

A L G E B R Æ

GEOMETRIA . PROMOTÆ

E L E M E N T A

Conscripta ad usum

F A U S T I N Æ

P I G N A T E L L I

Principis Colubranensis , & Tol-
vensis Ducatus Hæredis .

Edita vero in gratiam

STUDIOSÆ JUVENTUTIS

A U C T O R E

N I C O L A O D E M A R T I N O

Regio Mathematicum Professore

T O M . I .



BIBLIOTECA RICCARDI

IN MODENA

S. 17 F. 7 N. 55.

Excudebat Felix Carolus Mosca sumptibus CAJETANI

ELIÆ Superioribus annuentibus NEAPOLI

M D C C X X V I I .

44

Lib. Com.
maglione
2-10-28.
16615
3v.

R E G I Æ
SCIENTIARUM
ACADEMIÆ PARISIENSIS
SOCIIS PRÆSTANTISSIMIS

NICOLAUS DE MARTINO

F. P.



Quod mea hæc Algebra
Elementa, quæ septem
ab hinc annis in usum
Excellentissimæ Principis
FAUSTINÆ PIGNATELLI
conscribere curavi, ve-
stro nunc nomine exor-
nata, in lucem emittam; non deerunt,
VIRI PRÆSTANTISSIMI, qui audacem ni-
mis me iudicabunt, nec tanto molimine sa-
tis mihi ipsi consuluisse, in Vulgus effe-
rent. Facile enim in animum inducent
a 3 suum,

suum; aliisque imponent; quod, ad id audendum, duorum alterutro fuerim adductus; vel quod adeo de me sentiam, ut non dubitem, quin mei labores Viris tam probatae doctrinae possent offerri; vel quod Vos ipsos adeo parvi faciam, ut omni qualicunque labore, qui Vobis offeratur, contentos Vos esse debere, mihi persuadeam. Sane non vereor, quin nemo Vestrum hanc in me notam sit injecturus. Nam, ut æqui rerum aestimatores, non aliter id, quod molior, eritis accepturi, quam ab eo fiat oportet, qui suarum virium est probe conscius, nec ipsum latet, quem locum in Orbe litterario, communi omnium suffragio, teneatis. Sed ab aliis, qui eam mihi notam inurere, Vulgusque hominum, non satis cautum, decipere possent, cavendum mihi est. Neque enim omnes eo pollent animi candore, ut ea, qua decet, ratione hominum consilia interpretentur. Potissimum vero id vitii viget apud eos, qui specie tenus litteras colunt: quo fit, ut, maximo ipsarum detrimento, exitiosae humanae Societati vulgo litterae habeantur. Quod igitur, VIRI PRÆSTANTISSIMI, potissimum me movit, ut hoc meum quaecumque Opus Vobis dicarem, est, ut ad fontem suum rediret quidquid eximii, ac singularis in eo continetur. Maximam namque partem optimarum rerum,

rum, quæ ibidem occurrunt, non aliunde equidem sum mutuatus, quam ex vestris Commentariis, quos continuo ante oculos habui. Et, si aliquod forte argumentum ultra vestra pomæria videar protulisse, id quoque Vobis ipsis ferri debet acceptum; quum, nonnisi præeunte vestra face, licuerit mihi paulo longius progredi. Accedit, quod mihi, qui in hac Urbe perpetuo sum commoratus, non aliter quidem contingit, ut tum sublimioris Geometriæ recessus, cum arcana Physices sanioris permeare valuerim, quam ope vestrorum Commentariorum, qui fato quodam singulari citius, quam par erat, ad meas manus pervenerunt. Analysis quippe Indefinite Parvorum Clarissimi HOSPITALII penitus intelligere licuit; quia cuncta loca ardua, ac difficilia, quæ in ea perlustranda nonnihil negotii Tironibus facebant, dilucidationibus vestris plana, & aperta sese mihi præbuerunt. Et admirandum illud Opus Principiorum Philosophiæ Naturalis Incomparabilis NEVVRONI fas fuit inoffenso pede peragrarè; quia præcipua ejus Operis Capita in vestris Commentariis, non modo enucleata, sed omnibus suis numeris perfecta, absolutaque leguntur. Equum est igitur, VIRI PRÆSTANTISSIMI, ut Illustri vestræ Societati acceptum feram quidquid profecerim, si-

ve in **Physicis** , sive in **Geometricis** disciplinis . Atque hoc ex capite , sicuti non est mihi vitio vertendum , quod mea hæc **Algebræ Elementa** sub vestris auspiciis in lucem proferam ; ita audacter se spes insinuat , ut Vosmet ipsi ab invidiæ morsibus ea pro viribus vindicare velitis . Neque vero culpæ mihi debet adscribi, quod ob signatis hisce tabulis nunc demum cunctis testatum faciam , quo vinculo sim Vobis obstrictus , & quantum vestris labribus debeam . Non enim id antea præstiti ; quia obstitit ingenuus ille pudor , quem a prima ætate eximia vestra doctrina sensim in animum misit . Nunc autem , mutato consilio , malui pudoris limites præterire , quam ingrati animi crimen incurrere . Et quamquam ultro fatear , nimis tenue esse id , quod Vobis exhibeo ; non vereor tamen , quin ea sit vestra humanitas , ut , non tam quid Vobis debeatur , quam quid vires possint aliorum , inspicere velitis . Futurum autem , ut meus hic labor non omnino sit Vobis discipliturus , suadet ; tum Operis argumentum , quo nihil sublimius excogitari potest ; tum ipsa de hoc argumento differendi ratio , qua omnem ex eo caliginem , ac sterilitatem discutere curavi . Ubi vero ad Excellentissimam eam **PRINCIPEM** animum converto , in cujus usum hæc mea **Alge-**
ge-

gebræ Elementa conscripta fuerunt, spes optima fovet, ut omnem apud Vos gratiam sint acceptura. Adeo enim fama percrebuit de singulari, quo omne litterarum genus persequitur, studio, ut jam Exteris excitemento sit, quo Regiam hanc Urbem inviserent. Sed nomen, quod fama sustinet, augeri in se ipsis non parum sentiunt, qui familiari suo colloquio detinentur. Mens namque Geometrica in omni ejus sermone, vel etiam jocosò, detegitur; & de quacumque re verba faciat, adeo subtiliter, & acute illam evoluit, ut nihil sit, quod in ea expeti queat. Sensa autem animi sui eo verborum delectu, ac proprietate depromit, ut eos, qui audiunt, quocumque vellet, posset impellere. Quod vero plane superat fidem, est, quod & facile ad aliorum sermones se accommodat, & cuique pro ingenio suo loquendi suppetit argumentum: ex quo fit, ut nemo ipsius non ambiat necessitudinem, nemo familiaritate sua non recreetur. Opus igitur, pro tanta PRINCIPE elucubratum, non est mihi pertimescendum, quin æquo, libentique animo eritis accepturi. Unde non aliud superest, quam ut vota mea fundam, quo Vestra Societas pro bono Scientiarum cum ipso terrarum Orbe sit duratura.

AD

•

AD LECTOREM.

Dodecim fere effluxerunt anni, ex quo libri duo priores nostrorum Algebrae Elementorum, tumultuario studio conscripti, lucem adspexerunt. Eosdem nonnihil adauctos, & in concinnicrem formam redactos, una cum duobus libris postremis, nunc iterum tibi sistimus, BENEVOLE LECTOR. Propositum est autem nobis in hisce Elementis Algebrae universam comprehendere: quem in finem, non modo eam ipsius partem enodare aggressi sumus, quæ propriis suis limitibus continetur; sed illam quoque adjicere curavimus, quæ per latissimos Geometriae campos spatiatur. Praefixum vero nobis scopum non melius indicari posse putavimus, quam Opus inscribendo: Algebrae Geometria promotæ Elementa. Etsi enim consortio harum disciplinarum utraque ad majorem amplitudinem evehatur; attamen, quod in hoc Opere potissimam nobis proposuimus, est, ut Algebra defectibus per Geometriae vires occurramus. Et priores quidem duo libri, quum alter sit de calculo literali, seu specioso, alter de speciosa problematum resolutione, Algebrae in se ipsa consideratam complectuntur. Duo vero libri posteriores, quum unus de compositione locorum geometricorum edisserat, alter de geometrica aequationum constructione pertractet, quæ ratione Geometriae subsidio eadem disciplina majora subeat incrementa, in propatulo ponit. Singula autem horum librorum argumenta paulo latius prosecuti sumus, quam Elementorum patitur ratio. Id vero volumus, BENEVOLE LECTOR, nobis vitio vertas. Nam

Nam disciplina hujus Elementa ita quidem conscribere curavimus, ut Tironum captui essent accomodata, & doctis etiam usui esse possent. Itaque, quum eo quidem ordine cuncta a nobis digesta sint, ut posteriora ex prioribus pronò alveo fluant; nihil metuendum est, quod Tironum animos a studio hujus disciplinae avertere possit. Quum vero nihil a nobis sit omisum, quod ad eandem disciplinam pertinere videatur; spes optima foret, futuram, ut nostram Opus doctioribus etiam non improbetur. Neque enim omnia disciplinae hujus theoremata ita semper prae manibus haberi possunt, ut praesto sint nobis, quum iis est opus. Quare optandum erat, ut quae apud varios Auctores hinc inde sparsa reperiuntur, in unam corpus sabinde collecta haberentur, ut essent iisdem principiis innixa, eodemque ordine pertractata. In priore igitur libro, in quo de calculo litterali, seu specioso disseritur, non modo ea complexi sumus, quae de hujusmodi calculo vulgo Algebristae in suis Elementis tradere consueverunt; sed alia quamplura congeessimus, quibus longe ultra in hac scientia progredi licet. Eum namque distribuimus in quatuor sectiones, quarum prior est de calculo quantitatum rationalium, altera de calculo quantitatum radicalium, tertia de calculo serierum infinitarum, & quarta de generali potestatum theoria. Unde priores duae ejus sectiones ea nobis sistunt, quae vulgariae sunt, & a cunctis in suis Algebra Institutionibus tradita; aliae vero duae sectiones postrema argumentum continent paulo sublimius, quod a scientiae hujus Elementis alienum fortasse nonnulli judicabunt. Secundus porro liber quatuor etiam sectiones complectitur; unam nempe

de

*de resolutione problematum per analysim; alteram
 de natura, & proprietatibus aequationum; ter-
 tiam de reductione aequationum ad propriam se-
 dem; & quartam demum de resolutione aequatio-
 num irreducibilium. Quamquam vero singula
 hac capita communia sint, & ab omnibus fere per-
 tractata; audacter tamen asserere non verebimur,
 ea in nostris hisce Elementis, non modo paulo ac-
 curatius expensa, sed novis etiam accessionibus
 locupletata reperiri. Omnium autem uberior est
 liber tertius, in quo de compositione locorum geo-
 metricorum agendum nobis proposuimus. Et si
 enim nemo non noverit, loca geometrica multipli-
 cis generis esse; attamen, qui de iis componendis
 conscripserunt, non alia loca sunt profecati, quam
 quæ ad priora duo genera referuntur. Quum igitur
 theoria ista, maximi alioquin usus, non satis
 abunde, nec ea, quæ par erat, ratione ab aliis fuerit
 explicata; eam omnibus suis numeris perfectam,
 absolutamque tradere aggressi sumus. Quem in
 finem, non modo de locis disseruimus, tam primi,
 quam secundi generis, quæ quum frequentius
 occurrant, æquum erat, ut seorsim de iis agere-
 tur; verum etiam conati sumus generaliter osten-
 dere, quæ ratione, tum loca cujusque generis a
 se invicem distingui, cum linearum loca illa ter-
 minantium proprietates possent definiri: cujus
 deinde generalis theoriæ placuit exemplum exhi-
 bere speciale in lineis ordinis tertii, quibus
 loca tertii generis terminantur, quasque primus
 omnium Newtonus enumerare suscepit. Itaque
 librum tertium nostrorum Algebrae Elementorum
 in quatuor pariter sectiones distribuimus; & in
 prima quidem egimus de natura linearum, quæ
 sunt termini locorum primi, & secundi generis*

in

*in secunda methodum aperuimus, qua eorundem
 locorum compositio perficitur; in tertia generalem
 cujuscumque ordinis linearum theoriam complexi
 sumus; & in quarta demum specialem theoriam
 hujus usum exhibuimus, contemplatione earum
 linearum, qua tertium ordinem constituunt. Ea
 autem, quam nobis præscripsimus, disserendi ra-
 tione, non alia curvæ speciatim contemplandas se-
 se nobis obtulerunt, quam conicæ Veterum se-
 ctiones ejusdem cum circulo gradus, & lineæ ter-
 tii ordinis Newtoniana. Unde, ne nostris hisce
 Elementis aliquid deesset, quod scitu dignum
 videretur; opera pretium duximus, quatuor iis
 sectionibus Appendicem subnectere, in qua omnes
 curvas, quæ suis saltem nominibus apud Geome-
 tras celebrantur, ea, quæ fieri potuit, brevita-
 te perlustravimus. Hinc vero factum, ut libri
 tertii moles usque adeo creverit, ut, quum uni-
 co volumine contineri non posset, omnino opor-
 tuerit, duobus eum tomis comprehendere. Deni-
 que liber quartus, in quo de geometrica æquatio-
 num constructione disseritur, longe etiam plura
 complectitur, quam quæ ab aliis, qui de eodem
 argumento pertractarunt, congesta fuerunt. Eum
 namque perinde, ac quemlibet præcedentium, in
 quatuor sectiones partiti sumus. In prima autem,
 jactis generalioribus theoriæ hujus fundamentis,
 egimus de constructione earum æquationum, quæ
 secundum gradum non excedunt; in secunda ve-
 ro constructionem exhibuimus æquationum, quæ
 sive ad tertium, sive ad quartum gradum assur-
 gant; in tertia porro gradum fecimus ad constru-
 ctionem æquationum, quæ sunt quinti, aut ul-
 terioris gradus; & in quarta demum, quo pacto
 qualibet æquatio construi possit per lineam, quæ
 sit*

fit ejusdem cum ea ordinis, aperuimus. Quamquam vero istiusmodi constructiones non alia ratione in Algebra tradi soleant, quam ut per rectarum longitudines exhibeantur radices earum saltem equationum, quæ algebraice resolvi nequeunt; attamen, quum problemata, unde equationes proficiuntur, sunt geometrica, ipsa problematum natura exigit, ut ad eas recurramus. Verum, pro iis administrandis, majore quadam solertia opus est. Neque enim in elegantes illas Veterum Geometricarum constructiones incidere liceret, si equationes, ex resolutione problematum orta, eo quidem artificio construerentur, quo passim utuntur Algebraistæ. Quare non abs re fore putavimus, selectiora quadam problemata geometrica ad calcem cujuscunque sectionis subnectere, ut eorum ope compertum fieret, ac exploratum, qua ratione construendæ sint equationes problematum geometricorum, quo eam præseferant elegantiam, quæ in constructionibus Veterum elucescit. Habes ergo, BENEVOLE LECTOR, tum scopum, quem in conscribendis hisce Elementis nobis proposuimus, cum præcipua capita, quæ in iis pertractavimus. Quod vero attinet ad nostram de hac disciplina differendi rationem, hæc paucis accipe. Primo usque adeo claritati studuimus, omnemque ex ea caliginem, & obscuritatem delere conati sumus, ut audacter se spes infunderet, futurum, ut hujusmodi disciplina, quæ hætenus inter abstrusiores adscripta fuit, omnium captui accomodata videretur. Deinde, etsi ea analysis a nobis tradenda esset, quæ calculo utitur, singulas tamen rerum theorias, non tam calculi fato committere, quam ex propriis suis principiis eruere curavimus. Ac denique dedimus

ops-

operam, ut qui nostra hac Elementa attentè perlustrarent, non modo eam, quam continent, scientiam, sed scientiæ ejus Metaphysicam, ut ita dicam, ediscerent. Id vero postremum, si præstitum sit a nobis, non alteri ferri debet acceptum, quam Excellentissimæ ei PRINCIPÌ, in cujus usum hac Algebra Elementa fuerunt elaborata. Quam enim eam mentis aciem a natura sortita sis, ut in unoquoque rerum genere tunc demum acquiescat, ubi intimiores earam recessus pervaserit, primasque ipsarum origines fuerit assecuta; ut illi mos gereretur, non aliter, quam metaphysice, tradenda ei erat hujusmodi disciplina. Et sane, ut mens altius assurgere, & ad primitivas rerum notiones ascendere assuescat, nihil utilius Algebra studio. In eo enim disciplina isthac ceteris præstat, quod iis, quas contemplatur, ideis omnē, quam subire queunt, universalitatem citra erroris periculum facile potest largiri. Ubi autem in aliqua argumento supremum, ut ita dicam, genus est assecuta, superat profectò fidem, qua quidem solertia ad ultimas ejus differentias progrediatur. Optandum itaque esset, ut quilibet disciplina huic addiscendæ sedula operam navaret; ut que mentis capacitatem mirum in modum adauget, neque adeo artos esse limites nostræ mentis, ut vulgo creditur, luculenter ostendit. Interim, nescio quo fato, ea apud homines, etiam eruditos, irrepfit opinio, nihil sterilius Algebra studio: quo fit, ut qui fama ceteris præstant, tantum abest, ut ad id studii Adolescentiam animos alliciant, quin potius ab eo illos avertant. In hanc vero sententiam eo facilius abiere, quod viderint, præclara disciplina hujus theoremata vix aliter, quam calculo, a Vulgo Algebraistarum comprobari: unde

de, non tam encolendæ rationi, quam ei pessundanda, inservire Algebram colligerunt. Neque enim mens nostra colitur, ac perficitur multitudinem veritatum, quibus imbuitur; sed ubi vis ratiocinandi, quam a natura sortita est, alitur, atque fovetur. Quare, sicuti non aliæ discipline in pretio habenda sunt, quam quæ menti nostræ suppetunt argumentum, in quo ratiocinativa ejus facultas spatietur; ita Algebræ studium, non modo vanum, ac inutile, sed exitiosum omnino judicant: ea decepti ratione, quod fatali calculo omnes, quas docet, veritates obtrudere nobis videatur. Veram, quod vitio evenit eorum, qui de præclara hac disciplina disseruerunt, æquitas non patitur, ut in ipsam rejiciatur. Plane enim, si cæco calculi duce dumtaxat in ea progredi liceret, eliminanda quidem esset ab albo scientiarum, ejusque studium omnino foret improbandum. Sed id tantum a vero abest, quam quod longissime; nihilque magis valgatam errorem refellere valet, quam maximum illud incrementum, quod laboribus Virorum illustrium postremis hisce temporibus subire visa est. Neque enim ad universales illas rerum, de quibus edisserunt, theorias pervenire potuissent, nisi præeunte ratione calculum administraissent. Est itaque calculus disciplinæ hujus velut instrumentum, quod tamen non alius Artifex, quam ratio, moderatur, atque gubernat. Et quamquam illi iidem Viri insignes, de hac scientia optime meriti, inventa sua subinde ut plurimam evulgare visi sint, ut in iis magis vis calculi, quam ratio, elucescat; id tamen factum ab illis arbitramur, vel ut majorem sibi captarent gloriam, committendo latebris artificium, quo eas investigarunt veritates, vel ut aliorum

exer-

exercerent ingenia, propria eorum industria detegendam artem relinquendo, qua veritates illas sunt assecuti. Quaecumque autem sit causa, qua in inventis suis evulgandis ad id consilii eos adegerit, proculdubio reprehensione non vacant. Nam, sicuti ad veritatem inveniendam, non gloria, ac vanitate, sed suapte natura feramur oportet; ita quidquid in hac disciplina detegitur, id quidem non parce, ac frugaliter, sed plene, luculentisque, æquum est, ut aliis aperiatur. Est quippe disciplina hujus adeo latum argumentum, ut quicumque in eo labores impendantur, fieri plane nequit, ut omnino illud exhauriatur: unde, sicuti numquam aliis materies est defutura, in qua suas possint vires exercere, ita omnia eis præsidia oportet subministrantur, quo longius in hac scientia progredi valeant. Hujusmodi consilio, LECTOR BENEVOLE, nostra isthac Algebra Elementa conscribere curavimus. Nam, non modo singula capita, de quibus disseruimus, adeo clare, ac perspicue sumus prosecuti, ut nihil jam subesse videatur, quod negotium aliquod Tironibus facessere possit; verum etiam conati sumus, hujusmodi principiis eorundem animos imbueri, quæ sæcundissima essent, & quorum ope nihil in hac disciplina non possent audere. Itaque vetus illa quærela, quod, Algebra studio, non modo ratio non excolitur, sed obtunditur, atque sopitur, facile conjicimus, quod iniqua nimis visura sit iis, qui nostra hæc Elementa perlustrabunt. Intelligent enim, præclaras disciplinæ hujus theorias non esse meras calculi productiones, ut passim obijcitur, sed ex clavis, indubitatisque principiis adeo acute, ac subtiliter inferri, ut ad excollandam rationem nihil aptius esse queat, quam

eas plene cognitās, ac exploratas habere. Sūt
 autē & alii, qui Algebra dignitatem, ac prae-
 stantiam vel ob id concutere nituntur, quod ejus
 studium abstractis ideis contemplandis adeo men-
 tem assuescit, ut, tum aliis disciplinis compa-
 randis officiat, cum vitā civilis usum interclu-
 dat. Sed primo, mentem abstracta rerum con-
 templationi assuescere, tantum abest, ut vitio
 vertendum sit, quin potius in id singula animi
 vires sint intendendae. Nam omnes illae praejudi-
 catae opiniones, quibus, tum in veri cognitione,
 cum in rebus agendis obruimur, non equidem
 aliunde suam trahunt originem, & alie nostris
 animis barent, quam ex ideis rerum sensibilibus,
 quas summo studio colimus, atque fovemus. Dein-
 de, quam Algebra, non tam velut pars Matheseos,
 quam velut clavis, qua cunctae disciplinarum ma-
 thematicarum arcana recluduntur, debeat haberi;
 sicuti ejus eximius est usus in universa Ma-
 thesi, sic & ad scientiam rerum naturalium,
 quae absque Mathesi consistere nequit, summopere
 conducatur, necesse est. Et quamquam ejus argu-
 mentum nihil commune habeat cum Jurispruden-
 tia, & Theologia; attamen, sicuti pro hisce di-
 sciplinis maxime confert Metaphysica, sic pro il-
 lustrandis speculationibus metaphysicis non al-
 liunde melius petuntur exempla, quam ex Alge-
 bra, cujus ideae, non modo ab omni sensu, & ima-
 ginatione sunt remotae, verum etiam simplicissimae
 sunt, nullisque difficultatibus obnoxiae. Denique
 nec item intelligimus, qua ratione Algebrae stu-
 dium vitae civilis usum intercludere, rebusque
 agendis impares nos effloere possit. Quam enim
 essensum sit, omnes alias disciplinas ea, qua tur-
 est, ratione non aliter, quam ejus praesidio, pos-
 se

*se comparari; utique ei ferri possunt accepta can-
 eta illa commoda, quæ in vita activa ex disci-
 plinis omnibus nobis derivantur. Aut igitur ne-
 cesse est, ut nullus sit scientiarum usus in actio-
 nibus nostris obeundis, quod nemo dixerit, cui
 sanum est cerebrum; aut, si in iis peragendis ali-
 quos nobis suppetant fructus, quos sane uberri-
 mos largiuntur, maxime in Algebram, quæ est font,
 & origo scientiarum omnium, eos rejicere ne-
 cesse est. Interim, etsi hæc in se spectata veris-
 sima sint, urgent tamen exempla, quæ contrariam
 nobis ostendant. Qui enim Algebram profitentur,
 tanta mentis alienatione ut plurimum laborant,
 ut nec ad aliorum sermones animum intendere,
 nec sensa sua eloqui valeant; verborum sunt adeo
 frugales, ac inopes, ut vix aliis, quam monosyl-
 labis vocibus, sermones suos absolvant; denique
 vitam suam subinde transigere videntur, ac si in
 hac societate non essent, nec humana negotia
 ad eos pertinerent. Sed subeunt hæc incommoda
 qui Algebram profitentur, hoc est, qui in diutur-
 no Algebrae studio omnem fere vitam impendunt.
 Id vero nibi nos movere debet. Neque enim no-
 vum est, ut qui alicui disciplina excolenda va-
 mnem operam navant, amore ejus subinde raptan-
 tur, ut disciplinas alias negligent, nec expleant
 officia, quibus humana societas continetur. Sit,
 sicuti id ultro eis ignoscitur, quia cultura ejus
 disciplina humana conferunt societati; ita culpa
 non vacant, qui eam ob causam ejusdem discipli-
 nae studium carpunt. Verum iisdem incommodis
 minime subjacent ii, qui disciplinis addiscendis
 eo consilio animum admovent, ut suam excolerent
 rationem, & ea, quæ decet, ratione in hac so-
 cietate se gererent. Quum enim non ea illorum*

*mens sit, ut Algebra promovenda viribus omni-
 bus incambant; utique in ejus studio non aliud
 tempus impendent, quam quod requiritur, ut il-
 lius ubertas, ac solertia degustentur. Iis autem
 degustatis, sicuti ad alias disciplinas statim se
 conferunt, sic in iis capessendis prævium Algebrae
 studium maximo eis erit adjumento: unde de-
 mum, solida rerum cognitione imbuti, nec iis
 obnoxii erunt præjudiciis, quibus vulgus homi-
 num misere laborat, nec vitam suam aliter tran-
 sfigere curabunt, quam eos decet, qui recta ratio-
 nis sunt compotes. Sed rursus hæc omnia altero
 nobis concederentur, si ex Algebra ad alias disci-
 plinas facili negotio progredi liceret. Id vero
 quam sit difficile factu, satis superque quotidiana
 docet experientia. Quos enim Algebrae studium
 semel sibi subjecit, ii adeo illius illecebris deti-
 nentur, ut non aliis disciplinis sedulo deinceps
 incambant, quam quæ algebraice possunt pertra-
 ctari; & omnino negligunt eas, quæ nullam cum
 Algebra affinitatem habentes, magis humanæ con-
 ducunt societati. Verum huic, quod modo nobis
 objicitur, plurima reponi possunt. Primo enim id
 ipsum, si verum foret, Algebra præ cæteris disci-
 plinis dignitatem, ac præstantiam maxime com-
 menderet; quum non aliunde quidem eveniret, ut,
 qui semel eam degustarint, disciplinarum alia-
 rum radio officerentur, quam quia nullibi mens
 nostra magis spatiatur, & verum, ad quod ten-
 dit, tutius assequitur, quam studio ejus disci-
 plinæ. Deinde dubitari merito potest, num humanæ
 societati magis proficua censenda sint disciplina
 illa, quæ nihil cum Algebra commune habent;
 nam sicuti humana societas artibus potissimum
 continetur, sic non alias disciplinas magis huma-*

nō gēnērī conferrē putandum est, quā quibā
 artes promoventur. Denique exempla illa, quā
 objici possent, multum abest, ut argumento nobis
 esse debeant, quo illud semper evenire creden-
 dum sit; quā non alia ratione ea magis in oculos
 incurrant, quā quia nemo Algebrae studium eo
 quidem consilio aggreditur, ut in ea excolenda
 omne vitæ tempus impendat. Et sane hujusmodi
 exempla, si hominum indoles spectetur, rariora
 proculdubio esse debent. Nam iis ut plurimum
 homines incumbere videmus, ex quibus, vel vitæ
 praesidia nobis derivantur, vel honores, dignita-
 tesque percipiuntur: quorum quidem utrumque
 ex diuturno Algebrae studio frustra expetere licet.
 Pro bono itaque scientiarum, & artium optandum
 foret, ut ea essent paulo crebriora: quod tunc de-
 mum facile fiet, ubi disciplina hujus momentum
 cunctis innotuerit. Sunt demum & alii, qui,
 tam Algebra, cum universæ Matheseos studium
 idcirco tenebris committendum esse decernant,
 quod mentem nostram nimia luce perfundant.
 Quam enim ea claritas, ac evidentia, cui scien-
 tiæ mathematicæ mentem assuescunt, nequeat
 in aliis disciplinis haberi; omnino necesse est, ut
 bareat animus, quā Mathesis limites egreditur.
 Hinc universalem illam Scepticismam, qui nostro
 obtinet ævo, nonnisi disciplinis mathematicis,
 quæ summo studio excoluntur, passim ferunt acce-
 ptam. Qui enim demonstrationibus geometricis
 sunt assueti, agre iis præbent assensum, quæ
 eandem certitudinem præ se ferre non videntur.
 Itaque in dubiam vertunt quicquid rigore geo-
 metrico ipsis non obtruditur; suoque exemplo in
 universalem hanc dubitationem alios etiam tra-
 hant. Id vero æquo animo ferendum esset, si intro-

ea tantummodo se continerent, quae nostro capiti
 sunt accomodata; sed, maximo humani generis
 detrimento, in illa quoque vim inferant, quae
 intelligentia nostra vires excedunt. Eo namque
 quorundam Mathematicorum pervenit impu-
 dentia, ut etiam in mysteriis christiana nostra
 religionis certitudinem geometricam expetere
 non erubescant: quam quum consequi nequeant,
 vel in opposita dogmata abeunt, vel ipsam chri-
 stianam religionem funditus evertere conantur.
 Sic nullibi disciplinis mathematicis majore in-
 cumbitur studio, quam in Anglia: & profecto
 nulli magis, quam Angli, religionem nostram
 christianam, vel diris modis dilacerant, vel peni-
 tus concutere nituntur: usque adeo, ut ipse ille
 magnus Newtonus, si verum est, quod de eo in suis
 de Gente Anglica Epistolis refert Volterrus, Arrianis,
 Socinianisque sibi adhaerendam esse putaverit,
 quia eorum dogmata magis Mathefi consona depre-
 henduntur. Conqueritur de effrangi ista Anglorum
 Geometrarum audacia Berkeleyus Praesul Hiber-
 nus in parvo quodam libello, quem quatuor ab
 hinc annis in lucem emisit; sed eum eo zelus adegit,
 ut nec etiam in rebus mathematicis satis sibi ipsis
 constare eos, conetur ostendere. Eisdem carpit quo-
 que Delavinius, Canonicus Eboracensis, in Opere
 suo de Revelatione candide expensa; iisque vitio
 vertit, tum nimiam illam libertatem, qua dogma-
 ta nostra religionis ad examina revocant, tum
 quod ea aliis inculcent eodem illo languido stylo,
 quo mathematicas veritates prosequuntur. Jam,
 quod isti objiciunt, majore oportet studio dilua-
 mus; tam, ut disciplinarum mathematicarum
 utilitas vindicetur; tam, ne male apud Viros
 religiosos Mathematici audiant. Non equidem
 ne.

negamus, eos, qui demonstrationibus geometricis mentem assuescant, non ita facile rebus aliis acquiescere, id vero non aliunde evenire putandum est, quam quia paulo oculatiores sunt, nec tam libenter patiantur, ut ab aliis decipiantur. Quod autem in singulis rebus eum expectant certitudinis gradum, qui in disciplinis cernitur mathematicis, id maxime a vero abhorret. Neque enim ignorant, innumera dari genera rerum, in quibus datorum inopia, sola verisimilitudine, ac probabilitate contentos nos esse oportet. Sed, quum ea homines abutantur, & saepe sapias, qualicumque specie veri, solidas rerum theorias nobis obtrudere non vereantur; tunc deum iis suam Mathematici præbent assensum, ubi severo eas examini subjecerint. Accedit, quod, sicuti probabilitatis varii sunt gradus, quorum maximum certitudo occupat geometrica; ita nec omnes eadem ratione nos efficiunt, nec singulis idem omnino assensus præstetur oportet. Unde etiam ex hoc capite sedulo in cuiusque gradum inquirere, necesse est; ut non plus ei assentiamur, quam ille patitur gradus. In dimetiendis autem gradibus probabilitatis summa quadam solertia opus est: hucque sane redit, cum annis Philosophi sapientia, tam Politici prudentia tata. Sed id ipsum conatu inaudito nuperi Mathematici in artem redigere cararunt: quam etsi non adhuc numeris omnibus perfectam, absolutamque tradiderint; prostant tamen præclara ejus specimina, quibus, haud arduum erit, eandem ad umbilicum perducere. Denique, quod attinet ad nostram religionem, cujus mysteria omnem captum nostrum excedunt, ultero fatemur cum Apostolo, quod, qui eam ratione assequi conantur, cum ratione profecto insanient. Verum, si que

si quæ est disciplina, quæ eam ab hominum impudentia magis vindicare valeat, ea proculdubio est ipsa illa Matheſis, quam ad fastigium eveſtam noſtris temporibus intuemur. Ex iis enim, qui chriſtiana religioni bellum indicunt, alii quidem ad id adducuntur, quia alte ſibi perſuadent, certitudinem abſque evidentia non poſſe conſiſtere; alii vero exinde moventur, quod ejus myſteria non modo incomprehenſibilia ſint, ſed cum ipſa naturali ratione ex diametro pugnare videantur. Verum, quantum ad primos, quum multa in Matheſi certiffime demonſtrantur, a quibus adeo procul eſt evidentia, ut paradoxa nobis appareant; non melius, quàm Matheſeos ſtudio, ab eo errore retrahi poterant. Ad ſecundos vero quod attinet, quia in Matheſi non raro etiam occurrit, ut veritates, nullum inter ſe nexum habentes, imo longe a ſe invicem diſſitæ, in concordiam veniant, ubi ad univerſales rerum notiones aſcenditur; poterunt earum exemplo conjicere, veritates revelatas mire cum iis conſentientes apparituras, quas naturalis ſuppedit ratio, ſi ſpeciales noſtræ mentis ideæ ad omnimodam ſuam univerſalitatem evehi poſſent. Quum igitur adeo abſit a vero, ut Matheſeos ſtudium religioni noſtræ officere poſſit, quin potius maxime ei conferre cenſendum ſit: plane neceſſe eſt, ut, ſi qui extent Mathematici, qui eam inſequuntur, aliunde quidem, quam a Matheſi, eorum perſidia oriatur; ut ſane Anglorum Mathematicorum impudentia non alteri cauſæ ferenda eſt accepta, quam eidem illi, quæ univerſam Gentem Anglicam a vera fide exulem tenet, ac extorrem: nempe quod Eccleſiæ jugum excuſſerint, nec ejus, qui Chriſti vices in terris gerit, auctoritatem agnoſcere velint. Vale.

AL-

ALGEBRÆ GEOMETRIA PROMOTÆ ELEMENTA

INTRODUCTIO.

I.  II. novi accidit ,
FAUSTINA PRIN-
CEPS , si in qua-
stionibus arithme-
ticis enodandis Al-
gebræ solertia , ac
ubertate degustata,

ad eam pro viribus excolendam , nunc unice
annitaris . Ea etenim est disciplinarum ma-
thematicarum vis , atque potestas , ut quos
semel suis illecebris sibi devincunt , eos num-
quam a se ipsis abire patiantur ; sed novis
semper oblectamentis illos ad se trahunt , ac
viriliter alliciunt . Id vero mirum Tibi nec
etiam videri debet . Nam suapte natura trahi-
tur quisque nostrum ad Deum , fontem veri-
tatis . Unde earum disciplinarum , in quibus ,
& a vero numquam disceditur , & novæ sem-
per , ac novæ veritates addiscuntur , nemo sa-
ne tædio affici potest .

II. Ut autem injuncto mihi muneri
ego etiam pro viribus satisfaciam , nova Al-
gebræ Elementa in Tui commodum , & u-
sum conscribere non gravabor . Ac principio

Tom. I.

A

qui-

quidem illud tenendum est , Algebrae nomine eam proprie venire disciplinam , quæ problemata mathematica , adhibito calculo , resolvere docet . Sed , quemadmodum mathematica dicuntur problemata illa , quæ circa quantitatem instituuntur ; ita primum Algebrae munus est , ipsas quantitates quibusdam notis , seu characteribus exprimere , easdemque subinde expressas ad calculum revocare .

III. Interim Algebra , nomen ab Arabibus derivatum , secundum vim suam , idem audit , ac ars restituendi , seu reintegrandi . Nec sane ab opere huius artis ista abhorret denominatio . Ubi enim in resolutione problematum ad quæsitæ quantitatis determinationem Algebrae subsidio proceditur ; primo quidem quæsitæ illa quantitas deformatur , & quodammodo scinditur in partes ; deinde vero reintegratur , ac velut in iustum ordinem restituitur .

