tre quantità *a*, *a*, *b*, è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di tre diſſimili quantità.

3. Di quattro quantità, ſe due ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro diſſimili quantità. Perche ciaſcuna delle due ſimili ponendoſi prima, ſi hanno le medeſime permutazioni delle altre tre quantità diſſimili; ponendoſi prima ciaſcuna delle altre due diſſimili, il numero delle diſſimili permutazioni delle tre quantità, delle quali due ſono ſimili, è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di tre quantità diſſimili. Dunque il numero delle permutazioni di quattro quantità, delle quali due

due ſono ſimili, è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro diſſimili quantità.

Se delle quattro quantità tre ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro diſſimili quantità. Perche ciaſcuna delle tre ſimili ponendoſi prima, ſi hanno le medeſime permutazioni delle altre tre quantità; delle quali, poichè due ſono diſſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{2}$ delle permutazioni di tre quantità diſſimili; ponendoſi prima la quarta diſſimile, le tre ſimili ſi permutano in ſei ſimili modi. Dunque il numero delle diſſimili permutazioni di quattro quantità, delle quali tre ſono ſimili, è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro quantità diſſimili.

4. Di cinque quantità, ſe due ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni

è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque quantità diſſimili. Perche ponendoſi prima ciaſcuna delle due quantità ſimili, le permutazioni delle altre quattro quantità diſſimili ſono le medeſime; ciaſcuna delle diſſimili ponendoſi prima, il numero delle diſſimili permutazioni di quattro quantità delle quali due ſono ſimili, è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro diſſimili quantità. Dunque il numero delle diſſimili permutazioni di cinque quantità, delle quali due ſono ſimili, è $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque diſſimili quantità.

Se delle cinque quantità tre ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque quantità diſſimili. Perche ciaſcuna delle tre ſimili ponendoſi prima, ſi hanno le medeſime permutazioni delle altre quattro quantità; delle quali, poichè due ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{2}$ delle permutazioni di quattro diſſimili quantità; ſe ciaſcuna delle due diſſimili ſi pone prima, il numero delle permutazioni diſſimili delle quattro altre quantità, delle quali poichè tre ſono ſimili, è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di quattro quantità diſſimili. Dunque il numero delle diſſimili permutazioni di cinque quantità, delle quali tre ſono ſimili, è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque quantità diſſimili.

Se delle cinque quantità quattro ſono ſimili, il numero delle diſſimili permutazioni è $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque quantità diſſimili. Perche ponendoſi prima ciaſcuna delle quattro quantità ſimili, ſi hanno le medeſime permutazioni delle quattro altre quantità; delle quali, poichè tre ſono ſimili, il numero delle dissimili permutazioni è $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ di quattro quantità dissimili; se la quinta dissimile si pone prima, le quattro simili danno 24 simili permutazioni. Dunque il numero delle permutazioni di cinque quantità, delle quali quattro sono simili, è $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$ del numero delle permutazioni di cinque quantità dissimili.

5. Collo stesso metodo si dimostra, che di sei, di sette, e più quantità, il numero delle dissimili permutazioni è il quoziente del numero delle permutazioni delle quantità diviso pe'l numero delle permutazioni delle quantità simili.

Così se le quantità sono sette, delle quali quattro sono simili, il numero delle dissimili permutazioni è $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.1}$ $= 210$; se le quantità simili sono cinque, il numero delle simili permutazioni è $\frac{7.6.5.4.3.2.1}{5.4.3.2.1} = 42$; se sono sei, il nu-

numero delle dissimili permutazioni è

$$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} = 7$$; se sono sette, il

numero delle dissimili permutazioni è

$$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1} = 1.$$

III. Tra le quantità da permutarsi possono esservi quantità simili di quantità dissimili. Così tra *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, *c*, *d*, vi sono due *a*, e tre *b*.

Il numero delle permutazioni dissimili di queste diverse quantità simili, si ha dal quoziente del numero delle permutazioni delle quantità diviso pe'l prodotto de' numeri delle permutazioni simili. Così delle sette quantità il numero delle permutazioni è 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1; il prodotto delle permutazioni simili di *a*, *a*, di *b*, *b*, *b*, è 2. 1. 3. 2. 1; il quoziente

$$\frac{7.\ 6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{2.\ 1.\ 3.\ 2.\ 1} = 420,$$ è il numero

delle permutazioni dissimili.

IV. La combinazione delle quantità è la diversa disposizione di un dato numero di quantità, prese una a una, due a due, tre a tre, quattro a quattro &c. Si cerca in quanti diversi modi può combinarsi un dato numero di quantità.

Sieno cinque quantità *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

1. Cinque quantità, una a una, danno cinque combinazioni *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.

2. Si combinano due a due, ponendo ciascuna delle cinque quantità avanti, o dopo, e si hanno 25 binarj.

Così ponendo *a* avanti ciascuna delle cinque quantità, si hanno cinque binarj *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*. Ponendo *b* avanti ciascuna delle cinque quantità, si hanno altri cinque binarj *ba*, *bb*, *bc*, *bd* *be*. Ponendo *c* avanti ciascuna delle cinque quantità, si hanno altri cinque binarj *ca*, *cb*, *cc*, *cd*, *ce*. Ponendo *d* avanti ciascuna delle cinque quantità, si hanno altri cinque binarj *da*, *db*, *dc*, *dd*, *de*. Ponendo *e* avanti ciascuna delle cinque quantità, si hanno altri cinque binarj *ea*, *eb*, *ec*, *ed*, *ee*.

Un egual numero di binarj similmente formati si avrebbe, se ciascuna delle cinque quantità si ponesse dopo le altre; i qua-

quali, poichè simili ai primi, si escludono dalla combinazione. Dunque i binarj di cinque quantità si hanno dal prodotto di $5 \cdot 5 = 25$.

3. Si combinano tre a tre, ponendo avanti ciascun binario ciascuna delle cinque quantità. Così se a si pone avanti de' 25 binarj aa, ab, ac, ad, ae, ba, bb, bc, bd, be, ca, cb, cc, cd, ce, &c. si hanno 25 ternarj aaa, aab, aac, aad, aae, aba, abb, abc &c. Se b si pone avanti de' 25 binarj, si hanno altri 25 ternarj baa, bab, bac, bad, bae, bba, bbb, bbc &c. Se c si pone avanti de' 25 binarj, se ne hanno altri 25 ternarj &c. Dunque il numero de' ternarj è il prodotto di $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

4. Si combinano quattro a quattro, ponendo avanti de' ternarj ciascuna delle cinque quantità. Dunque il numero de' quaternarj è il prodotto di $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$.

5. Si combinano cinque a cinque, ponendo avanti de' quaternarj ciascuna delle cinque quantità. Dunque il numero de' quinarj è il prodotto di $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 3125$.

6. Da ciò s' inferisce, che il numero delle quantità, una a una, è il numero delle quantità medesime; che il numero de' binarj è il quadrato del numero

delle quantità; che il numero de' ternarj è il cubo; de' quaternarj la quarta potenza; de' quinarj la quinta &c.

Così il numero di sei quantità, prese una a una, è 6; il numero de' binarj di sei quantità è il quadrato di 6; de' ternarj il cubo di 6; de' quaternarj la quarta potenza di 6; de' quinarj la quinta; de' senarj la la sesta potenza.

V. Nell' esposta combinazione si sono considerate tutte le possibili combinazioni de' binarj, ternarj &c., escluse le simili, di un dato numero di quantità. Possono anche queste limitarsi per mezzo di due condizioni.

1. Nella combinazione de' binarj &c., si contengono le combinazioni delle medesime quantità. Si escludono ne' binarj le combinazioni delle quantità medesime, combinando ciascuna delle quantità colle altre. Così delle cinque quantità a, b, c, d, e, si combina a con b, c, d, e; si combina b con a, c, d, e; c con a, b, d, e; e con a, b, c, d. Il numero dunque de' binarj è $5 . 4 = 20$.

Si escludono ne' ternarj le combinazioni delle medesime quantità, combinando ciascuno de' 20 binarj con tre delle cinque quantità, che non si contengono nel binanario. Così *ab* si combina con *c*, *d*, *e*; *ac* con *b*, *d*, *e*; *ad* con *c*, *b*, *e*; *ae* con *b*, *c*, *d*; &c. Il numero dunque de' ternarj è il prodotto di 5. 4. 3 = 60.

Si escludono ne' quaternarj le combinazioni delle medesime quantità, combinando ciascuno dei 60 ternarj con due delle cinque quantità, che non si contengono nel ternario. Così *abc* si combina con *d*, *e*; *abe* con *c*, *d*; &c. Dunque il numero de' quaternarj è il prodotto di 5. 4. 3. 2 = 120.

Si escludono ne' quinarj le combinazioni delle medesime quantità, combinando ciascuno dei 120 quaternarj con una delle cinque quantità, che non si contiene nel quaternario. Così *a b c d* si combina con *e*; *a b d e* con *c*; *a b e c* con *d*; &c. Dunque il numero de' quinarj non differisce dal numero de' quaternarj.

Con quest' ordine si determinano i numeri de' binarj, ternarj, quaternarj, quinarj, senarj &c., di un qualunque numero di quantità, escludendo le combinazioni delle quantità medesime.

Così se le quantità sono sei, il numero de' binarj è 6. 5 = 30; de' ternarj è 6. 5. 4 = 120; de' quaternarj è 6. 5. 4. 3 = 360; de' quinarj è 6. 5. 4. 3. 2 = 720; de' senarj è 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720; &c.

2. Nel-

2. Nella combinazione de' binarj, ternarj &c., vi si contengono i binarj, ternarj &c., delle permutazioni delle medesime quantità.

Così ne' binarj *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *ba*, *bc*, *bd*, *be*, *ca*, *cb*, *cd*, *ce* &c., vi si contengono i binarj delle permutazioni delle due medesime quantità *ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *ad*, *da*, *ae*, *ea*, *bc*, *cb*, *bd*, *db* &c.

Ne' ternarj *abc*, *abd*, *abe*, *acb*, *acd*, *ace*, *adb*, *adc*, *ade* &c., vi si contengono i ternarj delle permutazioni delle medesime quantità *acb*, *abc*, *cab*, *cba*, *bac*, *bca* &c.

Similmente ne' quaternarj, quinarj &c., si contengono le permutazioni delle medesime quantità.

Si escludono dal numero de' binarj, ternarj, quaternarj &c.; i binarj, ternarj &c., delle permutazioni delle medesime quantità, rimanendone di questi in ciascuna serie soltanto uno; con dividere il numero de' binarj, ternarj, quaternarj &c., pei numeri delle permutazioni di due, tre, quattro &c. quantità.

Così se il numero delle quantità è 5,

il

il numero de' binarj è $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$; de' ternarj è $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$; de' quaternarj è $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$; de' quinarj $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$.

Lo ſteſſo ſi dice delle combinazioni delle quantità di maggior numero, eſcludendoſi dalla combinazione de' ſenarj, ſettenarj &c., le permutazioni delle quantità medeſime diverſamente combinate.

C A P. XV.

Delle Potenze de' Polinomj.

1. Le potenze de' polinomj si distinguono in gradi, come le potenze de' monomj; e si disegnano con porre i polinomj tra parentesi, o con linea superiore orizontale, e a destra il grado della potenza.

Così di $ab-cd+\frac{m}{n}$, di $\frac{a+b}{m-n}$, si disegnano le potenze seconde, terze &c.

$$\left(ab-cd+\frac{m}{n}\right)^{2},\quad \overline{ab-cd+\frac{m}{n}}^{\,2};$$

$$\left(\frac{a+b}{m-n}\right)^{2},\quad \frac{\overline{a+b}^{\,2}}{\overline{m-n}^{\,2}};\quad \left(ab-cd+\frac{m}{n}\right)^{3},$$

$$\left(\frac{a+b}{m-n}\right)^{3};\ \&c.$$

La

Le potenze de' denominatori si disegnano anche per gli esponenti negativi, permutando i denominatori in numeratori; come nel Cap. IV. N. IX. si è esposto delle frazioni monomie. Così $\left(\frac{1}{a+b}\right)^2$ $= (a+b)^{-2}$, $\left(\frac{c-m}{a+b}\right)^3 = (c-m)^3 \times (a+b)^{-3}$

II. Di un binomio $a+b$ la prima potenza è $a+b$. La seconda potenza si ha moltiplicandolo per se stesso, e riducendo i termini. Così

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab+b^2 \\ ab \\ \hline \text{qua. } a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

La terza potenza si ha moltiplicando

il

il quadrato per $a+b$, e riducendo i termini. Così $a^2+2ab+b^2$

$$a+b$$

$$a^3+2a^2b+ab^2$$
$$a^2b+2ab^2+b^3$$

Cub. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

La quarta potenza si ha moltiplicando il cubo per $a+b$, e riducendo i termini.

Così $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$a+b$$

$$a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3$$
$$a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4$$

4. Pot. $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

La quinta potenza si ha moltiplicando la potenza quarta per $a+b$. E procedendo si hanno tutte le potenze del binomio $a+b$.

III. La seconda potenza di $a+b$ contiene i quadrati a^2, b^2 di a, b, e il doppio prodotto di a in b. La terza potenza contiene i cubi a^3, b^3, e due tripli prodotti, di a^2 in b, di b^2 in a. La quarta potenza contiene le quarte potenze a^4, b^4, quattro prodotti di a^3 in b, sei prodotti di a^2 in b^2, e quattro di a in b^3 &c.

IV. I termini della seconda, terza, quarta &c. potenza, sono positivi; perche i termini del binomio $a+b$ sono positivi. Del binomio $-a-b$ i termini delle potenze pari sono positivi, e delle potenze dispari sono negativi. Perche nelle potenze pari i termini sono prodotti di negativo per negativo, e nelle dispari di positivo per negativo. Così il quadrato di $-a-b$

è $a^2+2ab+b^2$, prodotto di $-a-b$ per $-a-b$. Il cubo è $-a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$, prodotto di $a^2+2ab+b^2$ per $-a-b$ &c.

Se del binomio un termine è positivo, e l' altro negativo $a-b$, o $-a+b$; le potenze pari e dispari del binomio $a-b$ hanno i termini negativi, ne' quali $-b$ è di esponente disparo; positivi, ne' quali $-b$ è di esponente paro. Del binomio $-a+b$ le potenze pari e dispari hanno i termini negativi, ne' quali $-a$ è di esponente disparo; positivi, ne' quali $-a$ è di esponente paro.

Così il quadrato di $a-b$ è $a^2-2ab+b^2$; b^2 di esponente paro è positivo, $-2ab$ negativo. Il cubo è $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; $-b^3$, $-3a^2b$ sono negativi, $3ab^2$ positivo. Lo stesso è de' termini delle potenze di $-a+b$.

Le potenze pari di $a-b$, sia $a>b$, o $a<b$, sono positive; perche i prodotti di quantità positive, o negative, sono positivi.

Se

Se $a>b$ le potenze dispari di $a-b$ sono positive; perche sono prodotti di quantità positive. Se $a<b$ le potenze dispari sono negative, perche prodotti di quantità negative e positive.

V. Di un trinomio $a+b+c$ la prima potenza è lo stesso trinomio; la seconda è $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$; la terza è $a^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2+b^3+c^3+3abc$; &c.

La seconda potenza contiene i quadrati di ciascun termine, e il doppio prodotto di ciascun termine nell' altro. La terza potenza contiene i cubi di ciascun termine, il triplo prodotto del quadrato di ciascun termine nell' altro, e il triplo prodotto di tutti i termini.

Dalla formazione delle potenze superiori si fa noto, che ciascuna potenza del trinomio contiene simili potenze di ciascun termine, e che i prodotti sono potenze inferiori di ciascun termine nell' altro.

Se i termini del trinomio sono positivi, i termini delle potenze pari e dispari sono positivi. Se i termini del trinomio sono negativi, i termini delle potenze pari ſono poſitivi , e delle diſpari negativi . Perche le potenze pari ſono prodotti di quantità negative ; e le diſpari di quantità poſitive e negative .

Se del trinomio i termini ſono poſitivi e negativi ; i termini delle potenze pari e diſpari , ſono poſitivi e negativi .

Nelle potenze pari , le potenze di ciaſcun termine ſono poſitive ; i prodotti di ciaſcun termine nell' altro ſono poſitivi , ſe in queſti il termine negativo del trinomio è di eſponente paro ; ſono negativi , ſe in queſti il termine negativo è di eſponente diſparo . Perche nell' eſponente paro il prodotto è di negativo per negativo ; nell' eſponente diſparo , di poſitivo per negativo .