IV. Hanc porro disciplinam vocamus Algebram arabico nomine ; quia , etsi apud alias quoque Nationes fuerit exculta , eam tamen ab Arabum manibus nos proprie mutuati sumus , a quibus etiam accepimus maximam partem græcæ sapientiæ . Neque enim latinas , quas habemus , versiones Euclidis , Apollonii , Ptolomæi , aliorumque Græcorum , putandum est , ex græcis originalibus fuisse primo depromptas . Nam , ad nostras manus pervenisse prius eorum versiones arabicas , quam ipsa Græcorum originalia , notius est , quam ut possit in dubium revocari .

V. Al-

V. Algebra in Europam delata, Itali primum eam excoluerunt; nec ullus, opinor, erit, qui primatum istum audebit nobis disputare. Inter Italos autem primus, qui de Algebra scripsit, est Lucas Pacciolus, dictus etiam Lucas de Burgo. Et quamquam memoret ille Leonardum Pisanum, aliosque se antiquiores, a quibus didicerat; eorum tamen opera typis edita non habentur. Pacciolum secutus est Stiphelius, aliique ab ipso citati; sed omnes isti iis tantum excolendis operam suam collocarunt, quibus Arabes Algebram perduxerunt.

VI. Qui Algebram evehere longius inter Italos studuit, is omni dubio procul est Nicolaus Tartalea. Etsi enim resolutionem æquationum cubicarum sub nomine Ludovici Ferrariensis mathematico Orbi impertiverit Cardanus; eam tamen Tartaleæ tribuendam esse, jam norunt Nasutiores. Tartaleam excipit Bombellius, qui, quum docuisset, qua ratione æquationes quarti gradus, ope alterius cubicæ, in duas quadratas dividi possent, methodum simul aperuit, qua resolutio æquationum quarti gradus potest obtineri.

VII. Dum hisce Itali, Arabum vestigiis insistentes, incumbabant, in lucem rediit Diophantus Alexandrinus, antiquioribus quidem Græcis non accensendus, sed neque etiam adeo ab iis remotus, quemadmodum nonnulli suspicantur. Opus istud Diophantæum, etsi non integrum, sat quidem ostendit, quousque a Græcis perducta

A 2 fue-

fuerit Algebra. Quumque voces, a Diophanto usurpatæ, diversæ sint ab iis, quibus Arabes utebantur; conicere licet, hos aliunde, quam a Diophanto, Algebram accepisse suam: eoque magis, quod multo plura in Diophanto reperiantur, quam quæ Arabes Italis nostris tradiderunt.

VIII. Horum omnium Algebra erat quidem figurata, seu symbolica; sed vix alias, quam incognitas quantitates, certis notis, ac symbolis designabant. Datas enim, seu cognitas quantitates numeris tantum exprimabant. Unde saltem ex hoc capite numerosa adhuc ipsorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimifexti sæculi novam in Gallia protulit Algebrae speciem Franciscus Vieta, ubi quantitates omnes, tum cognitæ, cum incognitæ, Alphabeti litteris, seu speciebus designantur. Hincque factum, ut Algebra litteralis, seu speciosa diceretur.

IX. Victam secuti sunt Angli, quos inter duo potissimum eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, a Vieta excogitatam, insigniter promoverunt; sed potissimum in id dedit operam Harriotus, qui primus omnium docuit, æquationes altioris gradus componi ex simplicioribus, inter se multiplicatis. Magnum sane principium, unde natura, & proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo fluunt.

X. Algebra porro litteralis quantum numerosæ præferenda sit, vel exinde intelligi potest, quod ea mediante solutiones pro-

INTRODUCTIO. 5

problematum speciales ad suam universalitatem revocantur. Ubi enim notæ quantitates congruis numeris exprimuntur, ignotæ quantitatibus valor numeris etiam prodit expressus: unde pro eo tantum; de quo agitur, casu nobis usui erit. Verum, quum datæ quantitates, perinde ac quæsitæ, Alphabeti litteris designantur; quia symbola ista nihil ex se ipsis significant, ea indeterminato quodam modo quantitates datas representabunt: proindeque quæsitæ quantitas subinde etiam expressa orietur.

XI. Hinc solutione problematis numerosa unus tantum casus expenditur; quum tamen solutione litterali omnes omnino casus enodantur. Et quamquam ex solutione numerosa possit quandoque generalis regula colligi, casibus omnibus inserviens; id tamen tantum non est impossibile factum, quum problema nimiam difficultatem involvit, ac plures exigit operationes, ut ad exitum perducatur. Nam notæ arithmeticae hoc etiam habent incommodi, quod per earum additionem, subtractionem, multiplicationem, ac divisionem aliæ oriuntur quantitates, in quibus eæ, ex quibus subnascuntur, non amplius apparent.

XII. Etsi autem Algebra Vietnæ, utpote litteralis, ac speciosa, universalior esset ea, quæ antea obtinebat; revera tamen non aliud erat, quam ipsa vetus Algebra, Alphabeti litteris administrata. Quam enim regulam docuerunt Arabes, pro resolvendis æquationibus quadratis; eandem adhibuit quoque

A 3

Vie.

Vieta. Quam item tradidit Tartalea, pro resolvendis æquationibus cubicis; eandem plane Vieta pariter adscivit. Quamque demum excogitavit Bombellius, pro dividendis æquationibus quarti gradus in duas, quæ quadratæ essent; eandem in sua Algebra Vieta itidem usurpavit.

XIII. Hinc iisdem difficultatibus, quibus vetus Algebra scatebat, nova etiam erat obnoxia. Et sicuti imperfecta erat olim resolutio æquationum cubicarum, ab Italis tradita, sic etiam mansit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciscus Vieta, ante ipsum a nemine, quem sciam, traditum: nimirum, quia ratione per rectarum longitudines designari queant radices æquationum. Verum, quum ex lineis curvis solam circuli circumferentiam in Geometriam recepisset; mancam quoque, ac imperfectam materiam istam nobis reliquit. Enim vero exhibuit tantummodo earum æquationum constructionem, quarum radices rectæ, & circuli intersectione possunt inveniri.

XIV. Suborto Cartesio, cœpit ex Algebra, & Geometria ita quidem unum constari corpus, ut altera per alteram promota, & ad maiorem universalitatem evecta videretur. Novit namque Cartesius, non modo imperfectam esse resolutionem æquationum cubicarum, ab Italis traditam; sed rem esse omnino deploratam, illam ad umbilicum perducere. Quare opportunum iudicavit, hac via omissa, radices æquationum omnium per rectarum longitudines designare. Unde,
in;

investis in Geometriam, cum conicis Veterum sectionibus, tum curvis aliis, quæ sectionibus conicis magis compositæ essent; earum cum circumferentia circuli intersectione æquationum omnium docuit constructionem.

XV. Id autem ab iis, qui deinceps secuti sunt, non modo non improbatum, sed a nemine, quem sciam, expansis ulnis non exceptum. Singulis etenim innotuit, radices æquationum omnium non melius designari posse, quam intersectione curvarum. Quare in id omnes dederunt operam, ut non amplius resolutionem æquationum algebricam, sed earundem constructionem geometricam excolerent. Atque hac ratione, abdicata severa illa lege, absque ullo fundamento lata, ut id tantum geometricum esset, quod recta, & circulo perficitur; non tantum Algebram, sed ipsam quoque Geometriam promoverunt, & ad suam amplitudinem revocarunt.

XVI. Hæc igitur, FAUSTINA PRINCEPS, est historica narratio ortus, & progressus ejus disciplinæ, quæ Algebra dicitur. Unde facile conspicias, eam in se ipsa consideratam adhuc quidem mapcam esse, ac imperfectam; sed fuisse non parum promotam, ubi cum Geometria cœpit consociari. Hinc non nudæ quidem Algebræ Institutiones Tibi conscribam; sed Algebram, Geometria promotam, in nostris hisce Elementis complestemur. Quo fiet, ut sicuti consortio earum disciplinarum ipsa quoque Geometria

3 I N T R O D U C T I O .

ulterius fuit eveſta ; ita ſtudio horum Elementorum magis quoque in Geometria proficies .

XVII. Partiemur autem univerſum noſtrum opus in quatuor libros ; quorum primus erit de calculo litterali , ſeu ſpecioſo ; ſecundus de reſolutione problematum algebraica ; tertius de compoſitione locorum geometricorum ; & quartus demum de geometrica æquationum conſtructione . Hac enim partitione id omne , quod ad hanc ſcientiam pertinere videtur , poterit jam commode tradi . Priores ſiquidem duo libri Algebram in ſe ipſa conſideratam complectentur ; alii vero duo poſteriores promotionem ejus , Geometriæ ſubſidio comparatam , in propætulo ponent .

XVIII. Cæterum ex quatuor hiſce libris , priores duos , jam novennium eſt , & quod excurrit , ex quo in gratiam ſtudioſæ noſtræ Juventutis conſcripſi , & in lucem emiſi . Sed , quum tumultuario ſtudio fuiſſent exarati , & paginæ eorum ederentur , ut nocturna manu conſcribebantur ; tuæ utilitati conſulens , eos reſicere , & ad majorem perfectionem reducere , non gravabor . Alios vero duos poſteriores nunc primum elucubrabo . Nam , eſſi animus mihi ſemper fuerit , eos etiam in lucem emittere ; alio tamen diſtractus , fidem publico datam numquam ſolvere potui .

AL:

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER I.

De Calculo Litterali , seu Specioso .

1.



Quantitates designabant Veteres, vel per rectarum longitudo-
nes , vel etiam nu-
meris adhibitis. Utra-
que designandi ratio,
ut suas habet utilita-
tes , sic suis etiam difficultatibus est obno-
xia . Utile est etenim primo , per longitudi-
nes rectarum quantitates designare, quia tum
notæ , cum incognitæ quantitates subinde
exprimi possunt; sed incommoda est quoque
ea designandi ratio , quia rectarum longitu-
dines non adeo facile ad calculum licet revo-
care . Et secundo præstat , quantitates desi-
gnare per numeros , quia numeri facillime
possunt ad calculum poni; sed talis designan-
di modus nec etiam difficultate vacat , quia
incognitæ quantitates tali pacto designari
non possunt.

2. Hinc ergo tertia quantitates desi-
gnandi ratio excogitata , quæ habet quidem
utrius-

10 ALGEBRÆ ELEMENTORUM

utriusque utilitates, sed nullius incommodum patitur: nimirum per species, seu litteras Alphabeti. Istæ enim, perinde ac numeri, facili negotio ad calculum poni queunt. Quumque nihil ex se ipsis significant, possunt peræque notas, ac incognitas quantitates nobis exhibere. Qua igitur ratione quantitatum calculus peragi debeat, ubi per Alphabeti litteras, seu species quantitates ipsæ designantur; primus hic liber nostrorum Elementorum ostendet. Et quoniam in calculo litterali, seu specioso non omnino numeri negliguntur; hinc est, ut calculus, de quo hic acturi sumus, vulgarem, seu arithmeticum præsupponat.

3. Divisio autem quantitatum in commensurabiles, seu rationales, & incommensurabiles, seu radicales locum sibi vindicat, tam quum numeris designantur, quam quum Alphabeti litteris exprimuntur. Unde prioris hujus libri duas primum sectiones statuemus; unam nempe de calculo quantitatum rationalium; & alteram de calculo quantitatum radicalium. Sed ad ea, quæ deinceps usui esse possunt, animum convertentes, duabus hisce sectionibus alias duas adnectemus: quarum prior erit de calculo serierum infinitarum; posterior autem generalem potestatem theoriæ exhibebit.

SE.

S E C T I O I.

De Calculo Quantitatum Rationalium.

4. **Q**uantitates algebraicæ dicuntur rationales, quum simpliciter litteris designantur. Ut calculus harum quantitatum rectius intelligatur, illud principio sciendum est, quod, sicuti omnes quantitates possunt per Alphabeti litteras designari; ita earundem multiplices, aut partes quælibet, adhibitis notis arithmeticis, non incongrue exprimuntur. Quæ ratione, si aliqua quantitas vocetur a , erit ejus duplum $2a$, triplum $3a$, quadruplum $4a$, atque ita deinceps.

5. Hi autem numeri, qui quantitativis algebraicis præfiguntur, ad designandum quantum cujusque quantitatis sumi debeat, vocantur communiter coefficientes. Sed notandum hoc loco est, quod eæ quidem quantitates, quæ nullos habent numeros præfixos, intelligendæ sint habere unitatem, velut suum coefficientem. Unde quantitates, expressæ litteris a, b, c , perinde valent, ac $1a, 1b, 1c$.

6. Sciendum est quoque, quod in peragendo calculo quantitativum, quæ Alphabeti litteris sunt designatæ, præter ipsas litteras, solent etiam adhiberi hæc duo signa $+$, & $-$, quorum primum significat plus, & est

& est nota additionis ; alterum significat minus, & est nota subductionis . Hinc $a + b$ idem valet, ac a plus b ; & $c - d$ perinde significat , ac c minus d .

7. Ex ipsa autem horum signorum significatione, quemadmodum ultro liquet, $a + a$ idem esse, ac $2a$; & $3a + 2a$ idem esse, ac $5a$: ita quoque liquido constat , $5a - 3a$ idem esse , ac $2a$; itemque $3b - 2b$ perinde valere , ac $1b$, seu b ; & $c - c$, aut $3c - 3c$ idem significare , ac zero, seu nihil.

8. Hinc , quum plures occurrunt quantitates , iis signis connexæ , iisdemque litteris designatæ , contrahendæ sunt illæ , habita signorum , quibus afficiuntur , ratione . Quo pacto series ista quantitatum $5a + 3b - 5b - 2a$ reducitur ad $3a - 2b$. Nam, sicuti $5a - 2a$ idem est , ac $3a$; ita $+ 3b - 5b$ perinde valet , ac $- 2b$. Et eadem ratione reducitur ad $5a - 7b$ series quantitatum $7a - 2b - 5b - 2a$; sicut ad $3a - 5c$ hæc alia quantitatum series $8a + 2c - 7c - 5a$.

9. Fieri vero debet contractio ista , ubi quantitates iisdem omnino litteris sunt designatæ . Nam, si habeatur, exempli gratia, $2ab - 3cd - 2cd + 3af$, pro $- 3cd - 2cd$ scribi quidem potest $- 5cd$; sed aliæ duæ quantitates $2ab + 3af$ contrahi nequaquam possunt , quia non reperiuntur iisdem omnino litteris expressæ . Unde quantitas $2ab - 3cd - 2cd + 3af$ contracta evadet $2ab - 5cd + 3af$: quemadmodum quantitas $3ac + 2bc - 3af - 8bc$, si contrahatur , fiet $3ac - 3af - 6bc$.

CA-

CAPUT I.

Calculus rationalium simplicium.

10. **Q**uantitatum rationalium duæ species passim distinguuntur, quarum aliæ dicuntur simplices, aliæ compositæ. Rationales simplices sunt illæ, quæ, vel unica littera, vel duabus, pluribusve litteris, nullo signo connexis, designantur, ut a, b, c ; vel etiam ab, bc, abc . Rationales vero compositæ sunt eæ, quæ duabus, aut pluribus litteris, signo $+$, aut $-$ conjunctis, exprimuntur; ut $a + b, a - b$; vel etiam $a + b - c, a - b + c$. Hinc primo calculum rationalium simplicium, tum calculum rationalium compositarum ostendemus.

I. Additio rationalium simplicium.

11. **Q**uum una quantitas alteri addenda proponitur, non aliud fieri debet, quam unam plus altera sumere. Hinc adduntur in unum duæ, aut plures rationales simplices, conjungendo eas signo $+$, quod, ut paulo ante * *art. 6.* dictum est, significat plus. Sic, ad addendum a cum b , scribo $a + b$. Pariterque, ad addendum a cum b , & c , scribo $a + b + c$. Neque aliter fiet, si addi debeant in unum tres istæ rationales simplices $2a, 3b, 4c$; nam sum-

14 ALGEBRÆ ELEMENTORUM

summa erit $2a + 3b + 4c$.

12. Eadem ratione, si addenda proponatur quantitas a cum se ipsa, hoc est cum alia quantitate a ; summa erit $a + a$. Sed quoniam utraque quantitas eadem littera designatur; per ea, quæ superius dicta sunt, scribi poterit loco ejus $2a$. Et similiter, ad addendum $3a$ cum $4a$, scribi poterit, vel $3a + 4a$, vel simplicius $7a$. Atque ita quoque erit, vel $3c + 2c + 4d$, vel etiam $5c + 4d$ summa trium rationalium simplicium $3c$, $2c$, $4d$.

11. Subtractio rationalium simplicium.

13. **Q**Uum ex una quantitate alteram subducere oportet, non aliud fieri debet, quam unam minus altera sumere. Hinc ex una rationali simplice subducitur altera rationalis simplex, conjungendo ita quidem eas signo $-$, quod diximus significare minus, ut signum istud præcedat quantitatem subducendam. Ita, ad subtrahendum b ex a , scribo $a - b$. Pariterque, ad subducendum c ex b , scribo $b - c$. Neque aliter fiet, si ex $3a$ subtrahi debeat $2c$; nam residuum erit $3a - 2c$.

14. Eadem ratione, si ex quantitate $5a$ subtrahenda proponatur quantitas $3a$, residuum erit $5a - 3a$. Sed quoniam utraque quantitas eadem littera designatur; per ea, quæ superius dicta sunt, scribi poterit loco ejus $2a$. Et similiter, ad subducendum $4c$ ex $7c$, scribi poterit, vel $7c - 4c$, vel simplicius

LIBER PRIMUS. 15
 plicius 3c. Atque ita quoque residuum,
 quod oritur, subducendo 4b ex 9b, erit,
 vel 9b — 4b, vel etiam 5b.

III. *Multiplicatio rationalium simplicium.*

15. **R**ationales simplices multipli-
 cantur per se mutuo, conjun-
 gendo eas, nullo signo interjecto. Ita, si a
 multiplicetur per b, productum erit ab. Et
 similiter, si a multiplicetur per c, produ-
 ctum erit ac. Pariterque erit aa productum,
 quod oritur, multiplicando quantitatem a
 per se ipsam, hoc est per aliam quantita-
 tem a.

16. Sed, quemadmodum expressio $a + a$
 contrahitur, & loco ejus * scribitur aa; ita * art. 3.
 expressio aa contracta designatur per a^2 .
 Qua ratione aaa designabitur etiam per a^3 ,
 sicut aaaa per a^4 , atque ita deinceps. Un-
 de semper ac occurrit quantitas aliqua, cui
 a tergo numerus aliquis paulo altius sit ad-
 scriptus, intelligenda est quantitas illa toties
 per multiplicationem posita, quot habet il-
 le numerus unitates.

17. Hi autem numeri, qui quantitati-
 bus algebraicis a tergo paulo altius adscri-
 buntur, ad designandum quoties quæque
 quantitas per multiplicationem poni debet,
 dicuntur communiter exponentes. Sed no-
 tandum hoc loco est, quod ex quidem quan-
 titates, quæ nullos habent numeros a tergo
 adscriptos, intelligendæ sint habere unita-
 tem,

tem, velut suum exponentem. Unde quantitates, expressæ litteris a, b, c , perinde valent, ac a^1, b^1, c^1 .

18. Hinc magnum discrimen intercedit inter coefficientes, & exponentes quantitatum. Si enim ostendunt, quoties quantitates poni debent per additionem; isti vero per contrarium, quoties per multiplicationem ponendæ sint, nobis aperiunt. Sic expressiones istæ $2a, 3a, 4a$ significant quantitatem a bis, ter, quater positam esse per additionem; quum tamen hæ alix expressiones a^2, a^3, a^4 significant eandem quantitatem a positam esse bis, ter, quater per multiplicationem.

19. Ex eo autem, quod a^2 idem sit, ac aa ; & a^3 idem, ac aaa : liquet, ad multiplicandum a^2 per a^3 , scribendum esse a^5 .
 * art. 15. Nam, juxta regulam * generalem, si aa multiplicetur per aaa , productum erit $aaaaa$: quod idem valet, ac a^5 . Atque ita quoque erit a^2 productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a , seu a^1 ; & a^7 productum, quod gignitur, multiplicando a^3 per a^4 . Sed, si multiplicari debeat a^2 per b^3 , productum erit a^2b^3 .

20. Quantitates igitur, iisdem litteris expressæ, quæ suos habent exponentes, non aliter multiplicantur per se mutuo, quam conjungendo simul exponentes ipsarum. Sed, si quantitates, ad multiplicandum propositæ, suos habeant coefficientes; multiplicandi sunt ii, ut in calculo arithmetico. Qua ratione, multiplicando $2a$ per $3c$, pro-

producitur $6ac$. Et similiter, multiplicando $3a$ per $4b$, productum fiet $12ab$. Atque ita pariter erit $8a^2$ productum, quod oritur, multiplicando $8a^2$ per a^3 , seu $1a^3$; & $12a^3b^2$ productum, quod gignitur, multiplicando $3a^3$ per $4b^2$.

IV. Divisio rationalium simplicium.

21. **D**ivisio destruit id, quod componit multiplicatio. Unde, scuti, multiplicando a per b , producitur ab ; * art. 15. ita, dividendo ab per a , quotiens oritur b . Quocirca divisio rationalium simplicium fieri debet, delendo divisorem ex dividendo: adeo, ut diviso abc per a , quotiens erit bc ; & diviso as per a^3 , hoc est $aaaa$ per aaa , * art. 16. quotiens fiet aa , seu a^2 .

22. Quod si autem divisor deleri nequeat ex dividendo; tunc, duobus punctis interjectis, scribatur divisor post dividendum, idque divisionem indicabit. Sic, dividendo ab per c , quotiens erit $ab : c$. Et similiter, dividendo bd per a , quotiens producet $bd : a$. Neque aliter instituenda est divisio, quum dividere oportet a^3 per c^2 ; nam fiet $a^3 : c^2$ quotiens divisionis.

23. Sed, si divisor, partim deleri possit ex dividendo, partim non item; tunc deleatur, quod deleri potest, & duobus punctis interjectis postscribatur, quod est indelebile. Qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo abd per ac , erit $bd : c$. Et similiter erit $ab : d$ quotiens, qui gignitur, dividendo abc

Tom. I.

B

per

per cd ; & $a^2 : c$ quotiens; qui producitur, dividendo a^6c^2 per a^4c^2 .

24. Vulgus Algebristarum designat fractiones, hoc est quotientes divisionum, quæ peragi nequeunt, eodem prorsus modo, quo designantur in vulgari Arithmetica: nempe, scribendo divisorem infra dividendum, lineola interjecta. Sed, eo abdicato, maluimus hunc alium, jam etiam a pluribus receptum, in nostris hisce Elementis usurpare: quem item adhibebimus in designandis fractionibus numericis.

25. Ita, si essent designandæ tres quintæ partes unitatis, usurpabimus quidem duos numeros 3, & 5, sed illos scribemus in hunc modum $3 : 5$. Unde etiam $2 : 7$ erunt duæ septimæ partes unitatis; & $4 : 9$ erunt unitatis quatuor nonæ partes. Atq; hac ratione, sicuti $2a, 3a, 4a$ sunt duplum, triplum, quadruplum quantitatis a ; sic pariter $2a : 3$, $3a : 4$, $a : 5$ erunt ejusdem quantitatis a duæ tertiæ partes, tres quartæ partes, una quinta pars.

26. Cæterum, si quantitates, ad dividendum propositæ, suos habeant coefficientes, dividendi sunt hi, ut in calculo arithmetico. Qua ratione, dividendo $6ac$ per $2a$, quotiens erit $3c$. Pariterque, dividendo $12ab$ per $3a$, quotiens fiet $4b$. Sed, si dividere oporteat $7ac$ per $3a$, quotiens erit $7c : 3$; eritque etiam $4ab : 5c$ quotiens, qui oritur, dividendo $4ab$ per $5c$; & $3a^2 : 2$ quotiens, qui producitur, dividendo $3a^2$ per $2a^2$.

CA.

CAPUT II.

Calculus rationalium compositarum.

27. **O** Stenſo calculo rationalium ſimplicium, oftendendus eſt modo calculus rationalium compositarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Ut autem diximus ſupra *, vo-
cantur rationales compositæ, quæ plu-
ribus litteris, ſigno $+$, vel $-$ connexis, ex-
primuntur. Unde duæ in iſis quantitatibus
componentium ſpecies diſtingui ſolent: ni-
mirum poſitivæ, quas ſignum $+$ præcedit;
& negativæ, quæ ſigno $-$ afficiuntur. art. 10.

28. Vulgatum eſt apud Algebriftas, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates vero negativas nihilo minores. Id autem ut rectius intelligatur, ſciendum eſt prius, zero, ſeu nihil, quantitatibus additum, earum valorem, nec augere, nec minuire. Quocirca, quod potis eſt, quantitatis alicujus valorem augere, cujuſmodi eſt omnis quantitas poſitiva; id nihilo majus dicendum eſt. Et per contrarium, quod quantitatis alicujus valorem minuire valet, veluti eſt quælibet quantitas negativa; id nihilo minus debet appellari.

29. Ex quo patet, quantitates dici poſitivas, vel negativas, hoc eſt nihilo majores, vel minores, non quidem ex ſe ipsis, ſed relate ad eas, de quibus valorem ſuum affirmant,

B 2

vel

vel negant. Nam cæteroqui nemo, opinor, ibit inficias, quin omnis quantitas, in se spectata, sit positiva, seu nihilo major. Cæterum, quia illæ quantitates, quæ nullo signo afficiuntur, idem præstant, ac quantitates, affectæ signo $+$; idcirco considerabimus illas in posterum etiam, ut affectas signo $+$; atque hac de causa eas quoque velut positivas habebimus.

1. Additio rationalium compositarum.

30. **A**dditio rationalium compositarum fit, conjungendo eas iisdem omnino signis, quibus partes ipsarum sunt affectæ, & observando semper hæc duo. Primum, quod illæ rationales simplices, quæ nullo signo afficiuntur, per ea, quæ paulo
 * art. 29. ante dicta sunt, considerari debent, velut affectæ signo $+$. Et alterum, quod eæ rationales simplices, quæ iisdem omnino litteris sunt expressæ, contrahendæ sunt * in
 * art. 8. unum, habita signorum, quibus afficiuntur, ratione.

31. Hoc pacto, si quantitati $a + b$ addenda sit quantitas $c + d$, fiet summa $a + b + c + d$. Et similiter, si quantitati $a - b$ addenda sit quantitas $c - d$, summa orietur $a - b + c - d$. Sed, si quantitas $a + b$ addenda sit quantitati $a - b$, summa erit
 * art. 30. 2a; nam per regulam generalem * summa earum quantitatum est $a + b + a - b$; atqui $a + a$ est $2a$, & $+ b - b$ est zero, seu nihil. Atque ita quoque summa quantita-

titatum $2a - 3b$, & $3a + b$, erit $5a - 2b$;
quemadmodum erit $6a - 4c$ summa quanti-
tatum $4a - 6c$, & $2a + 2c$; ut & $5a - 6d$
summa quantitatum $8a - 9d$, & $3d - 3a$.

11. *Subtractio rationalium compositarum.*

32. **S**ubtractio rationalium compo-
sitarum fit, conjungendo qui-
dem eas, ut in additione, sed mutando si-
gna omnia partibus quantitatis subtrahen-
dæ. Qua in re duo etiam, oportet, obser-
ventur. Primum, quod rationales illæ sim-
plices, quæ nullo signo afficiuntur, consi-
derari debent *, velut affectæ signo +. Et * *art. 29.*
alterum, quod ex simplices rationales, quæ
reperiuntur iisdem litteris expressæ, facta
subtractione contrahendæ sunt * in unum, * *art. 8.*
habita signorum, quibus afficiuntur, ratione.

33. Hoc pacto, si ex quantitate $a + b$
subducenda sit quantitas $c + d$, residuum
fiet $a + b - c - d$. Et similiter, si ex quan-
titate $a - b$ subducenda sit quantitas $c - d$,
residuum orietur $a - b - c + d$. Sed, si ex
quantitate $a + b$ subducere oporteat quanti-
tatem $a - b$, residuum fiet $2b$; nam per re-
gulam * generalem residuum illud esse debet * *art. 31.*
 $a + b - a + b$; atqui $a - a$ est zero, seu
nihil, & $+b + b$ perinde valet, ac $2b$. At-
que ita quoque, si ex quantitate $3a - 3b$
subducenda sit quantitas $2a + 2b$, residuum
erit $a - 5b$; pariterq; erit $2a + 3b$ residuum,
quod oritur, subducendo $2a - 3b$ ex $4a + 5b$.

34. Unde liquet, mediante subtract. one.
B 3 quan-

quantitates positivas fieri negativas, & vicissim quantitates negativas evadere positivas. Nam, ex quantitate $a + b$ subducta quantitate altera $c - d$, residuum juxta regulam * art. 32. datam fit $a + b - c + d$. Et profecto, quemadmodum quantitas c ex positiva abiit in negativam; ita vicissim quantitas d ex negativa versa est in positivam.

35. Quod autem, ad subducendam quantitatem $c - d$ ex altera $a + b$, mutanda sint signa partibus quantitatis subducendæ, & pro residuo scribendum $a + b - c + d$; id facile demonstratur. Debet enim ex quantitate $a + b$ subtrahi quantitas c , diminuta quantitate d . Quare, si ex $a + b$ subducatur tota quantitas c , plus justo tollitur; & residuum $a + b - c$ minus erit justo residuo, quantitate altera d . Unde, ad verum residuum obtinendam, oportet, ei addere quantitatem d , & scribere $a + b - c + d$.

III. Multiplicatio rationalium compositarum.

36. **M**ultiplicatio rationalium compositarum fit, multiplicando singulas partes unius per singulas partes alterius, & scribendo producta partialia signo $+$, aut $-$, prout quantitates ad invicem multiplicandæ iisdem, aut contrariis signis afficiuntur. Ubi duo etiam sunt observanda. Primum, quod rationales illæ simplices, quæ nullo signo afficiuntur, considerandæ sunt *, velut affectæ signo $+$. Et alterum, quod si facta multiplicatione plura occurr-

currant producta partialia, iisdem omnino litteris expressa, contrahenda sunt * in unum, * *art. 2.*
habita signorum, quibus afficiuntur, ratione.

37. Hac igitur ratione, si quantitas $a \rightarrow b$ multiplicanda sit per aliam $c \rightarrow d$; multiplico primum a per c . Et quia utraque quantitas afficitur nullo signo, sive potius signo $+$, productum ac etiam signo $+$ affici debet. Deinde multiplico b per c . Et quia quantitates istæ contrariis signis afficiuntur, productum bc signo $-$ afficio. Ad hæc multiplico a per d . Quumque harum quantitatatum contraria itidem sint signa, productum ad signo $-$ subscribo. Denique multiplico b per d . Et quoniam istæ quantitates iisdem signis sunt affectæ, productum bd notari debet signo $+$. Unde productum totius multiplicationis erit $ac \rightarrow bc \rightarrow ad + bd$.

38. Similiter, si quantitas $2a + 3b$ multiplicanda sit per quantitatem $3c \rightarrow 2d$, productum fiet $6ac + 9bc \rightarrow 4ad \rightarrow 6bd$. Sed, si quantitas $a + b$ multiplicari debeat per se ipsam, hoc est per $a + b$, productum erit $a^2 + 2ab + b^2$; nam per regulam * generalem * *art. 36.* productum illud esse debet $a^2 + ab + ab + b^2$; atqui $+ab + ab$ idem est, ac $+2ab$. Et, si eadem quantitas $a + b$ multiplicanda sit per $a \rightarrow b$, productum fiet $a^2 \rightarrow b^2$; nam regula * generalis dat pro producto $a^2 + ab \rightarrow ab$ * *art. 30.* $\rightarrow b^2$: profecto autem $+ab \rightarrow ab$ idem est, ac zero, seu nihil.

39. Eadem autem ratione id, quod produ-
citur, multiplicando quantitatem $3a \rightarrow$
 $2b + 4c$ per hanc aliam $4a \rightarrow 3c$, erit $12a^2$

$\rightarrow 8ab + 7ac + 6bc \rightarrow 12c^2$. Atque ita quoque erit $15a^2 \rightarrow 21ab + 5ac + 9b^2 + 7bc \rightarrow 20c^2$ productum, quod oritur, multiplicando quantitatem $5a \rightarrow 2b \rightarrow 5c$ per hanc aliam $3a \rightarrow 3b + 4c$. Et $45ac \rightarrow 18c^2 + 30cd \rightarrow 18a^2 \rightarrow 24ad \rightarrow 8d^2$ id, quod gignitur, multiplicando ad invicem duas hæc quantitates $6a \rightarrow 3c + 4d$, & $6c \rightarrow 3a \rightarrow 2d$.

40. Quod autem productum affici debeat signo $+$, quum quantitates, ad invicem multiplicandæ, iisdem signis afficiuntur; & vicissim signo $-$, quum contrariis signis sunt affectæ: haud difficile erit ostendere. Primo enim, quod quantitas $a \rightarrow b$ multiplicata per c producat $ac \rightarrow bc$; ostenditur in hunc modum. Per quantitatem c multiplicanda est quantitas a , diminuta quantitate b . Quare, si a per c multiplicetur, productum ac majus erit justo producto, ea quidem quantitate, quæ producitur, multiplicando b per c , nimirum quantitate bc . Unde, si quantitas ista bc subducatur ex ac , residuum $ac \rightarrow bc$ verum productum designabit.

41. Secundo, quod quantitas $a \rightarrow b$ multiplicata per quantitatem $c \rightarrow d$ producat $ac \rightarrow bc \rightarrow ad + bd$; demonstratur eadem ratione. Per quantitatem $c \rightarrow d$ multiplicanda est quantitas a , diminuta quantitate b . Quare, si a per $c \rightarrow d$ multiplicetur, productum, quod oritur, $ac \rightarrow ad$ majus erit justo producto, ea quidem quantitate, quæ producitur, multiplicando b per $c \rightarrow d$, nimirum quantitate $bc \rightarrow bd$. Unde, si quan-

ti-

titas ista $bc - bd$ subducatur ex $ac - ad$, residuum $ac - ad - bc + bd$ verum productum designabit.

42. Cæterum nolim hic reticere, utile plerumque esse, multiplicationem rationalium compositarum minime peragere, sed tantum eam indicare. Id vero præstabimus, ponendo punctum inter ipsas quantitates, parenthesi inclusas. Ita, si multiplicanda proponatur quantitas $a + b$ per quantitatem aliam $c - d$, exhibebimus productum in hunc modum $(a + b) \cdot (c - d)$. Atque ita quoque, si quantitas $a + b$ multiplicanda sit per se ipsam, hoc est per aliam quantitatem $a + b$, designabimus productum, vel in hunc modum $(a + b) \cdot (a + b)$, vel paulo simplicius hac alia ratione $(a + b)^2$. Unde etiam expressiones istæ $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ designabunt deinceps quantitatem $a + b$ ter, quater positam per multiplicationem.

IV, Divisio rationalium compositarum.

43. **D**ivisio rationalium compositarum fit eadem omnino ratione, qua efficitur divisio numerorum in calculo arithmetico. Proponatur, exempli causa, dividenda quantitas $ac + bc + ad + bd$ per aliam $a + b$. Divido primum ac per a . Et quia, multiplicato divisore $a + b$ per quotientem c , producitur quantitas $ac + bc$, quæ subtracta ex quantitate dividenda relinquit $+ ad + bd$; divido secundo $+ ad$
per

per a . Quumque quantitas, quæ producitur, multiplicando divisorem $a + b$ per alium istum quotientem $+ d$, sit $+ ad + bd$, quæ subducta ex illo residuo relinquit nihil; concludo, quotientem totius divisionis esse $c + d$.