Nelle potenze diſpari , le potenze de' termini negativi ſono negative ; le potenze de' termini poſitivi ſono poſitive ; i prodotti de' termini ſono poſitivi , ſe in queſti il termine negativo è di eſponente paro ; ſono negativi , ſe il termine negativo è di eſponente diſparo , per l' addotta ragione .

VI. Di un polinomio $a+b+c+d+e$ &c, ciaſcun termine è del grado della potenza, al quale ſi eleva il polinomio ; i prodotdi ciaſcun termine nell' altro ſono della

me-

medesima dimensione, che la potenza del polinomio; perche i termini del polinomio hanno la medesima dimensione.

Se i termini del polinomio sono positivi, i termini delle potenze pari e dispari sono positivi. Se i termini del polinomio sono negativi; i termini delle potenze pari sono positivi, delle potenze dispari negativi. Se i termini del polinomio sono positivi e negativi; i termini delle potenze pari e dispari sono positivi, se gli esponenti de' termini negativi sono pari; negativi, se gli esponenti de' termini negativi sono dispari.

Le potenze pari negative di un polinomio sono quantità sorde, ed immaginarie. Perche le potenze pari di un polinomio positivo, o negativo, sono positive; come si è osservato nelle potenze del binomio.

VII. Le potenze di un polinomio si possono formare per mezzo delle potenze di un binomio. Sia il trinomio $a+b+c$. Si ponga $b+c=d$, sarà $a+d=a+b+c$. Si eleva il binomio $a+d$ alla potenza, che si vuole il trinomio $a+b+c$. Nei termini della potenza del binomio $a+d$ in vece di d, e delle sue potenze, si sostituiscono $b+c$, e le loro potenze; con questa sostituzione si ha la potenza del trinomio $a+b+c$.

Sia il quadrinomio $a+b+c+d$. Si pone $b+c+d=e$. Si eleva il binomio $a+e$ alla potenza. Nei termini della potenza del binomio, in vece di e, e delle sue potenze, si sostituiscono i termini $b+c+d$, e le loro potenze, che si rinvengono per le potenze di un altro binomio, ponendo $c+d=f$.

In questo modo un polinomio qualunque si eleva alla potenza per le potenze de' binomj con maggior facilità; perche delle potenze di un binomio se ne ha un metodo generale, del quale si tratta nel Cap. XVII.

VIII. Le frazioni de' polinomj si elevano a potenze, elevando alla medesima potenza il numeratore, e il denominatore della frazione per l' esposte regole. Così il quadrato di $\frac{a+b}{2m+3n}$, è $\frac{a^2+2ab+b^2}{4m^2+12mn+9n^2}$; il cubo è il prodotto del quadrato per $\frac{a+b}{2m+3n}$ &c.

CAP.

C A P. XVI.

Delle Radici de' Polinomj.

I. Le radici de' polinomj per rapporto alle potenze si distinguono in gradi, e s' indicano con esponenti fratti, o con segni radicali; ponendo tra parentesi i polinomj, o con soprapporvi una linea orizontale.

Così la radice seconda di $a^2 - b^2$ s' indica in uno di questi modi $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$, $\overline{a^2 - b^2}^{\,\frac{1}{2}}$, $\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$, $\pm\sqrt{\overline{a^2 - b^2}}$.

La radice terza di $2m - 3n + 4c$ s' indica

$$(2m-3n+4c)^{\frac{1}{3}}, \quad \overline{2m-3n+4c}^{\,\frac{1}{3}},$$

$$\sqrt[3]{(2m-3n+4c)}, \quad \sqrt[3]{\overline{2m-3n+4c}}.$$

La radice seconda di $\frac{a+b}{m-n}$ s' indica

$$\left(\frac{a+b}{m-n}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\overline{a+b}^{\,\frac{1}{2}}}{\overline{m-n}^{\,\frac{1}{2}}}, \quad \pm\sqrt{\frac{a+b}{m-n}},$$

$$\frac{\pm\sqrt{(a+b)}}{\pm\sqrt{(m-n)}} \quad \text{\&c.}$$

Le radici pari poichè possono essere positive, e negative; al segno radicale si prepone il segno positivo, e negativo.

Se il polinomio è positivo, le radici pari positive, e negative, sono reali. Se il polinomio è negativo, le radici pari sono im-

immaginarie. Così $\pm\sqrt{(a^2 - b^2)}$, se $a>b$, sono reali; se $a<b$, le due radici sono immaginarie.

Le radici dispari di un polinomio negativo sono negative; di un polinomio positivo, sono positive. Così $\sqrt[3]{(a^2 - b^2)}$, se $a>b$ è positiva; se $a<b$, è negativa.

Quanto si è detto delle radici de' monomj nel Cap. VI., si applica alle radici de' polinomj con sostituirne di questi le operazioni.

II. Si estraggono le radici de' polinomj con metodi inversi delle potenze. Un polinomio quadrato ha tanti termini quadrati, quanti sono i termini delle radici; e i doppj prodotti di un termine nell' altro. La radice dunque quadra si estrae in questo modo.

Si ordinano i termini del polinomio secondo qualche lettera. Dal primo termine si estrae la radice, che sarà il primo termine della radice del polinomio. Pe'l doppio di questo primo termine della radice si divide il secondo termine del polinomio; il quoziente è il secondo termine della radice del polinomio. La somma del quadrato del primo termine della radice, del doppio prodotto del primo termine nel secondo, e del quadrato del secondo termine della radice, si sottrae dal polinomio.

Si addoppiano i due termini della radice, e pe'l primo di questi due termini, si divide il primo termine del residuo; il quoziente è il terzo termine della radice. La somma del prodotto de' due primi termini addoppiati della radice pe'l terzo termine, e del quadrato del terzo termine, si sottrae dal residuo.

Si addoppiano i tre termini della radice, e pe'l primo di questi tre termini addoppiati si divide il primo termine del secondo residuo; il quoziente è il quarto termine della radice. La somma de' prodotti de' tre termini addoppiati della radice pe'l quarto termine, e del quadrato del quarto termine, si sottrae dal secondo residuo.

Con quest' ordine si procede nella divisione da residuo in residuo, finchè il residuo sia nullo. La somma di tutti i termini delle radici parziali è la radice positiva del polinomio. Si ha la radice negativa, mutando i segni de' termini + in −, − in + della radice totale.

ESEM-

ESEMPIO I.

Si domanda la radice quadra di $4a^6 + 16a^3b^2 + 16b^4$.

Il primo termine $4a^6$ è quadrato di $2a^3$; l' ultimo termine $16b^4$ è quadrato di $4b^2$, il termine medio $16a^3b^2$ è doppio prodotto di $2a^3$ in $4b^2$. Dunque il trinomio è perfetto quadrato, e la sua radice è $2a^3 + 4b^2$, o pure $-2a^3 - 4b^2$.

Secondo l'esposta regola si ordina il trinomio per la lettera a, o b.

$$\begin{array}{l|l} 4a^6 + 16a^3b^2 + 16b^4 & 2a^3 + 4b^2 \\ \cline{2-2} & 4a^3 \\ -4a^6 - 16a^3b^2 - 16b^4 & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Si

Si estrae la radice $2a^3$ da $4a^6$. Pe'l doppio di questa radice $2a^3$ si divide il secondo termine $16a^3b^2$; il quoziente è $4b^2$. La somma del quadrato di $2a^3$, del doppio prodotto di $2a^3$ per $4b^2$, e del quadrato $4b^2$ si sottrae dal trimonio. Il residuo è nullo. Dunque la radice quadra è $2a^3 + 4b^2$, o pure $-2a^3 - 4b^2$.

ESEMPIO II.

Si domanda la radice quadra di $4bc + 4b^2 - 12ab + 9a^2 - 6ac + c^2$.

Si ordini il polinomio per la lettera a.

Si estrae la radice $3a$ dal primo termine $9a^2$. Per $6a$, doppio di $3a$, si divide il secondo termine $-12ab$; il quoziente è $-2b$. La somma del quadrato di $3a$, del prodotto di $6a$ per $-2b$, e del quadrato di $-2b$ si sottrae dal polinomio.

$$\begin{array}{l|l} 9a^2 - 12ab - 6ac + 4bc + 4b^2 + c^2 & 3a - 2b - c \\ \hline & 6a \\ & \\ -9a^2 + 12ab - 4b^2 & 6a - 4b \\ \hline -6ac + 4bc + c^2 & \\ +6ac - 4bc - c^2 & \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 & \end{array}$$

Si addoppiano i due termini $3a - 2b$, e per $6a$ si divide il primo termine $6ac$ del residuo; il quoziente è $-c$. La somma del prodotto di $6a - 4b$ per $-c$, e del quadrato di $-c$, si sottrae dal residuo. Il secondo residuo è nullo. Dunque la radice è $3a - 2b - c$.

Se la radice del primo termine $9a^2$ si prende negativa, $-3a$, la radice sarebbe $-3a + 2b + c$.

III.

III. Se un polinomio ha fattori quadrati, l'espressione radicale si risolve in parte, come ne' monomj. Così $\sqrt{(3a^3c-6a^2cb+3ab^2c)}=\sqrt{(a^2-2ab+b^2)}.3ac=\overline{a-b}.\sqrt{3ac}$; $\sqrt{(405a^5+162a^4b)}=\sqrt{(5a+2b)}.81a^4=9a^2\sqrt{(5a+2b)}$.

IV. Dai polinomj, che non sono quadrati, si estraggono le radici prossime. La formula generale dell' estrazioni delle radici da un polinomio si ha dall' estrazione della radice di un binomio, che si stabilisce di questa forma $m^2 \pm n$. Il primo termine m^2 si pone positivo, ed il secondo col doppio segno, potendo essere positivo, e negativo.

Per l' esposto metodo si estrae la radice da detto binomio.

$$m^2 \pm n \qquad\qquad m \pm \frac{n}{2m} \ \&c.$$

$$\frac{2m}{2m}$$

$$-m^2 \mp n - \frac{n^2}{4m^2} \qquad\qquad 2m \pm \frac{n}{m}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \qquad \&c. \quad \&c.$$

$$-\frac{n^2}{4m^2}$$

$$\frac{n^2}{4m^2} \pm \frac{n^3}{8m^4} - \frac{n^4}{64m^6}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$\pm \frac{n^3}{8m^4} - \frac{n^4}{64m^6}$$

&c. &c.

Si

Si prende la radice m da m^2. Per $2m$ doppio del primo termine m della radice si divide il secondo termine $\pm n$ del binomio; il quoziente $\pm \frac{n}{2m}$ è il secondo termine della radice. La somma del quadrato di m, del doppio prodotto di $2m$ per $\pm \frac{n}{2m}$, e del quadrato di $\pm \frac{n}{2m}$ si sottrae dal binomio.

Si divide il residue $-\frac{n^2}{4m^2}$ per $2m$ primo termine de' due doppj termini $2m \pm \frac{n}{m}$ della radice; il quoziente $-\frac{n^2}{8m^3}$ è il è il terzo termine della radice. La somma del doppio prodotto de' due termini della radice pe'l terzo termine, e del quadrato del terzo termine si sottrae dal residuo.

Si divide il primo termine dei tre termini $2m \pm \frac{n}{m} - \frac{n^2}{4m^3}$ addoppiati della radice; il quoziente $+ \frac{n^3}{16m^5}$ è il quarto termine della radice. La somma del doppio prodotto dei tre termini della radice pe'l quarto, e del quadrato del quarto termine, si sottrae dal secondo residuo &c.

Dai successivi residui è manifesto, che si ha una serie di termini della radice senza fine.

Il segno + ne' termini della radice disegna la radice di $m^2 + n$; il segno − disegna la radice di $m^2 - n$. Poichè la radice quadra è positiva e negativa; si ha la la radice negativa cambiando il segno + in −, il − in + ne' termini della radice.

Se $m^2 > n$, o $m^2 = n$, la serie de' termini della radice è convergente. Se $m^2 < n$, la radice di $m^2 - n$ è immaginaria, e si ha una serie divergente del valore immaginario.

V. Colla premessa formula si estrae la radice da un trinomio, quatrinomio &c. di valore positivo. Si divide il polinomio in due parti, delle quali una sia positiva, e maggiore, o uguale all' altra, se questa è di valore positivo. La prima si pone $= m^2$, la seconda $= \pm n$. Nella serie della radice in vece di m, m^3, m^5 &c., di n^2, n^3 &c. si sostituiscono i corrispondenti valori, e la serie convergente esprimerà la radice prossima del polinomio.

Sia il quatrinomio $a+b+c+d$, ed $a+b$ una quantità positiva maggiore di $c+d$. Si pone $a+b = m^2$, $c+d = n$; sarà $\sqrt{a+b} = m$, $\overline{a+b}\sqrt{a+b} = m^3$, $\overline{a+b}^2 \cdot \sqrt{a+b}$

$= m$

$\pm m^5$ &c., $\overline{c+d}^2 = n^2$, $\overline{c+d}^3 = n^3$ &c., e la ſerie convergente della radice ha il primo termine irrazionale, i numeratori razionali delle frazioni, e i denominatori irrazionali pe'l comune fattore $\sqrt{a+b}$; il quale può ridurſi in ſerie, che avrà un monomio irrazionale per primo termine, e per fattore comune dei denominatori delle frazioni. Se nella ſerie della radice del quatrinomio ſi ſoſtituiſce un proſſimo valore della radice $a+b$, nei termini della ſerie ſi avrà un monomio irrazionale.

Sia il polinomio $a^2 + 2ab + b^2 - cd$. Si pone $a^2 + 2ab + b^2 = m^2$, $-cd = -n$; ſarà $a+b = m$, $\overline{a+b}^3 = m^3$, $\overline{a+b}^5 = m^5$ &c., $c^2 d^2 = n^2$, $-c^3 d^3 = -n^3$ &c., e la ſerie convergente della radice del polinomio razionale.

Sia $a^2 + cd - mf$. Si pone $a^2 = m^2$, $cd - mf = n$, e ſoſtituiti i valori di m, n nella ſerie della radice, queſta ſarà razionale.

VI. Un polinomio cubo ha tanti termini cubi, quanti sono i termini delle radici, e i tripli prodotti de' quadrati di un termine nell' altro. Si estrae la radice cuba da un polinomio, ordinando i termini secondo qualche lettera.

Dal primo termine si estrae la radice cuba. Si triplica il quadrato di questa radice, e per questo triplo quadrato si divide il secondo termine del polinomio; il quoziente è il secondo termine della radice. La somma del cubo del primo termine della radice, del triplo prodotto del quadrato del primo termine nel secondo, del triplo prodotto del quadrato del secondo termine nel primo, e del cubo del secondo termine della radice, si sottrae dal polinomio.

Si divide il primo termine del residuo pe'l primo termine del triplo quadrato de' due termini della radice; il quoziente è il terzo termine della radice. La somma del triplo prodotto del quadrato dei due termini nel terzo termine, del triplo prodotto del quadrato del terzo termine ne' due primi termini, e del cubo del terzo termine della radice, si sottrae dal residuo.

Si divide il primo termine del secondo residuo pe'l primo termine del triplo quadra-

dra-

drato dei tre termini della radice; il quoziente è il quarto termine. La somma de' prodotti del triplo quadrato de' tre termini nel quarto, del triplo quadrato del quarto termine nei tre primi, e del cubo del quarto termine, si sottrae dal secondo residuo.

Si procede da residuo in residuo, finchè l' ultimo residuo è nullo. La somma delle radici parziali è la radice cuba del polinomio.

ESEMPIO.

Si domanda la radice cuba di $27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3 + 27a^2c - 36abc + 12b^2c + 9ac^2 - 6bc^2 + c^3$.