44. Non dissimiliter fieri debet divisio, si quantitates, ad dividendum propositæ, suos habeant coefficientes. Ita, si velim dividere quantitatem $8a^2 + 12ab + 6ac + 9bc$ per hanc aliam $2a + 3b$; divido primum $8a^2$ per $2a$. Et quia quotiens est quantitas $4a$, quæ multiplicata per divisorem $2a + 3b$ producit $8a^2 + 12ab$; subtraham quantitatem istam ex quantitate dividenda. Quumque supersit $+ 6ac + 9bc$, divido secundo $+ 6ac$ per $2a$. Et quoniam, multiplicato quotiente istius divisionis $+ 3c$ per divisorem $2a + 3b$, oritur quantitas $+ 6ac + 9bc$, quæ subducta ex illo residuo relinquit nihil: proinde quotiens propositæ divisionis erit $4a + 3c$.

45. Quantum ad signa, quibus afficiendi sunt quotientes, qui ex quantitatum divisionibus oriuntur, hæc regula perpetuo est observanda, ut quotiescumque quantitates, per se mutuo dividendæ, iisdem signis sunt affectæ, quotiens notari debeat signo $+$; quotiescumque vero afficiuntur signis contrariis, scribendus sit quotiens signo $-$. Ita, si quantitas $ac - bc - ad + bd$ dividenda sit per $a - b$, quotiens erit $c - d$. Nam, diviso ac per a , multiplicatoque quotiente c per divisorem $a - b$, producitur quan-

quantitas $ac - bc$, quæ subducta ex quantitate dividenda relinquit $-ad + bd$. Unde, quia diviso $-ad$ per a , multiplicatoque quotiente $-d$ per divisorem $a - b$, producitur quantitas $-ad + bd$, quæ subtracta ex illo residuo relinquit nihil; proinde quotiens propositæ divisionis erit $c - d$.

46. Neque vero difficile erit, allatæ regulæ veritatem ostendere. Quotiens enim, per divisorem multiplicatus, producere debet quantitatem dividendam. Quare idem quotiens tali semper signo affici debet, ut ex multiplicatione ejus per divisorem oriatur quantitas dividenda. Unde omnino necesse est, ut notetur signo $+$, quum quantitates, ad invicem dividendæ, iisdem signis afficiuntur; & signo $-$, ubi contrariis signis sunt affectæ. Nam dumtaxat hac ratione * ex art. 36.

47. Interdum in quantitate dividenda non reperitur tota illa quantitas, quæ oritur ex multiplicatione quotientis per divisorem. Id vero quum accidit, non illico despondendum est animo; quia fieri potest, ut adhuc divisio peragat queat. Proponatur, exempli gratia, dividenda quantitas $a^2 - b^2$ per $a + b$. Jam, diviso a^2 per a , multiplicatoque quotiente a per divisorem $a + b$, producitur quantitas $a^2 + ab$, quæ non reperitur tota in quantitate dividenda. Verum, quia facta subductione remanet $-ab - b^2$, dividatur deinde $-ab - b^2$ per a . Quumque, multiplicato quotiente $-b$ per divi-

so.

forem $a + b$, producit quantitas $\rightarrow ab \rightarrow b^2$, quæ subducta ex illo residuo relinquit nihil; jam divisio perfecta erit, & fiet $a \rightarrow b$ quoties ejus divisionis.

48. Proponatur ulterius dividenda quantitas $10a^2 + 5ab \rightarrow 14ac \rightarrow 15b^2 + 29bc \rightarrow 12c^2$ per $2a + 3b \rightarrow 4c$. Divido primum $10a^2$ per $2a$. Et quia quotiens $5a$ multiplicatus per divisorem $2a + 3b \rightarrow 4c$ producit $10a^2 + 15ab \rightarrow 20ac$; subduco productum istud ex quantitate dividenda, & remanebit $\rightarrow 10ab + 6ac \rightarrow 15b^2 + 29bc \rightarrow 12c^2$. Divido deinde $\rightarrow 10ab$ per $2a$. Et quoniam, multiplicato quotiente $\rightarrow 5b$ per divisorem $2a + 3b \rightarrow 4c$, producit quantitas $\rightarrow 10ab \rightarrow 15b^2 + 20bc$; subtraho quantitatem istam ex illo residuo, & relinquetur adhuc $+ 6ac + 9bc \rightarrow 12c^2$. Denique divido $+ 6ac$ per $2a$. Quumque, multiplicato quotiente $+ 3c$ per divisorem $2a + 3b \rightarrow 4c$ producat quantitas $+ 6ac + 9bc \rightarrow 12c^2$, quæ subducta ex altero illo residuo relinquit nihil; jam perfecta erit divisio, fietque quotiens $5a \rightarrow 5b + 3c$.

49. Cæterum, si accidat, ut divisio rationalium compositarum tali pacto fieri nequeat; tunc, duobus punctis interjectis, scribatur divisor post dividendum. Qua ratione, dividendo $a^2 + c^2$ per $b \rightarrow d$, quotiens fiet $(a^2 + c^2) : (b \rightarrow d)$; & dividendo $ac \rightarrow bd$ per $m + n$, quotiens erit $(ac \rightarrow bd) : (m + n)$. Quumque utile sit interdum, divisionem rationalium compositarum haud quidem peragere, sed tantum eam indi-

dicare ; præstabimus id quoque , scribendo
divisorem post dividendum , duobus punctis
interjectis. Sic $(ac + bc + ad + bd) : (a + b)$
designabit divisionem quantitatis $ac + bc +$
 $ad + bd$ per hanc aliam $a + b$: quæ quidem,
si fiat , orietur quotiens $c + d$, ut paulo ante
* vidimus .

* art. 43.

CAPUT III.

Calculus fractionum rationalium.

50. **Q**uemadmodum ex additione ,
& subtractione rationalium
simplicium oriuntur rationales compositæ ;
sic ex divisione rationalium , sive simplicium ,
sive compositarum , quæ fieri non potest ,
fractiones rationales derivantur. Unde , quum
jam innotuerit , qua ratione fiat calculus
quantitatum rationalium ; sive eæ sint sim-
plices , sive compositæ ; sequitur nunc , ut
quo pacto fractionum rationalium calculus
peragi debeat , ostendamus.

51. Ac primo quidem , perinde ac in cal-
culo arithmetico , vocabimus numeratorem
fractionis quantitatem , quæ duo puncta
præcedit ; & denominatorem ejusdem fra-
ctionis quantitatem , quæ puncta illa subse-
quitur. Ita fractionis hujus $ab : c$ erit ab nu-
merator , & c denominator . Pariterque in
hac alia fractione $(a^2 - c^2) : (b + d)$ nu-
merator quidem erit $a^2 - c^2$, denominator
vero $b + d$.

52.

52. Deinde, sicuti in calculo arithmetico quilibet numerus integer in formam fractionis exprimi potest, ei velut denominatorem unitatem adscribendo; ita quoque quælibet quantitas litteralis integra potest ad modum fractionis exhiberi, si ei tanquam denominator eadem unitas adscribatur. Quæ ratione repræsentabitur quantitas ab ad modum fractionis, scribendo $ab : 1$. Et similiter quantitas $a^2 \rightarrow c^2$ exhibebitur ad instar fractionis, si pro ea scribatur $(a^2 \rightarrow c^2) : 1$.

53. Præterea, sicuti in vulgari Arithmetica, pro calculo fractionum peragendo, præmittuntur praxès nonnullæ circa reductiones fractionum; ita eædem praxès necessariæ sunt quoque, ut fractiones, de quibus hic agimus, ad calculum poni possint. Et quanquam ratio illiusmodi reductiones instituendi non differat ab ea, qua in vulgari sunt Arithmetica; consultius tamen existimamus, illas hic breviter prosequi, quam omnino eas præsupponere.

I. Reductiones fractionum rationalium.

54. **Q**uantitas aliqua integra, non solum in formam fractionis •
 • art. 52. •
 exprimi, sed etiam ad fractionem, quæ datum habeat denominatorem, reduci potest. Id vero fit, multiplicando quantitatem integram per datum denominatorem, & producto eundem denominatorem datum adscribendo. Quæ ratione, si quantitas a reducenda sit ad fractionem, cujus denominator sit c , fiet

c , fiet fractio $ac : c$. Et similiter, si quantitatem $a + c$ reducere oporteat ad fractionem, cujus denominator sit b , fractio erit $(ab + cb) : b$.

55. Perspicuum est autem, hujusmodi fractiones posse rursus ad quantitates integras revocari. Revocantur vero, dividendo numeratorem fractionis per ejusdem denominatorem; nam quotiens erit quantitas integra quæ sita. Ita, si fractio $ac : c$ ad quantitatem integram sit revocanda, divido numeratorem ac per denominatorem c , & quotiens a erit quæ sita quantitas integra. Atque ita quoque $a + c$ erit quantitas integra, ad quam reducitur fractio $(ab + cb) : b$; quandoquidem, diviso $ab + cb$ per b , sit $a + c$. quotiens divisionis.

56. Quandoque in calculo fractionum duæ, pluresve fractiones, quæ diversos habent denominatores, ad eandem denominationem sunt reducendæ. Obtinetur id autem, multiplicando numeratorem cujusque fractionis per productum ex denominatoribus aliarum, & adscribendo cuique producto id, quod ex denominatorum omnium multiplicatione producit. Quæ ratione fractiones $a^2 : c$, & $b^2 : d$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $a^2d : cd$, & $b^2c : cd$. Et similiter fractiones $a^2 : c$, $b^2 : a$, $c^2 : d$, si ad eandem denominationem reducantur, fient $a^2d : acd$, $b^2cd : acd$, $ac^2 : acd$.

57. Denique, si oportebit, fractiones ad minimos terminos reducere; id fiet, ut in fractionibus arithmetiis, dividendo, tam nume-

meratorem, quam denominatorem propositæ fractionis per maximum eorum communem divisorem. Sic fractio $abcd : acm$, reducta ad minimos terminos, fiet $bd : m$; quum sit ac maximus communis divisor numeratoris $abcd$, & denominatoris acm . Pariterque fractio $abcd : (acd + ad^2)$, si reducatur ad minimos terminos, evadet $bc : (c + d)$; quandoquidem numeratoris $abcd$, denominatorisque $acd + ad^2$ maximus communis divisor est ad .

58. Maximus autem communis divisor duarum quantitatum nullo negotio invenitur, quum, vel utraque quantitas, vel una ad minimum est simplex. Sic abunde liquet, maximum communem divisorem esse ac relate ad quantitates $abcd$, acm ; & ad respectu quantitatum $abcd$, $acd + ad^2$. Sed, quum utraque quantitas est composita, invenendus est ille eodem artificio, quo reperitur in numeris, hoc est per divisionem sæpius repetitam: modo, cum ipsæ quantitates propositæ, tum residua, ex divisionibus orta, exuant divisores illos, quos minime communes habent.

59. Ita, si invenendus sit maximus communis divisor duarum quantitatum $d^4 + 2ad^3 + a^2d^2 + abd^2 + a^2bd$, & $cd^3 + 2acd^2 + a^2cd$; divisionis ope, detraho primum ex secunda proprium ejus divisorem c ; tumque primam $d^4 + 2ad^3 + a^2d^2 + abd^2 + a^2bd$ divido per secundam, eo divisore spoliata, $d^3 + 2ad^2 + a^2d$. Et quia divisio fieri nequit exacte, sed remanet $abd^2 + a^2bd$; di-

vi-

vido secundam quantitatem $d^3 + 2ad^2 + a^2d$ per hoc residuum, spoliatum proprio suo divisore ab , hoc est per $d^2 + ad$. Quumque divisio prodeat exacta, erit $d^2 + ad$ maximus communis divisor propositarum quantitatum.

60. Ex eo porro, quod, tum ipsæ propositæ quantitates, cum residua, ex divisionibus orta, exuere debent divisores illos, qui minime iis sunt communes; liquet, non aliter id, de quo agitur, peragi posse, quam, ubi reperire licet divisores omnes cujuscumque datæ quantitatis. Ad inventionem autem divisorum quod attinet, ut nullam ea patitur difficultatem, ubi, vel simplex est quantitas, vel non adeo composita; ita summis difficultatibus subjacet, quotiescumque quantitas est valde complexa. Quare, quum methodus inveniendi divisores omnes cujusque quantitatis hic commode tradi nequeat, opportuniore loco de illa agendum nobis erit.

II. Additio fractionum rationalium.

61. **I**N additione fractionum rationalium tres casus sunt distinguendi. Primus est, quum fractiones rationales, in unum addendæ, sunt ejusdem denominationis. Id vero quum accidit, fiet additio, conjungendo simul numeratores fractionum, & adscribendo summæ communem earum denominatorem. Sic summa fractionum $bc : a$, & $bd : a$ erit $(bc + bd) : a$. Similiter summa fractionum $bd : c$, & $(a^2 - b^2) : c$ erit $(bd + a^2 - b^2) : c$. Atque ita quoque, si in unum addendæ sint fractiones duæ $a^2 : (b + c)$, & $d^2 : (b + c)$, fiet summa $(a^2 + d^2) : (b + c)$.

Tom. I.

C

62.

62. Alter casus est, quum fractiones, in unum addendæ, sunt diversæ denominationis. Et quum hoc contingit, primo quidem propositæ fractiones reducendæ sunt * ad eandem denominationem, tum addendæ sunt simul, ut
- * art. 56. in casu præcedente *. Ita, si proponantur in unum addendæ fractiones duæ $ab : c$, & $bc : a$, summa erit $(a^2b + bc^2) : ac$; nam fractiones illæ, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $a^2b : ac$, & $bc^2 : ac$. Pariterque, si simul conjungi debeant duæ fractiones $a^2 : c$, & $(b^2 - d^2) : a$, summa erit $(a^3 + b^2c - d^2c) : ac$; quandoquidem, si eæ fractiones ad eandem denominationem reducantur, evadent $a^3 : ac$, & $(b^2c - d^2c) : ac$.
63. Tertius, & ultimus casus est, quum conjungenda est quantitas integra cum aliqua fractione: idque quum evenit, fieri potest additio, connectendo quantitates signo +. Sic, ad addendum a cum $b^2 : c$, scribo $a + b^2 : c$. Sed præ-
- * art. 54. stat quandoque, reducere * quantitatem integram ad fractionem ejusdem nominis, tum additionem peragere, ut in casu primo *. Qua ratione in proposito exemplo eadem summa erit $(ac + b^2) : c$; nam quantitas integra a , reducta ad fractionem, cujus denominator sit c , evadit $ac : c$: profecto autem, conjungendo $ac : c$ cum $b^2 : c$, oritur summa $(ac + b^2) : c$.

III, Subtractio fractionum rationalium.

64. **I**N subtractione fractionum rationalium tres ipidem casus sunt distinguendi, Primus casus est, quum propositæ fractiones sunt ejusdem denominationis. Id vero quum

quum accidit, fiet subtractio, subducendo ex numeratore unius denominatorem alterius, & residuo denominatorem communem adscribendo.

Ita id, quod remanet, subtrahendo ex fractione $bc : a$ fractionem aliam $bd : a$, erit $(bc - bd) : a$. Similiter id, quod superest, ubi ex fractione $bd : c$ subducitur fractio alia $(a^2 - b^2) : c$, erit $(bd - a^2 + b^2) : c$. Atque ita quoque, si fractio $a^2 : (b + c)$ subtrahenda sit ex fractione alia $d^2 : (b + c)$, residuum fiet $(d^2 - a^2) : (b + c)$.

65. Alter casus est, quum propositæ fractiones sunt diversæ denominationis. Et quum hoc contingit, primo quidem propositæ fractiones reducendæ sunt * ad eandem denominationem; tum deinde facienda est subtractio, ut in casu præcedente *. Ita, si ex fractione $ab : c$ subtrahi debeat fractio alia $bd : a$, residuum erit $(a^2b - bcd) : ac$; nam fractiones illæ, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $a^2b : ac$, & $bcd : ac$. Pariterque, si ex fractione $a^2 : c$ subducenda sit fractio alia $(b^2 - d^2) : a$, residuum fiet $(a^3 - b^2c + d^2c) : ac$; quandoquidem, si ex fractiones ad eandem denominationem reducantur, evadent $a^3 : ac$, & $(b^2c - d^2c) : ac$. * art. 56.

66. Tertius, & ultimus casus est, quum, vel ex quantitate integra subtrahenda est aliqua fractio, vel etiam ex aliqua fractione subtrahenda est quantitas integra: idque quum evenit, fieri potest subtractio, connectendo quantitates signo $-$. Sic, ad subtrahendum $b^2 : c$ ex a , scribo $a - b^2 : c$. Pariterque, ad subtrahendum d ex $b^2 : c$, scribo $b^2 : c - d$. Sed præstat quandoque, reducere * quantitatem integram ad fractionem ejusdem nominis, tum subtractionem * art. 54.

- * art. 64. peragere, ut in casu primo *. Qua ratione, subtrahendo $b^2 : c$ ex a , orietur residuum ($ac - b^2$) : c ; nam quantitas integra a , reducta ad fractionem, cujus denominator sit c , fit $ac : c$: profecto autem, subtrahendo $b^2 : c$ ex $ac : c$, oritur residuum ($ac - b^2$) : c .

IV. Multiplicatio fractionum rationalium.

67. **I**N multiplicatione fractionum rationalium duo tantum casus distinguuntur, Primus casus est, quum fractionem unam per fractionem aliam oportet multiplicare. Id vero quum accidit, multiplicandi sunt per se mutuo, tam numeratores, quam denominatores fractionum; dabuntque producta respective numeratorem, denominatoremque fractionis, quæ oritur ex proposita multiplicatione. Qua ratione fractio $a^2 : c$, multiplicata per fractionem $b^2 : d$, producet tertiam fractionem $a^2 b^2 : cd$. Pariterque fractio $(a^2 + b^2) : c$, ducta in fractionem $d^2 : a$, dabit pro producto fractionem aliam $(a^2 d^2 + b^2 d^2) : ac$.

68. Alter casus est, quum fractio aliqua multiplicanda est per quantitatem integram. Et quum hoc contingit, primo scribatur * quantitas integra ad instar fractionis, ei velut denominatorem unitatem adscribendo; tum fiat multiplicatio, ut in casu præcedente *. Ita, si multiplicanda sit quantitas integra a per fractionem $bd : c$, adscribo quantitati integræ a unitatem, ut ipsa quoque formam induat fractionis; tum, quia multiplicanda est fractio $a : 1$ per fractionem $bd : c$, fiet productum fractio $abd : c$.

69.

69. Unde patet, ad multiplicandam quantitatem integram per aliquam fractionem, non aliud fieri debere, quam multiplicare eam per numeratorem fractionis, & producto eundem denominatorem adscribere. Ita, ad multiplicandam quantitatem integram a per fractionem $bd : c$, multiplico primum quantitatem integram a per numeratorem fractionis bd , tum producto abd adscribo eundem denominatorem c , eritque $abd : c$ productum quæsitum. Atque ita quoque, si quantitas integra $a + b$ multiplicanda sit per fractionem $a^2 : c$, fiet productum $(a^3 + a^2b) : c$; quandoquidem, multiplicata quantitate integra $a + b$ per numeratorem fractionis a^2 , & producto $a^3 + a^2b$ adscripto denominatore c , oritur fractio $(a^3 + a^2b) : c$.

V. Divisio fractionum rationalium.

70. **I**N divisione fractionum rationalium tres oportet casus distinguantur. Primus casus est, quum fractio una per fractionem aliam est dividenda. Id vero quum accidit, fiet divisio, multiplicando numeratorem, denominatoremque fractionis dividendæ per denominatorem, numeratoremque alterius fractionis, & scribendo producta, ut numeratorem, denominatoremque novæ, quæ in quotiente oriri debet, fractionis. Ita, si dividenda sit fractio $a^3 : c$ per fractionem $b^2 : d$, multiplico primum a^3 per d , deinde multiplico c per b^2 , & erit $a^3d : b^2c$ quotiens quæsitus. Pariterque, si fractionem $a^3 : c$ dividere oporteat per fractionem aliam $(b^2 + d^2) : a$, orietur quotiens $a^4 :$

$$\frac{a^3d}{b^2c}$$

($b^2c + d^2c$). Atque ita quoque, si fractio $a^3 : (b + c)$ dividenda sit per fractionem $d^2 : (a + c)$, quotiens fiet ($a^4 + a^3c$) : ($bd^2 + cd^2$).

71. Alter casus est, quum quantitas integra per fractionem aliquam est dividenda. Et
 * art. 52. quum id contingit, primo quidem scribatur *
 quantitas integra ad instar fractionis, ei velut denominatorem unitatem adscribendo; tum fiat
 * art. 70. divisio, ut in casu præcedente *. Ita, si dividenda sit quantitas integra a^3 per fractionem $c^2 : a$, adscribo unitatem quantitati integræ a^3 , ut ipsa quoque formam induat fractionis; tum, quia res eo redit, ut dividenda sit fractio $a^3 : x$ per fractionem aliam $c^2 : a$, fiet quotiens divisionis fractio tertia $a^3 : c^2$.

72. Ex quo patet, ad dividendam quantitatem integram per aliquam fractionem, non aliud fieri debere, quam multiplicare quantitatem integram per denominatorem fractionis, & producto numeratorem adscribere. Ita, ad dividendam quantitatem integram a^3 per fractionem $c^2 : a$, multiplico primum quantitatem integram a^3 per denominatorem fractionis a , deinde producto a^3 adscribo numeratorem c^2 , eritque $a^3 : c^2$ quotiens propositæ divisionis.

73. Tertius, & ultimus casus est, quum vicissim fractio aliqua dividenda est per quantitatem integram: idque quum evenit, scribatur
 * art. 52. * similiter primo integra quantitas ad instar fractionis, adscribendo ei unitatem, velut denominatorem; tum fiat adhuc divisio, ut in casu primo * . Ita, si dividenda sit fractio $a^3 : b$ per quantitatem integram c , adscribo unitatem quantitati integræ c , ut ipsa quoque fractionis
 in-

induat formam; tum, quia dividenda est fractio $a^3 : b$ per fractionem aliam $c : 1$, fiet quotiens propositæ divisionis fractio tertia $a^3 : bc$.

74. Unde patet, ad dividendam fractionem aliquam per quantitatem integram, non aliud fieri debere, quam multiplicare denominatorem fractionis per ipsam quantitatem integram, & productum eidem numeratori adscribere. Ita, si fractio $a^3 : b$ dividenda sit per quantitatem integram c , multiplico primum denominatorem fractionis b per quantitatem integram c , deinde productum bc adscribo eidem numeratori a^3 , eritque fractio $a^3 : bc$ quotiens, qui ex proposita divisione oritur.

C A P U T IV.

Rationalium ad potestates elevatio.

75. **O**peratones præcipuæ, quæ circa quantitates institui possunt, sunt additio, subtractio, multiplicatio, & divisio. Interim, præter eas, tum vulgares Arithmetici, cum etiam Algebristæ duas alias invexerunt: scilicet formationem potestatum, quæ velut species quædam multiplicationis potest haberi; & radicum extractionem, quam ad divisionem non immerito revocare licebit. Itaque, quum ostensum sit hætenus, qua ratione in quantitativibus rationalibus quatuor illæ præcipuæ operationes fieri debeant; ordo nunc postulat, ut, quo pacto in iisdem quantitativibus aliæ duæ istæ operationes sint peragendæ, bre-

viter aperiatur . Ordinemur autem a formatione potestatum ; nam , ea rite intellecta , extractio radicum nullam plane difficultatem involvet.

1. Definitio , ordo , ac genesis potestatum .

76. **P**otestatem vocant Algebristæ id , quod evadit quantitas aliqua , quum semel , aut pluries per se ipsam multiplicatur ; & appellant indicem , seu exponentem potestatis numerum illum , qui quantitati paulo altius adscriptus designat , quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet . Ita quantitas a^2 , quæ producitur , multiplicando a semel per se ipsam , vocabitur potestas ipsius a ; ejusque index , seu exponents dicetur numerus 2 . Et similiter quantitas a^3 , quæ producitur , multiplicando a bis per se ipsam , erit potestas alia ejusdem a ; sed ipsius index , seu exponents erit numerus 3 .

77. Ratione hujus indicis , seu exponentis variæ distingui possunt potestatum species . Dicemus siquidem potestatem primam , cujus index est unitas ; vocabimus potestatem secundam , cujus index est binarius ; atque ita quoque potestas tertia erit illa , cujus index est ternarius ; potestas quarta , quæ habet quaternarium pro suo indice ; & sic deinceps in infinitum . Quæ ratione a , seu a^1 erit prima potestas ipsius a ; aa , seu a^2 potestas secunda ; a^3 potestas tertia ; a^4 potestas quarta ; atque ita de aliis .

78. Algebristæ , post Diophantum , solent has potestates propriis suis nominibus appellare . Vocant etenim radicem , seu latus ipsam pri-

primam potestatem, aut potius ipsam illam quantitatem, quæ per repetitam multiplicationem ad superiores evehitur potestates. Vocant vero ejus lateris quadratum potestatem secundam; cubum, potestatem tertiam; quadrato-quadratum potestatem quartam; quadrato-cubum, potestatem quintam; cubo-cubum, potestatem sextam; atque ita deinceps. Sed, quoniam per hæc nomina non adeo fit clara potestatum harum idea; satius erit, eas secundum indices ipsarum, * *art. 77.* modo jam * exposito, a se mutuo distinguere.

79. Illud potius hoc loco sedulo notandum existimo, quod una, eademque potestas, prout ad varias refertur quantitates, varias subinde denominationes mereatur. Ita potestas, exempli gratia, a^6 dicenda est sexta relate ad a , tertia relate ad a^2 , & nonnisi secunda relate ad a^3 . Nam, sicuti quantitas a , quinquies per se ipsam multiplicata, producit a^6 ; sic idem pariter productum habetur, multiplicando per se ipsam, sive bis quantitatem a^2 , sive semel tantum quantitatem a^3 . Est itaque potestas nomen relativum; adeoque a quantitate, ad quam refertur, suam sumit denominationem.

80. Jam, quod spectat ad genesim potestatum, ex iis, quæ hætenus dicta sunt, facile quidem ea colligi potest. Nam, si nulla fiat quantitatis per se ipsam multiplicatio, sed ipsa quantitas capiatur, habebitur potestas prima. At vero, si quantitas semel per se ipsam multiplicetur, habebitur potestas secunda; quemadmodum orietur potestas tertia, si quantitas multiplicetur bis per se ipsam; potestas quarta, si ter; potestas quinta, si quater; atque ita deinceps.

ceps. Quocirca, ut quantitas aliqua ad potestatem dati nominis eleveatur, satis erit, toties eam per se ipsam multiplicare, quot habet unitates datum nomen, una dempta.

81. Hinc, quum multiplicatio in rationalibus simplicibus nullam difficultatem involvat, facile erit, ad quamcumque potestatem eas attollere. Ita quadratum, seu secunda potestas quantitatis a^2b est a^4b^2 ; quandoquidem a^2b^2 producit, multiplicando a^2b semel per se ipsam. Pariterque cubus, seu tertia potestas quantitatis ac^2 est a^3c^6 ; nam, multiplicando quantitatem ac^2 bis per se ipsam, producit a^3c^6 . In rationalibus autem compositis repetita multiplicatio nonnihil difficultatis admittit. Unde, pro elevandis iis ad datam quamcumque potestatem, aliam hic methodum afferemus.

11. *Formatio quadrati, seu secunda potestatis.*

82. **U**T igitur quaelibet rationalis composita ad quadratum, seu secundam potestatem multo facilius eleveatur, quam eam semel per se ipsam multiplicando; nosse prius oportet elementa quadrati, quod fit ex quantitate, quæ duabus ex partibus coalescit. Sciendum est ergo, quadratum talis quantitatis componi ex quadratis partium, & ex duplo ejus, quod producit ex mutua earum partium multiplicatione. Quod sane theorema, ipsius multiplicationis ope, facile potest ostendi. Nam, multiplicando $a + b$ per $a + b$, producit $a^2 + 2ab + b^2$: quod quidem productum continet qua-

quadrata partium a , & b , duplumque ejus, quod producitur, multiplicando a per b .

83. Hoc posito theoremate, quod geometrice demonstratur ab Euclide propositione quarta secundi libri suorum Elementorum; facile modo erit, quamcumque compositam rationalem ad quadratum, seu secundam potestatem attollere. Nam primo, si quantitas duabus tantum partibus constet, sumenda sunt quadrata earum partium, duplumque ejus, quod producitur ex mutua earundem partium multiplicatione. Quod si vero quantitas tres partes habeat, considerentur priores duæ, velut una, pariterque capiatur quadratum, tam hujus, quam partis alterius, una cum duplo ejus, quod oritur, ducendo priores duas in partem tertiam. Neque aliter fieri debet, si oblata quantitas ex quatuor, aut pluribus partibus constet.

84. Ita, si rationalis composita, ad quadratum elevanda, sit $a + b$; fiet quadratum $a^2 + 2ab + b^2$. Sed, si ad quadratum elevanda sit quantitas $a + b + c$, quæ tribus ex partibus constet; primo fiat quadratum ex duabus prioribus $a + b$, velut una consideratis, quod erit $a^2 + 2ab + b^2$; deinde bis capiatur productum ex iisdem partibus $a + b$, ductis in partem tertiam c , nimirum $2ac + 2bc$; denique fiat quadratum c^2 ex parte tertia c . Jamque, additis in unum omnibus hisce quantitatibus, erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ quadratum propositæ quantitatis $a + b + c$.

85. Quod si porro ad quadratum sit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus constet; primo fiat quadratum ex pri-

primis tribus $a + b + c$, tamquam unica consideratis, quod erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; tum sumatur duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione earundem partium $a + b + c$ in partem quartam d , nimirum $2ad + 2bd + 2cd$; denique fiat quadratum d^2 ex parte quarta d . Et, additis in unum omnibus hisce quantitibus, erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$ quadratum propositæ quantitatis $a + b + c + d$.

86. Fieri autem potest, ut aliqua ex partibus propositæ quantitatis signo — afficiatur. Quare notetur hoc loco velim, quadrata ipsarum partium semper quidem afficienda esse signo +, quomocunque partes illæ sint affectæ; producta vero alia tunc quidem affici debere signo +, quum eadem sunt signa partium, ex quarum multiplicatione oriuntur. Ita quadratum ex $a - b$ erit $a^2 - 2ab + b^2$. Pariterque quadratum ex $a - b - c$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$. Atque ita quoque quadratum ex $a - b + c - d$ erit $a^2 - 2ab + b^2 + 2ac - 2bc + c^2 - 2ad + 2bd - 2cd + d^2$. Quod quidem ex ipso opere multiplicationis, superius

* art. 36. * tradito, liquet abunde.

87. Cæterum ex tradita quadrati compositione illud modo inferre licet, quod si numero quadrato n^2 addatur duplum suæ radicis $2n$ una cum unitate; summa $n^2 + 2n + 1$ sit etiam numerus quadratus, cujus radix unitate una superabit radicem illius; quandoquidem, si fiat quadratum ex $n + 1$, erit illud, juxta traditam

* art. 83. * regulam, $n^2 + 2n + 1$. Unde facile erit, tabulas componere, quæ contineant quadrata omnium

mnium, numerorum naturalium. Nam, quadratum unitatis est etiam 1, cui si addatur duplum suæ radicis, hoc est 2, una cum ipsa unitate, fiet 4 quadratum binarii. Atque huic porro addito duplo ipsius binarii, hoc est 4, una cum unitate, habebitur 9 pro quadrato ternarii. Sicque, solius additionis ope, absque ulla multiplicatione, aliorum omnium numerorum naturalium quadrata successive invenire licebit.

III. *Formativæ cubi, seu tertiæ potestatis.*

88. **S**imiliter, ut quælibet rationalis composita ad cubum, seu tertiam potestatem multo facilius elevetur, quam eam bis per se ipsam multiplicando; nosse prius oportet elementa cubi, qui fit ex quantitate, quæ duabus ex partibus coalescit. Sciendum est ergo, cubum talis quantitatis componi ex cubis partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam; ac demum ex triplo ejus, quod nascitur, multiplicando vicissim quadratum secundæ partis per primam. Quod sane theorema, ipsius multiplicationis ope, facillime potest ostendi. Nam, si quantitas $a + b$ bis per se ipsam multiplicetur, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: quod quidem productum continet cubos partium a , & b ; triplum ejus, quod producit, multiplicando a^2 per b ; triplumque ejus, quod oritur, multiplicando vicissim b^2 per a .

89. Hoc posito theoremate, quod nullo negotio posset geometricè ostendi ad instar ejus, quod continetur propositione quarta libri secundæ.

cundi Elementorum Euclidis ; facile modo erit, quamcumque compositam rationalem ad cubum, seu tertiam potestatem attollere . Nam primo , si quantitas duabus tantum partibus constet , fiet ex ipsa quæsitus cubus , capiendo cubos partium ; triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam; triplumque ejus , quod nascitur, multiplicando vicissim quadratum secundæ partis per primam . Quod si vero quantitas tres partes habeat , considerentur priores duæ velut una; & similiter, factis cubis istius , & partis tertiæ , sumatur , tam triplum ejus , quod gignitur , multiplicando quadratum ex primis duabus per partem tertiam, quam triplum ejus , quod oritur , multiplicando quadratum partis tertiæ per priores duas. Neque aliter fiet , si oblata quantitas ex quatuor, aut multo pluribus partibus constet .

90. Ita , si rationalis composita , ad cubum, seu tertiam potestatem elevanda , sit $a + b$; erit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Sed , si ad cubum elevanda sit quantitas $a + b + c$, quæ tribus ex partibus constat ; primo fiat cubus ex duabus primis partibus $a + b$, velut una consideratis , qui erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; tum sumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2$, quadratum duarum primarum partium $a + b$, per partem tertiam c , nimirum $3a^2c + 6abc + 3b^2c$; porro capiatur triplum ejus , quod producitur , multiplicando c^2 , quadratum partis tertiæ c , per priores duas $a + b$, scilicet $3ac^2 + 3bc^2$; denique fiat cubus c^3 ex parte tertia c . Jamque , additis in unum omnibus hisce quantitativis, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$+ b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$ cubus quantitatis propositæ $a + b + c$.

91. Quod si porro ad cubum sit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus constat; fiat primo ex primis tribus partibus $a + b + c$, tamquam unica consideratis, cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$; deinde sumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, quadratum trium primarum partium $a + b + c$, per partem quartam d , nimirum $3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d$; ad hæc capiatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando d^2 , quadratum quartæ partis d , per partes priores $a + b + c$, scilicet $3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2$; denique fiat cubus d^3 ex quarta parte d . Et, additis in unum omnibus hisce quantitibus, fiet $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$ cubus propositæ quantitatis $a + b + c + d$.

92. Fieri autem potest, ut aliqua ex partibus propositæ quantitatis signo — afficiatur. Quare notetur hoc loco velim, cubos ipsarum partium afficiendos esse semper eodem signo, quod ipsæ partes afficiuntur; producta vero illa, quæ oriuntur, multiplicando quadratum unius partis per aliam, tunc demum afficienda esse signo —, quum hæc alia pars signo — afficitur; ac demum ea producta, quæ ex trium partium multiplicatione oriuntur, afficienda esse tunc tantum signo —, quum earum partium, vel quælibet, vel una dumtaxat signo — affecta re-

pe-

peritur. Ita cubus ex $a \rightarrow b$ erit $a^3 \rightarrow 3a^2b + 3ab^2 \rightarrow b^3$. Et cubus ex $a \rightarrow b \rightarrow c$ erit $a^3 \rightarrow 3a^2b + 3ab^2 \rightarrow b^3 \rightarrow 3a^2c + 6abc \rightarrow 3b^2c + 3ac^2 \rightarrow 3bc^2 \rightarrow c^3$. Quod quidem ex ipso opere multiplicationis, superius * tradito, abunde colligitur.

93. Cæterum ex tradita cubi compositione illud modo fit manifestum, quod si alicui numero cubo n^3 addatur, primo triplum quadrati suæ radicis $3n^2$, deinde triplum ipsius radicis $3n$, ac denique unitas; summa $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ fit etiam numerus cubus, cujus radix unitate una superabit radicem illius; quandoquidem, si fiat * art. 89, cubus ex $n + 1$, erit ille, juxta traditam * regulam, $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. Unde facile erit, tabulas construere, quæ contineant cubos omnes numerorum naturalium. Nam, cubus unitatis est etiam 1, cui si addatur triplum quadrati suæ radicis 3, itemque triplum ipsius radicis, quod est similiter 3, ac denique unitas, fiet 8 cubus binarii. Atque huic porro additis, quadrato suæ radicis triplicato 12, triplo ipsius radicis 6, nec non unitate, fiet 27 cubus ternarii. Neque aliter aliorum omnium numerorum naturalium cubi poterunt successive inveniri.