Si dispone il polinomio secondo la lettera a.

$$\left\{\begin{array}{l} 27a^3 - 54ba^2 + 36b^2a - 8b^3 \\ \qquad + 27ca^2 - 36bca + 12b^2c \\ \qquad\qquad + 9c^2a - 6bc^2 + c^3 \end{array}\right. \qquad \underline{3a - 2b + c}$$

$$- 27a^3 + 54ba^2 - 36b^2a + 8b^3$$

$$\left\{\begin{array}{l} 27ca^2 - 36bca + 12b^2c \\ \qquad + 9c^2a - 6bc^2 + c^3 \end{array}\right.$$

$$- 27ca^2 + 36bca - 12b^2c$$

$$- 9c^2a + 6bc^2 - c^3$$

$$0 \quad 0 \quad 0$$

La

La radice cuba di $27a^3$ è $3a$. Si divide il ſecondo termine $-54ba^2$ del polinomio per $27a^2$ triplo quadrato di $3a$. Il quoziente è $-2b$. La ſomma del cubo di $3a$, dei prodotti del triplo quadrato di $3a$ in $-2b$, del triplo quadrato di $-2b$ in $3a$, e del cubo di $-2b$, ſi ſottrae dal polinomio.

Si divide il primo termine $27a^2c$ del reſiduo pe'l primo termine del triplo quadrato di $3a-2b$; il quoziente è c terzo termine della radice. La ſomma dei prodotti del triplo quadrato di $3a-2b$ in c, del triplo quadrato di c in $3a-2b$, e del cubo c, ſi ſottrae dal reſiduo. Il ſecondo reſiduo è nullo. Dunque la radice cuba del polinomio è $3a-2b+c$.

VII. Da un polinomio non cubo la radice ſi ha in una ſerie infinita di termini; come ſi è oſſervato nelle radici quadre. Se il polinomio è poſitivo, la ſua radice cuba è poſitiva; è negativa, ſe il polinomio è negativo. La radice cuba del binobio $m^3 + n$ è di formula generale per l' eſtrazioni delle radici cube de' trinomj, quadrinomj &c.

$$
\begin{array}{ll}
m^3 + n & \quad m + \dfrac{n}{3m^2} \text{ \&c.} \\[2ex]
-m^3 - n - \dfrac{n^2}{3m^3} - \dfrac{n^3}{27m^6} & \\[2ex]
\hline
- \dfrac{n^2}{3m^3} - \dfrac{n^3}{27m^6} & \\[1ex]
\text{\&c.} \qquad \text{\&c.} &
\end{array}
$$

La radice cuba di m^3 è m. Si divide il ſecondo termine n del binomio per $3m^2$ triplo quadrato di m; il quoziente $\dfrac{n}{3m^2}$ è il ſecondo termine della radice. La ſomma del

del cubo di m, dei due prodotti del triplo quadrato di m in $\frac{n}{3m^2}$, del triplo quadrato di $\frac{n}{3m^2}$ in m, e del cubo di $\frac{n}{3m^2}$, si sottrae dal binomio.

Il primo termine del residuo si divide pe'l primo termine del triplo quadrato di m $+ \frac{n}{3m^2}$; il quoziente $\frac{-n^2}{9m^5}$ è il terzo termine della radice. La somma de' due prodotti del triplo quadrato de' due primi termini della radice nel terzo, del triplo quadrato del terzo termine ne' due primi, e del cubo del terzo termine, si sottrae dal residuo.

Il primo termine del secondo residuo si divide pe'l primo termine del triplo quadrato dei tre termini della radice; il quoziente $\frac{5n^3}{81m^8}$ è il quarto termine della radice. La somma dei due prodotti del triplo quadrato dei tre primi termini nel quarto, del triplo quadrato del quarto termine ne' tre primi, e del cubo del quarto termine, si sottrae dal secondo residuo.

Si procede da residuo in residuo collo stesso metodo, e i termini della radice sono infiniti.

Da ciò, che si è detto delle radici quadre, è facile l' applicazione dell' esposta serie della radice cuba del binomio alle radici cube d' un trinomio, quatrinomio &c.

VIII. Questo metodo di estrarre le radici quadre, e cube dalla formazione de' quadrati, e de' cubi de' polinomj, può applicarsi alle radici, quarta, quinta &c.; ma i calcoli si aumentano all' eccesso. Nel Cap. XVIII. si espone una formula generale dell' estrazione della radice di qualunque grado da un binomio, la quale con facilità si applica alle radici de' polinomj.

IX. Le radici delle frazioni de' polinomj si hanno, estraendo le radici dal numeratore, e dal denominatore, esatte, o

ap-

approssimanti. La frazione espressa dalle radici è la radice esatta, o approssimante della frazione.

CAP. XVII.

Della Formula delle Potenze del Binomio.

I. LA formula delle potenze del binomio $a+b$ si deduce dalla seguente serie de' termini delle successive potenze del binomio, incominciando dalla prima, con ridurre i termini simili di ciascuna potenza.

$$a+b = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7 b + 28a^6 b^2 + 56a^5 b^3 + 70a^4 b^4 + 56a^3 b^5 + 28a^2 b^6 + 8ab^7 + b^8$$

$$(a+b)^9 = a^9 + 9a^8 b + 36a^7 b^2 + 84a^6 b^3 + 126a^5 b^4 + 126a^4 b^5 + 84a^3 b^6 + 36a^2 b^7 + 9ab^8 + b^9$$

$$(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9 b + 45a^8 b^2 + 120a^7 b^3 + 210a^6 b^4 + 255a^5 b^5 + 210a^4 b^6 + 120a^3 b^7 + 45a^2 b^8 + 10ab^9 + b^{10}$$

&c. &c. &c.

Nell'

Nell' esposta serie delle potenze del binomio sono da considerarsi i coefficienti de' termini, gli esponenti, e i prodotti di a, b. Dalla formazione di tutti questi si determina la formula delle potenze del binomio.

II. Il primo, e l' ultimo termine delle potenze del binomio sono le quantità a, b del grado della potenza. Della prima potenza a, b sono del primo grado. Della seconda a^2, b^2 sono del secondo grado. Della terza a^3, b^3 del terzo grado &c.

I termini medj d' ogni potenza dopo la prima, sono prodotti tali delle potenze a, b, che la somma degli esponenti di ciascun prodotto è uguale al grado della potenza. Della seconda potenza, il secondo termine ab ha la somma degli esponenti $=2$. Della terza potenza, il secondo termine a^2b, e il terzo ab^2 hanno la somma degli esponenti $=3$. Della quarta il secondo termine a^3b, il terzo a^2b^2, e il quarto ab^3, hanno la somma degli esponenti $=4$ &c.

Le

Le potenze di a nel primo termine di ciascuna potenza del binomio, sono del grado della potenza; ne' seguenti termini successivamente diminuiscono di 1. Al contrario le potenze di b nel secondo termine sono di primo grado, e ne' seguenti successivamente aumentano di 1 fino all' ultimo termine, che contiene il solo b della medesima potenza, che il primo termine.

Il numero de' termini di ciascuna potenza $a+b$ supera il grado della potenza di 1; dimodochè le potenze pari hanno un numero disparo di termini, e le dispari un numero paro. Così la prima potenza $a+b$ ha due termini. La seconda $a^2 + 2ab + b^2$ ne ha tre. La terza ne ha quattro. La quarta ne ha cinque &c.

Nelle potenze pari il termine medio è un prodotto di a in b con uguali esponenti. Così della seconda potenza il termine medio è ab; della quarta è $a^2 b^2$, la sesta $a^3 b^3$ &c.

Nelle potenze dispari i due termini medj sono prodotti di a in b con esponenti, che differiscono di 1. Così i due termini me-

medj della terza potenza sono a^2b, ab^2; della quinta a^3b^2, a^2b^3; della settima a^4b^3, a^3b^4 &c.

III. Delle premesse considerazioni se ne deduce la formula delle potenze del binomio, esclusi i coefficienti de' termini.

Sia m l'esponente intero, e positivo del binomio $a+b$; sarà $(a+b)^m = a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 + a^{m-4}b^4$ &c.

Il secondo membro dell'equazione è una serie, che si determina dal valore di m.

Se $m=1$, sarà $(a+b)^m = a+a^{1-1}b = a+b$; perche $a^{1-1} = a^0 = 1$. Se $m=2$, sarà $(a+b)^2 = a^2 + a^{2-1}b + a^{2-2}b^2 = a^2+ab+b^2$. Se $m=3$, sarà $(a+b)^3 = a^3 + a^{3-1}b + a^{3-2}b^2 + a^{3-3}b^3 = a^3 + a^2b + ab^2\ b^3$ &c.

Se

Se in vece di 1, 2, 3, 4, 5 &c., i quali ſono gli eſponenti di b, che ſucceſſivamente ſi ſottraggono da m eſponente di a, ſi pone n; il ſecondo membro dell' equazione ſi eſprime con due termini $(a+b)^m = a^m + a^{m-n} b^n = a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2$ &c. Qualunque ſia il valore di m intero e poſitivo, l' ultimo termine della ſerie ha per eſponente di a, $m=n$.

IV. Il primo, e l'ultimo termine delle potenze del binomio hanno per coefficiente l' unità. Il ſecondo termine delle potenze del binomio dopo la prima ha per coefficiente l' eſponente del primo termine. I coefficienti degli altri termini ſi aumentano fino al termine medio, e poi con ordine inverſo decreſcono fino al coefficiente dell' ultimo termine. Se i termini della potenza del binomio ſono di numero pari, i due termini medj hanno i medeſimi coefficienti.

Se invece del binomio $a+b$ ſi eleva a ſucceſſive potenze 1+1, i termini delle potenze di 1+1 ſono i coefficienti delle potenze di $a+b$.

V. Si hanno i coefficienti numerici de' termini delle potenze del binomio $a+b$ dalla la riduzione de' termini, che contengono le medesime quantità diversamente ordinate; e questi corrispondono alle dissimili permutazioni delle quantità di ciascun termine, Cap. XIV. N. II.; come si fa manifesto dalla successiva moltiplicazione delle potenze di $a+b$.

Nella prima potenza i due termini $a+b$ hanno per coefficienti l' unità.

Nella seconda i due termini estremi a^2, b^2 prodotti di quantità simili hanno per coefficiente l' unità; il termine medio ab ha per ceefficiente 2, e due sono le dissimili permutazioni.

Nella terza i due termini estremi a^3, b^3, hanno per coefficiente l' unità, e i due medj a^2b, ab^2 hanno per coefficiente 3 e tre sono le dissimili permutazioni di a^2b, di ab^2.

Nella quarta i due estremi a^4, b^4 hanno per coefficiente l' unità; il secondo ter-

mi-

mine $a^3 b$ ha per coefficiente 3, e tre sono le dissimili permutazioni di $a^3 b$; il terzo termine $a^2 b^2$ ha per coefficiente 6, e sei sono le dissimili permutazioni di $a^2 b^2$; il quarto ab^3 ha per coefficiente 3, e tre sono le dissimili permutazioni di ab^3. Lo stesso si dice de' termini delle potenze superiori.

Similmente si dimostra, che i termini delle potenze di un trinomio $a+b+c$ di un quatrinomio, $a+b+c+d$ &c., hanno per coefficiente i numeri delle permutazioni dissimili delle quantità, che contengono. Perche ciascuna quantità di un trinomio, di un quatrinomio &c., si moltiplica per ciascuna quantità di un trinomio, di un quatrinomio &c.; i termini del prodotto si moltiplicano per ciascuna quantità dello stesso fattore &c., e risultano tanti prodotti simili di ciascun termine delle potenze del trinomio, quatrinomio &c., quante sono le permutazioni dissimili delle quantità, che vi si contengono.

VI. Ciascun termine dunque della formula $a^m + a^{m-1}b + a^{m-2}b^2 + a^{m-3}b^3 \ldots + a^{m-n}b^n$, contiene un numero m di quantità, ed ha per coefficiente il numero delle dissimili permutazioni delle quantità, che vi si contengono. Il numero delle permutazioni delle quantità m, è $m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ m-n$, finchè $m-n=1.$, Cap. XIV. N. 1. Dunque

Il coefficiente del primo termine a^m, che contiene quantità simili ma, è

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ m-n}{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ m-n}=1.$$

Il coefficiente del secondo termine $a^{m-1}b$, che contiene quantità simili $(m-1.)\ a$, è

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ m-n}{m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ m-n}=m.$$

Il coefficiente del terzo termine $a^{m-2} b^2$, che contiene quantità simili $(m-2.)\, a,\ 2b$,

$$è \; \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ldots m-n}{m-2.\ m-3 \ldots\ldots m-n.\ 1.\ 2} = \frac{m.\ m-1}{1.\ 2}$$

Il coefficiente del quarto termine $a^{m-3} b^3$, che contiene quantità simili $(m-3.)\, a,\ 3b$,

$$è \; \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots\ldots m-n}{m-3 \ldots\ldots m-n.\ 1.\ 2.\ 3.} = \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}$$

Dai premessi coefficienti si deduce, che il coefficiente del seguente termine è il quoziente di una frazione, che ha per numeratore il prodotto degli esponenti di *a* ne' termini antecedenti, e per denominanatore il prodotto de' numeratori della serie 1, 2, 3, 4 &c. secondo il numero de' termini, che precedono. Dunque la formula delle potenze del binomio è a^{m}

$$+m\,a^{m-1}\,b+\frac{m.m-1}{1.2}.a^{m-1}\,b^{2}$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.a^{m-3}\,b^{3}+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.\,2.\,3.\,4}.$$

$$a^{m-4}\,b^{4}+\ldots\frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4\ldots m-n}{1.\,2.\,3.\,4\ldots.\,n}.$$

$$a^{m-n}\,b^{n}.$$

L' ultimo termine delle serie è b coll' esponente $n=m$, ed il suo coefficiente è 1. Il termine seguente è nullo; perche un fattore del suo coefficiente è $m-n=0$.

C A P. XVIII.

Della Formula delle Potenze Fratte, e delle Potenze espresse per Esponenti Negativi Interi e Fratti del Binomio.

I. Nell' esposta formula di $(a+b)^m$

$$= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}.a^{m-2}b^2 +$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.a^{m-3}b^3$$ &c.; se in vece di

m si pone $\frac{m}{n}$, sarà $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} +$

$$\frac{m}{n}.a^{\frac{m}{n}-1}b + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.a^{\frac{m}{n}-2}b^2$$

$+$

$$\frac{\frac{m}{n}.\left(\frac{m}{n}-1\right).\left(\frac{m}{n}-2\right)}{1.\ 2.\ 3}.a^{\frac{m}{n}-3}\,b^{3}\ \&c.$$

Le potenze espresse per esponenti negativi interi e fratti di un binomio sono frazioni, che hanno per numeratore l' unità, e per denominatore le potenze del binomio. Così $(a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^{m}}$;

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}}.$$

Se nella formula del binomio in vece di m si pone $-m$, sarà $(a+b)^{-m} = a^{-m}$
$-ma$

$$-ma^{-m-1}b+\frac{-m.-m-1}{1.2}.a^{-m-2}b^{2}+$$

$$\frac{-m.-m-1.-m-2}{1.2.3}.a^{-m-3}b^{3}\ \&c.$$

Se in vece di m ſi pone $-\frac{m}{n}$, ſarà

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}}=a^{-\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}.a^{-\frac{m}{n}-1}b+$$

$$\frac{-\frac{m}{n}.-\frac{m}{n}-1}{1.2}.a^{-\frac{m}{n}-2}b^{2}\ \&c.$$

Queſte diverſe formule delle potenze ſi dimoſtrano dalla premeſſa formula delle potenze poſitive intere del binomio, la quale nel Cap. prec. ſi è dedotta dall'origine delle potenze.

II. Si diſponga $a+b$ in queſta forma

$a\left(1+\frac{b}{a}\right)$, e posto $\frac{b}{a}=d$; sarà $a+b=$ $a(1+d)$, e $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}.(1+d)^{\frac{m}{n}}$.

Si supponga $(1+d)^{\frac{m}{n}} = 1+\frac{m}{n}d+$

$$\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1.\frac{m}{n}-2}{1.2.3}.d^3 \text{ \&c.}$$

L' uno e l' altro membro dell' equazione si elevino alla potenza n; sarà $(1+d)^m =$

$$\left(1+\frac{m}{n}d+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{1.2}\cdot d^{2}\ \&c.\right)^{n}$$

Si ponga $p=\frac{m}{n}d+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^{2}$ &c.; sarà $(1+d)^{m}=(1+p)^{n}$, e $1+md+\frac{m.\,m-1}{1.2}.d^{2}+\frac{m.m-1.\,m-2}{1.2.3}.d^{3}$ &c. $=1+np+\frac{n.\,n-1}{1.2}.p^{2}+\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.2.3}.p^{3}$ &c.