IV. *Formatio potestatum superiorum.*

94. **N**on dissimili methodo poterunt quantitates rationales, utcumque compositæ, ad quamvis aliam potestatem altiorem attolli. Nam satis erit, ipsius multiplicationis ope, semel invenire, quos terminos includat quæsitæ potestas, ubi ea fit ex quantitate, cu-

ejus duæ tantummodo sunt partes ; & eos semper terminos assumere , quotiescumque aliqua quantitas composita ad eam potestatem est elevanda : considerando primas omnes, velut unam, ubi oblata quantitas ex pluribus , quam duabus, partibus constat.

95. Hac ratione , si quantitas aliqua ad quadrato-quadratum , seu quartam potestatem sit elevanda ; considero prius, quadrato-quadratum ex quantitate bimembri $a + b$ esse $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, atque adeo componi ex quadrato-quadratis ipsarum partium ; ex quadruplo ejus , quod producitur , multiplicando cubum primæ partis per secundam ; ex quadruplo ejus, quod oritur, multiplicando vicissim cubum secundæ partis per primam ; ac demum ex sextuplo ejus, quod nascitur, multiplicando quadratum primæ partis per quadratum secundæ . Unde , hujus theorematis ope, facile erit, quamcumque compositam rationalem ad quadrato-quadratum attollere.

96. Eadem ratione , si quantitas aliqua ad quadrato-cubum , seu quintam potestatem sit elevanda ; considerare prius oportet, quadrato-cubum ex quantitate bimembri $a + b$ esse $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$, atque adeo componi ex quadrato-cubis ipsarum partium ; ex quintuplo ejus, quod fit , multiplicando, tam quadrato-quadratum primæ partis per secundam , quam vicissim quadrato-quadratum secundæ partis per primam ; ac demum ex decuplo ejus , quod nascitur , multiplicando , tam cubum primæ partis per quadratum secundæ , quam per contrarium cubum secundæ partis per

Tom. I.

D

qua-

quadratum primæ. Unde, hoc invento theoremate, facili negotio, quælibet quantitas composita ad quadrato-cubum elevabitur.

97. Ubi autem hujusmodi theoremata sunt detecta, poterunt & alia, ipsis analogâ, inveniri, quibus, si ad rem foret, facili negotio construi possent tabulæ, quæ numerorum omnium naturalium potestates superiores contineant. Ita ex
 * art. 95. theoremate *, quadrato-quadrati compositionem ostendente, perspicuum est, quod si alicui numero quadrato-quadrato n^4 addatur, primo quadruplum cubi suæ radicis $4n^3$, deinde sextuplum quadrati ejusdem radicis $6n^2$, porro quadruplum ipsius radicis $4n$, ac denique unitas, quod, inquam, summa omnium $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$ sit etiam numerus quadrato-quadratus, cujus radix unitate una superabit radicem illius. Quare, huic insistendo theoremati, facile erit, numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata successive reperire.

98. Similiter ex theoremate *, quadrato-cubi compositionem ostendente, perspicuum est, quod si alicui numero quadrato-cubo n^5 addatur, primo quintuplum quadrato-quadrati suæ radicis $5n^4$, secundo decuplum cubi ejusdem radicis $10n^3$, tertio decuplum quadrati ex eadem quoque radice $10n^2$, quarto ipsamet radix quintuplicata $5n$, ac denique unitas; quod, inquam, summa omnium $n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$ sit etiam numerus quadrato-cubus, cujus radix unitate una superabit radicem illius. Unde, hujus theorematâ beneficio, in proclive erit, numerorum omnium naturalium quadrato-cubos gradatim invenire.

99. Cæterum nolo hic silentio reticere, Recentiorum Algebristarum conatus insignes illud emolumenti nobis peperisse, ut uno, eodemque theoremate, generali quadam formula comprehenso, possit quælibet quantitas composita ad quamcumque, ut ut altissimam, potestatem attolli. Sed de generali ista formula potestatum in postrema hujus libri sectione, quæ universam potestatum theoriam exhibebit, agendum nobis erit. Nam ejus constructio pendet ex doctrina numerorum figuratorum, de quibus in sectione tertia, occasione serierum infinitarum, sermonem instituemus.

V. Fractionum rationalium ad potestates elevatio.

100. **Q**Uantum ad fractiones rationales, ut ex ad quamcumque datam potestatem eleventur, necesse est, ad potestatem illam attollere, tam numeratores, quam denominatores ipsarum. Sic fractionis $ab : c$ quadratum erit $a^2b^2 : c^2$, cubus $a^3b^3 : c^3$, quadrato-quadratum $a^4b^4 : c^4$, atque ita deinceps. Et eadem ratione fractionis hujus $(ab + ac) : (c + d)$ quadratum erit $(a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2) : (c^2 + 2cd + d^2)$, cubus $(a^3b^3 + 3a^3b^2c + 3a^3bc^2 + a^3c^3) : (c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3)$, quadrato-quadratum $(a^4b^4 + 4a^4b^3c + 6a^4b^2c^2 + 4a^4bc^3 + a^4c^4) : (c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4)$, atque ita de reliquis.

101. Quod si fractiones quantitativibus integris adhæreant; per ea, quæ de formatione potestatum hæcenus dicta sunt, facile quoque

erit, eas ad quamcumque datam potestatem evehere. Sic quadratum ex $a + bc : d$ erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$. Componi nanique debet

* art. 82. quadratum istud ex quadratis partium, duploque ejus, quod producitur, ex mutua earundem partium multiplicatione. Sed quadratum ex a est a^2 , quadratum ex $bc : d$ est $b^2c^2 : d^2$, duplumque ejus, quod oritur, multiplicando a per $bc : d$ est $2abc : d$. Quare erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$ quadratum ex $a + bc : d$.

102. Sit jam ad quadratum elevanda quantitas $a + bc : d + a^2 : d$. Fiat primo quadratum ex duabus primis partibus, velut una considerata, $a + bc : d$, quod erit $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$; deinde sumatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando easdem duas priores partes $a + bc : d$ per tertiam $a^2 : d$, nimirum $2a^3 : d + 2a^2bc : d^2$; denique fiat quadratum $a^4 : d^2$ ex tertia parte $a^2 : d$. Et, additis in unum omnibus hisce quantitativibus, fiet $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2 + 2a^3 : d + 2a^2bc : d^2 + a^4 : d^2$ quadratum propositæ quantitatis $a + bc : d + a^2 : d$.

103. Eadem ratione cubus ex $a + bc : d$ erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$.

* art. 83. Componi nanique debet * cubus iste ex cubis partium; triplo ejus, quod fit, multiplicando quadratum primæ partis per secundam; triploque ejus, quod oritur, multiplicando vicissim quadratum secundæ partis per primam. Sed cubus ex a est a^3 ; cubus ex $bc : d$ est $b^3c^3 : d^3$; triplum ejus, quod producitur, multiplicando quadratum primæ partis a^2 per secundam $bc : d$, est $3a^2bc : d$; & triplum ejus, quod gignitur, multiplicando per contrarium quadratum secundæ

dæ partis $b^2c^2 : d^2$ per primam a , est $3ab^2c^2 : d^2$.
 Quare erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$
 d³ cubus ex $a + bc : d$.

104. Sit jam ad cubum elevanda quantitas
 $a + bc : d + a^2 : d$. Primo fiat cubus ex dua-
 bus primis partibus, velut una consideratis,
 $a + bc : d$, qui erit $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3$; deinde sumatur triplum ejus,
 quod oritur, multiplicando quadratum ex dua-
 bus primis partibus $a^2 + 2abc : d + b^2c^2 : d^2$
 per tertiam $a^2 : d$, nimirum $3a^4 : d + 6a^3bc : d^2 + 3a^2b^2c^2 : d^3$; porro capiatur triplum ejus,
 quod producitur, multiplicando quadratum
 tertiæ partis $a^4 : d^2$ per priores duas $a + bc : d$,
 scilicet $3a^5 : d^2 + 3a^4bc : d^3$; denique fiat cu-
 bus $a^6 : d^3$ ex tertia parte $a^2 : d$. Et, additis in
 unum omnibus hisce quantitativibus, fiet $a^3 + 3a^2bc : d + 3ab^2c^2 : d^2 + b^3c^3 : d^3 + 3a^4 : d + 6a^3bc : d^2 + 3a^2b^2c^2 : d^3 + 3a^5 : d^2 + 3a^4bc : d^3 + a^6 : d^3$ cubus propositæ quantitatis $a + bc : d + a^2 : d$.

105. Cæterum, ut quantitates, quæ fra-
 ctiones involvunt, facilius ad quamcumque da-
 tam potestatem attollantur, præstat, tum fra-
 ctiones ad eandem denominationem *, cum * art. 56.
 quantitates integras ad fractionem ejusdem no-
 minis * reducere. Sic, ut fiat, sive quadratum, * art. 54.
 sive cubus ex $a + b^2 : a + c^2 : d$, reducendæ
 sunt, tam fractiones $b^2 : a$, & $c^2 : d$ ad eandem de-
 nominationem ad , quam quantitas integra a ad
 fractionem, cujus denominator sit etiam ad . Un-
 de, quum quantitas proposita hoc pacto evadat
 $(a^2d + b^2d + ac^2) : ad$; erit ejus quidem qua-
 dratum $(a^4d^2 + 2a^2b^2d^2 + b^4d^2 + 2a^3c^2d +$

D 3 2ab^2c^2d

$$2ab^2c^2d + a^2c^4) : a^2d^2 ; \text{ ejus vero cubus } (a^6d^3 + 3a^4b^2d^2 + 3a^2b^4d^3 + b^6d^3 + 3a^5c^2d^2 + 6a^3b^2c^2d^2 + 3ab^4c^2d^2 + 3a^4c^4d + 3a^2b^2c^4d + a^3c^6) : a^3d^3.$$

C A P U T V.

Extractio radicum ex rationalibus.

106. **Q**uemadmodum, quum quantitas aliqua semel, aut pluries per se ipsam multiplicatur, id, quod producitur, vocatur * *art. 76.* potestas illius quantitatis; ita ipsa illa quantitas, ex cujus repetita multiplicatione potestas oritur, vocatur radix ejus potestatis. Et, * *art. 77.* quemadmodum potestates distinguuntur in ordines, secundum indices, seu exponentes ipsarum; ita quoque radices earundem potestatum, habita illorum exponentium ratione, possunt in varios ordines distingui.

107. Nimirum, sicuti potestas prima est illa, cujus index est unitas; potestas secunda, seu quadratum, cujus index est numerus binarius; potestas tertia, seu cubus, cujus index est numerus ternarius; atque ita deinceps. Ita quoque dici potest radix prima, quæ refertur ad potestatem primam; radix secunda, seu quadrata, quæ refertur ad quadratum, seu potestatem secundam; radix tertia, seu cubica, quæ refertur ad cubum, seu potestatem tertiam; atque ita deinceps.

108. Jam, radices extrahere ex potestatibus rationalium simplicium, problema est, quod nul-

Nullam difficultatem involvit. Nam, sicuti quantitas ab , multiplicata semel per se ipsam, producit quadratum a^2b^2 ; sic, extracta radice quadrata ex a^2b^2 , proveniet rursus ab . Et insuper, sicuti quantitas ab , bis ducta in se ipsam, producit cubum a^3b^3 ; ita, extracta radice cubica ex a^3b^3 , orietur denuo eadem quantitas ab .

109. Verumtamen, quum potestates ad rationales compositas referuntur, pluresque adeo terminos involvunt, radicum extractio non ita facilisprehenditur. Quocirca, ut methodus eas extrahendi probe intelligatur; primo illam experiemur in extractione radice quadratæ; deinde ejus periculum faciemus in extractione radice cubicæ; ac denique, quo pacto eadem methodus extractioni aliarum radicum applicari debeat, breviter ostendemus.

1. Extractio radice quadratæ.

110. **U**T ex rationali, quantumvis composita, quadrata radix extrahatur, meminisse oportet, quadratum quantitatis, cujus duæ sunt partes, constare ex quadratis partium, duploque ejus, quod producit ex mutua earundem partium multiplicatione. Hinc etenim fit, ut si radix propositæ quantitatis duabus tantum partibus constet; prima quidem invenienda sit, extrahendo radicem quadratam ex primo termino, quem oportet esse quadratum perfectum; alia vero, dividendo terminum sequentem per duplum partis jam inventæ.

111. Hac ratione , ad inveniendas partes duas radices , quæ refertur ad quadratum $a^2 + 2ab + b^2$; elicio primum radicem quadratam ex priore termino a^2 , quem liquet esse quadratum perfectum ; tum per duplum ejus radices divido terminum sequentem $+ 2ab$. Et quoniam , radix illa est a , quotiens vero hujus divisionis est $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque , ut inveniantur partes duæ radices , quæ refertur ad quadratum $9a^2 - 24ac + 16c^2$; extraho primum radicem quadratam ex priore termino $9a^2$; deinde per duplum ejus radices divido terminum sequentem $- 24ac$. Quumque radix illa sit $3a$, & quotiens hujus divisionis sit $- 4c$; erunt $3a - 4c$ partes inveniendæ.

112. Extracta autem radice quadrata ex priore termino propositæ quantitatis , delendus est terminus ille , nec amplius ejus habenda est ratio . Sed , diviso termino sequente per duplum ejus radices , subducendum est ex eadem proposita quantitate , & productum ex duplo illo per inventum quotientem , & quadratum ipsius quotientis . Nam , semper ac quantitas proposita est quadratum perfectum , ejusque radix duabus tantum partibus constat ; per tractam quadrati compositionem , necesse est , ut, facta ea subtractione , nihil amplius remaneat.

113. Quod si contingat , subtractione illa peracta , aliquid superesse ; vel proposita quantitas non erit quadratum perfectum ; vel ejus radix , præter duas jam inventas , partem aliam admittet. Hæc vero , si adsit , comperietur , considerando inventas partes , velut unam , & dividendo priores duos terminos residui per duplum
ip-

ipfarum. Sed, invento isto quotiente, qui pro parte tertia radice haberi debet, subducendum est ex illo residuo, tam id, quod oritur, multiplicando duplum primarum partium per inventum quotientem, quam quadratum ejusdem quotientis. Nam, si forte, hac facta subductione, aliud quidpiam adhuc supererit, fieri potest, ut quæ sita radix quartam, quintamve partem admittat: quæ tamen omnes eodem semper artificio reperientur.

114. Ita, si extrahenda sit quadrata radix ex $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, extraho primum illam ex priore termino a^2 ; eoque deleto, divido deinde terminum sequentem $+ 2ab$ per $2a$, duplum inventæ radice. Jam, multiplicato deinceps divisionis hujus quotiente $+ b$ per duplum illud, factoque quadrato ejusdem quotientis, oritur quantitas $+ 2ab + b^2$, quæ subtracta ex quantitate proposita, priore termino multata, relinquit $+ 2ac + 2bc + c^2$. Hinc considero partes radice jam inventas $a + b$, velut unam, & per duplum ipfarum $2a + 2b$ divido ulterius priores duos terminos illius residui $+ 2ac + 2bc$. Quumque oriatur quotiens $+ c$, cujus quadratum c^2 additum ei, quod produoitur, multiplicando $2a + 2b$ per $+ c$, dat quantitatem $2ac + 2bc + c^2$, quæ subtracta ex illo residuo relinquit nihil; concludo, radicem propositæ quantitatis esse $a + b + c$.

115. Similiter, si extrahenda sit quadrata radix ex quantitate $9a^2 - 24ac + 16c^2 - 30ad + 40cd + 25d^2$, elicio primum illam ex priore termino $9a^2$; eoque deleto, divido deinde terminum sequentem $- 24ac$ per $6a$, duplum in-

inventæ radicis . Jam , multiplicato postea divisionis hujus quotiente $\rightarrow 4c$ per duplum illud , factoque quadrato ejusdem quotientis , oritur quantitas $\rightarrow 24ac + 16c^2$, quæ subtracta ex quantitate proposita , priore termino minuta , relinquit $\rightarrow 3oad + 4ocd + 25d^2$. Quare considero partes radicis jam inventas $3a \rightarrow 4c$, velut unam , & per duplum ipsarum $6a \rightarrow 8c$ divido deinceps priores duos terminos illius residui $\rightarrow 3oad + 4ocd$. Quumq; oriatur quotiens $\rightarrow 5d$, cujus quadratum $25d^2$ additum ei , quod nascitur , multiplicando $6a \rightarrow 8c$ per $\rightarrow 5d$, exhibet quantitatem $\rightarrow 3oad + 4ocd + 25d^2$, quæ subtracta ex illo residuo relinquit nihil ; concludo , radicem propositæ quantitatis esse $3a \rightarrow 4c \rightarrow 5d$.

11. Extractio radicis cubicæ.

116. **S**imiliter , ut ex rationali , quantumvis composita , cubica radix extrahatur , meminisse oportet , cubum quantitatis , cujus duæ sunt partes , constare * ex cubis partium ; ex triplo ejus , quod oritur , multiplicando quadratum primæ partis per secundam ; & ex triplo ejus , quod producitur , multiplicando vicissim quadratum secundæ partis per primam . Hinc etenim fit , ut si radix propositæ quantitatis duabus tantum partibus constet ; prima quidem invenienda sit , extrahendo radicem cubicam ex primo termino , quem oportet esse cubum perfectum ; alia vero , dividendo terminum sequentem per quadratum partis jam inventæ triplicatum .

117. Hac ratione , ad inveniendas partes
duas

duas radices, quæ refertur ad cubum $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; elicio primum radicem cubicam ex priore termino a^3 , quem liquet esse cubum perfectum; tumq; per quadratum ejus radices triplicatum divido terminum sequentem $+ 3a^2b$. Et quoniam radix illa est a , quotiens vero hujus divisionis est $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque, ut inveniantur partes duæ radices, quæ refertur ad cubum $27a^3 - 54a^2c + 36ac^2 - 8c^3$; extraho primum radicem cubicam ex priore termino $27a^3$; deinde per quadratum ejus radices triplicatum divido terminum sequentem $- 54a^2c$. Quumque radix illa sit $3a$, & quotiens hujus divisionis sit $- 2c$; erunt $3a - 2c$ partes inveniendæ.

118. Extracta autem radice cubica ex priore termino propositæ quantitatis, delendus est terminus ille, nec amplius ejus habenda est ratio. Sed, diviso termino sequente per quadratum ejus radices triplicatum, subducere oportet ex eadem proposita quantitate; primo id, quod oritur, multiplicando quadratum illud triplicatum per inventum quotientem; deinde id, quod producitur, multiplicando vicissim quadratum inventi quotientis triplicatum per radicem antea extractam; ac denique cubum ejusdem quotientis. Nam, semper ac quantitas proposita est cubus perfectus, ejusque radix duabus tantum partibus constat; per traditam cubi compositionem, necesse est, ut, ea facta ars. 28. subtractione, nihil amplius remaneat.

119. Quod si contingat, subtractione illa peracta, aliquid superesse; vel proposita quantitas non erit cubus perfectus; vel ejus radix,
præ-

præter duas jam inventas , partem aliam admittet . Hæc vero , si adsit , comperietur , considerando inventas partes , velut unam , & dividendo priores tres terminos residui per quadratum ex iis triplicatum . Sed, invento isto quotiente, qui pro parte tertia radice haberi debet, subducere oportet ex illo residuo, primo id, quod oritur , multiplicando quadratum primarum partium triplicatum per inventum quotientem; tum id, quod nascitur , multiplicando vicissim quadratum inventi quotientis triplicatum per partes duas priores; ac deniq; cubum ejusdem quotientis . Nam , si forte , hac facta subtractione, aliud quidpiam adhuc supererit , fieri potest , ut quæsitæ radix quartam , quintamve partem admittat : quæ tamen omnes eodem semper artificio reperientur .

120. Ita , si extrahenda sit radix cubica ex $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$, extraho primum illam ex priore termino a^3 ; eoque deleta , divido deinde terminum sequentem $+ 3a^2b$ per $3a^2$, quadratum inventæ radice triplicatum . Jam quotiens hujus divisionis est $+ b$, & multiplicando , tam $3a^2$ per b , quam $3b^2$ per a , oritur quantitas $3a^2b + 3ab^2$, quæ una cum b^3 , cubo ipsius b , subtracta ex quantitate proposita, priore termino multata , relinquit $3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Quare considero partes radice jam inventas $a + b$, velut unam, & per quadratum ex iis triplicatum $3a^2 + 6ab + 3b^2$ divido deinceps priores tres terminos illius residui $3a^2c + 6abc + 3b^2c$. Quumque oriatur quotiens $+ c$, cujus cubus c^3 adsciscens , tum
id,

id, quod oritur, multiplicando $3a^2 + 6ab + 3b^2$ per c , cum id, quod gignitur, multiplicando $3c^2$ per $a + b$, dat quantitatem $3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$, quæ subtracta ex illo residuo relinquit nihil; concludo, radicem propositæ quantitatis esse $a + b + c$.

121. Similiter, si extrahenda sit radix cubica ex $27a^3 - 54a^2c + 36ac^2 - 8c^3 - 54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$, elicio primum illam ex priore termino $27a^3$; eoque delete, divido deinde terminum sequentem $-54a^2c$ per $27a^2$, quadratum inventæ radicis triplicatum. Jam quotiens hujus divisionis est $-2c$, & multiplicando, tam $27a^2$ per $-2c$, quam $12c^2$ per $3a$, oritur quantitas $-54a^2c + 36ac^2$, quæ una cum $-8c^3$, cubo ipsius $-2c$, subtracta ex quantitate proposita, priore termino minuta, relinquit $-54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$. Hinc confidero partes radicis jam inventas $3a - 2c$, velut unam, & per quadratum ex iis triplicatum $27a^2 - 36ac + 12c^2$ divido ulterius priores tres terminos illius residui $-54a^2d + 72acd - 24c^2d$. Quumque oriatur quotiens $-2d$, cujus cubus $-8d^3$ adsciscens, tam id, quod nascitur, multiplicando $27a^2 - 36ac + 12c^2$ per $-2d$, quam id, quod producitur, multiplicando $12d^2$ per $3a - 2c$, dat quantitatem $-54a^2d + 72acd - 24c^2d + 36ad^2 - 24cd^2 - 8d^3$, quæ subtracta ex illo residuo relinquit nihil; concludo, radicem propositæ quantitatis esse $3a - 2c - 2d$.

III.

III. *Extractio aliarum radicum.*

122. **Q**uamvis ad radices altioris ordinis, ut generalem pro iis extrahendis methodum tradamus, notare prius oportet, quod quælibet potestas quantitatis, cujus duæ sunt partes, in primo quidem termino continet potestatem non dissimilem partis prioris, in secundo vero termino complectitur productum ex potestate, uno gradu minore, ejusdem partis per secundam, toties sumptum, quot sunt unitates in exponente potestatis, de qua agitur. Hinc etenim fit, ut si radix propositæ quantitatis, duabus tantum partibus constet; prima quidem invenienda sit, extrahendo quæsitam radicem ex primo termino, quem oportet esse potestatem perfectam ejus ordinis, de quo est quæstio; alia vero, dividendo terminum sequentem per potestatem, uno gradu minorem, partis jam inventæ, toties sumptam, quot exponens potestatis, de qua agitur, habet unitates.

123. Hac ratione, ut inveniantur partes duæ radices, quæ refertur ad quadrato-quadratum $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; extraho primum radicem quadrato-quadratam ex priore termino a^4 , quem liquet esse quadrato-quadratum perfectum; deinde per cubum ejus radices quadruplicatum divido terminum sequentem $+ 4a^3b$. Et quoniam radix illa est a , quotiens autem hujus divisionis est $+ b$; erunt $a + b$ partes inveniendæ. Atque ita quoque, ut inveniantur partes duæ radices, quæ refertur ad quadrato-cubum $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4$

+ $5ab^4 \rightarrow bs$; elicio primum radicem quadrato-cubicam ex priore termino as , quem patet esse quadrato-cubum perfectum ; tum per quadrato-quadratum ejus radiceis quintuplicatum divido terminum sequentem $\rightarrow 5a^4b$. Quumque radix illa sit a , quotiens autem hujus divisionis sit $\rightarrow b$; erunt $a \rightarrow b$ partes inveniendæ.

124. Jam , extracta quæsitæ radice ex priore termino propositæ quantitatis , delendus est terminus ille , nec amplius ejus habenda est ratio . Sed , diviso termino sequente per ejus radiceis potestatem , uno gradu minorem , toties sumptam , quot exponens potestatis , de qua agitur , habet unitates , subducendi sunt ex proposita quantitate omnes alii termini , qui esse debent in potestate quantitatis , cujus duæ sunt partes . Et siquidem , hac facta subductione , nihil amplius remaneat , erit quantitas proposita potestas perfecta ejus ordinis , de quo agitur , ejusque radix ex duabus partibus jam inventis constabit . Quod si vero aliquid supererit ; vel proposita quantitas non erit potestas perfecta ; vel ejus radix , præter duas jam inventas , partem aliam admittet ; quæ quidem , si adsit , considerando compertas partes , velut unam , eruetur eadem omnino ratione , qua secunda pars radiceis cruta fuit ,

125. Sic quadrato-quadratum quantitatis , cujus duæ sunt partes , constat ex quadrato-quadratis ipsarum partium ; ex quadruplo ejus , quod producitur , multiplicando cubum primæ partis per secundam ; ex quadruplo ejus , quod oritur , multiplicando vicissim cubum secundæ partis per primam ; ac demum ex sextuplo ejus , quod

* Art. 95.

quod nascitur, multiplicando quadratum primæ partis per quadratum secundæ. Unde, inventa per divisionem secunda parte radicis, subtrahi debet ex quantitate proposita; primo id, quod oritur, multiplicando cubum primæ partis quadruplicatum per secundam; tum id, quod fit, multiplicando quadratum primæ partis sextuplicatum per quadratum secundæ; porro id, quod gignitur, multiplicando cubum secundæ partis quadruplicatum per primam; ac denique quadrato-quadratum, quod fit ex parte secunda.

126. Similiter, quadrato-cubus quantitatis, cujus duæ sunt partes, componitur ex quadrato-cubis ipsarum partium; ex quintuplo, tum ejus, quod fit, multiplicando quadrato-quadratum primæ partis per secundam, cum ejus, quod oritur, multiplicando vicissim quadrato-quadratum secundæ partis per primam; ac demum ex decuplo, tam ejus, quod producit, multiplicando cubum primæ partis per quadratum secundæ, quam ejus, quod gignitur, multiplicando vicissim cubum secundæ partis per quadratum primæ. Unde, inventa per divisionem secunda parte radicis, subtrahi debet ex quantitate proposita; primo id, quod fit, multiplicando quintuplum quadrato-quadrati primæ partis per secundam; tum id, quod producit, multiplicando decuplum cubi primæ partis per quadratum secundæ; deinde id, quod oritur, multiplicando decuplum cubi secundæ partis per quadratum primæ; porro id, quod nascitur, multiplicando quintuplum quadrato-quadrati secundæ partis per primam; ac denique quadrato-cubus, qui fit ex parte secunda.

IV.

IV. *Extractio radicum ex fractionibus rationalibus.*

127. **Q**uemadmodum fractiones rationales ad quamcunque datam potestatem attolluntur, elevando * ad eam, tam ^{art. 100.} numeratores, quam denominatores ipsarum; ita, ut ex aliqua fractione rationali radix quæcumque extrahatur, oportebit, radicem illam elicere, tum ex numeratore, cum ex denominatore datæ fractionis. Qua ratione $ab : c$ erit, tam radix quadrata fractionis $a^2b^2 : c^2$, quam radix cubica alterius hujus fractionis $a^3b^3 : c^3$. Atque ita quoque $(ab + ac) : (c + d)$ erit, tum radix quadrata fractionis $(a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2) : (c^2 + 2cd + d^2)$, cum radix cubica alterius hujus fractionis $(a^3b^3 + 3a^2b^2c + 3a^2bc^2 + a^3c^3) : (c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3)$.

128. Sed interdum, ut radices ex fractionibus extrahi possint, oportet prius, per regulam superius * traditam, fractiones illas ad minimos ^{art. 57.} terminos reducere. Ita, ex fractione $4a^3b^2 : ac^2$ quadrata radix extrahi nequit, ut quæ, nec ex numeratore $4a^3b^2$, nec ex denominatore ac^2 extrahi potest; sed, si ea ad minimos terminos reducatur, facile erit, ex ipsa quadratam radicem elicere; nam, quum fiat $4a^2b^2 : c^2$, erit ejus quadrata radix $2ab : c$. Similiter, ex fractione $16a^4c^3 : 2ab^3$ radix cubica extrahi non potest; sed, quia reducta ad simpliciores suam expressionem fit $8a^3c^3 : b^3$, inveniatur pro ejus radice cubica fractio alia $2ac : b$.

129. Quod, si fractiones rationales quan-

Tom. I.

E

ti-

titatibus integris, similiter rationalibus, adherent; per ea, quæ de extractione radicum hætenus dicta sunt, facile quoque erit, ex iis, quum fieri potest, quancumque radicem extrahere. Ita, si extrahenda sit quadrata radix ex $a^3 + 2abc; d + b^2c^2; d^3$, elicio primum illam ex prior termino a^3 ; eoque deleto, dividendo terminum sequentem $+ 2abc; d$ per $2a$, duplum ejus radices. Jam ex hac divisione oritur quotiens $+ bc; d$, cujus quadratum $b^2c^2; d^2$ additum ei, quod oritur, multiplicando $2a$ per $+ bc; d$, exhibet quantitatem $+ 2abc; d + b^2c^2; d^2$. Unde, quia hæc quantitas subtracta ex quantitate proposita, prior termino multata, relinquit nihil; concludo, radicem quadratam propositæ quantitatis esse $a + bc; d$.

130. Similiter, si extrahenda sit radix cubica ex $a^3 - 3a^2bc; d + 3ab^2c^2; d^2 - b^3c^3; d^3$, elicio primum eam ex prior termino a^3 ; quo quidem deleto, dividendo terminum sequentem $- 3a^2bc; d$ per $3a^2$, quadratum ejus radices triplicatum. Jam ex hac divisione oritur quotiens $- bc; d$, cujus cubus $- b^3c^3; d^3$ adsciiscens, tam id, quod oritur, multiplicando $3a^2$ per $- bc; d$, quam id, quod producitur, multiplicando $3b^2c^2; d^2$ per a , dat quantitatem $- 3a^2bc; d + 3ab^2c^2; d^2 - b^3c^3; d^3$. Unde, quia quantitas ista subtracta ex quantitate proposita, prior termino multata, relinquit nihil; concludo, radicem cubicam propositæ quantitatis esse $a - bc; d$.

131. Cæterum, ut ex quantitibus, fractionibus involventibus, facilius radices extrahantur, præstat, tum fractiones ad eandem denominatoro-

nominationem, cum quantitates integras ad fractiones ejusdem * nominis reducere. Ita, ad * art. 54. extrahendam quadratam radicem ex $a^2 + 2abc$: $d + b^2c^2 : d^2$, reducendæ sunt, tam fractiones $2abc : d$, & $b^2c^2 : d^2$ ad eandem denominationem d^2 , quam quantitas integra a^2 ad fractionem, cujus denominator sit etiam d^2 . Unde, quum loco propositæ quantitatis habeatur $(a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2) : d^2$, fiet ejus radix * quadrata * art. 127. $(ad + bc) : d$. Atque ita quoque inveniatur, radicem cubicam hujus quantitatis $a^3 \rightarrow 3a^2bc$: $d + 3ab^2c^2 : d^2 \rightarrow a^3b^3 : d^3$ esse $(ad \rightarrow bc) : d$; quum reducatur quantitas illa ad hanc aliam $(a^3d^3 \rightarrow 3a^2bcd^2 + 3ab^2c^2d \rightarrow a^3b^3) : d^3$.

V. Genesis quantitatum incommensurabilium.

132. **V** Ulgo duæ quantitatum species distingui solent; scilicet commensurabiles, seu rationales; & incommensurabiles, seu irrationales. Has duas quantitatum species considerarunt Veteres dumtaxat in Arithmetica, ubi quantitates per numeros designantur. Quem in finem vocarunt quantitates commensurabiles, seu arithmetice rationales, quæ numeris possunt designari; vocarunt vero quantitates incommensurabiles, seu arithmetice irrationales, quæ nullis plane numeris exprimi possunt.

133. Sed considerarunt Recentiores, eandem quantitatum distinctionem etiam in Geometria locum habere. Quantitates enim, quemadmodum in Arithmetica per numeros, ita in Geometria per rectarum longitudines designantur.

tur. Unde, sicuti dicuntur arithmetice rationales, quæ numeris possunt designari; & arithmetice irrationales, quæ nullis numeris exprimi queunt. Ita quoque dicendæ sunt geometricæ rationales, quæ per longitudes rectorum exprimi possunt; & geometricæ irrationales, quæ nullis queunt rectis definiri.

134. Atque hac quantitatibus, cum in Arithmetica, tum in Geometria admissa distinctione; jam problemata omnia mathematica licebit in tria summa genera dispescere. Unum namque genus erit illorum, in quibus quantitates quæsitæ numeris perinde, ac lineis rectis poterunt designari. Alterum genus erit eorum, in quibus quantitates quæsitæ, non quidem ullis numeris, sed per solas lineas rectas exprimi poterunt. Tertium genus complectetur tandem problemata illa, in quibus quæsitæ quantitates, neque ullis numeris, neque ullis rectis designare licebit.

135. Dari autem quantitates, quæ nec numeris, nec rectis ullis exprimi possunt; nemo sane in dubium revocabit. Si enim, data circuli diametro, quæratür longitudo suæ circumferentiæ; eam, nec per numerum aliquem, nec per rectam ullam licebit definire. Et similiter si, data quavis circuli subtensa, quæratür longitudo arcus, ad quem subtensa illa refertur; nulla erit assignabilis recta, per quam ea possit exhiberi. Unde æquum est, ut problemata, in quibus hujusmodi quærantur quantitates, ad peculiare quoddam genus referantur.

136. Unde fiat, ut in Geometria quædam quantitates sint geometricæ rationales, quædam geometricæ irrationales; non est hujus loci defini-

finire. Tantum hic indicabimus, unde nam in Arithmetica quantitates incommensurabiles oriuntur. Nimirum oriuntur hujusmodi quantitates in Arithmetica, quum radicem oportet extrahere ex numero aliquo, qui non est potestas perfecta ejus ordinis, quem extrahenda radix ostendit. Sic, quia nullus numerus potest inveniri, qui ductus in se ipsum producat numerum denarium; inde est, ut quadrata radix numeri denarii sit quantitas incommensurabilis, seu arithmetice irrationalis.

137. Jam ex eodem fonte oriuntur etiam quantitates incommensurabiles in Algebra, ubi non numeris, sed Alphabeti litteris, quantitates ipsæ designantur. Nam, si quærat quadrata radix quantitatis ab , liquido patet, nullam adesse quantitatem iisdem litteris a , & b sic exprimibilem, ut ducta semel in se ipsam producat ab . Quocirca, quemadmodum quadrata radix numeri denarii est quantitas incommensurabilis in Arithmetica; sic quoque in Algebra quadrata radix ipsius ab , velut quantitas incommensurabilis debet haberi.

VI. Ratio designandi quantitates incommensurabiles.

138. Quotiescumque ex aliqua quantitate optata radix extrahi non potest, designatur ea, præfigendo quantitati signum istud $\sqrt{}$, quod hac de causa signum radicale appellatur. Hincque factum, ut quantitates incommensurabiles, tam in Arithmetica, quam in Algebra, dicerentur quoque quantitates radicales. Usurpa-

tur vero tale signum, ad designandam quamcumque radicem, sive quadratam, sive cubicam, sive alterius cujusque potestatis. Sed, ad illam distinguendam, adscribitur communiter signo radicali numerus, qui est index, seu exponens potestatis, de qua agitur, sive radicis extrahendæ.

139. Ita, quia exponens quadrati, seu secundæ potestatis est numerus binarius; erit $\sqrt{2}$ signum radicis quadratæ. Et similiter, quia exponens cubi, seu tertiæ potestatis est numerus ternarius; erit $\sqrt[3]{}$ signum radicis cubicæ. Qua ratione quadrata radix, quæ extrahi non potest ex quantitate ab , designabitur per $\sqrt{2}ab$. Pariterque radix cubica, quæ elici nequit ex quantitate abc , exhibebitur per $\sqrt[3]{}abc$. Et par est ratio radicum altioris ordinis, quæ ex propositis quantitativibus elici non possunt.

140. Interim notare licet hoc loco, invaluisse morem apud Algebraistas, ut quotiescumque alicui quantitati signum radicale simpliciter apponitur, de quadrata radice intelligi debeat. Ita $\sqrt{ab}$ designat radicem quadratam, quæ extrahi nequit ex quantitate ab . Et similiter $\sqrt{10}$ ostendit radicem quadratam, quæ extrahi non potest ex numero denario. Unde, morem istum nos etiam servantes, tunc demum signo radicali indicem, seu exponentem extrahendæ radicis adscribemus, quotiescumque ipsa radix refertur ad potestatem, quæ est altioris ordinis, quam quadratum.

141. Præstat hic etiam adnotare, quod ubi quantitas rationalis, unde radix extrahi nequit, est composita; tunc, ad designandam radicem extrahendam, non modo præfigere oportet quantitati signum radicale, verum etiam paren-

renthesi quantitatem ipsam includere. Qua ratione quadrata radix quantitatis $ab + ac$ designanda est per $\sqrt{ab + ac}$. Et similiter radix cubica quantitatis $a^2b + a^2c$ designabitur per $\sqrt[3]{a^2b + a^2c}$. Unde expressio ista $\sqrt{ab} + c$ non aliud in posterum significabit, quam rationalem c additam radicali $\sqrt{ab}$; sicut hæc alia $\sqrt{ab} - c$ non aliud deinceps ostendet, quam rationalem c demptam ex radicali $\sqrt{ab}$.

142. Hoc idem præstabimus quoque, quum extrahenda est optata radix ex fractione aliqua rationali, eaque ex nulla ejus parte, hoc est, nec ex numeratore, nec ex denominatore elici potest. Ita radix quadrata fractionis $abc : d$ erit $\sqrt{abc : d}$. Et similiter radix cubica fractionis $a^2b^2 : c$ erit $\sqrt[3]{a^2b^2 : c}$. Sed, si radix extrahi quidem potest ex una fractionis parte, sed non item ex parte alia; tunc signum radicale adscribemus ei tantummodo parti, unde radix extrahi nequit. Sic quadrata radix fractionis $c^4 : ab$ erit $c^2 : \sqrt{ab}$. Pariterque radix cubica fractionis $b^2c^2d^2 : a^3$ erit $\sqrt[3]{b^2c^2d^2 : a}$.

143. Etsi autem in posterum, quum radix, nec ex numeratore, nec ex denominatore extrahi potest, præfigemus signum radicale universæ fractioni, parenthesi inclusæ; fatemur tamen, posse ad hoc opus adhiberi etiam duo signa radicalia, & unum quidem numeratori, alterum vero denominatori seorsim adscribi. Ita quadrata radix fractionis $abc : d$ exprimi poterit, tam per $\sqrt{abc : d}$, quam per $\sqrt{abc} : \sqrt{d}$. Et similiter radicem cubicam, extrahendam ex fractione $a^2b^2 : c$ designare licebit, non modo per $\sqrt[3]{a^2b^2 : c}$, verum etiam per $\sqrt[3]{a^2b^2} : \sqrt[3]{c}$.

S E C T I O II.

De Calculo Quantitatum Radicalium.

144. **T** Radito calculo quantitatum rationalium, gradum nunc facimus ad calculum illarum, quæ dicuntur radicales. De hujusmodi vero calculo paulo accuratius agendum nobis est; quia de eo nihil ferme traditur in Arithmetica vulgari. Quem in finem, non modo in quantitativis litteralibus, verum etiam in quantitativis numericis, lubet regularum ejus periculum facere.

145. Principio autem sciendum est, quod sicuti, ad designandum duplum, triplum, quadruplum rationalis a , scribitur $\ast 2a, 3a, 4a$; sic, ad designandum duplum, triplum, quadruplum radicalis $\sqrt{ab}$, scribendum sit $2\sqrt{ab}, 3\sqrt{ab}, 4\sqrt{ab}$.
- * art. 4.
- * art. 7. Unde, quemadmodum $2a + 3a$ idem $\ast$ sunt, ac $5a$; ita quoque $3\sqrt{ab} + \sqrt{ab}$, sive etiam $3\sqrt{ab} + 1\sqrt{ab}$ idem erunt, ac $4\sqrt{ab}$; & $5\sqrt{ab} - 3\sqrt{ab}$ idem, ac $2\sqrt{ab}$.

146. Quin etiam, quemadmodum, si rationalis a toties accipienda sit, quot sunt partes in c , scribitur $\ast ca$; ita quoque $c\sqrt{ab}$ designabit radicalem $\sqrt{ab}$ toties sumptam, quot sunt partes in c . Qua ratione multiplicabitur radicalis quæcumque per quamlibet rationalem, scribendo illam post istam, nullo signo interjecto. Ut, ad multiplicandum $\sqrt{bc}$ per a , scribo $a\sqrt{bc}$. Et simili-

militer ; ad multiplicandum $\sqrt{10}$ per 3 , scribe $3\sqrt{10}$.

147. Quod si autem alicujus radicalis , ut $\sqrt{ab}$, sumendæ essent duæ tertiæ partes, tres quartæ partes, aut etiam una quinta pars; tunc, vitandæ confusionis ergo , scribi poterit $(2:3)\sqrt{ab}$, $(3:4)\sqrt{ab}$, $(1:5)\sqrt{ab}$. Unde multiplicabitur radicalis quæcumque per quamlibet fractionem rationalem , scribendo fractionem , parenthesi inclusam , ante radicalem , nullo signo interjecto . Ut $(ab:c)\sqrt{cd}$ designabit id , quod oritur , multiplicando radicalem $\sqrt{cd}$ per fractionem rationalem $ab:c$.

148. Jam quantitates , quæ sunt extra signum radicale ; siue sint numericæ , siue litterales ; siue integræ , siue fractæ , dicentur in posterum coefficientes ipsarum radicalium . Sed facile erit , eas quoque sub eodem signo radicali reponere : scilicet , si elevatæ ad potestatem , ab exponente signi denominatam , multiplicentur per quantitates , sub signo existentes . Qua ratione $c\sqrt{ab}$ idem erit , ac $\sqrt{abc^2}$; & $2\sqrt{3}$ idem , ac $\sqrt{12}$. Pariterque $c\sqrt[3]{a^2b}$ idem erit , ac $\sqrt[3]{a^2bc^3}$; & $3\sqrt[3]{2}$ idem ac $\sqrt[3]{54}$.

149. Sed vicissim ex quantitate , sub signo existente , poterit quandoque aliquis ejus divisor extra signum collocari : scilicet , si ex eo extrahi possit radix , a radicali signo denominata , ita , si habeatur radicalis ista $\sqrt{abc^2}$, jam in quantitate , sub signo existente , abc^2 reperitur divisor c^2 , unde extrahi potest quadrata radix : proindeque collocabitur divisor ille extra signum , scribendo $c\sqrt{ab}$. Et similiter , quia in hac radicali $\sqrt[3]{54}$ numerus 54 , sub signo existens,

stems, fit, multiplicando 27 per 2, & ex 17 elici potest radix cubica; idcirco, collocabitur divisor 27 extra signum, scribendo $2\sqrt[3]{2}$.

C A P U T I.

Calculus radicalium simplicium.

150. **Q**uantitates radicales, non secus ac rationales, dividuntur in simplices, & compositas. Quæ enim unicum habent terminum, eumque affectum signo radicali, ut $\sqrt{ac}$, $\sqrt[3]{abc}$, dicuntur radicales simplices. Quæ vero constant ex pluribus terminis, quorum, vel omnes, vel aliqui saltem radicali signo sunt affecti, ut $\sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, vel etiam $a + \sqrt[3]{ab^2}$ & $\sqrt[3]{a^2b}$, dicuntur radicales compositæ. Hinc primo quidem de calculo radicalium simplicium, tum de calculo radicalium compositarum, agendum nobis erit.

1. Reductiones radicalium simplicium.

151. **P**ro calculo radicalium simplicium peragendo, duplici reductione opus est. Prior est ipsarum ad minimos terminos, sive ad simpliciores suas expressiones reductio; hæcque fit, collocando extra signum

Art. 149. * omnes divisores quantitatis, sub signo existentis, ex quibus elici potest radix, a signo denominata. Ita, si habeatur radicalis ista $\sqrt{4abc^2}$; perspicuum est, quadratam radicem extrahi posse, non modo ex divisore c^2 , verum etiam

etiam ex divisore 4 : proindeque simplicior positæ radicalis expressio erit $2c\sqrt{ab}$. Et similiter, quia in hac alia radicali $\sqrt[3]{27a^2c^3b}$ extrahi potest radix cubica, tam ex divisore c^3 , quam ex divisore 27; idcirco simplicior eius radicalis expressio erit $3c\sqrt[3]{a^2b}$.

152. Vulgo Algebristæ, ad reducendas quantitates radicales ad simpliciores suas expressiones, dividunt rationales, sub signis existentes, per maximam suam potestatem, a signo exponente denominatam, quæ exacte in iis continetur; & quotientem quidem sub signo relinquunt, radicem vero potestatis extra signum reponunt. Ut, quia maximum quadratum, quod exacte continetur in $4abc^2$, est $4c^2$, cujus radix est $2c$: proinde, diviso $4abc^2$ per $4c^2$, reducetur quantitas radicalis $\sqrt{4abc^2}$ ad hanc aliam $2c\sqrt{ab}$. Et similiter, quia maximus cubus, qui continetur in $27a^2bc^3$, est $27c^3$, cujus radix est $3c$; idcirco, diviso $27a^2bc^3$ per $27c^3$, mutabitur radicalis $\sqrt[3]{27a^2bc^3}$ in hanc aliam $3c\sqrt[3]{a^2b}$.

153. Jam, reductis quantitatibus radicalibus, quæ ejusdem speciei sunt, ad simpliciores suas expressiones, cognosci potest, num ratio, quæ inter eas existit, sit commensurabilis, nec ne. Si enim contigerit, illas eandem sub signis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commensurabilis, & illa eadem, quæ inter earundem coefficientes existit; secus vero, si sub signis radicalibus diversas habuerint radicales. Ita radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{48}$, reductæ ad simpliciores suas expressiones, evadunt $2\sqrt{3}$, & $4\sqrt{3}$. Unde, quemadmodum $2\sqrt{3}$ est ad $4\sqrt{3}$, ut 2 ad 4, sive
ut

ut 1 ad 2; ita in hac eadem ratione erit pariter $\sqrt{12}$ ad $\sqrt{48}$. Et similiter, quia radicales $\sqrt[3]{16a^3b^2c}$, & $\sqrt[3]{54b^2c^4}$, ubi ad simpliciores suos terminos reducuntur, fiunt $2a\sqrt[3]{2b^2c}$, & $3c\sqrt[3]{2b^2c}$, quæ sunt inter se, ut 2a ad 3c; erit quoque ut $\sqrt[3]{16a^3b^2c}$ ad $\sqrt[3]{54b^2c^4}$, ita 2a ad 3c.

154. Altera reductio, quæ opus est, pro calculo radicalium simplicium peragendo, ea est, per quam radicales diversi nominis ad eandem denominationem reducuntur. Fit autem hujusmodi reductio; primo quidem elevando quantitatem, sub cujusque signo existentem, ad potestatem, a signo alterius denominatam; tum proprium cujusque signi indicem multiplicando per indicem alterius. Ita, radicales duæ $\sqrt{ab}$, & $\sqrt[3]{abc}$, reductæ ad eandem denominationem, fiunt $\sqrt[6]{a^3b^3}$, & $\sqrt[6]{a^2b^2c^2}$. Pariterque duæ radicales $\sqrt{5}$, & $\sqrt[3]{6}$, si ad eandem denominationem reducantur, evadunt $\sqrt[6]{125}$, & $\sqrt[6]{36}$.

155. Interim, si index signi unius radicalis exakte contineatur in indice signi alterius radicalis; satis erit, quantitatem prioris radicalis evehere ad potestatem denominatam a numero, qui, quoties unus index in altero continetur, ostendit; & per eundem hunc numerum multiplicare indicem ejusdem radicalis. Ut, si reducendæ essent ad eandem denominationem radicales duæ $\sqrt{ab}$, & $\sqrt[6]{a^3c^3}$, liquido patet, indicem primæ radicalis $\sqrt{ab}$ ter contineri in indice alterius $\sqrt[6]{a^3c^3}$. Quare, multiplicato indice illo per 3; & elevata ad cubum quantitate ab ; erunt $\sqrt[6]{a^3b^3}$, & $\sqrt[6]{a^3c^3}$ radicales illæ, ad eandem denominationem reductæ. Atque ita quoque duæ radicales $\sqrt[3]{6}$, & $\sqrt[6]{12}$, si ad eandem

dem denominationem essent reducendæ, sient
 $\sqrt{636}$, & $\sqrt{612}$,

156. Jam additio, subtractio, multiplicatio, & divisio fieri tantum possunt inter radicales ejusdem nominis. Unde, quemadmodum, si operationes instituendæ essent inter radicales diversæ denominationis, reducendæ prius forent radicales illæ ad idem nomen; ita in sequentibus, quum de iis operationibus agendum nobis erit, supponemus semper, instituendas esse illas inter eas radicales, quæ vel ejusdem nominis datæ sunt, vel methodo jam tradita ad eandem denominationem sunt reductæ.

Art. 154.
155.

II. *Additio radicalium simplicium.*

157. **U**T duæ, aut plures radicales simplices addantur in unum, reducendæ prius sunt eæ ad simplices suas expressiones. Nam si contigerit, eas subinde reductas eandem sub signo radicali quantitatem habere; fiet additio, conjungendo simul coefficientes ipsarum, & scribendo summam, velut coefficientem ejusdem radicalis.

Art. 151.
152.

158. Hac ratione, si addendæ sint simul quantitates duæ radicales $\sqrt{72}$, & $\sqrt{8}$; reduco primum eas ad simplices suas expressiones; earumque una fiet $6\sqrt{2}$, altera $2\sqrt{2}$. Unde, quia sic reductæ eandem sub signo radicali quantitatem habent, addo simul earum coefficientes 6, & 2; eritque summa quæsitæ $8\sqrt{2}$ sive $\sqrt{128}$.

159. Similiter, si proponantur in unum addendæ quantitates radicales $\sqrt{3648}$, & $\sqrt{24}$; reduco primum illas ad simplices suas expressiones.

fio.

siones. Quumque earum una fiat $6\sqrt{3}$; altera $2\sqrt{3}$; erit summa quæsitæ $8\sqrt{3}$, sive $\sqrt{3}1536$. Atque ita quoque summa duarum radicalium $\sqrt{4ab}$, & $\sqrt{9ab}$ erit $5\sqrt{ab}$, sive $\sqrt{25ab}$. Pariterque erit $7c\sqrt{ab}$, sive $\sqrt{49abc^2}$ summa quantum radicalium $\sqrt{25abc^2}$, & $\sqrt{4abc^2}$.

160. Quod si autem quantitates radicales, in unum addendæ, reductæ ad simplices suas expressiones, non habeant sub signo radicali eandem quantitatem; tunc fiet additio, adhibito signo $+$. Ita quantitates radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{18}$, reductæ ad simplices suas expressiones, fiunt $2\sqrt{3}$, & $3\sqrt{2}$. Quare, si eæ in unum sint addendæ, erit summa ipsarum, vel $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, vel etiam $\sqrt{12} + \sqrt{18}$.

161. Sed accidit interdum, ut, etsi quantitates radicales, simul addendæ, ad simplices suos terminos revocatæ, eandem habeant quantitatem sub signo radicali, adhuc tamen additio fieri debeat signo $+$; scilicet, si coefficientes sint litterales, iidemque diversis litteris sint notati. Ut, si simul addere velim quantitates duas radicales $\sqrt{abc^2}$, & $\sqrt{a^2b}$, eæ reductæ ad simplices suos terminos eandem continent sub signo radicali quantitatem; quum fiant $c\sqrt{ab}$, & $a\sqrt{ab}$. Sed, quia a cum c non aliter conjungi potest, quam signo $+$; erit summa earum radicalium, vel $c\sqrt{ab} + a\sqrt{ab}$, vel paulo simplicius $(c + a)\sqrt{ab}$.

162. Fieri quoque potest additio radicalium simplicium, absque ulla reductione, hac alia methodo, quæ commodior erit, ubi quantitates sunt numericæ. Capiantur quantitates, sub signis existentes, dividaturque major per minorem.

Et

Et siquidem contigerit, ex hac divisione talem oriri quotientem, ut exinde elici possit radix, quam radicale signum ostendit; eliciatur radix ista. Et, si eadem unitate aucta, fiat coefficientis radicalis minoris, habebitur summa quaesita.

163. Oporteat, exempli gratia, addere in unum radicales duas simplices $\sqrt{72}$, & $\sqrt{8}$. Jam quantitates, sub signis existentes, sunt 72, & 8. Itaque dividatur major 72 per minorem 8. Quumque habeatur pro quotiente numerus 9; liquet, ex quotiente isto elici posse quadratam radicem, eamque esse 3. Augeatur ergo radix ista unitate, ut fiat 4; & erit $4\sqrt{8}$, sive $\sqrt{128}$ summa propositarum radicalium, prorsus ut supra*.

*Art. 153.

164. Proponantur similiter addendae in unum duae radicales simplices $\sqrt[3]{648}$, & $\sqrt[3]{24}$. Quoniam quantitates, sub signis existentes, sunt 648, & 24; dividatur major 648 per minorem 24. Quumque pro quotiente habeatur numerus 27, qui est cubus perfectus; eliciatur exinde radix cubica 3. Et quia radix ista, unitate aucta, est 4; erit $4\sqrt[3]{24}$, sive $\sqrt[3]{1536}$ summa datarum radicalium, omnino ut antea*.

*Art. 159.

165. Quod si autem, divisa quantitate majore per minorem, non habeatur quotiens talis, ut elici exinde possit radix, quam radicale signum ostendit; tunc facienda est additio, adhibito signo +. Ita, quia ex quotiente, qui oritur, dividendo 12 per 8, nimirum ex $12:8$, sive $3:2$, elici nequit quadrata radix; idcirco summa duarum radicalium simplicium $\sqrt{12}$, & $\sqrt{8}$ erit $\sqrt{12} + \sqrt{8}$.

166. Cæterum, si quantitati radicali addenda

da sit quantitas aliqua rationalis, non aliter fiet additio, quam conjungendo eas signo $+$. Sic, ad addendum 6 cum $\sqrt{10}$, scribo $6 + \sqrt{10}$. Pariterque, ad addendum 5 cum $\sqrt{37}$, scribo $5 + \sqrt{37}$. Neque aliter fiet, si addi debeat, vel b cum $\sqrt{ab}$, vel b cum $\sqrt{3a^2b}$; quandoquidem summa erit, vel $b + \sqrt{ab}$, vel $b + \sqrt{3a^2b}$.

III. Subtractio radicalium simplicium.

167. **S**imiliter, ut ex una radicali simplice subtrahi possit alia radicalis simplex, reducendæ sunt eæ methodo, superius tradita*, ad simpliciores suas expressiones. Nam, si contigerit, eas subinde reductas eandem sub signo radicali quantitatem habere; fiet subtractio, subducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & scribendo residuum, velut coefficientem ejusdem radicalis.

*art. 151.
152.

168. Hoc pacto, si ex radicali $\sqrt{72}$ subtrahenda sit radicalis alia $\sqrt{8}$; reduco primum illas ad simpliciores suas expressiones; earundemque una fiet $6\sqrt{2}$, altera $2\sqrt{2}$. Unde, quia sic reductæ eandem sub signo radicali quantitatem habent; ex coefficiente unius 6 subtraho coefficientem alterius 2, eritque $4\sqrt{2}$, sive $\sqrt{32}$ residuum quæsitum.

169. Eadem ratione, si ex radicali $\sqrt{3648}$ proponatur subducenda radicalis altera $\sqrt{324}$; reduco primum illas ad simpliciores suas expressiones. Et quia earum una fit $6\sqrt{3}$, altera $2\sqrt{3}$; residuum quæsitum erit $4\sqrt{3}$, sive $\sqrt{192}$. Atque ita quoque id, quod remanet, subtrahendo $\sqrt{9ab}$ ex $\sqrt{25ab}$, erit $2\sqrt{ab}$, sive $\sqrt{4ab}$. Pariterque erit

erit $c\sqrt{ab}$, sive $\sqrt{abc^2}$ id, quod relinquitur, subducendo $\sqrt{4abc^2}$ ex $\sqrt{9abc^2}$.

170. Quod si vero radicales, ad subtrahendum propositæ, reductæ ad simpliciores suos terminos, non habeant sub signo radicali eandem quantitatem; tunc fiet subtractio, adhibito signo —. Ita quantitates radicales $\sqrt{18}$, & $\sqrt{12}$, reductæ ad simpliciores suos terminos, fiunt $3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$. Unde erit, vel $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, vel etiam $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ id, quod relinquitur, subtrahendo $\sqrt{12}$ ex $\sqrt{18}$.

171. Sed contingit quandoque, ut, tametsi radicales, ad simpliciores suas expressiones revocatæ, eandem habeant quantitatem sub signo radicali; adhuc nihilominus subtractio fieri debeat, adhibito signo —: nimirum, si coefficientes sint litterales, lidemque diversis litteris sint notati. Ut, si velim ex $\sqrt{abc^2}$ subtrahere $\sqrt{a^2b}$, radicales istæ, reductæ ad simpliciores suos terminos, eandem continent sub signo radicali quantitatem; quum fiant $c\sqrt{ab}$, & $a\sqrt{ab}$. Sed, quia a ex c non aliter subtrahi potest, quam per signum —; erit residuum propositæ subductionis, vel $c\sqrt{ab} - a\sqrt{ab}$, vel paulo simplicius $(c - a)\sqrt{ab}$.

172. Fieri quoque potest subtractio radicalium simplicium, absque ulla reductione, hac alia methodo, quæ commodior erit, ubi quantitates sunt numericæ. Capiantur quantitates, sub signis radicalibus existentes, dividaturque major per minorem. Et siquidem contigerit, ex hac divisione talem oriri quotientem, ut elici exinde possit radix, quam radicale signum ostendit; eliciatur radix ista. Et, si eadem, unitate

Tom. I.

F

di.

diminuta, fiat coëfficiens radicalis minoris, habebitur residuum quæsitum.

173. Oporteat, exempli gratia, ex radicali $\sqrt{72}$ subducere radicalem aliam $\sqrt{8}$. Jam quantitates, sub signis existentes, sunt 72, & 8. Itaque dividatur major 72 per minorem 8. Quumque habeatur pro quotiente numerus 9; liquet, ex quotiente isto elici posse quadratam radicem, eamque esse 3. Minuatur ergo radix ista unitate, ut fiat 2; & erit $2\sqrt{8}$, sive $\sqrt{32}$ residuum propositæ subtractionis, prorsus ut
**art. 168. supra*.*

174. Oporteat similiter, ex radicali $\sqrt[3]{648}$ subducere radicalem aliam $\sqrt[3]{24}$. Quoniam quantitates, sub signis existentes, sunt 648, & 24; dividatur major 648 per minorem 24. Quumque pro quotiente habeatur numerus 27, qui est cubus perfectus; eliciatur exinde radix cubica 3. Et quia radix ista, unitate diminuta, est 2; erit $2\sqrt[3]{24}$, sive $\sqrt[3]{192}$ residuum subtractionis propositæ, omnino ut antea.
**art. 169. supra*.*

175. Quod si autem, divisa quantitate majore per minorem, non habeatur talis quotiens, ut elici exinde possit radix, quam radicale signum ostendit; tunc facienda est subtractio, adhibito signo $\dashv$. Ita, quia ex quotiente, qui oritur, dividendo 12 per 8, nimirum ex $12 : 8$, sive $3 : 2$, elici nequit quadrata radix; erit $\sqrt{12} \dashv \sqrt{8}$ id, quod remanet, subducendo $\sqrt{8}$ ex $\sqrt{12}$.

176. Cæterum, si ex quantitate rationali subducenda sit quantitas radicalis, vel etiam ex quantitate radicali subducenda sit quantitas rationalis; non aliter fiet subtractio, quam adhibito signo $\dashv$. Sic, ad subtrahendum $\sqrt{10}$ ex
 6, scri-

6, scribo $6 = \sqrt{10}$. Pariterque, ad subtrahendum 2 ex $\sqrt{312}$, scribo $\sqrt{312} - 2$. Neque aliter fiet, si subtrahi debeat, vel $\sqrt{ab}$ ex b , vel c ex $\sqrt{ab}$; quandoquidem residuum erit, vel $b - \sqrt{ab}$, vel $\sqrt{ab} - c$.

IV. *Multiplicatio radicalium simplicium.*

177. **U**T radicales simplices per se mutuo multiplicentur, nulla opus est earum ad simpliciores suas expressiones reductione; sed satis erit, quantitates, sub signis existentes, per se invicem multiplicare, & producto idem radicale signum præfigere. Ita, si radicalis $\sqrt{ab}$ multiplicanda sit per radicalem aliam $\sqrt{ac}$; multiplico primum ab per ac ; tum producto a^2bc præfigo idem signum radicale; & erit $\sqrt{a^2bc}$, sive etiam $a\sqrt{bc}$ productum quæsitum. Similiter productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per $\sqrt{10}$, erit $\sqrt{20}$, sive $2\sqrt{5}$. Atque ita quoque erit $\sqrt{50}$, sive $5\sqrt{2}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt{5}$ per $\sqrt{10}$.

178. Quod si radicales simplices, ad multiplicandum propositæ, suos habeant coefficientes; ii quoque per se mutuo multiplicandi sunt. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $3\sqrt{5}$ per $4\sqrt{10}$, erit $12\sqrt{50}$, sive $60\sqrt{2}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{ac}$, erit $6\sqrt{a^2bc}$, sive $6a\sqrt{bc}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{30}$ productum, quod gignitur, multiplicando $5\sqrt{6}$ per $\sqrt{5}$, seu $1\sqrt{5}$; & $a\sqrt{abcd}$ productum, quod nascitur, multiplicando $a\sqrt{ab}$ per $\sqrt{cd}$, seu $1\sqrt{cd}$.

179. Sed notandum hoc loco est, produ-

F 2

ctum,

Etum, quod oritur ex mutua duarum radicalium simplicium multiplicatione, non semper esse radicalem aliam; sed fieri quandoque posse, ut sit quantitas commensurabilis, ac rationalis: nimirum, si quantitates, sub signis existentes, per se mutuo multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici possit radix, quam radicale signum ostendit. Ita, multiplicando 18 per 2, producitur numerus 36, qui est quadratum perfectum, & ejus radix est 6. Unde, si radicalis $\sqrt{18}$ multiplicanda sit per radicalem aliam $\sqrt{2}$, productum erit quantitas rationalis 6.

180. Hinc si radicales, ad multiplicandum propositæ, suos habeant coefficientes; habebitur totale productum, multiplicando eam radicem per productum ex coefficientibus propositarum radicalium. Ita, si multiplicare oporteat $3\sqrt{8}$ per $5\sqrt{2}$; jam ex multiplicatione quantatum, sub signis existentium, oritur numerus 16, cujus quadrata radix est 4. Unde, multiplicando radicem istam 4, primo per coefficientem unius radicalis 3, deinde per coefficientem alterius 5; fiet 60 productum quæsitum.

181. Eadem ratione, si multiplicandæ essent per se mutuo radicales duæ $a\sqrt[3]{a^2b}$, & $c\sqrt[3]{ab^2}$; multiplico primum quantitates, sub signis existentes, a^2b , & ab^2 . Et quoniam id, quod hac multiplicatione producitur, est cubus perfectus, nimirum a^3b^3 ; extraho exinde radicem cubicam ab . Denique, multiplico radicem istam ab , primo per coefficientem unius radicalis a , deinde per coefficientem alterius c ; & erit a^2bc id, quod oritur, multiplicando $a\sqrt[3]{a^2b}$ per $c\sqrt[3]{ab^2}$.

182. Quo pacto quantitas radicalis simplex mul-

multiplicanda sit per quantitatem aliam rationalem ; jam superius * innuimus : nimirum scri- ^{*art.146.}
bendo primam post secundam, nullo signo inter-
jecto ; vel , quod idem est * , faciendo , ut se- ^{*art.148.}
cunda sit coëfficiens primæ . Hac ratione , ad
multiplicandum $\sqrt{ab}$ per c , scribo $c\sqrt{ab}$. Pari-
terque , ad multiplicandum $\sqrt[3]{a^2b}$ per a , scribo
 $a\sqrt[3]{a^2b}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{2}$ productum,
quod oritur , multiplicando $\sqrt{2}$ per 5 ; & $4\sqrt[3]{10}$
id, quod producitur , multiplicando $\sqrt[3]{10}$ per 4 .

183. Sed , si quantitas radicalis simplex,
quam oportet per quantitatem aliam rationalem
multiplicare , suum habeat coëfficientem ; tunc
multiplicandus est coëfficiens radicalis per quan-
titem rationalem . Quo pacto erit $ac\sqrt{ab}$ pro-
ductum , quod oritur , multiplicando $a\sqrt{ab}$ per
 c ; & $ab\sqrt[3]{ab^2}$ productum, quod gignitur, mul-
tiplicando $a\sqrt[3]{ab^2}$ per b . Atque ita quoque erit
 $20\sqrt{2}$ id, quod producitur , multiplicando $4\sqrt{2}$
per 5 ; & $12\sqrt[3]{4}$ id, quod nascitur , multipli-
cando $4\sqrt[3]{4}$ per 3 .

IV. Divisio radicalium simplicium.

184. **S**imiliter, ut radicales simplices per
se mutuo dividantur , haud qui-
dem opus est , eas ad simpliciores suas expressio-
nes revocare ; sed sufficiet , quantitates , sub si-
gnis existentes , per se invicem dividere , &
quotienti idem radicale signum præfigere . Ut,
si oporteat , $\sqrt{abcd}$ dividere per $\sqrt{ab}$; divido pri-
mum $abcd$ per ab , tum quotienti cd præfi-
go idem signum radicale ; & erit $\sqrt{cd}$ quo-
tiens quæsitus . Pariterque quotiens , qui ori-
tur,

F 3

tur, dividendo $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{2}$. Atque ita quoque erit $\sqrt{3a^2c}$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{3a^2b^2c^2}$, per $\sqrt{3b^2c}$; & $\sqrt{33}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{330}$ per $\sqrt{310}$.

185. Quod si radicales simplices, ad dividendum propositæ, suos habeant coefficientes; ii quoque per se mutuo sunt dividendi. Quia ratione, quotiens, qui oritur, dividendo $12\sqrt{50}$ per $4\sqrt{10}$, erit $3\sqrt{5}$. Pariterque quotiens, qui producitur, dividendo $6\sqrt{a^2bc}$ per $2\sqrt{ac}$, erit $3\sqrt{ab}$. Atque ita quoque erit $5\sqrt{6}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $5\sqrt{30}$ per $\sqrt{5}$, sive $1\sqrt{5}$; & $1\sqrt{cd}$, sive $\sqrt{cd}$ quotiens, qui nascitur, dividendo $a\sqrt{abcd}$ per $a\sqrt{ab}$.

186. Sed notandum hoc loco est, quotientem, qui oritur ex mutua duarum radicalium simplicium divisione, non semper esse radicalem aliam; sed fieri quandoque posse, ut sit quantitas commensurabilis, ac rationalis: nimirum, si quantitates, per se mutuo divisæ, producant quotientem, ex quo elici possit radix, quam radicale signum ostendit. Ita, dividendo 18 per 2, habetur pro quotiente numerus 9, qui est quadratum perfectum, & ejus radix est 3. Unde, si radicalis $\sqrt{18}$ dividenda sit per radicalem aliam $\sqrt{2}$, quotiens erit quantitas rationalis 3.

187. Hinc, si radicales, ad dividendum propositæ, suos habeant coefficientes; habebitur quotiens totius divisionis, multiplicando radicem illam per quotientem, qui oritur ex mutua coefficientium divisione. Ita, si dividere oporteat $12\sqrt{8}$ per $3\sqrt{2}$; divido primum per se mutuo quantitates, sub signis existentes, hoc est 8 per 2; jamque ex hac divisione oritur nu-
me-

merus 4, cujus quadrata radix est 2. Unde, quia dividendo coefficientem 12 per coefficientem alium 3, fit quotiens 4: proinde, multiplicato 2 per 4, erit 8 quotiens propositæ divisionis.

188. Eadem ratione, si dividenda esset radicalis $ab\sqrt[3]{bcd}$ per radicalem aliam $a\sqrt[3]{bcd}$; divido primum per se mutuo quantitates, sub signis existentes, hoc est bc^4d per bcd . Et quoniam quotiens hujus divisionis est cubus perfectus, nimirum c^3 ; extraho exinde radicem cubicam c ; eandemque multiplico per quotientem, qui oritur ex divisione coefficientium, hoc est, dividendo ab per a ; atque ita fiet bc quotiens propositæ divisionis.

189. Quod si divisio institui debeat inter quantitatem radicalem simplicem, & quantitatem aliam rationalem; elevanda est primo rationalis ad eam potestatem, quam ostendit radicale signum alterius; tum, præfixo ei eodem signo radicali, facienda est divisio, methodo * tradi-^{art. 184.} ta. Ut, si dividere velim $\sqrt{a^2bc}$ per a , prius elevato ad quadratum rationalem a ; tum quia a idem est, ac $\sqrt{a^2}$, fiet $\sqrt{bc}$ quotiens quæsitus. Pariterque si dividere oporteat $\sqrt[3]{a^2b^3c}$ per b , fiat cubus ex rationali b ; quumque b idem sit, ac $\sqrt[3]{b^3}$, dividatur postea $\sqrt[3]{a^2b^3c}$ per $\sqrt[3]{b^3}$; & erit $\sqrt[3]{a^2c}$ quotiens, qui quæritur.

190. Cæterum notatu hoc loco dignum existimo, quod si ex divisione quantitatum, sub signis existentium, orlatur fractio aliqua; tunc ei, parenthesi inclusæ, radicale signum præfigi debet. Ita, dividendo 10 per 7, oritur fractio $10:7$. Quare, si radicalem $\sqrt{10}$ dividere oporteat per radicalem aliam $\sqrt{7}$, quotiens erit $\sqrt{10:7}$.

7). Et similiter, dividendo a^2bc per ad , produ-
citur fractio $abc : d$. Unde, si radicalis $\sqrt{a^2bc}$
dividenda sit per radicalem aliam $\sqrt{ad}$, quotiens
fiet $\sqrt{(abc : d)}$.

191. Parenthesi autem includenda est fra-
ctio, quia radicale signum referri debet ad u-
tramque fractionis partem, hoc est, tam ad nu-
meratorem, quam ad denominatorem. Unde, si
ex aliqua ejusdem fractionis parte erui possit ra-
dix, a radicali signo denominata; tum extraha-
*art. 142. tur radix illa, & radicale signum, ut superius *
diximus, dumtaxat parti alteri adscribatur. Ita
quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{a^4b}$ per $\sqrt{abcd}$
est $\sqrt{(a^4 : cd)}$. Sed quia ex a^4 extrahi potest
quadrata radix, quæ est a^2 ; idem quotiens sim-
plicius exprimetur in hunc modum $a^2 : \sqrt{cd}$.

192. Si ex divisione coefficientium similiter
fractio oriatur, ea quoque parenthesi, vitandæ
confusionis ergo, oportet includatur. Sic, di-
videndo radicalem $a^2\sqrt{bc}$ per radicalem aliam
 $c\sqrt{ad}$, quotiens erit $(a^2 : c) \sqrt{(bc : ad)}$, hoc est
productum ex $a^2 : c$ per $\sqrt{(bc : ad)}$. Sed in isto
casu expressiones simpliciores evadent, si coeffi-
cientes intra signa collocentur. Nam in propo-
sito exemplo, quum $a^2\sqrt{bc}$ idem sit, ac $\sqrt{a^4bc}$, &
 $c\sqrt{ad}$ perinde valeat, ac $\sqrt{a^2cd}$; dividi poterit
 $\sqrt{a^4bc}$ per $\sqrt{a^2cd}$: quo pacto fiet quotiens
 $\sqrt{(a^2b : cd)}$.