Nel secondo membro se in vece di p, p^{2}, p^{3}, &c. si pongono i corrispondenti va-

valori dell' equazione $p = \frac{m}{n} d + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2$ &c.; i termini del secondo membro sono i medesimi, che i termini del primo. Perche

$$1 = 1$$

$$np = n.\frac{m}{n} d + n\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2 \text{ \&c.}$$

$$n.\frac{n-1}{1.2}.p^2 = n.\frac{n-1}{1.2}.\frac{m^2}{n^2}.d^2 \text{ \&c.}$$

$$n.\frac{n-1.n-2}{1.2.3}.p^3 = \text{ \&c. \quad \&c.}$$

$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

$$1+np+\frac{n.n-1}{1.2}.p^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.p^3 \text{ \&c.} =$$

$$1+md+\frac{m.m-1}{1.2}.d^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.d^3 \text{ \&c.}$$

Dun-

Dunque $(1+d)^{m} = (1+p)^{n}$, e l' equazioni, che precedono, sono vere. Dunque

$$(1+d)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} d + \frac{\frac{m}{n} \cdot \left(\frac{m}{n} - 1\right)}{1.\ 2} . d^{2} \ \&c.$$

Se l' uno, è l' altro membro dell' equazione si moltiplicano per $a^{\frac{m}{n}}$, e in vece di d si pone il suo valore $\frac{b}{a}$ si ha l' equazione proposta $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n} - 1} b$.

+

$$+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{1.2}\cdot a^{\frac{m}{n}-2}b^{2}+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1\cdot\frac{m}{n}-2}{1.2.3}\cdot$$

$$a^{\frac{m}{n}-3}b^{3}$$ &c. Ciò, che si dovea dimostrare.

III. Coll' esposta formula si hanno le radici prossime de' binomj in una serie infinita di frazioni. Così se $m=1$, $n=2$, si ha

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}b+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1}{1.2}\cdot a^{\frac{1}{2}-2}b^{2}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}-2}{1.2.3}\cdot a^{\frac{1}{2}-3}b^{3}\ \&c.=\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$-\frac{b^2}{8a\sqrt{a}}+\frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} \text{ \&c.}$$

Se $m=1$, $n=3$, si ha $(a+b)^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}$

$$+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}b+\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1}{1.2}.a^{\frac{1}{3}-2}b^2 \text{ \&c.}$$

$$=\sqrt[3]{a}+\frac{b}{3\sqrt[3]{a^2}}-\frac{b^2}{9a\sqrt[3]{a^2}} \text{ \&c.}$$

IV. Per mezzo delle radici del binomio si rinvengono le radici de' polinomj, se questi hanno radici esatte; perchè colle debite sostituzioni i termini della serie, che non appartengono alla radice del polinomio, si annullano.

Sia

Sia il trinomio $c^2 + 2cd + d^2$, del quale ſi cerca la radice ſeconda. Si ponga $a = c^2$, $b = 2cd + d^2$, $m = 1$, $n = 2$, e ſoſtituiti i valori di a, b, m, n, nella ſerie della radice del binomio ſi ha

$$\sqrt{a} = c$$

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} = d + \frac{d^2}{2c}$$

$$-\frac{b^2}{8a\sqrt{a}} = -\frac{d^2}{2c} - \frac{d^3}{2c^2} - \frac{d^4}{8c^3}$$

$$\frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} = \frac{d^3}{2c^2} + \frac{3d^4}{4c^3} + \text{\&c.}$$

&c. &c.

La ſomma di tutti i termini è $c+d$ radice di $c^2+2cd+d^2$. Perche il ſecondo termine $\frac{d^2}{2c}$ della ſeconda equazione ſi annulla dal primo termine $-\frac{d^2}{2c}$ della terza equazione; il ſecondo termine $-\frac{d^3}{2c^2}$ della terza equazione ſi annulla dal primo $\frac{d^3}{2c^2}$ della quarta equazione; il terzo termine $-\frac{d^4}{8c^3}$ della terza equazione, e il primo della

quin-

quinta $-\frac{5d^4}{8c^3}$ ſi annullano dal ſecondo termine $\frac{3d^4}{4c^3}$ della quarta equazione; e così tutti i termini ſeguenti ſi diſtruggono.

V. Le radici proſſime de' numeri ſi hanno diſponendo i numeri in modo, che le ſerie delle radici del binomio ſieno razionali, e convergenti.

Così la radice di 2 è tra 1 e 2. Se $2^{\frac{1}{2}}$ ſi diſpone in $1+1=a+b$; ſarà $(1+1)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ &c. I due primi $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ danno un valore maggiore della radice di 2;

mine $a^3 b$ ha per coefficiente 3, e tre sono le dissimili permutazioni di $a^3 b$; il terzo termine $a^2 b^2$ ha per coefficiente 6, e sei sono le dissimili permutazioni di $a^2 b^2$; il quarto ab^3 ha per coefficiente 3, e tre sono le dissimili permutazioni di ab^3. Lo stesso si dice de' termini delle potenze superiori.

Similmente si dimostra, che i termini delle potenze di un trinomio $a+b+c$ di un quatrinomio, $a+b+c+d$ &c., hanno per coefficiente i numeri delle permutazioni dissimili delle quantità, che contengono. Perche ciascuna quantità di un trinomio, di un quatrinomio &c., si moltiplica per ciascuna quantità di un trinomio, di un quatrinomio &c.; i termini del prodotto si moltiplicano per ciascuna quantità dello stesso fattore &c., e risultano tanti prodotti simili di ciascun termine delle potenze del trinomio, quatrinomio &c., quante sono le permutazioni dissimili delle quantità, che vi si contengono.

VI.

VI. Ciascun termine dunque della formula $a^m + a^{m-1} b + a^{m-2} b^2 + a^{m-3} b^3 \ldots + a^{m-n} b^n$, contiene un numero m di quantità, ed ha per coefficiente il numero delle dissimili permutazioni delle quantità, che vi si contengono. Il numero delle permutazioni delle quantità m, è $m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots m-n$, finchè $m-n = 1.$, Cap. XIV. N. 1. Dunque

Il coefficiente del primo termine a^m, che contiene quantità simili ma, è

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots m-n}{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots m-n} = 1.$$

Il coefficiente del secondo termine $a^{m-1} b$, che contiene quantità simili $(m-1.)\ a$, è

$$\frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots m-n}{m-1.\ m-2.\ m-3 \ldots m-n} = m.$$

Il coefficiente del terzo termine $a^{m-2}b^{2}$, che contiene quantità simili $(m-2.)\,a,\ 2b$,

$$\text{è } \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3\ \ldots\ m-n}{m-2.\ m-3\ \ldots\ m-n.\ 1.\ 2} = \frac{m.\ m-1}{1.\ 2}$$

Il coefficiente del quarto termine $a^{m-3}b^{3}$, che contiene quantità simili $(m-3.)\,a,\ 3b$,

$$\text{è } \frac{m.\ m-1.\ m-2.\ m-3\ \ldots\ m-n}{m-3\ \ldots\ m-n.\ 1.\ 2.\ 3.} = \frac{m.\ m-1.\ m-2}{1.\ 2.\ 3.}$$

Dai premessi coefficienti si deduce, che il coefficiente del seguente termine è il quoziente di una frazione, che ha per numeratore il prodotto degli esponenti di *a* ne' termini antecedenti, e per denominanatore il prodotto de' numeratori della ſe-rie 1, 2, 3, 4 &c. ſecondo il numero de' termini, che precedono. Dunque la formula delle potenze del binomio è a^m

$$+ m a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} . a^{m-1} b^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} . a^{m-3} b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4} .$$

$$a^{m-4} b^4 + \ldots \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4 \ldots m-n}{1.2.3.4 \ldots n} .$$

$$a^{m-n} b^n .$$

L' ultimo termine delle ſerie è b coll' eſponente $n = m$, ed il ſuo co efficiente è 1. Il termine ſeguente è nullo; perche un fattore del ſuo coefficiente è $m-n = 0$.

C A P. XVIII.

Della Formula delle Potenze Fratte, e delle Potenze espresse per Esponenti Negativi Interi e Fratti del Binomio.

I. NEll' esposta formula di $(a+b)^m$ $= a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}.a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.a^{m-3}b^3$ &c.; se in vece di m si pone $\frac{m}{n}$, sarà $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} +$ $\frac{m}{n}.a^{\frac{m}{n}-1}b + \frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.a^{\frac{m}{n}-2}b^2$

+

$$\frac{\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{m}{n}-1\right)\cdot\left(\frac{m}{n}-2\right)\left(\frac{m}{n}-3\right)}{1.\ 2.\ 3}\cdot a \qquad b^{3}\ \text{\&c.}$$

Le potenze espresse per esponenti negativi interi e fratti di un binomio sono frazioni, che hanno per numeratore l' unità, e per denominatore le potenze del binomio. Così $(a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^{m}}$;

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(a+b)^{\frac{m}{n}}}.$$

Se nella formula del binomio in vece di m si pone $-m$, sarà $(a+b)^{-m} = a^{-m}$
$-ma$

$$-ma^{-m-1}b+\frac{-m.-m-1}{1.2}.a^{-m-2}b^{2}+$$

$$\frac{-m.-m-1.-m-2}{1.2.3}.a^{-m-3}b^{3}\ \&c.$$

Se in vece di m si pone $-\frac{m}{n}$, sarà

$$(a+b)^{-\frac{m}{n}}=a^{-\frac{m}{n}}-\frac{m}{n}.a^{-\frac{m}{n}-1}b+$$

$$\frac{-\frac{m}{n}.-\frac{m}{n}-1}{1.2}.a^{-\frac{m}{n}-2}b^{2}\ \&c.$$

Queste diverse formule delle potenze si dimostrano dalla premessa formula delle potenze positive intere del binomio, la quale nel Cap. prec. si è dedotta dall'origine delle potenze.

II. Si disponga $a+b$ in questa forma

a

$a\left(1+\frac{b}{a}\right)$, e posto $\frac{b}{a}=d$; sarà $a+b=$

$a(1+d)$, e $(a+b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}.(1+d)^{\frac{m}{n}}$.

Si supponga $(1+d)^{\frac{m}{n}}=1+\frac{m}{n}d+$

$$\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1.\frac{m}{n}-2}{1.2.3}.d^3 \text{ \&c.}$$

L' uno e l'altro membro dell' equazione si elevino alla potenza n; sarà $(1+d)^m=$

$$\left(1+\frac{m}{n}d+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2\ \&c.\right)^n$$

Si ponga $p=\frac{m}{n}d+\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2}.d^2$ &c.; ſarà $(1+d)^m=(1+p)^n$, e $1+md+\frac{m.m-1}{1.2}.d^2+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}.d^3$ &c. $=1+np+\frac{n.n-1}{1.2}.p^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.p^3$ &c.

Nel ſecondo membro ſe in vece di p, p^2, p^3, &c. ſi pongono i corriſpondenti va-

valori dell' equazione $p = \frac{m}{n} d + \frac{\frac{m}{n} . \frac{m}{n} - 1}{1.2} . d^2$ &c.; i termini del secondo membro sono i medesimi, che i termini del primo. Perche

$$1 = 1$$

$$np = n . \frac{m}{n} d + n \frac{\frac{m}{n} . \frac{m}{n} - 1}{1.2} . d^2 \text{ \&c.}$$

$$n . \frac{n-1}{1.2} . p^2 = n . \frac{n-1}{1.2} . \frac{m^2}{n^2} . d^2 \text{ \&c.}$$

$$n . \frac{n-1 . n-2}{1.2.3} . p^3 = \text{ \&c. \quad \&c.}$$

&c. &c.

$$1 + np + \frac{n . n-1}{1.2} . p^2 + \frac{n . n-1 . n-2}{1.2.3} . p^3 \text{ \&c.} =$$

$$1 + md + \frac{m . m-1}{1.2} . d^2 + \frac{m . m-1 . m-2}{1.2.3} . d^3 \text{ \&c.}$$

Dun-

Dunque $(1+d)^{m} = (1+p)^{n}$, e l' equazioni, che precedono, sono vere. Dunque

$$(1+d)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} d + \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n} - 1}{1.2} . d^{2} \;\&c.$$

Se l' uno, è l' altro membro dell' equazione si moltiplicano per $a^{\frac{m}{n}}$, e in vece di d si pone il suo valore $\frac{b}{a}$ si ha l' equazione proposta $(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b$.

$$+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1}{1.2}\,a^{\frac{m}{n}-2}\,b^{2}+\frac{\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}-1\cdot\frac{m}{n}-2}{1.2.3}\,a^{\frac{m}{n}-3}\,b^{3}$$

&c. Ciò, che si dovea dimostrare.

III. Coll' esposta formula si hanno le radici prossime de' binomj in una serie infinita di frazioni. Così se $m=1$, $n=2$, si ha

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}\,b+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1}{1.2}\,a^{\frac{1}{2}-2}\,b^{2}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{1}{2}-2}{1.2.3}\,a^{\frac{1}{2}-3}\,b^{3}\ \text{\&c.}=\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$-$

$$-\frac{b^2}{8a\sqrt{a}} + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} \text{ \&c.}$$

Se $m = 1$, $n = 3$, si ha $(a+b)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$

$$+\frac{1}{3}a^{\frac{1}{3}-1}b + \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{3}-1}{1.2}.a^{\frac{1}{3}-2}b^2 \text{ \&c.}$$

$$= \sqrt[3]{a} + \frac{b}{3\sqrt[3]{a^2}} - \frac{b^2}{9a\sqrt[3]{a^2}} \text{ \&c.}$$

IV. Per mezzo delle radici del binomio si rinvengono le radici de' polinomj, se questi hanno radici esatte; perche colle debite sostituzioni i termini della serie, che non appartengono alla radice del polinomio, si annullano.

Sia

Sia il trinomio $c^2 + 2cd + d^2$, del quale si cerca la radice seconda. Si ponga $a = c^2$, $b = 2cd + d^2$, $m = 1$, $n = 2$, e sostituiti i valori di a, b, m, n, nella serie della radice del binomio si ha

$$\sqrt{a} = c$$

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} = d + \frac{d^2}{2c}$$

$$-\frac{b^2}{8a\sqrt{a}} = -\frac{d^2}{2c} - \frac{d^3}{2c^2} - \frac{d^4}{8c^3}$$

$$\frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}} = \frac{d^3}{2c^2} + \frac{3d^4}{4c^3} + \text{\&c.}$$

&c. &c.

La

quinta $-\frac{5d^4}{8c^3}$ ſi annullano dal ſecondo termine $\frac{3d^4}{4c^3}$ della quarta equazione; e così tutti i termini ſeguenti ſi diſtruggono.

V. Le radici proſſime de' numeri ſi hanno diſponendo i numeri in modo, che le ſerie delle radici del binomio ſieno razionali, e convergenti.

Così la radice di 2 è tra 1 e 2. Se $2^{\frac{1}{2}}$ ſi diſpone in $1+1=a+b$; ſarà $(1+1)^{\frac{1}{2}} =$ $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ &c. I due primi $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ danno un valore maggiore della radice di 2;

2; perche $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$. I tre $1 + \frac{1}{2}$

$- \frac{1}{8} = \frac{11}{8}$ danno un valore minore, e più prossimo alla radice di 2; perche

$\left(\frac{11}{8}\right)^2 = \frac{121}{64} = 1 + \frac{57}{64}$. I quattro $1 + \frac{1}{2}$

$- \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{23}{16}$ danno un valore minore della radice di 2, e più prossimo. Se più termini si prendono, successivamente i valori si approssimano alla radice di 2, e mai si ha l'esatto.

Poichè $2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{121}{64} + \frac{7}{64}$; se da

$\frac{9}{4} - \frac{1}{4}$, e da $\frac{121}{64} + \frac{7}{64}$, si estraggono le radici; si avranno due serie, una più convergente dell'altra per la radice 2.

La radice di 5 è tra 1 e 3. Se 5 si dis-

dispone in $4+1$ sarà $(4+1)^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64}$ &c. I due primi termini $2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ danno un valore maggiore della radice di 5; perche $(\frac{9}{4})^2 = \frac{81}{16} = 5 + \frac{1}{16}$. I tre $2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{143}{64}$ danno un valore minore più prossimo alla radice di 5; perche $(\frac{143}{64})^2 = \frac{20449}{4096} = 5 - \frac{31}{4096}$ &c.

Se in vece di $4+1$ si prende $\frac{81}{16} - \frac{1}{16}$, si ha una serie più convergente; se prendesi $\frac{20449}{4096} + \frac{31}{4096}$, la serie è molto più convergente &c.

La radice di 8 è tra 3 e 2. Se 8 si pone $= 9-1$, sarà $(9-1)^{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{6} - \frac{1}{216}$ &c.

I due primi termini $3 - \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$ danno un valore maggiore della radice di 8; perche

$$\left(\frac{17}{6}\right)^2 = \frac{289}{36} = 8 + \frac{1}{36}. \text{ \&c.}$$

Lo stesso si dice della radice terza, quarta &c., che differiscono negli esponenti. Questo metodo presuppone cognite le radici esatte de' numeri prossimamente maggiori e minori dei numeri, de' quali si cercano le radici prossime.

VI. Le due formule cogli esponenti negativi interi e fratti si dimostrano con un metodo simile al precedente. Della formu-

la

la $(a+b)^{-\frac{m}{n}}$ ſi diſponga $a+b$ in $a(1+\frac{b}{a})$; ſi ponga $\frac{b}{a}=d$, l' eſponente $\frac{m}{n}=q$; ſarà $a^{-q}(1+d)^{-q}=(a+b)^{-\frac{m}{n}}$.

Si ſupponga $(1+d)^{-q}=1-qd+\frac{-q.-q-1}{1.2}.d^2+\frac{-q.-q-1.-q-2}{1.2.3}.d^3$ &c.

Ma $(1+d)^{-q}=\frac{1}{(1+d)^q}=$

$$\frac{1}{1+qd+\frac{q.q-1}{1.2}.d^{2}+\frac{q.q-1.q-2}{\quad}.d^{3}\ \&c.}$$

Dunque

$$\frac{1}{1+qd+\frac{q.q-1}{1.2}.d^{2}+\frac{q.q-1.q-2}{1.2.3}.d^{3}\ \&c.}=$$

$$1-qd+\frac{-q.-q-1}{1.2}.d^{2}+\ \&c.$$

Se l' uno e l' altro membro ſi moltiplicano pe'l denominatore del primo, l' equazione diviene $1=1$. Perche il prodotto del primo membro pe'l ſuo denominatore è 1; moltiplicandoſi il ſecondo membro per lo ſteſſo denominatore, la ſomma de' prodotti è parimente 1; come dalla ſeguente operazione.

1—

$$1 - qd + \frac{-q.\overline{-q-1}}{1.\ 2} d^2 + \frac{-q.\overline{-q-1}.\overline{-q-2}}{1.\ 2.\ 3} d^3 \text{ \&c.}$$

$$1 + qd + \frac{q.\ \overline{q-1}}{1.2} d^2 + \frac{q.\ \overline{q-1}.\ \overline{q-2}}{1.\ 2.\ 3} d^3 \text{ \&c.}$$

$$1 - qd + \frac{-q.\overline{-q-1}}{1.2} d^2 + \frac{-q.\overline{-q-1}.\overline{-q-2}}{1.\ 2.\ 3} d^3 \text{ \&c.}$$

$$qd \qquad -q^2 d^2 \qquad + \frac{-q^2\ .\ \overline{-q-1}}{1.\ 2} d^3 \text{ \&c.}$$

$$\frac{q.\ \overline{q-1}}{1.2} d^2 \qquad + \frac{-q^2\ .\ \overline{q-1}}{1.\ 2} d^3 \text{ \&c.}$$

$$\frac{q.\ \overline{q-1}.\ \overline{q-2}}{1.\ 2.\ 3} d^3 \text{ \&c.}$$

Da questi prodotti è manifesto, che la somma de' prodotti del moltiplicando pe'l moltiplicatore non è che 1; perchè tutti gli altri termini si distruggono. Dunque $(1+d)^{-q}$

$$= 1 - qd + \frac{-q.-q-1}{1.2} d^2 \text{ \&c.}$$

Se l' uno e l' altro membro dell' equazione si moltiplicano per $a^{\frac{m}{n}}$, in vece di d si pone il suo valore $\frac{b}{a}$, e in vece di q il valore $\frac{m}{n}$; sarà

$$(a+b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \quad \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b +$$

$$\frac{\frac{m}{n}.\frac{m}{n}-1}{1.2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 \text{ \&c.}$$

VII. Con queste due formule degli esponenti negativi interi e fratti del binomio si estraggono le radici delle frazioni, e si han-

hanno i valori delle frazioni in serie.

Così $$\frac{1}{a+b} = (a+b)^{-1} = a^{-1} - ba^{-2} + b^{2}a^{-3} - b^{3}a^{-4} \text{ \&c.} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^{2}} + \frac{b^{2}}{a^{3}} - \frac{b^{3}}{a^{4}} \text{ \&c.}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)}} = (a+b)^{-\frac{1}{3}} = a^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}ba^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9}b^{2}a^{-\frac{7}{3}} \text{ \&c.}$$

Le frazioni, che hanno per numeratore

quantità oltre 1, si riducono in serie per l'esposte formule. La radice cuba di

$$\frac{f}{a+b} = f^{\frac{1}{3}} \cdot (a+b)^{-\frac{1}{3}} .$$

Per la formula delle potenze negative si rinviene il valore di $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$. Il prodotto della serie di $(a+b)^{-\frac{1}{3}}$ per $f^{\frac{1}{3}}$ è la radice cuba della frazione $\frac{f}{a+b}$.

La radice cuba di $\frac{f+g}{a+b} = (f+g)^{\frac{1}{3}}$.

$(a+b)^{-\frac{1}{3}}$. Il prodotto dei termini della la ſerie della radice $(f+g)^{\frac{1}{3}}$ pei termini della ſerie della radice $(a+b)^{\frac{1}{3}}$, è il valore del prodotto di $(f+g)^{\frac{1}{3}}$ per $(a+b)^{\frac{1}{3}}$.

CAp.

CAP. XIX.

Delle Ragioni, delle Proporzioni, e delle Progressioni.

I. La ragione è aritmetica, o geometrica. La ragione aritmetica è il rapporto di due quantità, che si ha nella differenza della sottrazione di una delle due quantità dall' altra. Così la differenza $a-b$, o $b-a$, rapporto della sottrazione di a da b, o di b da a, è la ragione aritmetica di a, b.

La ragione geometrica, che si dice ancora esponente di ragione, è il rapporto di due quantità, che si ha nel quoziente della divisione di una delle due quantità per l' altra. Così il quoziente $\frac{b}{a}$, o $\frac{a}{b}$, rapporto della divisione di b per a, o di a per b, è la ragione geometrica e l' esponente della ragione di a, b.

Le due quantità nell' una, e nell' altra ragione, si dicono termini della ragione aritmetica, o della geometrica. Il termine, che

che precede, ſi dice antecedente; l'altro conſeguente. La ragione aritmetica ſi diſegna, con porre tra l' antecedente e il conſeguente una virgola, o un punto. La ragione geometrica ſi diſegna, con porre tra l' antecedente e il conſeguente due punti.

Così a, b, o $a.\ b$, diſegnano la ragione aritmetica $b-a$, o $a-b$; $a : b$ diſegna la ragione geometrica $\frac{b}{a}$, o $\frac{a}{b}$. Le due quantità a, b ſi dicono termini della ragione aritmetica, o della geometrica; a ſi dice antecedente, b conſeguente.

II. S' appartiene alla ragione aritmetica quanto ſi è eſpoſto nel Cap. I. delle quantità poſitive e negative, e delle loro differenze.

Se i due termini ſono negativi, ed uguali, la differenza è nulla. Se un termine è maggiore dell' altro, la differenza è poſitiva, o negativa; perche il termine ſottratto può eſſere maggiore, o minore dell' altro.

Di due termini uno poſitivo, e l' altro negativo, la differenza è poſitiva, o negativa; perche il termine ſottratto può eſſere negativo, o poſitivo.

Se

Se i due termini ſono poſitivi, ed uguali; la differenza è nulla. Se i due termini ſono ineguali; la differenza del termine minore ſottratto dal maggiore è poſitiva; del termine maggiore ſottratto dal minore è negativa.

Se ai due termini ſi aggiugne, o da queſti ſi ſottrae una medeſima quantità, la differenza rimane la ſteſſa. Perche una medeſima quantità aggiunta, o ſottratta dall' uno, e dall' altro termine; queſta nulla aggiugne, nulla toglie dalla loro differenza. Così $a-b=(a+c)-(b+c)=(a-c)-(b-c)$.

Se i due termini ſi moltiplicano, o ſi dividono per la ſteſſa quantità; ſi moltiplica, e ſi divide anche la loro differenza; perche nei termini ſi contiene la differenza. Così ſe $b-a=\pm d$, ſarà $2b-2a=\pm 2d$, $3b-3a=\pm 3d$, $nb-na=\pm nd$,

$$\frac{b}{n}-\frac{a}{n}=\pm\frac{d}{n}.$$

Se l'antecedente ſi ſottrae dal conſeguente, il conſeguente può eſprimerſi per l' antecedente più la differenza, la quale può eſſere negativa, o poſitiva. Così ſe $b-a=d$, $b=a+d$; ſe $b-a=-d$, $b=a-d$.

La

La ragione di $a.b$ si esprime per $a.\ a+d$, o per $a.\ a-d$.

III. Alla ragione geometrica s' appartiene quanto si è esposto nel Cap. III. della divisione, e nel Cap. IV. delle frazioni.

L' esponente dell' antecedente diviso pe'l conseguente è inverso dell' esponente del conseguente diviso per l' antecedente. Così se

$$\frac{b}{a}=q,\ \frac{a}{b}=\frac{1}{q}.$$

Se i due termini della ragione sono positivi, o negativi; gli esponenti dell' antecedente diviso pe'l conseguente, e del conseguente diviso per l' antecedente, sono positivi.

Se un termine è positivo, e l' altro negativo; gli esponenti sono negativi.

Se i due termini della ragione si moltiplicano, o si dividono per la medesima quantità, gli esponenti sono i medesimi.

Se il conseguente si divide per l' antecedente, il conseguente può esprimersi pe'l prodotto dell' antecedente per l' esponente della ragione. Così se b si divide per a, l' esponente di $a:b$ è $\frac{b}{a}$. Si ponga $\frac{b}{a}=q$, sarà $b=aq$, e la ragione di di $a:b$ ſi eſprime per $a:aq$.

IV. Due, e più ragioni aritmetiche ſono uguali, ſe le differenze poſitive, o negative degli antecedenti dai conſeguenti, o de' conſeguenti dagli antecedenti, ſono uguali. Due, e più ragioni aritmetiche ſono ineguali, ſe le dette differenze ſono ineguali. Una ragione è maggiore, o minore dell' altra; ſe la differenza è maggiore, o minore.

Così la ragiône di $a.b$ è uguale alla ragione di $c.d$, ſe $a-b=c-d$, o $b-a=d-c$. Se $(a-b)>(c-d)$, la ragione di $a.b$ è maggiore della ragione di $c.d$.

Due, e più ragioni geometriche ſono uguali, ſe gli eſponenti poſitivi, o negativi, degli antecedenti diviſi pei conſeguenti; o de' conſeguenti per gli antecedenti, ſono uguali. Una ragione è maggiore, o minore dell' altra, ſe l' eſponente poſitivo, o negativo di una, è maggiore, o minore dell' eſponente poſitivo, o negativo dell' altra.

Così la ragione di $a:b$ è uguale alla ragione di $c:d$, ſe $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, o $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. Se $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, o $\frac{b}{a}>\frac{d}{c}$, la ragione di $a:b$ è maggiore di $c:d$.

V. La

V. La proporzione è geometrica, o aritmetica; l' una e l' altra si distinguono in dirette, che assolutamente si dicono proporzioni, e in reciproche.

1. La proporzione aritmetica è l' uguaglianza di due ragioni aritmetiche. La proporzione geometrica è l' uguaglianza di due ragioni geometriche.

La proporzione aritmetica si disegna col porre tra l' una e l' altra ragione due, o tre punti. Così $a.b:c.d$; $a, b: c, d$; $a. b\because c. d$, $a, b\because c, d$. Si enunciano i quattro termini proporzionali, a sta a b, come c a d; ed esprimono $a-b \doteq c-d$, $b-a \doteq d-c$.

La proporzione geometrica si disegna col porre tra l' una e l' altra ragione quattro punti, o il segno d' uguaglianza. Così $a:b::c:d$, $a:b=c:d$. Si enunciano i termini proporzionali, a sta a b, come c a d; ed esprimono $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, o $\frac{a}{b}$ $= \frac{c}{d}$.

Nell' una, e nell' altra proporzione i due termini della prima ragione a sinistra si dicono primo antecedente, e primo conseſeguente; i due termini a deſtra della ſeconda ragione ſi dicono ſecondo antecedente, e ſecondo conſeguente. Il primo antecedente e il ſecondo conſeguente ſi dicono gli eſtremi della proporzione; il primo conſeguente e il ſecondo antecedente, i medj.

Così di $a : b = c : d$, di $a . b : c . d$; a è il primo antecedente, b il primo conſeguente; c il ſecondo antecedente, d il ſecondo conſeguente; a, d ſono gli eſtremi; b, c i medj della proporzione.

I due termini medj poſſono eſſere uguali, ed inequali. Se ineguali, la proporzione ſi dice diſcreta; ſe uguali, continua. Così $a . b \because c . d$; $a : b = c : d$, ſono proporzioni diſcrete. Se $b = c$, $a . b \because b . d$, $a : b = b : d$, ſono due proporzioni continue.

La proporzione continua ſi diſegna con tre termini, ponendo avanti la proporzione aritmetica $\div$, e tra i tre termini i punti, o le virgole; avanti la proporzione geometrica $\div\!\!\!\!\cdot\cdot$, e tra i tre termini due punti.

Così $\div\!\!\!\!\cdot\cdot\ a : b : c$ diſegna una proporzione continua geometrica; $\div\ a . b . c$ diſegna una proporzione continua aritmetica. Il termine medio b fa figura di conſeguente nelle ragioni $a : b$, $a . b$; di antecedente nelle

ra-

ragioni $b : c$, $b . c$, e si dice medio proporzionale.

2. La proporzione reciproca sì geometrica, che aritmetica, è l' uguaglianza delle ragioni tra l' antecedente e il conseguente di una; tra il conseguente e l' antecedente dell' altra.

Così le due ragioni $a . b$, $c . d$ sono in proporzione reciproca aritmetica, se $b - a = c - d$. In proporzione reciproca geometrica sono le due ragioni $a : b$, $c : d$, se $\frac{a}{b} = \frac{d}{c}$.

Le proporzioni reciproche si fanno dirette col permutare il conseguente di una ragione nel suo antecedente.

VI. Se più di due ragioni aritmetiche, o geometriche, sono uguali; paragonando una ragione all' altra, si ha una serie di proporzioni. Così $a : b :: c : d :: e : f :: g : l$ &c., è una serie di proporzioni geometriche; $a . b \because c . d \because e . f . \because g . l$ &c., è una serie di proporzioni aritmetiche.

Se il conseguente della prima ragione $b = c$ antecedente della seconda; se il conseguente della seconda $d = e$ antecedente della terza; se il conseguente della terza $f = g$ antecedente della quarta &c., la serie delle proporzioni è continua.

Così $\div\!\!\div a : c : e : g$ &c. è una ſerie continua di proporzioni geometriche ; $\div a \,.\, c \,.\, e \,.\, g$ &c. è una ſerie continua di proporzioni aritmetiche; nelle quali ciaſcun termine medio è conſeguente dell'antecedente ragione, e antecedente della ſeguente. Queſte ſerie ſi dicono progreſſioni geometriche, o aritmetiche.

VII. Il prodotto di due, e più ragioni geometriche, ſi dice ragione compoſta del numero delle ragioni. Così di $a : b$, $c : d$ il prodotto $ac : bd$ è la ragione compoſta di due ragioni; il prodotto $ace : bdf$ è la ragione compoſta di tre ragioni $a : b$, $c : d$, $e\ f$ &c. E' manifeſto, che la ragione dei prodotti degli antecedenti, e dei conſeguenti, è il prodotto delle loro ragioni.

Se due ragioni ſono uguali, la ragione compoſta di queſte due ragioni ſi dice duplicata di una delle due ragioni; ſe tre ragioni ſono uguali, la ragione compoſta di queſte tre ragioni ſi dice triplicata di una delle tre &c.

Così ſe $a : b$, $c : d$ ſono uguali, la ragione compoſta $ac : bd$ ſi dice duplicata di $a : b$, o di $c : d$. Se $a : b$, $c : d$, $e : f$ ſono uguali; la ragione compoſta $ace : bdf$ ſi dice triplicata di una delle tre &c.