VI. Radicalium simplicium ad potestates elevativ.

193. **Q**uemadmodum nulla est opus re-
ductione, quum radicales sim-
pli-

plices multiplicandæ sunt, aut dividendæ per se mutuo; ita neque etiam ulla requiritur reductio, ubi eadem radicales simplices ad datam quamcumque potestatem sunt elevandæ. Nam satis erit, evehere ad eam potestatem quantitates ipsas, sub signis existentes, iisque idem radicale signum præfigere. Qua ratione quadratum ex $\sqrt[3]{abc}$ erit $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$; & cubus ex $\sqrt[3]{ab}$ erit $\sqrt[3]{a^3b^3}$, sive etiam $ab\sqrt[3]{ab}$. Pariterque quadratum ex $\sqrt[3]{5}$ erit $\sqrt[3]{25}$; & cubus ex $\sqrt[3]{3}$ erit $\sqrt[3]{27}$, sive etiam $3\sqrt[3]{3}$.

194. Quod si radicales simplices, quæ ad datam quamcumque potestatem attolli debent, suos habeant coefficientes; necesse est, eos quoque ad datam illam potestatem evehere, qui tamen, subinde ad eam potestatem elati, adhuc extra signum remanebunt. Qua ratione quadratum ex $a\sqrt[3]{abc}$ erit $a^2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$; & cubus ex $a\sqrt[3]{ab}$ erit $a^3\sqrt[3]{a^3b^3}$, sive etiam $a^3b\sqrt[3]{ab}$. Atque ita quoque, si radicalis hujus $3\sqrt[3]{5}$ quærat quadratum, illud erit $9\sqrt[3]{25}$; quod si vero alterius hujus radicalis $2\sqrt[3]{3}$ quærat cubus, is erit $8\sqrt[3]{27}$, sive $24\sqrt[3]{3}$.

195. Sed hoc loco illud etiam notare oportet, potestatem, ad quam attollitur, simplex aliqua radicalis, non esse semper quantitatem aliam radicalem; sed fieri quandoque posse, ut sit commensurabilis, ac rationalis: nimirum, si ex quæsita potestate quantitatis, sub signo existentis, extrahi possit radix, quam radicale signum ostendit. Ita, quadrato-quadratum ex ab est a^4b^4 , cujus quadrata radix est a^2b^2 . Unde, si radicalis $\sqrt[3]{ab}$ ad quadrato-quadratum, seu quartam potestatem sit elevanda; habebitur rationalis a^2b^2 .

196. Patet autem, id semper fieri posse; quum radicalis proposita elevanda est ad potestatem, cujus index, vel idem est cum indice signi radicalis, vel etiam est multiplex ejusdem. Et perspicuum est quoque, quod, sicuti in priore casu quæsita potestas est ipsa quantitas, sub signo existens: adeo ut, ad eam habendam, satis sit, delere ex quantitate signum radicale; ita in secundo casu habebitur quæsita potestas, si, deleta ex quantitate signo radicali, elevetur eadem ad potestatem, cujus index denotat, quotiens index potestatis, de qua agitur, continet indicem signi radicalis.

197. Hac igitur ratione quadratum ex $\sqrt{ab}$ erit ab , & cubus ex $\sqrt[3]{abc}$ erit abc . Sed, si radicalis $\sqrt{ab}$ elevanda sit ad sextam potestatem, ea erit a^3b^3 ; nam index quæsitæ potestatis ter continet indicem signi radicalis; & cubus ex ab est a^3b^3 . Atque ita quoque sexta potestas alterius radicalis $\sqrt[3]{abc}$ erit $a^2b^2c^2$; quandoquidem index signi radicalis bis continetur in indice quæsitæ potestatis; & quadratum ex abc est $a^2b^2c^2$. Unde etiam octava potestas radicalis $\sqrt[4]{2}$ erit 16; & nona potestas radicalis $\sqrt[3]{2}$ erit 8.

198. Id quum ita sit, si radicalis proposita suum habeat coefficientem, & quæsita potestas ipsius radicalis prodeat commensurabilis, ac rationalis; multiplicanda erit ea per consimilem potestatem sui coefficientis. Ita, si oporteat ad quadrato-quadratum attollere radicalem $a\sqrt{ab}$, erit rationalis a^2b^2 quadrato-quadratum ex sola radicali $\sqrt{ab}$. Quare, facto quadrato-quadrato a^4 coefficientis a , multiplicatoque a^2b^2 per a^4 , erit a^6b^2 quadrato-quadratum quæsitum.

199. Eadem ratione erit $a^8b^2c^2$ sexta potestas ipsius $a\sqrt[3]{abc}$. Nam, sexta potestas illius radicalis $\sqrt[3]{abc}$ est $a^2b^2c^2$. Unde, sumpta quoque sexta potestate a^6 coefficientis a , multiplicatoque $a^2b^2c^2$ per a^6 ; fiet $a^8b^2c^2$ sexta potestas totius quantitatis $a\sqrt[3]{abc}$. Atque ita quoque si radicalis hujus $2\sqrt[3]{3}$ quærat quadrato-quadratum, illud erit 144; quod si vero alterius hujus radicalis $2\sqrt[3]{2}$ quærat cubo-cubus, is erit 256.

VII. Extractio radicum ex radicalibus simplicibus.

200. **A**D extrahendas radices ex radicalibus simplicibus, neque etiam necesse est, ad simpliciores suos terminos eas revocare; sed sufficiet, illas extrahere ex quantitatibus, sub signis existentibus, iisque eadem radicalia signa præfigere. Ita, si oporteat, quadratam radicem extrahere ex $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$; eliciatur ea ex quantitate $a^2b^2c^2$, sub signo existente; tum illi, quæ est abc , præfigatur idem signum radicale; & erit $\sqrt[3]{abc}$ radix quadrata quæsitæ.

201. Sed si quantitas radicalis, ex qua radix extrahi debet, suum habeat coefficientem; necesse est, ex eo quoque suam radicem extrahere, quæ tamen adhuc extra signum remanebit. Quæ ratione quadrata radix radicalis $aa\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$ erit $a\sqrt[3]{abc}$; & radix cubica alterius hujus radicalis $b^3\sqrt[3]{a^2c^2}$ erit $b\sqrt[3]{ac}$. Atque ita quoque, si radicalis hujus $9\sqrt[3]{16}$ quærat quadrata radix, ea erit $3\sqrt[3]{4}$; sed, si ex altera ista radicali $8\sqrt[3]{27}$ radicem cubicam oporteat extrahere, habebitur pro ea $2\sqrt[3]{3}$.

202.

202. Quod si contingat, ut ex quantitate, sub signo existente, extrahi nequeat radix, de qua agitur; tunc satis erit, exponentem signi radicalis multiplicare per exponentem quæsitæ radicis. Ita, si extrahenda sit radix quadrata ex $\sqrt[3]{10}$, liquet abunde, quadratam radicem non posse elici ex quantitate 10, sub signo existente. Quare, multiplicato exponente sui signi radicalis 3 per exponentem quæsitæ radicis 2; fiet $\sqrt[6]{10}$ radix quadrata quæsitæ.

203. Eadem ratione ex numero 6 elici nequit radix cubica. Unde, si oportebit, ex $\sqrt[6]{6}$ extrahere radicem cubicam; multiplico exponentem sui signi radicalis 2 per exponentem quæsitæ radicis 3; & erit $\sqrt[6]{6}$ radix cubica quæsitæ. Atque ita quoque, si quæratür quarta radix radicalis $\sqrt[3]{3}$, ea erit $\sqrt[8]{3}$; & si ex altera ista radicali $\sqrt[3]{6}$ oporteat radicem quintam extrahere, habebitur pro ea $\sqrt[15]{6}$.

204. Si radicalis suum habeat coefficientem, & ex eo extrahi nequeat radix, de qua agitur; tunc, reposito coefficiente sub signo radicali, extrahatur quæsitæ radix, methodo mox * tradita. Ita, si quæratür quadrata radix radicalis $2\sqrt[3]{5}$, perspicuum est, eam ex ejus coefficiente 2 extrahi non posse. Collocetur ergo coefficientis ille sub signo radicali. Et, quia loco propositæ radicalis $2\sqrt[3]{5}$ habetur hæc alia $\sqrt[3]{40}$; fiet $\sqrt[6]{40}$ radix cubica quæsitæ.

205. Cæterum, quæcumque radix extrahenda proponatur ex quantitate aliqua radicali; ea semper erit quantitas altera radicalis, nec unquam esse poterit commensurabilis, ac rationalis. Nec obscura est hujus rei ratio. Nam radix illa,

illa, cuncta rursus ad eandem potestatem, restituere nobis debet eam radicalem, unde eruta fuit. Profecto autem quælibet potestas quantitatis alicujus rationalis prodit similiter rationalis, nec unquam radicalem aliquam potest nobis exhibere.

CAPUT II.

Calculus radicalium compositarum.

206. **Q**uantitates radicales compositas, diximus * esse illas, quæ con- * art. 150

stant ex duobus, aut pluribus terminis, quorum vel omnes, vel aliqui saltem radicali signo sunt affecti; ut $\sqrt{5} + \sqrt{6}$, vel etiam $5 + \sqrt{32}$ — $\sqrt{35}$. Unde, sicuti rationales compositæ oriuntur ex additione, vel subtractione rationalium simplicium; ita quoque radicales compositæ ex radicalibus simplicibus, simul additis, vel a se invicem subductis, suam originem trahunt.

207. Si divisionem, & radicem extractionem excipias, nihil habet peculiare calculus radicalium compositarum. De eo autem acturi, illud etiam libenter assumemus, ut quantitates, in quibus operationes instituendæ sunt, ex ejusdem speciei radicalibus constent. Unde, si quantitates offerantur, quæ radicales contineant diversæ speciei, methodo superius * tradita, mutandæ sunt prius in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem, * art. 154. 155.

I. Ad-

I. *Additio radicalium compositarum.*

208.

Additio radicalium compositarum sic commode potest institui. Pri-

**Art. 151.* mo reducantur * singulæ cujusq; quantitatis ad-
152. dendæ partes ad simplices suas expressiones.

Deinde jungantur simul iisdem omnino signis, quibus reperiuntur affectæ: considerando, ut affectam signo +, partem illam, quæ nullo afficitur signo. Ac demum, si plures occurrant partes, eandem sub signo radicali quantitatem

**Art. 145.* habentes, contrahantur in unum, habita * signorum, quibus afficiuntur, ratione.

209. Ita, si quantitas $\sqrt{27ac} + \sqrt{50bc}$ addenda sit quantitati $\sqrt{12ac} - \sqrt{8bc}$, summa erit $\sqrt{75ac} + \sqrt{18bc}$. Nam, si singulæ cujusque quantitatis partes ad simplices suos terminos reducantur, prior quidem fiet $3\sqrt{3ac} + 5\sqrt{2bc}$, secunda vero evadet $2\sqrt{3ac} - 2\sqrt{2bc}$. Quare, connectendo iisdem signis partes utriusq; quantitatis, summa erit $3\sqrt{3ac} + 5\sqrt{2bc} + 2\sqrt{3ac} - 2\sqrt{2bc}$. Jam vero $3\sqrt{3ac} + 2\sqrt{3ac}$ idem est, ac $5\sqrt{3ac}$; & $5\sqrt{2bc} - 2\sqrt{2bc}$ perinde valet, ac $+ 3\sqrt{2bc}$. Itaque eadem summa erit simplicius $5\sqrt{3ac} + 3\sqrt{2bc}$, hoc est $\sqrt{75ac} + \sqrt{18bc}$.

210. Eadem ratione summa, quæ oritur ex additione quantitatum $\sqrt{20ab} - \sqrt{18cd}$, & $\sqrt{45ab} - \sqrt{32cd}$, erit $\sqrt{125ab} - \sqrt{98cd}$. Nam, si ad simplices suas expressiones reducantur singulæ partes, tam primæ, quam secundæ quantitatis; una fiet $2\sqrt{5ab} - 3\sqrt{2cd}$, & altera $3\sqrt{5ab} - 4\sqrt{2cd}$. Quare, si retentis iisdem signis simul jungantur, summa erit $2\sqrt{5ab} - 3\sqrt{2cd}$.

$3\sqrt{2cd} + 3\sqrt{5ab} \rightarrow 4\sqrt{2cd}$. Est autem $2\sqrt{5ab} + 3\sqrt{5ab}$ idem, ac $5\sqrt{5ab}$; estque etiam $\rightarrow 3\sqrt{2cd} \rightarrow 4\sqrt{2cd}$ idem, ac $\rightarrow 7\sqrt{2cd}$. Itaque eadem summa erit simplicius $5\sqrt{5ab} \rightarrow 7\sqrt{2cd}$, hoc est $\sqrt{125ab} \rightarrow \sqrt{98cd}$.

211. Quod si inter partes radicales aliæ existant commensurabiles, ac rationales; æ pariter propriis suis signis simul cum aliis sunt jungendæ; sed, quia cum radicalibus contrahi non possunt, satis erit, quum fieri potest, inter se mutuo illas contrahere. Qua ratione, si quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} \rightarrow 3c$ addatur alteri quantitati $3a \rightarrow 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} + 8c$, summa erit $5a \rightarrow 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} + 5c$. Et similiter, si quantitas $7\sqrt{2ac} \rightarrow 5\sqrt{3bc} \rightarrow 2c$ addenda proponatur alteri quantitati $2\sqrt{3bc} \rightarrow 4\sqrt{2ac} + 8c$, summa fiet $3\sqrt{2ac} \rightarrow 3\sqrt{3bc} + 6c$.

II. Subtractio radicalium compositarum.

212. Similiter subtractio radicalium compositarum in hunc modum commode peragi poterit. Primo reducantur singulæ cujusque quantitatis partes * ad simpliciores suas expressiones. Deinde jungantur simul, mutatis signis partibus omnibus quantitatis subtrahendæ, & considerata, ut affecta signo +, parte illa, quæ nullo afficitur signo. Ac denique, si facta hac conjunctione, plures occurrant partes, eandem sub signo radicali quantitatem habentes, contrahantur in unum, habita * signorum, quibus afficiuntur ratione.

213. Hoc pacto, si ex quantitate $\sqrt{75ac} + \sqrt{18ab}$, subtrahenda sit quantitas alia $\sqrt{12ac} \rightarrow \sqrt{8ab}$

*art. 151.
152.

*art. 145.

$\sqrt{8ab}$, residuum erit $\sqrt{27ac} + \sqrt{50ab}$. Nam, si singulæ cujusque quantitatis partes ad simpliciores suos terminos reducantur, prima quidem fiet $5\sqrt{3ac} + 3\sqrt{2ab}$, secunda vero evadet $2\sqrt{3ac} - 2\sqrt{2ab}$. Quare, si mutatis signis partibus subducendæ quantitatis, simul conjungantur, residuum erit $5\sqrt{3ac} + 3\sqrt{2ab} - 2\sqrt{3ac} + 2\sqrt{2ab}$. Jam vero $5\sqrt{3ac} - 2\sqrt{3ac}$ idem est, ac $3\sqrt{3ac}$; & $3\sqrt{2ab} + 2\sqrt{2ab}$ perinde valet, ac $5\sqrt{2ab}$. Itaque idem residuum erit simplicius $3\sqrt{3ac} + 5\sqrt{2ab}$, hoc est $\sqrt{27ac} + \sqrt{50ab}$.

213. Eadem ratione residuum, quod oritur, subtrahendo quantitatem $\sqrt{20ac} - \sqrt{18cd}$ ex quantitate alia $\sqrt{125ac} - \sqrt{98cd}$, erit $\sqrt{45ac} - \sqrt{32cd}$. Nam, si ad simpliciores suas expressiones reducantur singulæ partes, tam primæ, quam secundæ quantitatis; una fiet $2\sqrt{5ac} - 3\sqrt{2cd}$, & altera $5\sqrt{5ac} - 7\sqrt{2cd}$. Quare, si mutatis signis partibus quantitatis subtrahendæ, simul conjungantur, residuum erit $5\sqrt{5ac} - 7\sqrt{2cd} - 2\sqrt{5ac} + 3\sqrt{2cd}$. Est autem $5\sqrt{5ac} - 2\sqrt{5ac}$ idem, ac $3\sqrt{5ac}$; estque etiam $-7\sqrt{2cd} + 3\sqrt{2cd}$ idem ac $-4\sqrt{2cd}$. Itaque idem residuum erit simplicius $3\sqrt{5ac} - 4\sqrt{2cd}$, hoc est $\sqrt{45ac} - \sqrt{32cd}$.

214. Quod si inter partes radicales quantitatis subtrahendæ aliæ existant commensurabiles, ac rationales; eæ pariter, mutatis signis, adjungendæ sunt partibus quantitatis, ex qua subtractio fieri debet; sed quia cum radicalibus illius contrahi non possunt, satis erit, eas contrahere cum aliis rationalibus, si quæ sint, in altera illa quantitate. Qua ratione, quantitas $20 + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} - 5c$, subtracta ex quanti-

ta.

tate $5a \rightarrow 6\sqrt{bc} + 7\sqrt{ac} + 9c$, dabit pro residuo $3a \rightarrow 9\sqrt{bc} + 3\sqrt{ac} + 14c$. Atque ita quodque erit $7\sqrt{2ac} \rightarrow 2\sqrt{3ab} \rightarrow 5c$ id, quod remanet, subtrahendo quantitatem $5\sqrt{3ab} \rightarrow 4\sqrt{2ac} + 8c$ ex quantitate altera $3\sqrt{2ac} + 3\sqrt{3ab} + 3c$.

III. Multiplicatio radicalium compositarum.

215. **R** Adicales compositæ multiplican-

tur per se mutuo eadem plane ratione, qua fit multiplicatio rationalium compositarum; nimirum, multiplicando singulas partes unius per singulas partes alterius; & scribendo producta partialia signo +, aut $\rightarrow$, pro ut radicales, quæ multiplicantur ad invicem, iidem, aut contrariis signis afficiuntur.

216. Hac ratione, si quantitas $\sqrt{10} \rightarrow \sqrt{3}$ multiplicanda sit per quantitatem aliam $\sqrt{5} \rightarrow \sqrt{2}$; multiplico primum $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, & erit $\sqrt{50}$ multiplicationis hujus productum; deinde multiplico $\rightarrow \sqrt{3}$ per $\sqrt{5}$, & orietur exinde productum $\rightarrow \sqrt{15}$; ad hæc multiplico $\sqrt{10}$ per $\rightarrow \sqrt{2}$, & productum fiet $\rightarrow \sqrt{20}$; deniq; multiplico $\rightarrow \sqrt{3}$ per $\rightarrow \sqrt{2}$, & erit $+\sqrt{6}$ id, quod ex hac multiplicatione producitur. Unde, additis in unum omnibus hisce productis, fiet $\sqrt{50} \rightarrow \sqrt{15} \rightarrow \sqrt{20} + \sqrt{6}$ totius multiplicationis productum.

217. Eadem methodo instituenda est etiam multiplicatio, ubi inter partes radicales aliæ existunt commensurabiles, ac rationales. Ut, si velim multiplicare $a + \sqrt{ab}$ per $c \rightarrow \sqrt{ac}$; multiplico primum a per c , deinde $+\sqrt{ab}$ per c , postea a per $\rightarrow \sqrt{ac}$, ac demum $+\sqrt{ab}$ per $\rightarrow \sqrt{ac}$; & fiet hac ratione productum totius multiplicatio-

Tom. I.

G

nis

nis $ac + c\sqrt{ab} \rightarrow a\sqrt{ac} \rightarrow a\sqrt{bc}$. Atque ita quæque erit $15 + 5\sqrt{8} \rightarrow 3\sqrt{3} \rightarrow \sqrt{24}$ productum, quod oritur, multiplicando $3 + \sqrt{8}$ per $5 \rightarrow \sqrt{3}$.

218. In multiplicatione radicalium compositarum accidit sæpe sæpius, ut nonnulla ex productis partialibus simul contrahi possint. Itaque, ut facilius cognoscere liceat, quæ sint hujusmodi producta, quæ peracta multiplicatione contrahi queunt; præstat, ante multiplicationem, ad simplices suas expressiones revocare
Art. 151. * partes omnes quantitatum, quæ per se mutuo
 152. debent multiplicari.

219. Ita, si multiplicari debeat $\sqrt{72} \rightarrow \sqrt{45}$ per $\sqrt{60} \rightarrow \sqrt{24}$, productum erit $\sqrt{4320} \rightarrow \sqrt{2700} \rightarrow \sqrt{1728} + \sqrt{1080}$, in quo non ita facile apparet, num partes ejus simul contrahi possint. Sed, facta reductione, quia earum quantitatum una sit $6\sqrt{2} \rightarrow 3\sqrt{5}$, & altera $2\sqrt{15} \rightarrow 2\sqrt{6}$; erit idem productum $12\sqrt{30} \rightarrow 6\sqrt{75} \rightarrow 12\sqrt{12} + 6\sqrt{30}$: in quo, non modo ultro liquet, $12\sqrt{30} + 6\sqrt{30}$ idem esse, ac $18\sqrt{30}$; sed facile etiam percipitur, contrahi simul pariter posse $\rightarrow 6\sqrt{75} \rightarrow 12\sqrt{12}$, quum si ulterius reducantur, fiant $\rightarrow 30\sqrt{3} \rightarrow 24\sqrt{3}$, quæ perinde valent, ac $\rightarrow 54\sqrt{3}$.

220. Præstat etiam, ante multiplicationem, partes cujusque radicalis ad simplices suos terminos reducere, ut facilius cognosci possit, quæ producta oriantur rationalia, quæve non item. Ita, multiplicando $\sqrt{180}$ per $\sqrt{125}$, non aliter cognosci potest, num productum, inde ortum, $\sqrt{22500}$ sit rationale, nec ne, quam extrahendo radicem quadratam ex 22500; sed, instituta reductione ante multiplicationem, quia

ea-

earum radicalium una fit $6\sqrt{5}$, altera $5\sqrt{5}$; clare liquet productum, quod oritur ex earum multiplicatione, esse 150, atque adeo rationale.

IV. *Radicalium compositarum ad potestates elevatio.*

221. Similiter radicales compositæ elevantur ad quamcumque datam potestatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur compositæ rationales; nimirum, constituendo ex partibus propositæ quantitatis terminos omnes, qui adesse debent in potestate quantitatis bimembris; & considerando quoque, velut unam, partes omnes priores, ubi oblata quantitas ex pluribus, quam duabus partibus, constat.

222. Hac ratione, si radicalis composita, ad quadratum elevanda, sit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, quæ duabus ex partibus constat; primo fiat quadratum ex $\sqrt{ab}$, quod erit ab ; deinde sumatur duplum ejus, quod producit, multiplicando $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{ac}$, nimirum $2\sqrt{a^2bc}$, sive etiam $2a\sqrt{bc}$; denique fiat quadratum ac ex parte altera $\sqrt{ac}$. Et, additis in unum omnibus hisce quantitativis, fiet $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$ quadratum propositæ quantitatis.

223. Sed, si ad quadratum sit elevanda quantitas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, quæ tribus ex partibus constat; primo fiat quadratum ex duabus primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, velut una consideratis, quod erit $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$; tum capiatur duplum ejus, quod producit, multiplicando eandem primas partes $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ per partem ter-

G 2 tem

tem tertiam $\sqrt{ad}$, nimirum $2a\sqrt{bd} + 2a\sqrt{cd}$; denique fiat quadratum ad ex parte tertia $\sqrt{ad}$. Et, additis simul his omnibus quantitatis, erit $ab + 2a\sqrt{bc} + ac + 2a\sqrt{bd} + 2a\sqrt{cd} + ad$ propositæ quantitatis quadratum.

224. Eadem ratione, si radicalis composita, ad cubum elevanda, sit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, quæ constat ex duabus tantummodo partibus; primo fiat cubus ex $\sqrt{ab}$, qui erit $\sqrt{a^3b^3}$, sive $ab\sqrt{ab}$; tum sumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando ab , quadratum primæ partis $\sqrt{ab}$, per partem alteram $\sqrt{ac}$, nimirum $3ab\sqrt{ac}$; porro capiatur triplum ejus, quod producit, multiplicando ac , quadratum secundæ partis $\sqrt{ac}$, per partem primam $\sqrt{ab}$, scilicet $3ac\sqrt{ab}$; denique fiat cubus $ac\sqrt{ac}$ ex parte altera $\sqrt{ac}$. Et, additis in unum omnibus hisce quantitatis, erit $ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$ cubus propositæ quantitatis.

225. Sed, si ad cubum sit elevanda quantitas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$, quæ tres partes complectitur; primo fiat cubus ex duabus primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, velut una consideratis, qui erit $ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$; deinde capiatur triplum ejus, quod nascitur, multiplicando $ab + 2a\sqrt{bc} + ac$, quadratum ex istis primis partibus $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, per partem tertiam $\sqrt{ad}$, nimirum $3ab\sqrt{ad} + 6a\sqrt{abcd} + 3ac\sqrt{ad}$; postea sumatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando ad , quadratum partis tertiæ $\sqrt{ad}$, per priores duas $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$; scilicet $3ad\sqrt{ab} + 3ad\sqrt{ac}$; denique fiat cubus $ad\sqrt{ad}$ ex parte tertia $\sqrt{ad}$. Et, si omnes istæ quantitates simul addantur, prodibit cubus propositæ quantitatis
 $ab\sqrt{ab}$

$ab\sqrt{ab} + 3ab\sqrt{ac} + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac} + 3ab\sqrt{ad} + 6a\sqrt{abcd} + 3ac\sqrt{ad} + 3ad\sqrt{ab} + 3ad\sqrt{ac} + ad\sqrt{ad}$.

226. Eadem autem est operandi ratio, si signa radicalia fuerint cubica, aut alterius cujuscumque speciei. Ita quadratum ex $\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c}$ erit $a\sqrt[3]{ab^2} + 2a\sqrt[3]{abc} + a\sqrt[3]{ac^2}$; & cubus ejusdem quantitatis erit $a^2b + 3a^2\sqrt[3]{b^2c} + 3a^2\sqrt[3]{bc^2} + a^2c$. Nec dissimiliter operabitur, si inter partes radicales aliqua extiterit commensurabilis, ac rationalis. Qua ratione quadratum ex $a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $a^2 + 2a\sqrt{ab} + ab + 2a\sqrt{ac} + 2a\sqrt{bc} + ac$; & cubus ex eadem quantitate erit $a^3 + 3a^2\sqrt{ab} + 3a^2b + ab\sqrt{ab} + 3a^2\sqrt{ac} + 6a^2\sqrt{bc} + 3ab\sqrt{ac} + 3a^2c + 3ac\sqrt{ab} + ac\sqrt{ac}$.

V. Preparatio ad divisionem radicalium compositarum.

227. **U**T divisio radicalium compositarum commodè peragi possit, tradenda prius est methodus, qua inveniri queat quantitas contraria cujuscumque datæ radicalis. Vocant autem Algebraistæ datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ ejusmodi est, ut si per eam multiplicetur data quantitas radicalis, id, quod producitur, sit quantitas alia commensurabilis, ac rationalis.

228. Ita quantitatis radicalis $\sqrt[3]{a^2b}$ erit $\sqrt[3]{ab^2}$ quantitas contraria; nam, si duæ istæ quantitates multiplicentur per se mutuo, prodibit quantitas rationalis ab . Et similiter quantitatis radicalis $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$ quan-

quantitas contraria; quandoquidem id, quod producit ex mutua istarum quantitatum multiplicatione, est $ab \rightarrow ac$, quam liquet esse quantitatem commensurabilem, ac rationalem.

229. Jam, si quantitas radicalis est simplex, facile erit, ejus contrariam quantitatem invenire. Elevetur enim ipsa radicalis data ad potestatem, uno gradu minorem ea, quam index signi radicalis ostendit. Et si, reducta potestate illa ad
 *art. 151. 152. simpliciore suam expressionem, deleatur ex ea coefficientis, velut jam rationalis; id, quod supererit, erit quantitas contraria quæsitæ.

230. Hac ratione, si data quantitas radicalis sit $\sqrt[3]{a^2b}$; ob indicem signi radicalis 3, elevanda est ipsa quantitas ad quadratum, quod erit $\sqrt[3]{a^4b^2}$, sive etiam $a\sqrt[3]{ab^2}$: proindeque, deleta coefficiente a , fiet $\sqrt[3]{ab^2}$ ejus quantitas contraria. Similiter, si radicalis data sit $\sqrt[5]{a^4b}$; ob indicem signi radicalis 5, attollenda est ea ad quadrato-quadratum, quod erit $\sqrt[5]{a^{16}b^4}$, sive etiam $a^3\sqrt[5]{ab^4}$: quare, deleta coefficiente a^3 , habebitur $\sqrt[5]{ab^4}$ pro eius quantitate contraria.

231. Quod si autem data radicalis sit composita, ejusque duæ sint partes, invenietur ipsius quantitas contraria hac methodo. Mutetur signum uni ejus parti, ita ut ex $+$ fiat $-$, vel etiam ex $-$ evadat $+$. Tum, facta mutatione ista, elevetur quantitas tota ad potestatem, uno gradu minorem ea, quam index signi radicalis ostendit. Deleantur denique ex terminis hujus potestatis coefficientes, hoc est numeri designantes, quoties in potestate sumi debent termini illi; & erit id, quod relinquitur, quantitas contraria quæsitæ.

232. Hac ratione, si quantitas radicalis data sit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit ejus contraria quantitas $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$. Nam, quum index signi radicalis sit 2, elevanda est quantitas $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$ ad potestatem, cujus index sit 1: proindeque quantitas contraria quaesita erit ipsamet quantitas $\sqrt{ab} - \sqrt{ac}$. Sed, si data quantitas radicalis sit $\sqrt[3]{aba} + \sqrt[3]{abd}$, erit ejus contraria quantitas $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - \sqrt[3]{a^2b^2cd} + \sqrt[3]{a^2b^2d^2}$. Est enim index signi radicalis 3; adeoque elevanda est quantitas $\sqrt[3]{abc} - \sqrt[3]{abd}$ ad potestatem, cujus index sit 2, nimirum ad quadratum: & propterea, deletis coefficientibus ex terminis ejus quadrati, fiet $\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - \sqrt[3]{a^2b^2cd} + \sqrt[3]{a^2b^2d^2}$ quantitas contraria quaesita.

233. Nunc obscura est hujus regulæ ratio, si consideremus, quod sicuti, multiplicato $a + b$ per $a - b$, producitur $a^2 - b^2$; sic, multiplicato $a + b$ per $a^2 - ab + b^2$, productum oriatur $a^3 + b^3$; & multiplicato $a + b$ per $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, productum fiet $a^4 - b^4$; atque ita deinceps. Hinc enim clare liquet, quod si $a + b$ referat radicalem, cujus duæ sunt partes, ejus contraria quantitas esse debet $a - b$, quum index signi radicalis est 2; $a^2 - ab + b^2$, quum ille index est 3; $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, quum idem index est 4; atque ita de aliis. Nam, instituta unius quantitatis per aliam multiplicatione, habebuntur in producto ipsarum a , & b ex tantummodo potestates, quas index signi radicalis ostendit.

234. Eadem autem est operandi ratio, si una ex duabus partibus propositæ radicalis sic commensurabilis, ac rationalis. Semper enim

producta alia, contrarietate signorum, sese mutuo destruent, & dumtaxat remanebunt ipsarum partium potestates illæ, quas index signi partis radicalis offendit. Qua ratione, si quantitas radicalis data sit $a + \sqrt{bc}$, & quæretur ejus quantitas contraria, erit illa $a - \sqrt{bc}$. Et similiter, si data quantitas radicalis sit $a + \sqrt[3]{abc}$, erit ejus contraria quantitas $a^2 - a\sqrt[3]{abc} + \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

235. Quod, si quantitas radicalis plures habeat partes, quam duas, paulo difficilior erit contrariæ quantitatis inventio. Sed, quemadmodum in resolutione problematum non ita frequens est usus talium quantitatum contrariarum; ita, si iis quandoque opus sit, poterunt facillime per analysim ipsam inveniri. Dabimus interim hic duas regulas speciales, analysis ope detectas, pro radicalibus trium partium; unam, quum index signi radicalis est 2; alteram, quum idem index est 3.

236. Itaque pro iis radicalibus, quæ tres habent partes, & in quibus signa radicalia sunt quadrata, inveniri poterunt hac arte quantitates contrariæ. Sit $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$ quantitas proposita. Mutetur signum uni ejus parti, puta $\sqrt{ad}$, ita ut fiat $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$; tum multiplicetur $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad}$ per $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$. Et quoniam ex hac multiplicatione producit quantitas $ab + ac - ad + 2a\sqrt{bc}$, in qua una pars est radicalis; considerari hæc poterit, velut radicalis, duabus partibus constans; adeoque, si rursus multiplicetur per suam contrariam $ab + ac - ad - 2a\sqrt{bc}$, orietur tandem quantitas omnino rationalis $a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 - 2a^2bd - 2a^2cd + a^2d^2$. Unde, quia quantitas

titas proposita evadit rationalis, multiplicando eam primo per $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$, & deinde per $ab + ac - ad - 2a\sqrt{ab}$, erit ejus quantitas contraria productum ex $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} - \sqrt{ad}$ in $ab + ac - ad - 2a\sqrt{bc}$.

237. Pro iis autem radicalibus, quæ habent quidem tres partes, sed index signi radicalis est 3, adhiberi poterit hæc regula. Sit $\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{a^2c} - \sqrt[3]{a^2d}$ quantitas proposita. Sumantur, tum quadrata partium omnium, cum producta ex singulis binis; illa quidem propriis suis signis, hæc signis omnino mutatis. Et, additis omnibus in unum, per summam $a\sqrt[3]{ab^2} + a\sqrt[3]{ac^2} + a\sqrt[3]{ad^2} - a\sqrt[3]{abc} + a\sqrt[3]{abd} + a\sqrt[3]{acd}$ multiplicetur quantitas proposita. Et quoniam ex hac multiplicatione producit quantitas $a^2b + a^2c - a^2d + 3a^2\sqrt[3]{bcd}$, in qua una tantum pars est radicalis; considerari hæc poterit, velut radicalis, duabus partibus constans. Quocirca, si per ejus contrariam quantitatem multiplicetur summa illa, habebitur quantitas contraria quæsitæ.

VI. Divisio radicalium compositarum.

238. **R** Adicales compositæ interdum dividi possunt per se mutuo eadem omnino ratione, qua fit divisio rationalium compositarum. Proponatur, exempli causa, dividenda quantitas radicalis $\sqrt[3]{a^2bd} - \sqrt[3]{a^2cd} - \sqrt[3]{a^2bf} + \sqrt[3]{a^2cf}$ per radicalem aliam $\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac}$. Divido primum $\sqrt[3]{a^2bd}$ per $\sqrt[3]{ab}$. Jamque, multiplicato divisore $\sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac}$ per quotientem $\sqrt[3]{ad}$, producit quantitas $\sqrt[3]{a^2bd} - \sqrt[3]{a^2cd}$, quæ sub.

subtrahenda ex quantitate dividenda relinquit $\sqrt{a^2bf} + \sqrt{a^2cf}$. Hinc divido deinde $\sqrt{a^2bf}$ per $\sqrt{ab}$. Et quoniam quantitas, quæ producitur, multiplicando divisorem $\sqrt{ab}$ $\sqrt{ac}$ per alium istum quotientem $\sqrt{af}$, est $\sqrt{a^2bf} + \sqrt{a^2cf}$, quæ subducta ex illo residuo relinquit nihil; concludo, quotientem totius divisionis esse $\sqrt{ab}$ $\sqrt{af}$.

239. Similiter, si dividenda proponatur quantitas radicalis $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$ per radicalem aliam $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; divido primum $\sqrt{18}$ per $\sqrt{3}$, & multiplicato divisore $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ per quotientem $\sqrt{6}$, producitur quantitas $\sqrt{18} - \sqrt{12}$, quæ subtrahenda ex quantitate proposita relinquit $\sqrt{15} + \sqrt{10}$. Quare divido ulterius $\sqrt{15} + \sqrt{10}$ per $\sqrt{3}$. Quumque, multiplicato divisore $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ per alium istum quotientem $\sqrt{5}$, oriatur quantitas $\sqrt{15} + \sqrt{10}$, quæ subducta ex illo residuo relinquit nihil: proinde quotiens propositæ divisionis erit $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

240. Generaliter autem perficitur divisio radicalium compositarum, faciendo, ut divisor unicum terminum contineat. Id vero obtinebitur, si methodo, paulo ante tradita, capiatur quantitas contraria divisoris, & per eam multiplicetur, tam divisor, quam quantitas dividenda. Hac enim ratione divisor evadet rationalis; adeoque unicum tantum terminum continebit. Necessesse est autem, per quantitatem contrariam divisoris multiplicare, tum divisorem ipsum, cum quantitatem dividendam, ut divisio proposita maneat eadem, & quæsitus exinde quotiens erui possit.

241. Proponatur itaque dividenda quantitas

tas $\sqrt{24} + \sqrt{8}$ per quantitatem aliam $\sqrt{5} + \sqrt{3}$.
 Capiatur quantitas contraria divisoris, quæ per
 regulam, superius * traditam, erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. **art. 231*.
 Multiplicetur per eam, tum quantitas dividen-
 da $\sqrt{24} + \sqrt{8}$, cum divisor ipse $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; ea-
 rumque una fiet $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$,
 altera 2, sive $\sqrt{4}$. Denique dividatur $\sqrt{120} +$
 $\sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$ per $\sqrt{4}$: id, quod fit, di-
 videndo singulos terminos illius per $\sqrt{4}$; & erit
 $\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{18} - \sqrt{6}$ quotiens propositæ
 divisionis.

242. Proponatur similiter dividenda quan-
 titas radicalis $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$ per
 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Sumatur quantitas contraria diviso-
 ris, eaque juxta regulam, superius * traditam, **art. 231*.
 erit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Multiplicetur per quantitatem
 istam, tam divisor $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, quam quantitas
 dividenda $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$. Jamque
 istarum quantitatum prior fiet 1, sive $\sqrt{1}$, alte-
 ra evadet $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$. Denique
 dividatur $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ per $\sqrt{1}$; &
 quotiens hujus divisionis, qui est ipsa quantitas
 dividenda, dabit eum, quem quærimus.

243. Verum quidem est, quod paulo supe-
 rius * ex eadem divisione, alia operandi ratio- **art. 239*.
 ne, ortus est quotiens $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Sed notetur
 hic velim, quod si termini quantitatis radicalis
 $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ ad simpliciores suas
 expressiones revocentur, tum deinde contrahantur,
 prodibit ipsa quantitas $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Per
 reductionem enim ad terminos simpliciores
 quantitas illa fit $3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$.
 Jam vero $3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$ idem sunt, ac $\sqrt{6}$; & $-$
 $3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$ perinde valent, ac $-\sqrt{5}$. Quare ea-
 dem

dem quantitas contracta fiet demum $\sqrt{6} \rightarrow \sqrt{5}$.

244. Proponatur tandem dividenda quantitas radicalis $\sqrt{a^2bd} \rightarrow \sqrt{a^2cd} \rightarrow \sqrt{a^2bf} + \sqrt{a^2cf}$ per $\sqrt{ab} \rightarrow \sqrt{ac}$. Divisoris quantitas contraria per regulam, superius * traditam, est $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$. Quare, si per eam multiplicetur, tum quantitas dividenda, cum ipse divisor; illa quidem fiet $\sqrt{a^3b^2d} \rightarrow \sqrt{a^3b^2f} \rightarrow \sqrt{a^3c^2d} + \sqrt{a^3c^2f}$, iste vero evadet $ab \rightarrow ac$. Dividenda est ergo $\sqrt{a^3b^2d} \rightarrow \sqrt{a^3b^2f} \rightarrow \sqrt{a^3c^2d} + \sqrt{a^3c^2f}$ per $ab \rightarrow ac$. Sed, ad divisionem commode peragendam, reducantur termini illius ad simpliciores suas expressiones, ut loco ejus habeatur hæc alia $ab\sqrt{ad} \rightarrow ab\sqrt{af} \rightarrow ac\sqrt{ad} + ac\sqrt{af}$, sive etiam $(ab \rightarrow ac)\sqrt{ad} \rightarrow (ab + ac)\sqrt{af}$. Et reductione ista clarescet, quotientem esse debere $\sqrt{ad} \rightarrow \sqrt{af}$.

Part. 238. omnino ut antea *.

C A P U T III.

Extractio radicum ex binomiis.

245. **I**N præcedenti capite, in quo de calculo radicalium compositarum agendum nobis proposuimus, dumtaxat additionem, subtractionem, multiplicationem, formationem potestatum, & divisionem istarum quantitatum explicuimus: nimirum, quia extractio radicum ex iisdem radicalibus res nobis digna visa est, de qua peculiare capite differeretur. Eam igitur seorsim explicandam aggredimur hoc alio capite. Sed quoniam in resolutione problematum, quorsum hæc omnia tendunt, non
alius

alius fere casus occurrit, quam, ut radices extrahantur ex iis radicalibus compositis, quæ vulgo dicuntur binomia; idcirco de extractione radicum ex binomiis dumtaxat hic sermonem instituemus.

1. Natura binomiorum, unde radices sunt extrahendæ.

246. **Q**uemadmodum radicales simplices dicuntur passim monomia, veluti quantitates unius nominis, seu terminis; ita radicales compositæ appellari solent multinomia, ut quæ plura nomina, seu terminos complectuntur. Ob multitudinem autem terminorum, distinguuntur eadem radicales compositæ in binomia, trinomia, quadrinomia, &c. Quæ enim duos habent terminos, dicuntur binomia; quæ tres, trinomia; quæ quatuor, quadrinomia; atque ita deinceps.

247. Diversitas autem terminorum repeti debet a diversitate quantitatum, quæ in iis terminis, ad simpliciōres suas expressiones revocatis, sub radicali signo continentur. Nam, in radicalibus compositis, si duæ, aut plures radicales simplices occurrant, quæ reductæ ad simpliciōres suos terminos, eandem habeant sub radicali signo quantitatem; eæ non totidem terminos, sed unum constituere dicuntur. Qua ratione radicalis composita $3\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ censeretur debet binomium, & non trinomium, quia scilicet partes duæ $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ reducuntur ad unam $5\sqrt{3}$. *art. 45.

248. Atque id, non modo in iis radicalibus
lo-

locum habet, in quibus fieri potest hujusmodi contractio, hoc est, in quibus coefficientes; vel sunt numerici, vel iisdem litteris designati; verum etiam in iis, quarum coefficientes diversis litteris exprimuntur. Sic radicalis composita $a\sqrt{ab} + c\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$ censenda est etiam binomium, & non trinomium. Nam, etsi partes duæ $a\sqrt{ab} + c\sqrt{ab}$, eandem sub signo radicali quantitatem habentes, inter se mutuo contrahi nequeant; adhuc tamen pro unico termino summi debent, & simplicius exprimi possunt, vel

Art. 161. in hunc modum $(a + c)\sqrt{ab}$, ut superius jam innuimus, vel etiam in hunc alium $d\sqrt{ab}$, substituendo solam litteram d loco ipsarum $a + c$.

249. Neque vero, ut radicales compositæ dicantur binomia, trinomia, aut quadrinomia, necesse est, ut omnes ipsarum termini radicalibus signis afficiantur. Iisdem quippe nominibus designandæ sunt etiam, si in iis aliquis terminus fuerit commensurabilis, ac rationalis. Interim, sicuti omnes illæ partes radicales, quæ eandem sub signo radicali continent quantitatem, pro uno eodemque termino computantur; sic etiam, quotcumque extiterint partes rationales, velut unus, idemque terminus omnes haberi debent. Qua ratione binomium erit, & non trinomium, tam $2 + 5 + \sqrt{10}$, quam $a - c + \sqrt{ab}$; nam prior quantitas reducta evadet $7 + \sqrt{10}$, posterior vero contrahi poterit in hunc modum $(a - c) + \sqrt{ab}$.

250. Jam in hoc capite dumtaxat de extractione radicum ex binomiis agendum nobis est. Sed binomia, ex quibus radices sunt extrahendæ, non ex cujuscumque generis radicalibus con-

constabunt, sed ex iis tantummodo, quæ signo quadratæ radicis afficiuntur. Et ratio est; tum quia hujusmodi binomia potissimum in resolutione problematum nobis occurrunt; cum etiam, quia ex aliis binomiis non est adeo facile radices quasvis extrahere. Sed radices horum binomiorum tales etiam optamus, ut nonnisi ejusdem generis radicales comprehendant. Nam, etsi radix, exempli gratia, quadrata binomii $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ exhiberi possit per $\sqrt{18} + \sqrt{2}$; arbitramur tamen, perinde rem esse, ac si exprimeretur, adhibito signo alio radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

251. Ex eo autem, quod radices extrahendæ debent esse ejusdem naturæ cum binomiis, ex quibus eas oportet extrahere; liquet, radicem quadratam extrahi posse ex iis dumtaxat binomiis, quorum alter terminus est radicalis, alter commensurabilis, ac rationalis. Sive enim pro latere, seu radice capiatur binomium, cujus uterque terminus sit radicalis; sive binomium, cujus unus terminus sit radicalis, & alter rationalis; utique quadratum semper erit binomium, compositum ex uno termino radicali, & altero rationali. Quare omnino necesse est, ut ex solis hisce binomiis extrahi possit radix quadrata, qualem optamus.

252. Quod ut clarius intelligatur, referat primo $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ radicem, seu latus. Itaque, si fiat quadratum ex $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$; erit $(ab + ac) + 2a\sqrt{bc}$ binomium, ad quod quadrata illa radix refertur; verumtamen binomium istud unum habet terminum radicalem, & alterum commensurabilem, ac rationalem. Referat secundo $a + \sqrt{ac}$

$\sqrt{ac}$ eandem radicem. Et, constituto itidem quadrato ex $a + \sqrt{ac}$, erit $(aa + ac) + 2a\sqrt{ac}$ binomium, cui quadrata illa radix correspondet; sed hoc alterum binomium similiter ex uno termino radicali, & ex altero rationali componitur.

253. Non perinde vero res est, quum agitur de extractione radicis cubicæ. Hæc enim, etsi ejusdem naturæ debeat esse cum binomio, unde eam oportet extrahere; tamen elici poterit, tam ex binomio, cujus unus terminus est radicalis, & alter rationalis, quam ex binomio, quod habet utrumque terminum radicalem. Nam, si sumatur pro radice, seu latere binomium, unum habens terminum radicalem, & alterum rationalem; talis etiam cubus orietur. Quod si vero ut radix, seu latus capiatur binomium, cujus uterque terminus sit radicalis; etiam cubus ejus utrumque terminum radicalem habebit. Quare omnino necesse est, ut ex utriusque generis binomiis extrahi possit radix cubica, qualem optamus.

254. Et ut clarius id etiam intelligatur, referat primo $a + \sqrt{ac}$ radicem, seu latus. Itaque, si fiat cubus ex $a + \sqrt{ac}$; erit $(a^3 + 3a^2c) + (3a^2 + ac)\sqrt{ac}$ binomium, ad quod cubica illa radix refertur; patetque binomium istud, ad instar suæ radicis, unum habere terminum rationalem, & alterum radicalem. Referat secundo $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$ eandem radicem. Et, constituto itidem cubo ex $\sqrt{ab} + \sqrt{ac}$, erit $(ab + 3ac)\sqrt{ab} + (3ab + ac)\sqrt{ac}$ binomium, cui cubica illa radix correspondet: unde, non secus, ac sua radix, utrumque terminum radicalem habebit.

255. De aliis porro radicibus, ad instar quadratæ, & cubicæ, judicium ferri debet. Ubi enim

enim radix refertur ad potestatem ordinis paris; ea extrahi poterit ex iis tantummodo binomiis, quorum unus terminus est radicalis, alter commensurabilis, ac rationalis. Ubi vero refertur ad potestatem ordinis imparis; licebit, eam elicere etiam ex binomio, quod habet utrumque terminum radicalem. Sed id intelligendum est, quum radix esse debet talis, qualem optamus, hoc est ejusdem naturæ cum binomio, unde eam oportet extrahere.

II. Extractio radices quadratæ ex binomiis.

256. **V** Idimus supra *, radicem quadratam, qualem optamus, elici

posse tantum ex binomiis, quorum unus terminus est rationalis, alter incommensurabilis, ac radicalis. Neque vero ex omnibus hujusmodi binomiis eam eruere licet; sed duabus aliis conditionibus opus est, ut ea extrahi queat. Eas autem ut analytice inveniamus, referat indefinite $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ radicem quadratam alicujus binomii. Itaque, si fiat quadratum ex $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, erit $(m + n) + 2\sqrt{mn}$ ipsum binomium.

257. Jam in hoc binomio, sicuti $(m + n)$ est terminus rationalis, & $2\sqrt{mn}$ terminus radicalis; ita liquido patet, $\sqrt{mn}$ esse mediam proportionalem inter m , & n . Quare terminus rationalis $m + n$ major erit termino radicali $2\sqrt{mn}$; quum in omni proportionem maximus, & minimus simul reliquis duobus terminis majores esse debeant: & propterea, ut ex aliquo binomio quadrata radix, qualem optamus, extrahi possit, non modo debet esse unus ejus terminus ratio-

Tom. I.

H

na-

nalis, & alter radicalis; verum etiam terminus rationalis major sit oportet termino radicali.

258. Præterea, si ex $m^2 + 2mn + n^2$, quadrato termini rationalis $m + n$, subducatur $4mn$, quadratum termini radicalis $2\sqrt{mn}$; residuum; $m^2 - 2mn + n^2$ reperitur esse pariter quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio extrahi possit quadrata radix, qualem optamus, haud quidem satis est, ut unus ejus terminus sit radicalis, & alter rationalis, itemque, ut terminus rationalis sit major termino radicali; sed requiritur quoque, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis illius binomii, sit etiam quadratum.

259. His ergo conditionibus refertum esse debet binomium, ut exinde elici possit radix quadrata, quæ tantum radicales quadratas comprehendat. Ubi autem adsunt in binomio conditiones istæ, extrahetur radix hac arte. Capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propositi binomii; ejusque quadrata radix seorsim addatur, & detrahatur termino radicali. Sumatur porro semissis, tum summæ, cum residui. Et erunt radices horum semissium termini quæsitæ radices.

260. Proponatur, exempli gratia, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \sqrt{60}$. Jam in hoc binomio adsunt tres istæ conditiones. Est enim 8 rationalis, & major $\sqrt{60}$; estque etiam quadratum 4 differentia quadratorum, quæ fiunt ex 8, & $\sqrt{60}$. Capiatur ergo differentia ista 4. Et ejus quadrata radix 2, sicuti addita 8, dat 10; sic detracta ex 8, relinquit 6. Unde, quia semissis summæ est 5, & semissis residui est 3; erit

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5} + \sqrt{3}$, hoc est summa ex radicibus horum semissium, radix quadrata propositi binomii.

261. Oporteat similiter, extrahere quadratam radicem ex binomio $11 + \sqrt{72}$, quod etiam tribus illis conditionibus gaudet. Quoniam quadratum ex 11 est 121, & quadratum ex $\sqrt{72}$ est 72; erit 49 differentia quadratorum, quæ sunt ex terminis illius. Jam ejus quadrata radix 7, sicuti addita termino rationali 11, exhibet summam 18; sic detracta ex eodem termino, dat pro residuo 4. Quare, quum semisses illius summae, & istius residui sint 9, & 2, quorum quadratæ radices sunt 3, & $\sqrt{2}$; erit $3 + \sqrt{2}$ quæsitæ radix.

262. Sed notandum hoc loco est, quod radices illarum semissium connectendæ sunt simul eodem omnino signo, quo partes binomii propositi sunt conjunctæ. Qua ratione quadrata radix binomii $8 - \sqrt{60}$ erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Et similiter quadrata radix binomii $11 - \sqrt{72}$ erit $3 - \sqrt{2}$. Perinde autem res est, siue scribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, siue $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; quum eadem semper quantitas producat, siue multiplicetur per se ipsam $a - b$, siue $b - a$. Sed non perinde est, siue binomium propositum sit $8 - \sqrt{60}$, siue vicissim $\sqrt{60} - 8$; nam, ut suo loco deinceps ostendemus, quum binomium est $\sqrt{60} - 8$, quadrata radix contradictionem involvit.

263. Cæterum allatæ regulæ ratio non est ita obscura, ut hic intelligi non possit. Si enim referat indefinite $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ radicem quadratam alicujus binomii, erit $(m + n) + 2\sqrt{mn}$ binomium istud. Et quemadmodum clare liquet,

differentiam quadratorum ex terminis ejus , hoc est $m^2 - 2mn + n^2$, esse etiam quadratum ; ita quoque liquido patet , quod si radix hujus differentię $m - n$ primo addatur termino rationali $m + n$, deinde ex eodem subducatur , summa quidem sit $2m$, residuum vero $2n$. Sed , & sumptis semissibus ejus summę , & hujus residui , patet quoque , radices istorum semissium esse terminos assumptę radiceis.

264. Nec silentio hic præteribimus , quod si in radicibus extrahendis parum curemus , num eę contineant radicales quadratas , aut alterius cujusque speciei , possit eadem regula elici quandoque quadrata radix etiam ex binomio , cujus uterque terminus sit radicalis . Ut , si velim radicem quadratam extrahere ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, sive etiam ex $4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$; sumo differentiam quadratorum ex terminis ejus , nempe 8 ; ejusque quadratam radicem $2\sqrt{2}$ primo addo termino $4\sqrt{2}$, deinde ex eodem subtraho . Et quoniam summa quidem est $6\sqrt{2}$, residuum vero $2\sqrt{2}$; erunt $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, hoc est $\sqrt{18}$, & $\sqrt{2}$ semisses ejus summę , & ejus residui . Quumque radices quadratę horum semissium sint * $\sqrt{418}$, & $\sqrt{42}$, erit $\sqrt{418} + \sqrt{42}$ radix quęsitā .

*art. 202.

265. Sed facile erit intelligere , quod , ut ope illius regulę , extrahi possit quadrata rad. x ex binomio aliquo , cujus uterque terminus sit radicalis , necesse est , binomium illud hujusmodi esse , ut differentia quadratorum ex terminis ejus , haud quidem sit quadratum , sed ut ejus quadrata rad. x rationem habeat commensurabilem cum aliquo ex terminis propositi binomii : quo scilicet ei , tum addi , cum detrahi possit.

Ita

Ita ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ extracta est quadrata radix, quia $\sqrt{8}$, quæ est radix prædictæ differentię, rationem habet commensurabilem cum $\sqrt{32}$. Nam, si ambæ radicales ad suas simpliciores expressiones reducantur, earum una fiet $2\sqrt{2}$, altera $4\sqrt{2}$.

III. Extractio radice cubica ex binomiis.

266. **R**adicem cubicam, qualem optamus, extrahi posse, tam ex binomio, cujus unus terminus est rationalis, & alter radicalis, quam ex binomio, quod utrumque terminum habet radicalem; jam quidem superius * ostensum fuit. Sed cujuscumque for- *art. 252.
mæ sit binomium, unde radix cubica est extrahenda, illud sane requiritur, quo radix extrahi possit, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, sit cubus perfectus.

267. Referat namque indefinite $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ radicem cubicam alicujus binomii. Itaque, si fiat cubus ex $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, ipsum binomium erit $(m + 3n)\sqrt{m} + (3m + n)\sqrt{n}$. Jam quadratum prioris termini $(m + 3n)\sqrt{m}$ est $m^3 + 6m^2n + 9mn^2$; & quadratum alterius termini $(3m + n)\sqrt{n}$ est $9m^2n + 6mn^2 + n^3$. Quare, differentia inter utrumque quadratum erit $m^3 + 6m^2n + 9mn^2 - 9m^2n - 6mn^2 - n^3$, hoc est $m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3$; quam liquet esse cubum perfectum, quum ejus radix cubica sit $m - n$.

268. Nisi ergo binomium propositum tale sit, ut differentia quadratorum ex terminis ejus sit cubus perfectus, elici exinde nequit radix

H 3

cu-

cubica, qualem optamus. Ubi autem tale extiterit binomium, & adhuc unus ejus terminus fuerit rationalis, & alter radicalis, extrahetur ex eo radix cubica in hunc modum. Capiatur primo, tum radix cubica proxime major binomii propositi, cum radix cubica vera differentiarum quadratorum, quæ sunt ex terminis ejusdem binomii; & posterior per priorem dividatur.

269. Deinde, si terminus rationalis major fuerit termino radicali, addatur quotiens, qui exinde oritur, cum eadem illa radice proxime majore. Et siquidem summæ hujus capiatur semissis sine fractione, a cujus quadrato subducatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiarum; erit semissis ille pars rationalis, & radix quadrata residui, inde orti, pars radicalis quæsitæ radices.

270. Quod si vero terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex ea divisione producitur, subducatur ex radice illa proxime majore. Et siquidem residui hujus capiatur adhuc semissis sine fractione, cujus quadrato addatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiarum; erit rursus semissis ille pars rationalis, & radix quadrata summæ, inde ortæ, pars radicalis optatæ radices.

271. In utroque porro casu duæ istæ partes afficiendæ sunt iisdem omnino signis, quibus termini propositi binomii reperiuntur affecti. Jam enim monuimus supra *, quod, quum binomium unum habet terminum rationalem, & alterum radicalem; etiam radix ejus constare debet ex duabus partibus, altera rationali, & altera radicali. Nunc autem subjungimus, quod quo signo affi-

* art. 253.

afficitur in binomio terminus rationalis, eodem efficienda est quoque pars rationalis in quaesita radice; & similiter, quo signo est affectus in binomio terminus radicalis, illud idem in radice parti radicali debet etiam adscribi.

272. Extrahenda sit igitur radix cubica ex binomio $100 + 51\sqrt{3}$. Quoniam $51\sqrt{3}$ valet circiter 88, erit totius binomii valor fere 188; adeoque ejus radix cubica proxime major erit 6. Quumque differentia quadratorum ex terminis propositi binomii sit 2197, cujus radix cubica est 13: diviso 13 per 6, fiet quotiens 13:6. Jam terminus rationalis 100 major est termino radicali $51\sqrt{3}$. Quare, juxta regulam * traditam, quotiens ille 13:6 addendus est cum radice cubica proxime majore 6; eritque 4 summae semissis sine fractione. Denique ex quadrato hujus semissis 16 subducatur radix cubica 13; quumque residuum sit 3, erit $4 + \sqrt[3]{3}$ radix cubica quaesita. *art. 169

273. Extrahenda sit etiam radix cubica ex binomio $25 + 22\sqrt{2}$. Quoniam $22\sqrt{2}$ valet circiter 31, erit totius binomii valor fere 56: proindeque ejus radix cubica proxime major erit 4. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propositi binomii est 343, cujus radix cubica est 7; dividatur 7 per 4, & fiet quotiens 7:4. Jam in hoc alio exemplo terminus rationalis 25 minor est termino radicali $22\sqrt{2}$. Quare, juxta regulam * traditam, quotiens ille subducendus est ex radice cubica proxime majore 4; eritque 1 residui semissis sine fractione. Denique quadrato hujus semissis, quod est etiam 1, addatur radix cubica 7; quumque summa sit 8, erit *art. 170

erit $1 + \sqrt[3]{8}$ radix cubica quæsitæ.

274. Sed notetur hic velim, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, non esse semper radicem cubicam propositi binomii. Est quippe ejus radix cubica, quotiescumque hæc ex illo extrahi potest. Sed siquidem propositum binomium radicem non admittat, nec item inventa quantitas radix ejus cubica erit. Id autem non aliter cognosci potest, quam rei periculo facto. Neque enim, in extrahenda radice cubica ex aliquo binomio, certo definire licet, num radix illa extrahi possit, nec ne. Nam, etsi quum differentia quadratorum ex terminis ejus non est cubus perfectus, ea elici * nequeat; non
 * ar. 266. hinc tamen extrahi vicissim semper poterit, quum differentia illa cubus prodit perfectus.

275. Quod autem dicimus, non posse extrahi radicem cubicam, ubi differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propositi binomii, non est cubus perfectus; id intelligendum est, quotiescumque quæsitæ radix non alias radicales, quam quadratas, debet continere. Verum, si de qualitate radicalium minime solliciti esse velimus, extrahi quandoque poterit radix cubica, etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus non est cubus perfectus. Nam, si ejus termini per istiusmodi differentiam multiplicentur, producet binomium aliud, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus. Unde, si ex novo isto binomio radix cubica extrahi potest; eadem, divisa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

276. Ita in binomio $22 + \sqrt[3]{486}$ differentia quadratorum ex terminis ejus, utpote 2, non est cubus perfectus. Unde si velim, extrahere radicem cubicam ex $22 + \sqrt[3]{486}$; multiplico terminos ejus per 2; & orietur novum binomium $44 + 2\sqrt[3]{486}$, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus est cubus perfectus 8. Quia autem alterius hujus binomii $44 + 2\sqrt[3]{486}$ radix cubica est $2 + \sqrt[3]{6}$; divido radicem istam $2 + \sqrt[3]{6}$ per radicem cubicam prioris differentiae, nimirum per $\sqrt[3]{32}$; & erit quotiens hujus divisionis $\sqrt[3]{34} + \sqrt[3]{654}$, sive etiam $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{654}$ radix cubica prioris binomii $22 + \sqrt[3]{486}$.

277. Atque hac ratione extrahi etiam quandoque poterit radix cubica ex binomio, cujus termini fractiones involvunt: nimirum auferendo per multiplicationem fractiones illas, & dividendo radicem cubicam novi binomii per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ vices gessit multiplicatoris. Ut, si extrahenda sit radix cubica ex binomio $(11 : 3) + \sqrt[3]{(54 : 4)}$, multiplico utrumque terminum per 6, & orietur novum binomium $22 + \sqrt[3]{486}$, in quo nullæ adsunt fractiones. Unde, quia novi hujus binomii radix cubica est $\sqrt[3]{34} + \sqrt[3]{654}$, divido eam per $\sqrt[3]{36}$; eritque $\sqrt[3]{(2 : 3)} + \sqrt[3]{(3 : 2)}$, sive etiam $\sqrt[3]{(4 : 9)} + \sqrt[3]{(3 : 2)}$ radix cubica propositi binomii. *Art. 276.

278. Non dissimili ratione extrahenda est radix cubica ex binomio, cujus uterque terminus est radicalis: nimirum; reddendo multiplicationis ope unum ex terminis ejus rationalem, & dividendo radicem cubicam novi binomii per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ vi-

ces gessit multiplicatoris . Ita , si extrahenda sit radix cubica ex binomio $11\sqrt{2} + \sqrt{243}$, cujus uterque terminus est radicalis ; multiplico per $\sqrt{2}$ terminos ejus , & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$, in quo unus tantum terminus est radicalis . Unde , quia alterius hujus binomii radix cubica * est $\sqrt[6]{16} + \sqrt[6]{54}$; divido eam per radicem cubicam ipsius $\sqrt{2}$, hoc est per $\sqrt[6]{2}$; & erit quotiens $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{27}$, hoc est $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radix cubica propositi binomii .

279. Cæterum , si radix cubica extrahenda non alias radicales , quam quadratas , debeat continere ; facile erit inquirere , num ex binomio , cujus uterque terminus sit radicalis , radix cubica extrahi queat ; eamque exhibere , ubi licet , illam elicere . Si enim termini propositi binomii ita simplicius exprimi possint , ut summa coefficientium sit quadrupla summæ quantitatum , sub signis existentium ; & ut differentia eorundem coefficientium sit dupla differentię , quæ inter easdem quantitates existit : radix cubica extrahi poterit , eademque habebitur , si ex terminis illis sui coefficientes deleantur .

280. Ita binomium $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ exprimi simplicius potest in hunc modum $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$. Unde , quia summa coefficientium $11 + 9$ est quadrupla quantitatum , sub signis existentium , $2 + 3$; & differentia eorundem coefficientium $11 - 9$ est dupla differentię earundem quantitatum $3 - 2$; erit $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radix cubica binomii $\sqrt{242} + \sqrt{243}$. Similiter binomium $\sqrt{578} + \sqrt{605}$ paulo simplicius exprimere licet hoc pacto $17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$. Est autem $17 + 11$ ad $5 + 2$, ut 4 ad 1 ; estque etiam $17 - 11$ ad $5 - 2$.
ut

ut 2 ad 1 . Quare erit $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ radix cubica binomii $\sqrt{578} + \sqrt{605}$.

281. Neque vero obscura est hujus regulæ ratio . Nam cubus binomii $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ est $(m + 3n)\sqrt{m} + (3m + n)\sqrt{n}$. Profecto autem , sicuti clare patet , alterius hujus binomii radicem cubicam haberi , si ex terminis ejus deleantur coefficientes ; sic liquido etiam constat , in eodem binomio summam coefficientium $4m + 4n$ esse quadruplam summæ quantitatum , sub signis existentium $m + n$; & differentiam eorundem coefficientium $2m - 2n$ esse duplam differentiæ earundem quantitatum .

IV. Extractio aliarum radicum ex binomiis.

282. **Q**uantum ad radices altioris ordinis, extrahendas ex binomiis; satis erit, ostendere , quo pacto eruendæ sunt illæ, quæ ad potestates ordinis imparis referuntur. Nam, quantum ad eas , quæ referuntur ad potestates ordinis paris , haberi possunt per extractionem ; vel solius quadratæ radicis ; vel quadratæ simul , & cubicæ ; vel demum quadratæ, & alterius ex iis , quæ ad potestates ordinis imparis altiores referuntur .

283. Ut , si extrahenda sit radix quarta ex binomio $17 + 12\sqrt{2}$, elicio primum ex illo radicem quadratam $3 + 2\sqrt{2}$; deinde alterius hujus binomii sumo adhuc radicem quadratam $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix quarta quæsitæ . Similiter , si extrahenda sit radix sexta ex binomio $99 + 70\sqrt{2}$, eruo prius exinde radicem quadratam $7 + 5\sqrt{2}$; tum novi hujus binomii sumo ra-

di.

dicem cubicam $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix sexta propositi binomii.

284. Verum quidem est, eodem artificio extrahi quoque posse quamplures radices, quæ ad potestates ordinis imparis referuntur; veluti, exempli gratia, est radix nonæ potestatis, quæ per duplicem radicis cubicæ extractionem potest haberi. Sed haud quidem necesse est, radices istas excipere; quia regula, a nobis afferenda, pro extrahenda ex binomiis radice cujusque ordinis imparis, non est dissimilis ab illa, quam pro extractione radicis cubicæ ex iisdem binomiis paulo superius attulimus.

285. Et quidem, jam notavimus supra *, radicem quamvis ordinis imparis, quæ tantum radicales quadratas contineat, ad instar radicis cubicæ, elici posse, tam ex binomio, cujus unus terminus est rationalis, & alter radicalis, quam ex binomio, quod utrumque terminum habet radicalem. Sed cujuscumque formæ sit binomium, non aliter quæsitæ radix ex eo elicietur, quam si differentia quadratorum ex terminis ejus sit potestas perfecta ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur.

286. Referat namque indefinite $\sqrt{m} + \sqrt{n}$ radicem quintam alicujus binomii. Itaque, si fiat quinta potestas ex $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, erit $(m^2 + 10mn + 5n^2)\sqrt{m} + (5m^2 + 10mn + n^2)\sqrt{n}$ binomium ipsum. Jam quadratum prioris terminis $(m^2 + 10mn + 5n^2)\sqrt{m}$ est $m^5 + 20m^4n + 110m^3n^2 + 100m^2n^3 + 25mn^4$; & quadratum alterius termini $(5m^2 + 10mn + n^2)\sqrt{n}$ est $25m^4n + 100m^3n^2 + 110m^2n^3 + 20mn^4 + n^5$. Quare differentia inter utrumque quadratum

tum erit $ms - 5m^4n + 10m^3n^2 - 10m^2n^3 + 5mn^4 - n^5$; quam liquet esse quadrato-cubum perfectum, cum radix ejus quadrato-cubica sit $m - n$.

287. Nisi ergo binomium propositum tale sit, ut differentia quadratorum ex terminis ejus sit potestas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, elici exinde nequit radix optata. Ubi autem tale extiterit binomium, & adhuc unus ejus terminus fuerit rationalis, & alter radicalis; extraheatur ex eo quæsitæ radix in hunc modum. Capiatur primo, tum radix optata proxime major binomii propositi, cum radix non dissimilis vera differentię quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejusdem binomii; & harum radicum posterior per priorem dividatur.

288. Deinde, si terminus rationalis major fuerit termino radicali, addatur quotiens, qui exinde oritur, cum eadem illa radice proxime majore. Et siquidem summæ hujus capiatur semissis sine fractione, a cujus quadrato subducatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentię; erit semissis ille pars rationalis, & radix quadrata residui, inde orti, pars radicalis quæsitæ radice.

289. Quod si vero terminus rationalis minor fuerit termino radicali; tunc, qui ex ea divisione producitur quotiens, subducatur ex radice illa proxime majore. Et siquidem residui hujus capiatur adhuc semissis sine fractione, cujus quadrato addatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentię; erit rursus semissis ille pars rationalis, & radix quadrata summæ, inde ortæ, pars radicalis optatæ radice.

290. In utroque porro casu duæ istæ partes afficiendæ sunt iisdem omnino signis, quibus termini propositi binomii reperiuntur affecti. Jam
 * art. 184. enim monuimus supra *, quod ubi binomium unum habet terminum rationalem, & alterum radicalem; etiam radix impar illius constare debet ex duabus partibus, altera rationali, & altera radicali. Nunc autem subjungimus, quod quo signo afficitur in binomio terminus rationalis, eodem afficienda est quoque pars rationalis in quæsitâ radice; & similiter quo signo est affectus in binomio terminus radicalis, illud idem in radice parti radicali debet etiam adscribi.

291. Extrahenda sit igitur radix quinta ex binomio $41 + 29\sqrt{2}$. Quoniam $29\sqrt{2}$ valet circiter 41, erit totius binomii valor fere 82; adeoque ejus radix quinta proxime major erit 3. Quumque differentia quadratorum ex terminis propositi binomii sit unitas, erit eius radix quinta similiter unitas: & propterea, divisa unitate per 3, fiet quotiens 1 : 3. Jam terminus rationalis 41 minor est termino radicali $29\sqrt{2}$. Quare,
 * art. 289. re, juxta regulam * traditam, quotiens ille 1 : 3 subducendus est ex radice quinta proxime majore 3; eritque 1 residui semissis sine fractione. Denique quadrato hujus semissis, quod est etiam 1, addatur radix quinta prædictæ quadratorum differentię, quæ similiter est 1; quumque summa sit 2, erit $1 + \sqrt{2}$ radix quinta quæsitâ.

292. Extrahenda sit etiam radix septima ex binomio $568 + 328\sqrt{3}$. Quoniam $328\sqrt{3}$ valet circiter 568, erit totius binomii valor fere 1136: proin-

proindeque ejus radix septima proxime major erit 3. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propositi binomii est 128, cujus radix septima est 2; dividatur 2 per 3, & fiet quotiens $2:3$. Unde porro, quia terminus rationalis 568 hic etiam minor est termino radicali $328\sqrt{3}$; juxta regulam * traditam quotiens ille $2:3$ *Art. 289. subducatur ex radice septima proxime majore 3, & erit 1 residui semissis sine fractione. Denique quadrato hujus semissis, quod est etiam 1, addatur radix septima prædictæ quadratorum differentię, quæ erat 2; quumque summa sit 3, erit $1 + \sqrt{3}$ radix septima binomii propositi.

293. Cæterum hic etiam notare oportet, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, tunc demum esse radicem quæsitam, quum hæc ex proposito binomio extrahi potest; nam siquidem propositum binomium radicem non admittat, nec item inventa quantitas erit ejus radix optata. Sed hic quoque non aliter id cognoscere licet, quam rei periculo instituto. Neque enim, in extrahenda radice ordinis imparis ex aliquo binomio, certo definiri potest, num radix illa extrahi queat, necne. Nam, etsi, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non est potestas perfecta ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur, ea elici non possit; non hinc tamen extrahi vicissim semper poterit, quum differentia illa prodit illius ordinis potestas perfecta.