Al contrario una delle due, tre &c.

ra-

ragioni uguali, si dice sudduplicata, suttriplicata &c., del prodotto di due, tre &c. ragioni uguali. Così la ragione di $a : b$, o di $c : d$, si dice sudduplicata di $ac : bd$. La ragione di $a : b$, o di $c : d$, o di $e : f$ si dice suttriplicata di $ace : bdf$ &c..

I quadrati, i cubi, le quarte, quinte &c. potenze sono in ragione duplicata, triplicata &c. delle loro radici. Le radici sono in ragione sudduplicata, suttriplicata &c. de' loro quadrati, cubi &c.. Perche le potenze sono prodotti delle radici. Così $a^2 : b^2$ è in ragion duplicata di $a : b$; $a^3 : b^3$ è in ragion triplicata di $a : b$ &c.; $a : b$ è in ragion sudduplicata di $a^2 : b^2$, in ragion suttriplicata di $a^3 : b^3$ &c.

VIII. Le premesse nozioni ci conducono ad una doppia teoria delle proporzioni, e delle progressioni geometriche e aritmetiche. L'una e l'altra utilissima in tutte le parti delle matematiche.

C A P. XX.

Delle Proporzioni e delle Progressioni Aritmetiche.

I. DI quattro quantità proporzionali $a. b : c. d$ se il primo antecedente a è uguale, minore, o maggiore del suo conseguente b; il secondo antecedente c è parimente uguale, minore, o maggiore del suo conseguente d. Perche le ragioni sono uguali.

I conseguenti di quattro termini proporzionali si possono esprimere per gli antecedenti più la differenza, Cap. XIX. N. II. Sia $b-a=d-c=f$ differenza positiva, o negativa; sarà $b=a+f$, $d=c+f$. In vece di b, d si pongono i detti valori, sarà $a. a+f : c. c+f$.

Nella proporzione continua $\div a. b. d$, sarà $b=a+f$, $d=b+f=a+2f$, e $\div a. a+f. a+2f$.

II. Di quattro termini proporzionali, la somma degli estremi è uguale alla somma de' medj. Così se $a. b :\cdot c. d$, sarà $a+d=b+c$.

Si

Si dimostra in due maniere. 1. Perche essendo $a. b: c. d$, sarà $b-a=d-c$, e $b+c=a+d$. Ma $b+c$ è la somma de' medj, $a+d$ degli estremi. Dunque la somma de' medj di quattro termini proporzionali è uguale alla somma degli estremi.

2. Se in vece di b, d si sostituiscono i valori equivalenti $a+f$, $c+f$; i quattro termini proporzionali sono $a. a+f: c. c+f$, e le somme degli estremi $a+c+f$, e de' medj $a+c+f$, sono le medesime.

Da questa proposizione s' inferisce 1., che se la proporzione è continua, la somma degli estremi è uguale al doppio termine medio. 2. che di tre termini si ha sempre il quarto proporzionale; perche se $a+d=b+c$, sarà $a=b+c-d$, $d=b+c-a$, $b=a+d-c$, $c=a+d-b$. 3. che nella proporzione continua il termine medio è uguale alla metà della somma de' due estremi, e uno degli estremi è uguale alla differenza dell' altro estremo dal doppio medio termine.

III. Se la somma di due quantità è uguale alla somma di due altre; sarà una quantità di una somma ad una quantità dell' altra, come l' altra quantità della seconda somma alla seconda quantità della prima. Così se $a+d=b+c$, sarà $a. b:$ $c. d$;

$c. d, a. c : b. d, d. b : c. a, d. c : b. a.$
Perche dall' equazione $a + d = b + c$ si hanno le seguenti, $b - a = d - c$, $c - a = d - b$, $b - d = c - d$, e $a. b : c. d$, $a. c : b. d$, $d. b : c. a$, $d. c : b. a$.

Da ciò s' inferisce 1., che saranno in proporzione i conseguenti cogli antecedenti, che si dice invertendo. 2, che saranno in proporzione gli antecedenti e i conseguenti, che si dice alternando. Così se $a. b : c. d$, sarà invertendo $b. a : d. c$; alternando $a. c : b. d$, e invertendo $c. a : d. b$. In queste varie proporzioni si ha l'uguaglianza delle differenze, le quali da negative divengono positive, e da positive negative, con invertere i termini; e con alternarli diverse.

IV. La progressione aritmetica può esprimersi pe'l primo termine più il prodotto della ragione pe'l numero de' termini, che precedono. Perche il secondo termine è il primo termine più la differenza; il terzo termine è il secondo più la differenza, cioè il primo più due differenze; il quarto termine è il terzo più la differenza, cioè il primo più tre differenze; successivamente ciascun termine non è altro, che il primo termine più il prodotto della differenza nel numero de' termini, che precedono. Co-

Così della progressione $\div a . b . c . d$ &c. se la ragione è f; sarà $b = a + f$, $c = b + f = a + 2f$, $d = c + f = a + 3f$ &c., e la progressione $\div a . b . c . d$ &c. è la medesima che $\div a . a + f . a + 2f . a + 3f . a + 4f$ &c. Dunque se il numero de' termini si dice n, qualunque termine della progressione viene espresso dalla formula $a + f . (n - 1)$

Sia $a = 1$, $f = 1$, la progressione 1. 2. 3. 4. 5. &c. è la serie de' numeri naturali. Il primo termine è 1; il secondo è 1 più la differenza 1; il terzo è 1 più due differenze 1; il quarto è 1 più tre differenze 1.

Sia $a = -1$, $f = -1$, la progressione è $-1 . -2 . -3 . -4 . -5$ &c. Il primo termine è -1; il secondo -1 più la differenza -1; il terzo è -1 più due differenze -1; il quarto è -1 più tre differenze -1 &c.

Sia $a = 1$, $f = -1$, la progressione è $1 . 0 . -1 . -2 . -3$ &c. Il primo termine è 1; il secondo è 1 più la differenza -1; il terzo è 1 più due differenze -1 &c.

Sia $a = 25$, $f = -3$, la progressione $25 . 22 . 19 . 16 . 13 . 10 . 7 . 4 . 1 . -2 . -5 . -8$ &c. decresce fino all'unità, e nel senso negativo si aumenta all'infinito. Il primo termine è 25; il secondo è 25 più la differenza -3; il terzo è 25 più due differenze -3 &c.

Sia $a=-25$, $f=7$, la progressione -25. -18. -11. -4. 3. 10. 17 &c. decresce nel senso negativo fino a 4, e nel senso positivo si aumenta senza fine. Il primo termine è -25; il secondo è -25 più la differenza 7; il terzo è -25 più due differenze 7 &c.

V. Tra due termini possono collocarsi quanti medj si vogliono proporzionali, con sottrarre il primo termine dal secondo, e con dividere la differenza pe'l numero de' medj proporzionali più 1; il quoziente è la ragione aritmetica della progressione de' termini medj tra i due. Perche ciascun termine dopo il primo è il primo termine più il prodotto della differenza nel numero de' termini, che precedono.

Così tra 10, 120, si collocano dodici medj proporzionali, sottraendo 3 da 120, e dividendo 117 per 13. Il quoziente 9 è la ragione della progressione ÷ 3. 12. 21. 30. 39. 48. 57. 66. 75. 84. 93. 102. 111. 120..

VI. Se tra i termini d' una progressione si colloca un egual numero di medj proporzionali, si avrà una nuova progressione;

ne; perche tra i termini vi è la medesima ragione.

Così nella progressione $\div$ 3. 11. 19. 27. 35 &c. la ragione è 8. Se tra i termini si vogliono tre medj proporzionali, si divide 8 per 4; il quoziente 2 sarà la differenza della progressione $\div$ 3. 5. 7. 9. 11. 13 &c.

VII. Qualunque numero di termini si prenda in una progressione, le somme dei due estremi, dei due termini dagli estremi ugualmente distanti, e il doppio medio termine, se il numero de' termini è disparo, sono uguali. Perche i due estremi con altri due egualmente distanti dagli estremi, e col medio termine, sono in proporzione.

Così nella formula della progressione a. $a+f$. $a+2f$. $a+3f$. $a+4f$. $a+5f$. $a+6f$. &c. se si prende un numero disparo di termini, le somme degli estremi $a+a+6f$, de' medj $a+f+a+5f$, $a+2f+a+4f$ dagli estremi egualmente distanti, e il doppio medio termine $a+3f$ sono uguali.

VIII. La somma di tutti i termini d'una progressione è uguale alla metà del prodotto della somma de' due estremi nel numero de' termini. Perche le somme dei due estremi, dei due termini ugualmente distanſtanti dagli eſtremi, e il doppio medio termine nelle progreſſioni di termini diſpari ſono uguali; il prodotto della ſomma degli eſtremi nel numero de' termini è doppio della ſomma de' termini.

Così nella progreſſione $\div$ 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15 &c., $\frac{(3+15).7}{2} = 63$, ſomma dei ſette termini della progreſſione; $\frac{(3+13).6}{2} = 48$, ſomma di ſei termine della progreſſione; $\frac{(3+11).5}{2} = 35$ ſomma di cinque termini della progreſſione &c.

Nella progreſſione $\div$ 25. 22. 19. 16. 13. 10. 7. 4. 1. −2. −5. −8 &c., $\frac{(25-8).12}{2} = 102$, ſomma di dodici termini della progreſſione; $\frac{(25-5).11}{2} = 110$, ſomma di undeci termini della progreſſione &c.

Si dica s la ſomma di un qualunque nu-

numero di termini della progressione, l'ultimo termine ω, sarà $f=(a+\omega).\frac{n}{2}$ la formula della somma di un qualunque numero de' termini. Pe'l N. IV. $\omega=a+f.(n-1)$. Se in vece di ω si sostituisce il suo valore, sarà $f=\left(2a+f.(n-1)\right).\frac{n}{2}$

In queste due equazioni $\omega=a+f.(n-1)$, $f=(a+\omega).\frac{n}{2}$, si contengono cinque quantità; cioè il primo termine, la ragione, l'ultimo termine, il numero de' termini, e la somma. Di queste cinque quantità se tre si suppongono date, le altre due si rinvengono per mezzo delle due equazioni; come si vedrà nella Seconda Parte.

CAP.

C A P. XXI.

De' Numeri Poligoni.

I. I Numeri poligoni ſono ſerie de' numeri, che ſi formano dal primo termine, e dalle ſucceſſive ſomme di due, tre &c. termini delle progreſſioni aritmetiche, le quali incominciano da 1, ed hanno per differenza 1, 2, 3, 4, &c. Si diſtinguono i numeri poligoni in triangolari, quadrati, pentagoni, eſagoni, eptagoni &c., ſecondo che la differenza della progreſſione aritmetica è 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c.

II. La progreſſione aritmetica, che incomincia da 1, ed ha per differenza 1, è la ſerie de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 &c.

Se in queſta progreſſione aritmetica ſi prende il primo termine 1; poi ſucceſſivamente la ſomma di 1, 2; di 1, 2, 3; di 1, 2, 3, 4; &c., riſulta la ſerie 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55 &c.

Si

Si dicono questi numeri triangolari; perche possono sempre disporsi in figura triangolare tanti punti, quante unità contiene ciascun numero delle serie. Così.

1 3 6 10 15 21

Il numero de' punti del lato di ciascun triangolo, corrisponde al numero de' termini della progressione aritmetica. Il numero de' punti del triangolo corrisponde al numero delle unità della somma de' termini della progressione aritmetica, che forma il numero triangolare.

Così il lato del primo numero triangolare e il triangolo contengono un punto. Il lato del secondo numero triangolare contiene due punti, e il triangolo tre. Il lato del terzo numero triangolare contiene tre punti, e il triangolo sei. Il lato del quarto numero triangolare contiene quattro punti, e il triangolo dieci &c.

Se nella formula della somma delle progressioni aritmetiche, $s = \left(2a + f.\,(n-1)\right).$

n

$\frac{n}{2}$, si pone la differenza $f = 1$, il primo termine $a = 1$, si ha $s = (2 + n - 1) . \frac{n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$ formula della progressione aritmetica dei numeri triangolari. Se $n = 1$, sarà $\frac{n^2 + n}{2} = 1$ primo numero triangolare. Se $n = 2$, sarà $\frac{n^2 + n}{2} = 3$, secondo numero triangolare. Se $n = 3$, sarà $\frac{n^2 + n}{2} = 6$, terzo numero triangolare &c. Se n è numero paro, $n+1$ è disparo; se n è disparo, $n+1$ è paro; il prodotto dunque $n . n+1$ è sempre paro divisibile per 2.

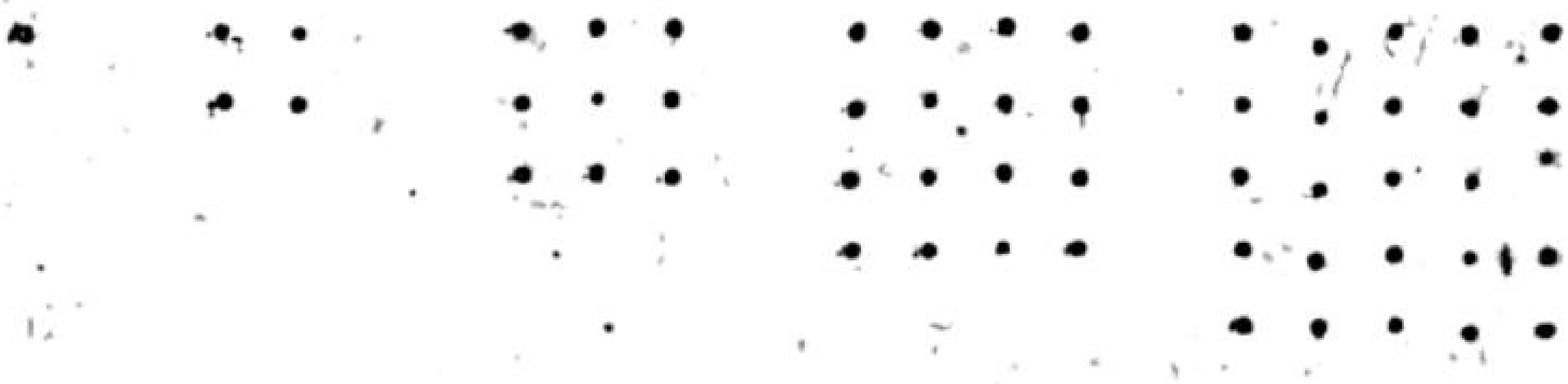
III. La progressione aritmetica, che incomincia da 1 colla differenza 2, è la serie

rie de' numeri diſpari 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 &c.

In queſta progreſſione aritmetica, il primo termine 1, e le ſucceſſive ſomme di due, tre, quattro &c. termini formano la ſerie de' numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 &c.

Si dicono queſti numeri quadrati; perche ſono i quadrati della ſerie de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5 &c., e poſſono diſporſi in figura quadrata tanti punti, quante unità contiene ciaſcun numero. Così

1 4 9 16 25



Il numero dei punti de' lati corriſponde al numero de' termini della progreſſione aritmetica. Il numero de' punti di ciaſcun quadrato corriſponde al numero delle unità della ſomma delle progreſſioni, che formano il numero quadrato.

Così il lato del primo quadrato e il quadrato contengono un punto. Il lato del ſecondo quadrato contiene due punti, il il quadrato quattro. Il lato del terzo quadrato contiene tre punti, il quadrato nove &c.

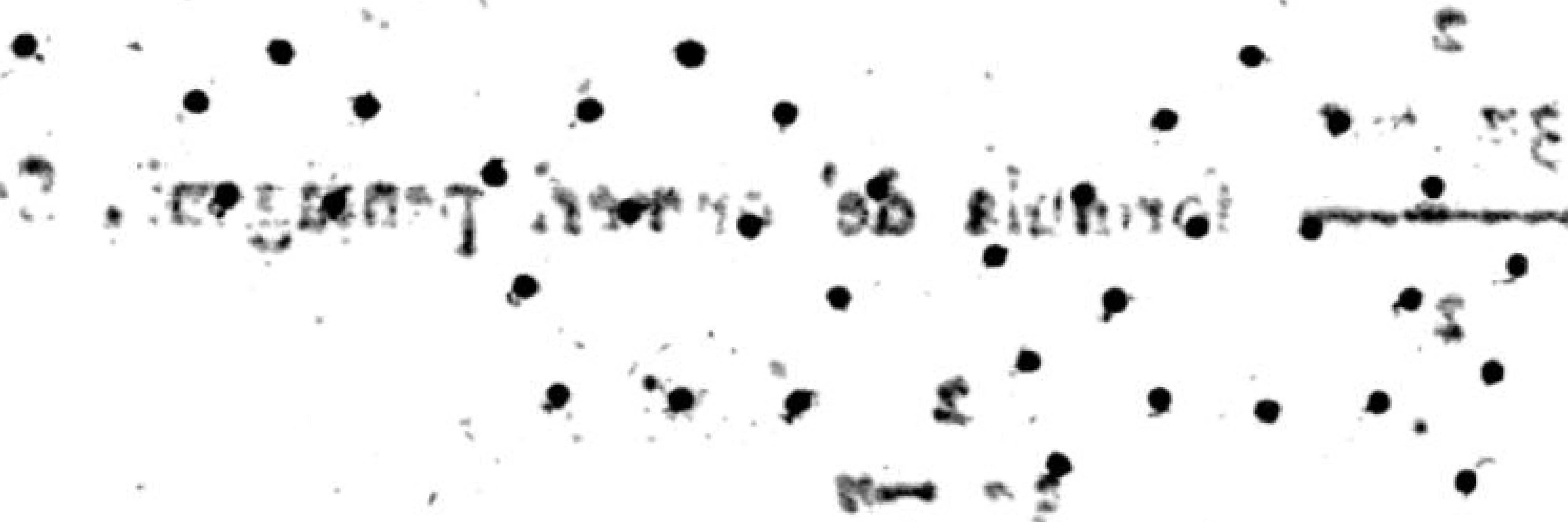
Nella formula della somma delle progressioni $s = \left(2a + f\,(n-1)\right) . \frac{n}{2}$, posto $f = 2$, $a = 1$, si ha $s = \left(2 + 2n - 2\right) . \frac{n}{2} = \frac{2n^2 + 0n}{2} = n^2$, formula della progressione aritmetica de' numeri quadrati. Se $n = 1$, sarà $n^2 = 1$. Se $n = 2$, sarà $n^2 = 4$. Se $n = 3$, sarà $n^2 = 9$.

IV. La progressione aritmetica, che comincia da 1 colla differenza 3 è la seguente, 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22 &c.

Il primo termine 1, e le somme di due, tre, quattro, &c. termini formano la serie de' numeri 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92 &c. Si

Si dicono questi numeri pentagoni; perchè si posson disporre in figure pentagone tanti punti, quante unità contiene ciascun numero. Così

1 5 12 22



Il numero de' punti dei lati corrisponde al numero de' termini della progressione. Il numero de' punti di ciascun pentagono corrisponde al numero delle unità della somma della progressione.

Così il lato del primo pentagono e il pentagono contengono un punto. Il lato del secondo pentagono contiene due punti, e il pentagono cinque. Il lato del terzo pentagono contiene tre punti, e il pentagono dodici. Il lato del quarto pentagono contiene quattro punti, e il pentagono ventidue &c.

Nella formula della somma delle progressioni $s = \left(2a + f.(n-1)\right).\frac{n}{2}$, posto $f = 3$, $a = 1$, si ha $s = (2+3n-3).\frac{n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$ formula de' numeri pentagoni. Se $n = 1$, sarà $\frac{3n^2 - n}{2} = 1$. Se $n = 2$, sarà $\frac{3n^2 - n}{2} = 5$ &c.

V. Collo stesso metodo si rinvengono le formule degli esagoni, eptagoni, ottogoni, enneagoni &c. Nella formula $s = \left(2a + f.(n-1)\right)\frac{n}{2}$, si pone $a = 1$, e in vece di f si sostituiscono le successive differenze 4, 5, 6, 7, 8 &c.

Si dispongano queste formule, una dopo l' altra, incominciando dalla triangolare

n

$$\frac{n^2+n}{2},\ \frac{2n^2+0n}{2}=n^2,\ \frac{3n^2-n}{2},\ \frac{4n^2-2n}{2}$$

$$=2n^2-n,\ \frac{5n^2-3n}{2},\ \frac{6n^2-4n}{2},\ \frac{7n^2-5n}{2}\ \&c.$$

Dall' ordine, con cui procedono, è manifesto, che n^2 si moltiplica per un numero minore di due unità del numero del poligono, $-n$ per un numero minore di quattro unità, e tutto si divide per 2. Dunque se il numero del poligono si dice m, la formula de' numeri poligoni è

$$\frac{n^2.(m-2)-n.(m-4)}{2}.$$

Si ponga $m=3$, si ha la formula de' numeri triangolari $\frac{n^2+n}{2}$. Si ponga $m=4$, si ha la formula de' numeri quadrati n^2. Si ponga $m = 5$, si ha la formula de' pentagoni $\frac{3n^2 - n}{2}$. Si ponga $m = 6$, si ha la formula degli esagoni $\frac{4n^2 - 2n}{2}$ &c.

C A P. XII.

Delle Proporzioni Geometriche.

I. SE quattro termini proporzionali si moltiplicano, o si dividono per una quantità; i prodotti, e i quozienti conservano la medesima proporzione.

Se i due antecedenti, o i due conseguenti, si moltiplicano, o si dividono per una quantità; i prodotti, e i quozienti degli antecedenti coi loro conseguenti; gli antecedenti coi prodotti, o quozienti dei loro conseguenti, sono proporzionali, con proporzione maggiore, o minore; secondochè si dividono, o si moltiplicano gli antecedenti, o i conseguenti.

La ragione si è, che la proporzione è l' uguaglianza delle ragioni; le ragioni sono quozienti de' conseguenti divisi per gli antecedenti, o degli antecedenti divisi pei conseguenti. Nel Cap. IV. N. IV. si è esposto, che se il numeratore e il denominatore d' una frazione si moltiplicano, o si dividono per una quantità, il quoziente è lo stesso; che se il numeratore si moltiplica, o si divide il denominatore, il quoziente è maggiore; che se il numeratore si divide, o si moltiplica il denominatore, il quoziente è minore.

II. Di quattro termini proporzionali, il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' medj.

Perche se $a:b = c:d$, sarà $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. L'uno e l'altro membro si moltiplichino per a, e per c; sarà $bc = ad$, prodotti de' medj, e degli estremi.

Si dimostra in quest'altro modo. Sia q l'esponente della ragione; sarà $\frac{b}{a} = q$, $\frac{d}{c} = q$; e $b = aq$, $d = cq$. In vece di b, d si pongano aq, cq, sarà $a : aq = c : cq$, e il prodotto degli estremi $acq = acq$ prodotto de' medj.

Da questa proposizione s' inferisce 1, che uno de' due estremi è uguale al prodotto de' medj diviso per l'altro estremo; ed uno de' due medj è uguale al prodotto degli estremi diviso per l'altro medio. Perche

che ſe $ad = cb$, $a = \frac{cb}{d}$, $d = \frac{cb}{a}$, $c = \frac{ad}{b}$, $b = \frac{ad}{c}$. Dunque ſe di tre termini ſi cerca il quarto proporzionale, ſi rinviene per una dell' eſpoſte equazioni. Queſta regola di rinvenire il quarto proporzionale ſi dice regola del tre.

2. Che ſe la proporzione è continua, il prodotto degli eſtremi è uguale al quadrato del termine medio, e il termine medio è uguale alla radice quadra del prodotto de' due eſtremi. Così ſe $a : b = b : d$; ſarà $ad = b^2$, e $b = \sqrt{ad}$.

III. L'uguaglianza dei prodotti degli eſtremi e de' medj di quattro termini proporzionali dimoſtra vicendevolmente, che riſolvendoſi in due fattori l' uno e l' altro membro di una equazione; ſarà ſempre un fattore di un membro al fattore dell' altro, come il ſecondo fattore di queſto membro al ſecondo fattore del primo.

Perche nell' equazione $ad = cb$, ſe l' uno, e l' altro membro ſi dividono per d, e per

b, sarà $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, e $b:a=d:c$; se per a,

e per c, sarà $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, e $c:d=a:b$; se

per d, e per c, sarà $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; e $c:a=$ $d:b$.

Nell'equazione $a^2-b^2=d^2-f^2$, poichè $(a+b).(a-b)=(d+f).(d-f)$, sarà $a+b:d+f:$ $=d-f:a-b$, $a+b:d-f=d+f:a-b$, $a-b:$ $d-f=d+f:a+b$.

Nell'equazione $1-y^2=e$, poichè $(1-y).$ $(1+y)=1.e$, sarà $1-y:1=e:1+y$, $1+y:1=e:$ $1-y$ &c.

Dunque se quattro termini sono proporzionali $a:b=c:d$, vi sarà proporzione tra i conseguenti e gli antecedenti $b:a=d:c$, che si dice invertendo i termini della proporzione. Vi sarà proporzione tra il primo antecedente e il secondo; il primo conseguente e il secondo $b:d=a:c$, che si dice alterando, o permumutando i termini proporzionali.

IV. Se quattro termini ſono proporzionali $a : b = c : d$, 1. le ſomme degli antecedenti e de' conſeguenti ſaranno proporzionali ai loro conſeguenti, $a+b : b = c+d : d$, che ſi dice componendo.

2. Gli antecedenti ſaranno proporzionali alle ſomme degli antecedenti e de' conſeguenti, $a : a+b = c : c+d$, che ſi dice invertendo.

3. Le differenze degli antecedenti e conſeguenti ſaranno proporzionali ai loro conſeguenti, $a-b : b = c-d : d$, che ſi dice dividendo.

4. Gli antecedenti ſaranno proporzionali alle differenze degli antecedenti e conſeguenti, $a : b-a = c : d-c$, che ſi dice convertendo.

Finalmente ſaranno proporzionali le ſomme degli antecedenti e de' conſeguenti alle loro differenze, $a+b : b-a = c+d : d-c$, e convertendo $b-a : a+b = c-d : c+d$.

La ragione di queſte operazioni è, che i prodotti degli eſtremi e de' medj ſono ad, bc coll' addizione, o ſottrazione di prodotti uguali. Così i prodotti degli eſtremi e de' medj di $a+b : b = c+d : d$, ſono $ad + bd = bc + bd$; di $a : a+b = c : c+d$, ſono $ac + ad = ca + cb$; di $a-b : b = c-d : d$, ſono $ad - bd = bc - bd$ &c.

V.

V. Di quattro termini proporzionali la ſomma, o la differenza degli antecedenti, è alla ſomma, o alla differenza de' conſeguenti, come un antecedente al ſuo conſeguente.

Perche ſe $a : b = c : d$, ſarà alternando $a : c = b : d$, componendo $a+c : c = b+d : d$; e alternando $a+c : b+d = c : d = a : b$.

VI. In una ſerie di proporzioni $a : b = c : d = e : f = g : h = l : m$ &c. la ſomma di un numero di antecedenti è alla ſomma di un corriſpondente numero di conſeguenti, come un' antecedente al ſuo conſeguente.

Poichè $a : b = c : d$, pe'l N. V. $a+c : b+d = a : b$. Ma $a : b = e : f$. Dunque $a+c : b+d = e : f$, e pe'l N. V. $a+c+e : b+d+f = e : f$. Ma $e : f = g : h$. Dunque $a+c+e : b+d+f = g : h$, e pe'l N. V. $a+c+e+g : b+d+f+h = g : h$. Ma $g : h = l : m$. Dunque $a+c+e+g : b+d+f+h = l : m$, e pe'l N. V. $a+c+e+g+l : b+d+f+h+m = l : m$ &c. Dunque la ſomma di un numero di antecedenti è alla ſomma di un corriſpondente numero di conſeguenti in una ſerie di termini proporzionali, come un antecedente al ſuo conſeguente.

VII. Se i termini di una proporzione ſi moltiplicano, o ſi dividono pei corriſpondendenti termini di un' altra proporzione; i prodotti saranno in proporzione; saranno in proporzione i quozienti. Sieno due proporzioni $a:b=c:d$, $e:f=g:l$; saranno in proporzione, $ae:bf=cg:dl$, $\frac{a}{e}:\frac{b}{f}=\frac{c}{g}:\frac{d}{l}$.

1. Sono in proporzione i prodotti; perchè essendo $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}=\frac{l}{g}$, se si moltiplicano $\frac{b}{a}$ per $\frac{f}{e}$, $\frac{d}{c}$ per $\frac{l}{g}$, sarà $\frac{bf}{ae}=\frac{dl}{cg}$. Dunque $ae:bf=cg:dl$.

Se le proporzioni sono più di due; si moltiplicano i prodotti de' termini delle due prime pei termini della terza; i prodotti ti de' termini delle tre pei termini della quarta &c.

2. Sono in proporzione i quozienti di quattro termini proporzionali diviſi pei corriſpondenti termini proporzionali; perche ſe i quozienti non foſſero in proporzione, moltiplicandoſi pei corriſpondenti diviſori, i quattro termini $a : b = c : d$ non ſarebbero proporzionali.

Così se $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{l}$, non ſono in proporzione, moltiplicandoſi pei corriſpondenti proporzionali $e : f = g : l$, non ſarebbero proporzionali i prodotti $a : b = c : d$ contro l' ipoteſi.

VIII. Le potenze ſimili di quattro termini proporzionali ſono in proporzione.

Così ſe $a : b = c : d$, ſarà $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, $a^3 : b^3 = c^3 : d^3$, $a^4 : b^4 = c^4 : d^4$ &c. Perche le potenze ſimili di quattro termini proporzionali ſono ſucceſſivi prodotti dei medeſimi termini.

Dun-

Dunque le radici simili dei termini proporzionali sono in proporzione. Perche se non fossero in proporzione, moltiplicandosi le radici per se medesime; le potenze non sarebbero proporzionali contro l' ipotesi.

IX. Se tra due termini si pongono quanti termini si vogliono, maggiori, e minori; la ragione dei due termini non è, che il prodotto delle ragioni di tutti i termini.

Così se tra a, b si pongono quanti si vogliono termini p, q, r, s; la ragione di $a:b$ non è, che il prodotto delle ragioni $a:p$, $p:q$, $q:r$, $r:s$, $s:b$. Perche i termini intermedj sono conseguenti delle ragioni, che precedono, e antecedenti delle ragioni, che sussieguono; il primo termine a è solo antecedente, l' ultimo b solo conseguente. Dunque il prodotto delle ragioni è $apqrs : pqrsb$, e pe'l N. I. $apqrs : pqrsb = a:b$.

Dunque in un qualunque numero di proporzioni se i conseguenti della prima proporzione sono antecedenti della seconda; i conseguenti della seconda sono antecedenti della terza; i conseguenti della terza antecedenti della quarta &c.; gli antecedenti della prima proporzione, e i conseguenti dell' ultima sono in proporzione.

Così

Così se $a : b = p : q$
$b : c = q : r$
$c : d = r : s$

sarà $a : d = p : s$. Perche la ragione $a : d$ è il prodotto delle ragioni $a : b$, $b : c$, $c : d$; la ragione $p : s$ è il prodotto delle ragioni $p : q$, $q : r$, $r : s$. Ma queste ragioni medie dell'una, e dell'altra parte sono uguali. Dunque $a : b = p : s$.

C A P. XXIII.

Delle Progressioni Geometriche.

I. LA progressione geometrica può esprimersi pe'l prodotto del primo termine nelle potenze della ragione secondo il numero de' termini, che precedono. Perche il secondo termine è il prodotto del primo nella ragione; il terzo termine è il prodotto del primo nella seconda potenza della ragione; il quarto è il prodotto del primo nella terza potenza della ragione; successivamente ciascun termine non è che il prodotto del primo nella potenza della ragione secondo il numero de' termini, che precedono.

Così della progressione $\div\!\!: a : b : c : d : e : f$ &c., se $\frac{b}{a} = q$, sarà $b = aq$ secondo termine della progressione; $c = bq = aq^2$ terzo termine della progressione; $d = cq = aq^3$ quarto termine della progressione &c. Dunque

que ciascun termine della progressione è il prodotto del primo termine nella potenza della ragione q secondo il numero de' termini, che precedono.

La formula dunque della progressione $\div\!\!\div aq^0 : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4 : aq^5$ &c. è la medesima, che $\div\!\!\div a : b : c : d : e : f$ &c.

Si dica il numero de' termini n, la formula de' termini della progressione è aq^{n-1}.

Se $a=b$, $q=1$, sarà $\div\!\!\div a : a : a : a : a$ &c. una progressione di termini eguali.

Se $a<b$, sarà q maggiore dell' unità, e i termini della progressione saranno maggiori secondo le potenze di q, e la progressione crescente.

Se $a>b$, il primo termine sarà maggiore del secondo, il secondo del terzo &c., e la progressione decrescente.

Se a, b sono positivi, o negativi, q sarà positivo, e i termini della progressione positivi, o negativi.

Se uno de' due termini a, b è positivo, e l' altro negativo; q sarà negativo, e i termini della progressione alternativamente positivi, e negativi.

II. Tra due termini si possono porre

quan-

quanti medj si vogliono proporzionali. Si divide il secondo termine pe'l primo; dal quoziente si estrae la radice seconda, terza, quarta &c. secondo il numero de' medj proporzionali; la radice sarà l'esponente della ragione de' termini proporzionali. Perche la ragione degli estremi è il prodotto delle ragioni medie.

Così se tra due termini si vuole un medio proporzionale; si divide il secondo termine pe'l primo; dal quoziente si estrae la radice quadra, che sarà l'esponente della ragione di tre termini proporzionali. Se si vogliono due medj proporzionali; dal quoziente si estrae la radice terza, che sarà l'esponente della progressione di quattro termini proporzionali. Se si vogliono tre medj proporzionali, dal quoziente si estrae la radice quarta &c.

Se l'estrazioni delle radici non sono esatte, si prendono le approssimanti, e si avranno i termini della progressione per approssimazione.

Da ciò s' inferisce, che tra i termini d' una progressione si possono porre quanti medj si vogliono proporzionali, e si avrà una nuova progressione. Si estrae dall' esponente della progressione la radice secondo il numero de' medj proporzionali; questa sarà l' esponente della nuova progressione.

III. Se in una progressione si prendono quattro termini in modo, che tra l' uno e l'altro vi sia un egual numero di medj termini, i quattro termini saranno proporzionali; perche tra il primo e il secondo vi sarà la medesima ragione, che tra il terzo e il quarto.

Dunque 1. i due termini estremi d' una progressione con altri due egualmente distanti dagli estremi, e col medio termine, se il numero de' termini è disparo; sono in proporzione.

2. I prodotti de' due estremi, di due termini ugualmente distanti dagli estremi, e il quadrato del termine medio, se il numero de' termini della progressione è disparo, sono uguali; perche detti termini, due a due, sono in proporzione.

Così di ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 : aq^4$, il prodotto de' due estremi $a . aq^4 = aq . aq^3 = aq^2 . aq^2 = a^2 q^4$; di ∺ $a : aq : aq^2 : aq^3 :$ aq

$aq^4 : aq^5$, il prodotto degli eſtremi $a . aq^5 =$

$aq . aq^4 = aq^2 . aq^3$.

IV. In una progreſſione il primo termine è al terzo in ragion compoſta del primo al ſecondo, e del ſecondo al terzo; e poichè le due ragioni ſono uguali, in ragion duplicata del primo al ſecondo, o del ſecondo al terzo.

Il primo termine è al quarto in ragion compoſta del primo al ſecondo, del ſecondo al terzo, e del terzo al quarto; e poichè le tre ragioni ſono uguali, in ragion triplicata del primo al ſecondo, o del ſecondo al terzo, o del terzo al quarto. &c.

Al contrario il primo termine della progreſſione è al ſecondo in ragione ſudduplicata del primo al terzo, ſuttriplicata del primo al quarto &c.

La ragione duplicata, triplicata &c. di due termini è la ragione de' quadrati, de' cubi &c. de' termini, Cap. XIX. n. VII. Dunque la ragione de' quadrati, de' cubi &c. di due termini, ſi ha dal terzo, quarto &c. proporzionale della ragione delle radici de' quadrati; de' cubi &c. de' termini.

Così la ragione di $a^2 : a^2 q^2$ è $a : aq^2$ terzo proporzionale di $a : aq$, radici di $a^2 : a^2 q^2$; la ragione di $a^3 : a^3 q^3$ è $a : aq^3$ quarto termine proporzionale di $a : aq$, radici terze di $a^3 : a^3 q^3$.

La ragione sudduplicata, suttriplicata &c. di due termini è la ragione delle radici quadre, cube &c. de' termini; e si ha estraendo la radice quadra, cuba &c. dalla ragione de' due termini, o dalle radici de' due termini.

Così la ragione sudduplicata di $a^2 : a^2 q^2$ è $a : aq$ termine medio tra $a : aq^2$. La ragione suttriplicata di $a^3 : a^3 q^3$ è $a : aq$ primo mo medio proporzionale de' due medj tra a, aq^3 &c.

V. Il primo termine di una progressione è antecedente, l'ultimo conseguente, e i termini medj sono antecedenti e conseguenti. Dunque pe'l n. VI. del Cap. prec. la somma degli antecedenti è alla somma de' conseguenti, come il primo antecedente al suo conseguente.

Si dica s la somma de' termini di una progressione, ω l' ultimo termine; sarà la somma degli antecedenti di una progressione $s-\omega$, la somma de' conseguenti $s-a$ primo termine, e $s-\omega : s-a = a : aq = 1 : q$, $sq-\omega q = s-a$, $sq-s = \omega q - a$,

$$s = \frac{\omega q - a}{q-1}.$$ Pe'l N. I. $\omega = aq^{n-1}$. Se in vece di ω si sostituisce il suo valore, sarà

$$s = \frac{aq^n - a}{q-1}.$$

In queste due equazioni $s = \dfrac{\omega q - a}{q-1}$,

$\omega = aq^{n-1}$ si contengono cinque quantità della progressione; cioè il primo termine, la ragione, l'ultimo termine, il numero de' termini, e la somma de' termini. Di queste cinque quantità se tre si suppongono date, per le due equazioni si rinvengono le altre due quantità; come si vedrà nella Seconda Parte.

VI. Nell' equazione $s = \frac{aq^n - a}{q-1}$, il numeratore $aq^n - a$ esattamente si divide pe'l denominatore $q-1$; il suo quoziente $aq^{n-1} + aq^{n-2} + aq^{n-3} \ldots\ldots aq^0$ è la somma de' termini della progressione, i quali si hanno con ordine inverso.

Se $n=5$, la somma de' termini è $aq^4 + aq^3 + aq^2 + aq + a$. Se $n=6$, la somma de' termini è $aq^5 + aq^4 + aq^3 + aq^2 + aq + a$ &c.

Se

Se $q=1$, la somma de' termini è $a+$ $+a$ $+a$ &c. $=na$.

Se $q>1$, l'ultimo termine aq^{n-1} di una infinita progressione è infinito, e $s=\frac{aq^{n}-a}{q-1}$ $=aq^{n}$.

Se $q<1$, la progressione è decrescente, e prodotta all' infinito l' ultimo termine aq^{n-1} è nullo, e $s=\frac{aq^{n}-a}{q-1}=\frac{-a}{q-1}$.

Dunque la somma di una progressione infinita decrescente è uguale al quoziente di $-a$ divisa per $q-1$.

Così la serie $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$ &c. è una progressione decrescente, della quale il primo termine è $\frac{1}{2}$, e la ragione $-\frac{1}{2}$.

Dunque $ſ = \dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{3}$ ſomma della progreſſione infinita.

VII. Le frazioni decimali, che contengono un numero di cifre di ritorno ſenza fine, non ſono, che progreſſioni geometriche decreſcenti, e per l' eſpoſta formula della ſomma ſi traſformano in frazioni ordinarie.

Così la frazione 0, 33333 &c. non è, che $\div\!\div \dfrac{3}{10} : \dfrac{3}{100} : \dfrac{3}{1000} \ldots\ldots \dfrac{3}{\infty}$. Se nella formula $ſ = \dfrac{\omega q - a}{q-1}$, ſi pone l'ultimo termine $\omega = \dfrac{3}{\infty}$, il primo termine $a = \dfrac{3}{10}$,

l'eſl' esponente $q = \frac{1}{10}$, sarà $s = \dfrac{\frac{3}{\infty} . \frac{1}{10} - \frac{3}{10}}{\frac{1}{10} - 1}$

$= \frac{1}{3}$ valore della frazione decimale.

La frazione decimale o, 142857142857 &c. non è altro, che la progressione

$$\div \frac{142857}{1000000} : \frac{142857}{1000000000000} \text{ \&c.}$$

Se nella formula $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ si pone ω

$= \frac{142857}{\infty}$, $a = \frac{142857}{1000000}$, l' esponente

$q = \frac{1}{1000000}$, il valore della somma

è $\frac{1}{7}$.

VIII.

VIII. Si riducono anche i decimali, che hanno un numero di cifre di ritorno, in frazioni ordinarie col metodo inverso dell' altro, col quale le frazioni ordinarie si riducono in decimali; come ne' seguenti esempj.

ESEMPIO I.

Sia o, 33333 &c. da ridursi in frazione ordinaria.

$$\begin{array}{r} \int = 0,\ 333333\ \&c. \\ 10\int = 3,\ 333333\ \&c. \\ \int = 0,\ 333333\ \&c. \\ \hline 9\int = 3 \end{array}$$

$$\int = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Si pone $\int$ uguale ai decimali, si moltiplicano l' uno e l' altro membro dell' equazione per 10. Da questa seconda equazione si sottrae la prima; il residuo $9\int = 3$. Si dividono l' uno e l' altro membro per 9, e si e si ha $ſ = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ valore della frazione decimale.

ESEMPIO II.

Sia 0, 181818 &c. da ridursi in frazione ordinaria.

$$\begin{aligned} ſ &= 0,\ 181818\ \&c. \\ 10ſ &= 1,\ 8\ 181818\ \&c. \\ 100ſ &= 18,\ 18181818\ \&c. \\ ſ &= 0,\ 181818\ \&c. \\ \hline 99ſ &= 18 \end{aligned}$$

$$ſ = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$$

Si pone ſ eguale ai decimali. Si moltiplicano l' uno e l' altro membro dell' equazione per 10, e si ha una seconda equazione. Di questa seconda equazione l' uno e l' altro termine si moltiplicano per 10, e si ha la terza; dalla quale sottratta ta la prima, il reſiduo $99ſ = 18$, e $ſ = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$.

ESEMPIO III.

Sia 0, 142857142857142857 &c. da ridurſi in frazione ordinaria

$$
\begin{array}{rl}
ſ = 0, & 142857142857 \text{ \&c.} \\
10\,ſ = 1, & 42857142857 \text{ \&c.} \\
100\,ſ = 14, & 2857142857 \text{ \&c.} \\
1000\,ſ = 142, & 857142857 \text{ \&c.} \\
10000\,ſ = 1428, & 57142857 \text{ \&c.} \\
100000\,ſ = 14285, & 7142857 \text{ \&c.} \\
1000000\,ſ = 142857, & 142857 \text{ \&c.} \\
ſ = 0 & ,\,142857 \text{ \&c.} \\
\hline
999999\,ſ = 142857 &
\end{array}
$$

$$ſ = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$$

Si pone ſ eguale al numero de' decimali. L' uno e l' altro membro dell' equazione ſucceſſivamente ſi moltiplicano per 10, fin-

finchè il numero di sei cifre di ritorno divenga intero. Dall' ultima equazione sottratta la prima, si ha $s = \frac{1}{7}$ valore della frazione decimale.

ESEMPIO IV.

Sia 0, 833333 &c. da ridursi in frazione decimale.

$$
\begin{aligned}
s &= 0,\ 833333\ \&c. \\
10\,s &= 8,\ 33333\ \&c. \\
100\,s &= 83,\ 33333\ \&c. \\
10\,s &= 8,\ 33333\ \&c. \\
\hline
90\,s &= 83 - 8 = 75
\end{aligned}
$$

$$s = \frac{75}{90} = \frac{5}{6}$$

Poichè la prima cifra decimale 8 non è di ritorno, si sottrae dalla ultima equazione la seconda; e il valore della fra-

zio-

zione decimale è $\frac{5}{6}$.

Se le cifre decimali di ritorno incominciano dopo due, o più cifre; si sottrae la terza, la quarta &c. equazione dall' ultima.

IL FINE.

APPROVAZIONE DELL' OPERA.

Admod. Rev. PP. D. Xaverius Durini, & D. Aloysius Festa Theologiæ Lectores revideant & in scriptis referant.

Datum ex Monasterio SS. Petri & Catharinæ ad Magellam de Neapoli die 15 Novembris 1794.

D. Antonius Lombardi Abbas Generalis.

D. Joannes Guttierez Abbas & Pro = Secretarius.

QUod inscribitur Opus *Trattato di Algebra del P. Abate D. Domenico Angeloni della Congregazione Celestina* tuis obsequuti mandatis Illme ac Rme Præsul diligenter perlustravimus; illudque comperimus maxima sagacitate ac profunditate fuisse elaboratum, ut in suo genere videatur numeris omnibus absolutum; quo probe intellecto facilior via pateat ad Analysim, quam in Secunda Parte pollicetur auctor. Qua de re exoptandum ut typis amandetur, præsertim cum ne suspicari quidem possit Religionem aut bonos mores quavis injuria lacessiri.

Neapoli ex Monasterio SS. Petri & Cathariæ ad Magellam quarto Idus Decembris MDCCXCIV.

D. Xaverius Durini, & D. Aloysius Festa ibidem Theologiæ Lectores.

At-

Attenta suprascripta relatione ; liceat prædictum opus typis demandari ; servatis tamen &c.

Datum ex nostro Monasterio SS. Petri & Catharinæ ad Magellam de Neapoli die 20 Decembris 1794.

D. Antonius Lombardi Abbas Generalis.

D. Joannes Guttierez Abbas & Pro = Secretarius.

FIN

INDICE

Prefazione. *Delle prime Nozioni dell' Algebra.* Pag. 7.

Parte Prima. *Del Calcolo.* pag. 11.

Cap. I. *Dell' Addizione e sottrazione de' Monomj.* pag. 13.

Cap. II. *Della Moltiplicazione de' Monomj.* pag. 25.

Cap. III. *Della Divisione de' Monomj.* pag. 33.

Cap. IV. *Delle Frazioni de' Monomj.* pag. 39.

Cap. V. *Delle Potenze de' Monomj.* pag. 56.

Cap. VI. *Delle Radici de' Monomj.* pag. 65.

Cap. VII. *De' Polinomj.* pag. 93.

Cap. VIII. *Dell' Addizione e della Sottrazione de' Polinomj.* pag. 100.

Cap. IX. *Della Moltiplicazione de' Polinomj.* pag. 108.

Cap. X. *Della Divisione de' Polinomj.* pag. 120.

Cap. XI. *Del massimo comune Divisore di due Polinomj.* pag. 138.

Cap. XII. *Delle Frazioni de' Polinomj.* pag. 153.

Cap. XIII. *Delle Frazioni continue.* pag. 174.
Cap. XIV. *Delle Permutazioni e Combinazioni delle quantità.* pag. 221.
Cap. XV. *Delle Potenze de' Polinomj.* pag. 236.
Cap. XVI. *Delle Radici de' Polinomj.* pag. 245.
Cap. XVII. *Della Formula delle Potenze del Binomio.* pag. 265.
Cap. XVIII. *Della Formula delle Potenze Fratte, e delle Potenze espresse per Esponenti Negativi Interi e Fratti del Binomio.* pag. 276.
Cap. XIX. *Delle Ragioni, delle Proporzioni, e delle Progressioni.* pag. 298.
Cap. XX. *Delle Proporzioni e delle Progressioni Aritmetiche.* pag. 308.
Cap. XXI. *De' Numeri Poligoni.* pag. 316.
Cap. XXII. *Delle Proporzioni Geometriche.* pag. 325.
Cap. XXIII. *Delle Progressioni Geometriche.* pag. 335.

ERRORI	CORREZIONI
pag. 17. *v.*2. $-d-m=q$	$-d-m=-q$
*p.*47. *v.*23 i numeri	i numeratori
*p.*65. *v.* 26. $a^3 = a^2 . -a$	$-a^3 = a^2 . -a$
*p.*87. *v.* 11.; $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$	Il prodotto di $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$
p. 151. *v.*2. $-xf$	$-x^2 f$
*p.*244. *v.*18. $a+2ab+b$	$a^2+2ab+b^2$
*p.*255. *v.*6. si divide il primo termine	si divide il residuo pe'l primo termine