294. Sed quod dicimus, non posse extrahi radicem ex binomio, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non est potestas perfecta illius ordinis, de quo agitur; hoc ita etiam oportet intelligatur, ubi quæsitæ radix non alias

radicales, quam quadratas, debet continere. Nam, si qualitatis radicalium nulla ratio velit haberi, extrahi quandoque poterit optata radix, etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus non est potestas perfecta illius ordinis. Multiplicentur etenim termini ipsius per eam illius differentię potestatem, quam designat exponens ordinis, primo minutus unitate una, & deinde dimidiatus; & novum habebitur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus potestas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur. Unde, si ex novo isto binomio quęsitā radix extrahi possit, eadem divisa per radicem cognominem illius quantitatis, quę vices gessit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

295. Atque hoc artificio extrahi etiam quandoque poterit quęsitā radix, tam ex binomio, cujus termini fractiones involvunt, quam ex binomio, cujus uterque terminus est radicalis. Nimirum, si multiplicationis ope in primo casu tollantur fractiones, in secundo vero unus ex terminis propositi binomii reddatur rationalis. Nam in utroque casu, si novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem ejus quantitatis, quę gessit vices multiplicatoris; fiet quotiens hujus divisionis radix binomii propositi. Sed hæc omnia exemplis illustrare supervacaneum existimamus; quum non dissimilia sint ab iis, quę in extractione radici cubicę superius adnotavimus.

296. Potius rationem allatę regulę juvabit hic breviter innuere. Nimirum, si $a + \sqrt{bc}$ referat radicem extrahendam, sitque terminus ratio:

tionalis a major termino radicali $\sqrt{bc}$; fiet $a^2 \rightarrow bc$ radix prædictæ quadratorum differentiæ: quæ, divisa per $a + \sqrt{bc}$, dabit pro quotiente $a \rightarrow \sqrt{bc}$. Sed, sicuti quotiens iste, additus cum $a + \sqrt{bc}$, dat summam $2a$, cujus semissis est pars rationalis a ; ita, si ab hujus quadrato a^2 subducatur $a^2 \rightarrow bc$, remanebit bc , cujus quadrata radix est pars radicalis $\sqrt{bc}$. Quare, si loco ipsius $a + \sqrt{bc}$ sumatur radix proxime major; ob fractionem, quæ negligitur, adhuc eodem artificio quæsitæ radicis partes invenientur.

297. Quod si autem in assumpta radice $a + \sqrt{bc}$ terminus rationalis a minor sit termino radicali $\sqrt{bc}$; fiet $bc \rightarrow a^2$ radix prædictæ quadratorum differentiæ: quæ quidem si dividatur per $a + \sqrt{bc}$, vel, quod idem est, per $\sqrt{bc} + a$, habebitur quotiens $\sqrt{bc} \rightarrow a$. Quemadmodum autem quotiens iste subtractus ex $\sqrt{bc} + a$, relinquit $2a$, cujus semissis est pars rationalis a ; ita, si hujus quadrato a^2 addatur $bc \rightarrow a^2$, orietur summa bc , cujus quadrata radix est pars radicalis $\sqrt{bc}$. Quare, si loco ipsius $a + \sqrt{bc}$ capiatur radix proxime major; ob fractionem, quæ negligitur, adhuc eadem operandi ratione quæsitæ radicis partes habebuntur.

V. *Genesis*, & *calculus radicalium universalium*.

298. **E** St & alia species quantitatum radicalium, quæ dicuntur universales. Oriuntur ex, quum ex aliquo binomio, per regulas, hætenus traditas, quæsitæ radix extrahi nequit. Tunc enim designabitur radix illa,

Tom. I. I la,

la, adhibito signo alio radicali, quod ad utrumque binomii terminum se extendat. Hincque factum, ut eadem illa radix radicalis universalis ab Algebristis diceretur. Ita ex $2 + \sqrt{6}$ quadrata radix elici nequit. Quare exprimeretur ea per radicalem istam universalem $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. Et, ob eandem rationem, quum ex $1 + \sqrt{2}$ extrahi nequeat radix cubica, erit radicalis ista universalis $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ cubicæ ejus radice expressio.

299. Hujusmodi radicales, raro accidit, ut ad calculum poni debeant. Interim, si quandoque contingat id fieri, sciendum est, calculum ipsarum iisdem omnino regulis peragi posse, quibus aliarum radicalium calculus peragitur. Itaque duplum, triplum, aut quadruplum radicalis universalis $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ non aliter designabitur, quam per $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, $3\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, $4\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. Et quantitates illæ, extra signum existentes, quæ hic etiam dicuntur coefficientes, collocabuntur intra signum, si evectæ ad potestatem, ab exponente signi denominatam, multiplicentur per omnes illas, quæ sub signo repertiuntur. Quæ ratione $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$ idem erit, ac $\sqrt{8 + 4\sqrt{6}}$, sive etiam $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$. Pariterque $2\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$ perinde valebit, ac $\sqrt[3]{8 + 8\sqrt{2}}$, sive etiam $\sqrt[3]{8 + \sqrt{128}}$.

300. Præterea radicales universales reducuntur ad suos terminos simpliciores, collocando extra signum quicquid rationale simul, & commune extat in quantitatibus, sub signo existentibus. Sed, ad id facilius dignoscendum, præstat prius, ad simpliciores suas expressiones revocare radicales, quæ sub signo universalis reperiuntur. Sit enim

Art. 151.
152.

ad simpliciores suos terminos reducenda radicalis

lis universalis $\sqrt{(8 + \sqrt{96})}$. Quoniam $\sqrt{96}$ perinde valet, ac $4\sqrt{6}$; erit $\sqrt{(8 + \sqrt{96})}$ idem, ac $\sqrt{(8 + 4\sqrt{6})}$. Unde, quia maximus communis divisor numerorum 8, & 4, ex quo radix quadrata elici potest, est ipse numerus 4: proinde, collocata radice ejus extra signum, fiet $2\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$ quantitas proposita, ad simpliciores suos terminos reducta.

301. Uterius in calculo harum radicalium illud quoque requiritur, ut eæ, in quibus operationes institui debent, sint ejusdem denominationis inter se. Unde, si radicales offerantur diversæ denominationis, necesse est, eas ad eandem denominationem prius revocare. Fit porro hæc reductio eadem omnino ratione, qua in radicalibus simplicibus absolvitur. Unde duæ istæ radicales universales $\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$, & $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{3})}$ reductæ ad eandem denominationem, fient * *art. 154.* $\sqrt[6]{(44 + 18\sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(7 + 4\sqrt{3})}$. Sed, si ad eandem denominationem reducendæ essent hæc aliæ duæ radicales $\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(3 + \sqrt{3})}$, habebuntur * loco ipsarum duæ istæ $\sqrt[6]{(44 + 18\sqrt{6})}$, & $\sqrt[6]{(3 + \sqrt{3})}$. * *art. 155.*

302. Jam, quantum ad additionem, & subtractionem radicalium universalium, reducendæ prius sunt illæ ad simpliciores suas expressiones. Nam, si subinde reductæ reperiantur habere eandem sub signis radicalibus quantitatem; fiet additio, vel subtractio, addendo, vel subtrahendo coefficientes ipsarum. Quod si vero habeant sub signis quantitates diversas; tunc non aliter addi poterunt simul, vel a se invicem subtrahi, quam signo +, vel — adhibito. Ita, si radicales universales, simul addendæ, vel a se mu-

tuo subducendæ , sint $\sqrt{(50 + \sqrt{3750})}$, & $\sqrt{(8 + \sqrt{96})}$; erit summa quidem $7\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$, residuum vero $3\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$; quia reductæ ad simpliciores suos terminos fiunt $5\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$, & $2\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$. Sed, si addi debeant simul, vel a se invicem subtrahi radicales universales $\sqrt{(8 + \sqrt{96})}$, & $\sqrt{(4 + \sqrt{32})}$; summa quidem erit $\sqrt{(8 + \sqrt{96})} + \sqrt{(4 + \sqrt{32})}$, residuum vero $\sqrt{(8 + \sqrt{96})} - \sqrt{(4 + \sqrt{32})}$; quandoquidem, si reducantur ad simpliciores suos terminos, una fiet $2\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$, & altera evadet $2\sqrt{(1 + \sqrt{2})}$.

303. Quantum vero ad multiplicationem, & divisionem radicalium universalium, nulla opus est earum ad simpliciores suas expressiones reductione; sed satis erit, per se mutuo multiplicare, vel dividere, tum coefficientes ipsarum, si quos habent, cum quantitates, sub signis earundem existentes. Qua ratione id, quod producit, multiplicando $2\sqrt{(3 + \sqrt{3})}$ per $5\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$, erit $10\sqrt{(6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6})}$. Nam, sicuti ex multiplicatione coefficientium 2, & 5, producit 10; sic ex multiplicatione quantitatum, sub signis existentium, $3 + \sqrt{3}$, & $2 + \sqrt{2}$, oritur quantitas $6 + 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{6}$. Et, ob eandem rationem, quotiens, qui gignitur, dividendo $12\sqrt{(8 + \sqrt{50})}$ per $2\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$, erit $6\sqrt{(2 + \sqrt{2})}$. Nam, sicuti ex divisione coefficientium 12, & 2 producit 6; ita ex divisione quantitatum, sub signis existentium, $8 + \sqrt{50}$, & $3 + \sqrt{2}$, oritur quantitas $2 + \sqrt{2}$.

304. Nulla etiam opus est reductione ad simpliciores suos terminos, quum radicales universales ad potestatem aliquam sunt elevandæ; quum

quum satis sit, ad potestatem illam evehere, tam coefficientes ipsarum, si quos habent, quam quantitates, existentes sub signis earundem. Ita, si radicalis universalis $3\sqrt{3} (2 + \sqrt{7})$ elevanda sit ad quadratum, fiet quadratum istud $9\sqrt{3} (11 + 4\sqrt{7})$. Nam, sicuti quadratum coefficientis 3 est 9; ita quadratum quantitatis $2 + \sqrt{7}$, sub signo existentis, est $11 + 4\sqrt{7}$. Et similiter, si radicalis universalis $2\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$ elevanda sit ad cubum, fiet cubus iste $8\sqrt{(44 + 18\sqrt{6})}$. Nam, sicuti cubus coefficientis 2 est 8; ita cubus quantitatis, sub signo existentis, $2 + \sqrt{6}$ est $44 + 18\sqrt{6}$.

305. Denique, nec item requiritur reductio ulla ad simpliciores suos terminos, ubi ex radicali aliqua universalis radix quævis extrahi debet; quum satis sit, radicem illam elicere, tam ex ejus coefficiente, si quem habet, quam ex quantitate, sub radicali signo existente. Quare quadrata radix radicalis universalis $9\sqrt{3} (11 + 4\sqrt{7})$ est $3\sqrt{3} (2 + \sqrt{7})$. Nam, sicuti quadrata radix coefficientis 9 est 3; sic quadrata radix quantitatis $11 + 4\sqrt{7}$, sub signo existentis, est $2 + \sqrt{7}$. Pariterque radix cubica radicalis universalis $8\sqrt{(44 + 18\sqrt{6})}$ erit $2\sqrt{(2 + \sqrt{6})}$. Nam, quemadmodum radix cubica coefficientis 8 est 2; ita radix non dissimilis quantitatis, sub signo existentis, $44 + 18\sqrt{6}$ est $2 + \sqrt{6}$.

306. Quod si radix optata elici nequeat, si ve ex quantitate, sub signo existente, si ve ex coefficiente radicalis universalis; tunc, reposito coefficiente intra signum, satis erit, multiplicare exponentem signi radicalis per exponentem quæsitæ radice. Ita, si quærat quadrata radix

radicalis universalis $2\sqrt{3} (2 + \sqrt{6})$, ea nec ex coefficiente 2, nec ex quantitate, sub signo existente, $2 + \sqrt{6}$ elici poterit. Quare, collocato intra signum coefficiente 2, & multiplicato indice signi 3 per indicem quæsitæ radicis 2, fiet $\sqrt{6} (16 + 8\sqrt{6})$ radix quæsitæ. Et similiter, si ex radicali universalis $8\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ extrahenda sit radix cubica, ea ex coefficiente 8 elici quidem poterit, sed non item ex quantitate, sub signo existente, $1 + \sqrt{2}$. Quare, extracta illa ex coefficiente, & multiplicato indice signi radicalis 2 per indicem quæsitæ radicis 3, fiet $2\sqrt{6} (1 + \sqrt{2})$ radix optata.

307. Cæterum nolo hic reticere, quod beneficio radicalium universalium, eadem illa regula, superius tradita, extrahi possit quadrata radix ex quocumque binomio. Oporteat enim, quadratam radicem elicere ex binomio $8 + \sqrt{32}$. Quoniam differentia quadratorum ex terminis ejus est 32, erit $4\sqrt{2}$ quadrata radix hujus differentiæ. Unde si ea, addatur primo termino rationali 8, & deinde ex eodem subducatur, erit $4 + 2\sqrt{2}$ summæ semissis, & $4 - 2\sqrt{2}$ semissis residui: proindeque quadrata radix propositi binomii erit $\sqrt{(4 + 2\sqrt{2})} + \sqrt{(4 - 2\sqrt{2})}$. Interim fatendum hoc loco est, quod exhibendo quæsitam radicem in hunc modum, qui sit valor ejus, multo difficilior intelligitur, quam si dicamus, eam extrahi non posse, & exhibeamus eandem per unam radicalem universalem hoc pacto $\sqrt{(8 + \sqrt{32})}$.

CA:

CAPUT IV.

Natura quantitatum imaginariarum.

308. **P**ertinet ad hunc locum doctrina de quantitibus imaginariis, ut quæ suam ex extractione radicum originem habentes, similiter velut quantitates radicales debent haberi. Quantitates istæ imaginariæ sunt maximi usus in Mathesi, ob eandem illam impossibilitatem, per quam vulgo dicuntur imaginariæ. Limites namque ejus, quod possibile est, per ipsas nobis innotescunt; & quousque id, quod semel evadit impossibile, subinde perseverat, ab iisdem etiam edocemur. Itaque de hujusmodi quantitibus paulo accuratius agendum nobis erit: quem in finem primo in earum naturam, ac indolem sedulo inquiremus; tum, qua ratione calculus earundem peragi debeat, breviter ostendemus.

I. Genesis quantitatum imaginariarum.

309. **R**adices ex quantitibus extrahi non possunt, non modo quum quantitates non sunt potestates perfectæ ejus ordinis, de quo agitur; verum etiam quum tali signo afficiuntur, ut qua ratione prædici queant, intelligi non possit. Sic ex quantitate *ab* elici nequit quadrata radix; quia ipsa quantitas *ab* non est quadratum perfectum. Sed quadrata radix quantitatis negativæ $\rightarrow a^2$, nec item potest

haberi; quia quantitas ista, velut negativa, intelligi non potest, qua ratione producat. *Art. 36.*

310. Si enim quantitatem inspicias, omni prorsus signo denudatam, diceres esse a quadratam radicem ipsius; at ubi eam consideras, velut affectam signo $-$, pro ejus latere a nullum comperies signum, ut ex illius in se ipsum multiplicatione negativa illa quantitas possit oriri. Non enim affici poterit signo $+$; quia, multiplicando $+$ a per $+$ a producitur $+$ a^2 . Sed nec etiam licebit, latus illud afficere signo $-$; quandoquidem, si multiplicetur $-a$ per $-a$, per regulam multiplicationis, superius traditam, adhuc producitur $+$ a^2 .

311. Facienda est itaque distinctio inter potestates numeri paris, & potestates numeri imparis. Istæ etenim esse possunt, tam positivæ, quam negativæ. Nam, sicuti oriuntur positivæ, quum radices, ad quas referuntur, sunt itidem positivæ; sic per contrarium prodeunt negativæ, quum ipsæ etiam radices negativæ assumuntur. Sed illæ nonnisi positivæ esse possunt; quandoquidem, tam quantitatum positivarum, quam quantitatum negativarum potestates numeri paris positivæ semper oriuntur.

312. Hac ratione cubus quantitatis positivæ a est quantitas itidem positiva a^3 , & cubus quantitatis negativæ $-a$ est quantitas similiter negativa $-a^3$. Nam, sicuti, multiplicando a bis per se ipsam, producitur a^3 ; sic erit $-a^3$ id, quod producitur, multiplicando $-a$ bis per se ipsam. Sed quadratum, tam quantitatis positivæ a , quam quantitatis negativæ $-a$, est quantitas positiva a^2 . Nam, per regulam multipli-

plicationis , superius * traditam , producitur ^{art. 36.}
semper a^2 , sive multiplicetur a per a , sive $\text{---} a$
per $\text{---} a$.

313. Atque hinc discimus primo , radices ex potestatibus numeri imparis extrahi posse, quocumque signo sint affectæ , hoc est , tam si sint positivæ , quam si sint negativæ ; sed non item ex potestatibus numeri paris , quum ex istis tunc demum radices extrahi queant , ubi ipsæ potestates sunt positivæ . Discimus secundo , radices , quæ referuntur ad potestates numeri imparis , esse semper ejusdem naturæ cum ipsis potestatibus ; hoc est positivæ , vel negativæ , prout potestates ipsæ sunt positivæ , vel negativæ . Discimus demum , potestates positivæ numeri paris duas radices habere , unam positivam , & alteram negativam : adeo , ut ea , quæ deest potestatibus negativis numeri paris , accrescat iis , quæ sunt positivæ .

314. Ut ergo ad id , quod erat præcipuum , redeamus , impossibilitas , quæ in extrahendis radicibus occurrit , ex duplici quidem capite potest oriri . Primo ex eo , quod quantitas proposita non est potestas perfecta ejus ordinis , de quo agitur . Et deinde ex eo , quod oblata quantitas est negativa , & quæ sita radix refertur ad potestatem numeri paris . Utroque casu designant Algebraicæ radicem extrahendam , præfigendo quantitati signum radicale , cujus index radicem illam ostendat . Nam , sicuti radicem quadratam , quæ elici nequit ex ab , exprimunt per $\sqrt{ab}$; ita quadratam radicem , quæ erui non potest ex $\text{---} a^2$ ratione negationis , designant per $\sqrt{\text{---} a^2}$.

315. Jam impossibilitas, quæ in extrahendis radicibus oritur ex primo capite, occasionem præbuit Algebristis, ut distinguerent quantitates in commensurabiles, seu rationales, & incommensurabiles, seu radicales. Ex impossibilitate autem, quæ in eadem radicum extractione oritur ex secundo capite, nata est alia quantitatum distinctio, qua fit, ut quædam sint reales, hoc est vere, ac realiter existentes; quædam vero imaginariæ, hoc est, quæ tantum finguntur, ac imaginantur.

316. Id quum ita sit, perspicuum est, quantitates imaginarias esse radices numeri imparis, extrahendas ex quantitativibus negativis; eisdemque tale nomen sortitas esse, quia non sunt quantitates vere, ac realiter existentes, sed tantum fictitiæ, ac ideales. Jam, si vulgus consulas Algebristarum, vix aliud circa impossibilitatem harum radicum ab iis edoceberis, quam quia intelligi non potest, quo signo affici debeant, ut producant potestates, ad quas referuntur.

317. Verum hæc ratio evincit quidem impossibilitatem hujusmodi radicum; sed unde nam proprie ea oriatur, minime nobis ostendit. Conabimur ergo, aliam hic nos rationem asserre, quæ harum radicum impossibilitatem in propatulo ponat. Quumque alia hæc ratio ex natura quantitativum positivarum, ac negativarum, velut ex fonte suo proprio, sit deducenda; hanc prius oportet ut paulo clarius ostendamus.

II. *Natura quantitatum positivarum, & negativarum.*

318. **D**iximus superius *, quantitates positivae esse illas, quas signum + præcedit; quantitates vero negativae, quæ signo — afficiuntur. Sed eodem in loco explicuimus etiam, quo pacto verum esse possit illud, quod vulgo dicunt Algebraistæ, quantitates positivas esse nihilo majores, quantitates vero negativae esse nihilo minores: nimirum, quia, zero seu nihil, quantitatis additum, earum valorem, nec auget, nec minuit; adeoque dicendum est nihilo majus, quod potius est, alicujus quantitatis valorem augere; & vicissim nihilo minus, quod per contrarium quantitatis alicujus valorem minuere valet.

319. Hinc vero consequitur, quantitates dicendas esse negativae, non quidem in se ipsis consideratas, sed relate ad eas, de quibus negant valorem suum. Verum hoc facile quidem intelligitur, quum negativæ quantitates adhærent aliis positivis, quæ ipsis sunt majores; sed non æque facile concipi potest, quum eadem quantitates negativæ, vel solæ ponuntur, vel adhærent quantitativis aliis positivis, quæ ipsis sunt minores. Quid enim significet expressio ista $7 - 5$, nemo non videt. Per eam namque valor numeri 5 negatur de valore numeri 7; adeoque tantum indicatur valor numeri 2. Sed, quid sibi velit $- 2$, aut $5 - 7$, non ita liquido constat. Nam in priore casu negatio numeri 2 ad nullam quantitatem refertur; in secundo

do vero casu numerus , qui negatur , 7 major est illo , de quo negatur , 5.

320. Itaque illud hic oportet ostendamus, qua ratione fieri possit , ut quantitates negativæ , vel solæ reperiantur , vel adhæreant quantitatibus aliis positivis , quæ ipsis sint minores. Id explicant Algebristæ primo , mediantibus debitis , & creditis . Quemadmodum enim credita sunt bona positiva , quia peculium augent ; ita debita considerari possunt, veluti bona negativa, quia peculium minuunt . Unde , sicuti , quum quis centum habet crediti , & quadraginta debiti, dicimus, peculium ejus esse $100 - 40$; ita vicissim , quum habet quadraginta crediti , & centum debiti , dici potest , quod peculium ejus sit $40 - 100$. Et similiter , sicuti , quum quis habet centum crediti , & nihil debiti , dicimus peculium esse 100; ita vicissim, quum habet centum debiti , & nihil crediti , dici potest , quod peculium ejus valeat $- 100$.

321. Hoc idem explicant quoque motu locali , in quo progressus dici potest motus positivus , quia auget iter confectum , & minuit conficiendum; regressus motus negativus , quia per contrarium minuit iter confectum , augetque conficiendum . Si enim aliquem promoveri supponamus ab A versus B pedibus quinque , tumque retrocedere a B ad C pedibus tribus ; dicemus, eum promotiorem reperiri in C, quam in A, pedibus $5 - 3$. Sed si retrocedat a B ad D pedibus septem , dicendus est promotior in D, quam in A, pedibus $5 - 7$. Et eadem ratione, si aliquis iter confecturus ab A versus B , procefferit ab A ad C pedibus duobus ; dicemus , re-

spe-

FIG. 1.

specu itinervis conficiendi, eum promotiorem esse in C, quam in A, pedibus 2. Sed si vicissim retrocesserit ab A ad D pedibus duobus; tunc dicendus est ille promotior in D, quam in A, pedibus $\rightarrow 2$.

322. Utroque hoc exemplo abunde liquet, quantitates, quæ dicuntur negativæ, esse perinde reales, quam quæ vocantur positivæ; sed omne discrimen inter eas in eo positum esse, quod quantitates negativæ interpretandæ sunt sensu contrario ei, quo positivas quantitates interpretamur. Nam, sicuti, quum dicimus, peculium alicujus esse 60, intelligimus, eum tantundem in bonis habere, ut sexaginta persolvere possit; ita vicissim, quum dicimus, alicujus peculium valere $\rightarrow 60$, sensus est, quod ei desunt sexaginta, ut dici possit in neutro statu consistere. Et similiter, sicuti, quum dicimus, aliquem dati itineris pedum decem confecisse pedes 4, sensus est, eum tali in loco versari, ut illius itineris nonnisi sex pedes conficere debeat; ita per contrarium, quum dicimus, dati itineris pedum decem confectos esse ab aliquo pedes $\rightarrow 4$, illud ita intelligendum est, ut conficere debeat pedes quatuordecim, quo ad præfixam perveniat metam.

323. In Geometria ergo, ubi quantitates per longitudines linearum designantur, si recta, versus plagam aliquam ducta, habeatur, velut positiva; erit negativa, quæ ducitur versus plagam oppositam. Ut, si ex eodem puncto A ducatur versus dextram recta AB, & versus sinistram recta AC, ponaturq; prior AB positiva, altera AC pro negativa habenda erit. Atque hac ratione,

FIG. 25

re-

rectas negativas minuere valorem positivarum, perspicuum quidem est . Nam , sicuti rectæ positivæ DA addendo rectam similiter positivam AB , conficitur DB , major quidem , quam DA ; ita , si eidem rectæ positivæ DA addatur recta negativa AC , conficietur DC minor quidem , quam DA . Sed liquet etiam , quod , sicuti recta positiva DA , per appositionem negativæ AC , omnino in nihilum redigitur , quum AC est æqualis ipsi DA ; ita eadem recta positiva DA , per appositionem negativæ AC , evadit negativa , quum AC est major quidem , quam DA .

324. Eadem ratione in Arithmetica , ubi quantitates per numeros exprimuntur , si numeri , qui a zero progrediuntur , habeantur , tamquam positivi ; erunt negativi , qui vicissim a zero regrediuntur . Et quoniam iste numerorum a zero regressus omnino opponitur progressui ; liquet , numeros negativos , additos positivis , minuere debere valorem eorum ; adeoque expressionem istam $7 - 5$ tantundem significare , quam 2 . Sed , ob eandem rationem , perspicuum est quoque , numeros positivos , per additionem negativorum , posse omnino in nihilum redigi , si scilicet numeri negativi æquales fuerint positivis ; & posse item in negativos abire , si nempe negativi , qui adduntur , majores fuerint positivis , quibus adjiciuntur . Ita $4 - 4$ perinde valet , ac zero , seu nihil ; & $4 - 6$ idem est , ac $- 2$.

325. Sed , qua demum ratione numeri negativi possint esse perinde reales , ac positivi ; scio equidem , non ita facile concipi posse . Numerorum quippe ea communiter statuitur natura , ut , per continuam unitatis additionem , omnes a
ze-

zero progrediantur. Unde fictitii videntur esse numeri illi, qui vicissim a zero regrediuntur. Et sane sic statui debet, si numeri considerentur in abstracto, hoc est, quatenus existunt in ideis nostræ mentis. Sed non idem iudicium ferendum est, ubi numeri considerantur in concreto, rebusque physicis, ac realibus designandis applicantur. Tunc enim, præter numeros positivos, distinguendi sunt etiam numeri negativi; ut scilicet per eos designari possit status rerum contrarius ei, quem designant numeri positivi.

326. Ita, si quæstio sit de elevatione solis supra horizontem; ad numeros pertinebit, elevationis ejus gradus definire. Sed quoniam elevationi opponitur depressio, si numeri positivi designant gradus elevationis, designabunt vicissim numeri negativi gradus depressionis. Unde, quemadmodum, quum dicimus, solem elevatum esse supra horizontem gradibus 10, sensus est, quod sol supra horizontem affurgit ad altitudinem graduum decem; ita si dicatur sol elevatus supra horizontem gradibus -10 , non aliud id significabit, quam quod sol gradibus decem infra horizontem depressus reperiatur.

III. Existentia numerorum negativorum plenius vindicata.

327. **D**iximus paulo superius*, distin- *art. 225.
tionem numerorum in negativos, & positivos locum habere, ubi numeri considerantur in concreto, & non in abstracto; hoc est, quum eos usurpamus, ad designandas res physicas, & realiter existentes. Sed id, tantum

tum abest, ut existentiam numerorum negativorum in Arithmetica adstruere videatur, quin potius ab ea illos excludit, ac penitus arcet. Numeri enim in Arithmetica considerantur in abstracto, & non in concreto. Unde, si numerorum negativorum ortus ipsis rebus, quas designant, ferri debet acceptus; nulli plane erunt in Arithmetica numeri negativi.

328. Huic ergo errori præcavendo, præstat numerorum naturam, ac indolem paulo accuratius hoc loco expendere. Nimirum numeri, prout subsistunt in ideis nostræ mentis, nihil significant certi, atque distincti. Id autem vel ex eo liquere potest, quod quamlibet quantitatem quocumque numero indifferenter appellare licebit. Unam enim, exempli gratia, si velut indivisam consideremus, nihil vetat, vocare unitatem; sed si eam, velut compositam ex duabus, tribus, aut quatuor partibus inspiciamus, poterimus æquo jure, eandem appellare binarium, ternarium, aut quaternarium: idque, tam si partes illæ sint æquales, quam si magnitudine a se invicem differant. Nam non minus dicimus duos montes, quum ii sunt æquales, quam quum alter est altero major.

329. Ex eo autem, quod numeri in ideis nostræ mentis, nihil significant certi, ac absoluti, nec ex unitatibus æqualibus constant; consequitur, eosdem tali pacto consideratos, nec item inter se rationem ullam determinatam habere. Itaque inter binarium, & ternarium, prout subsistunt in mente nostra, nulla erit certa, ac determinata ratio. Aliter enim omnis quantitas ad omnem aliam quantitatem poterit quamcumque

ra-

rationem habere; quia, ut jam dictum est *, quælibet quantitas potest quocumque numero designari. Et pari jure, nec binarius additus ternario facit quinarium, nec senarius subductus ex denario relinquit quaternarium. *art. 328.

330. Id quomodo ita sit, liquet, numeros, prout subsistunt in ideis nostræ mentis, non esse objectum Arithmeticæ. Nam in ea considerantur numeri, velut capaces incrementi, ac decrementi, & ceu determinatam inter se mutuam rationem habentes; cujusmodi plane * non sunt numeri, qui animo nostro obversantur. Unde fateamur oportet, numeros, quos considerat Arithmetica, suas sortiri proprietates a rerum, quas designant, indole, atque natura: adeo, ut si istæ sint cognomines, ac homogeneæ, in tantum, ut una alterius adjectione, aut detractio augeri possit, aut minui, simulque collatæ rationem habeant inter se; ipsi etiam numeri iis gaudeant attributis. *art. 329.

331. Hinc obiter notari hoc loco potest, quantum a vero deflectant, qui censent, lineam bipedalem, additam alteri lineæ bipedali, idcirco facere lineam quadrupedalem, quia in ideis nostræ mentis bis duo sunt quatuor. Si enim ita res esset, linea bipedalis, addita lineæ bipedali, pari jure conficere deberet lineam quadrupedalem, quadripalmarem, vel utcumque quaternario numero denominatam: quod nemo dixerit sanæ mentis. Si ergo id postremum abluat a vero, quia numeri in isto casu non designant res homogeneas; bis duo facient quatuor, non ex abstracta numerorum cognitione, sed ex conditione rerum, quibus applicantur.

332. Ex quibus omnibus jam illud abunde consequitur, non posse numeros ad calculum poni, ac inter se mutuo conferri, nisi ex ideis nostræ mentis ad designandas res vere, ac realiter existentes traducantur. Unde numerorum negatorum existentia omnino in Arithmetica debet admitti. Nam rerum existentium nullus dari potest status, cui alter oppositus, ac plane contrarius non correspondeat. Quare admittendi sunt numeri negativi, ut per eos designari possit status rerum contrarius ei, sub quo per numeros positivos primo sub contemplationem cadunt.

333. Quod autem passim dici solet, numeros in Arithmetica considerari in abstracto, & non in concreto; illud ita intelligi debet, quod de iis subinde agunt Arithmetici, ut omnes omnino res, quæ sunt cognomines, ac homogeneæ, simul exhibeant. Atque hoc vel ex eo liquere potest, quod universalis illa, & abstracta Mathematicorum Arithmetica multum differt ab Arithmetica vulgi. Hæc enim contemplatur numeros, prout primo insunt in ideis nostræ mentis, nec ideo est sollicita de qualitate unitatum, ex quibus numeri censentur compositi. Sed Arithmetica Mathematicorum, a rebus ad animum rursus numeros revocans, non aliter, quam æquales, unitates in iis agnoscit.

334. Nimirum Mathematici, quum de numeris generatim edisserunt, avocant rursus eos a rebus ad mentem, sed relinquunt in iis attributa illa, quæ ipsorum ad res homogeneas applicatione semel sortita fuerunt. Itaque unitatem, ex cujus repetita additione numeros oriri concipiunt, ponunt semper eandem, ac immutata-

tam:

tam:quo fit,ut numeri ipsi simul addi, subtrahiq;
a se invicem possint; & inter se collati, certam,
determinatamque habeant rationem. Sed, sicuti
hæc omnia manent numeris, ubi rursus a rebus
ad animum redeunt; ita & ipsa numerorum di-
stinctio in positivos, & negativos quoque ma-
neat necesse est.

335. Cæterum ex eo, quod sejungi nequeat
a numeris ratio positivi, ac negativi, illud mo-
do colligi potest, quod in multiplicatione nu-
merorum ille, qui vices gerit multiplicatoris, non
solum ostendere debet, quoties numerus multi-
plicandus sumi debeat, verum etiam, in quo sta-
tu sit reponendus relate ad eum, in quo jam re-
peritur: adeo, ut vera multiplicationis idea hæc
erit, ut numerus multiplicandus toties colloca-
ri debeat in statu, a multiplicatore designato,
quot unitates continet ipse multiplicator. Unde,
si tam multiplicandus, quam multiplicator fue-
rit negativus, collocandus ille erit in statu, qui sit
negativus negativi, hoc est in statu positivo: &
proinde id, quod oritur ex multiplicatione duo-
rum numerorum negativorum, erit positivum,
& non negativum.

336. Similiter in divisione numerorum ille, qui
vices gerit divisoris, non solum ostendere debet,
quota pars numeri dividendi capi debeat, verum
etiam in quo statu pars illa sit collocanda relate
ad eum, in quo jam reperitur: adeo, ut vera no-
tio divisionis hæc erit, ut numeri dividendi ea
pars collocari debeat in statu, designato a diviso-
re, quam divisor ipse denominat suis, quas con-
tinet, unitatibus. Unde, si tam dividendus, quam
divisor fuerit negativus, collocanda erit pars

K 2 illa

illa in statu, qui sit negativus negativi, hoc est in statu positivo: & propterea id, quod oritur ex divisione duorum numerorum negativorum, erit positivum, & non negativum.

IV. Quid proprie sit radicem extractio, quodve criterium proportionis.

337. **E**xplicata natura quantitatum positivarum, ac negativarum; haud difficile modo erit, ostendere impossibilitatem earum quantitatum, quæ vulgo dicuntur imaginariæ. Et quoniam hujusmodi quantitates suam originem trahunt ab extractione radicum ordinis parisi ex quantitativis negativis; juvat prius adnotare, quod problemata de radicibus extrahendis sint eadem omnino cum iis, in quibus inter duas datas quantitates unam, aut plures medias proportionales oportet invenire. Nam, profecto reperitur una media proportionalis, quum extrahenda est radix quadrata; reperiuntur duæ mediæ proportionales, quum quæstio est de radice cubica; tres mediæ, quum agitur de radice quadrato-quadrata; atque ita deinceps.

*art. 316.

338. Neque vero difficile id erit ostendere. Sit enim primo extrahenda quadrata radix ex numero 10. Dico, perinde esse, ac si quæretur media proportionalis inter unitatem, & ipsum numerum 10. Ponatur siquidem, quod x sit media ista proportionalis; & eo res redit, ut ostendamus, quantitatem x , ductam in se ipsam, producere numerum 10. Id vero liquet abunde. Nam, quum 1 sit ad x , ut x ad 10; erit quoque, ut 1 ad xx , ita 1 ad 10; adeoque, quia in omni pro-

proportione productum mediorum est æquale producto extremorum, erit xx , hoc est quadratum ipsius x æquale dato numero 10.

339. Sit secundo elicienda radix cubica ex eodem numero 10. Dico, perinde esse, ac si quæretur prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem, & ipsum numerum 10. Ponatur siquidem, quod x sit prima earum mediarum proportionalium; jamque eo res redit, ut ostendamus, cubum quantitatis x æqualem esse numero 10. Id vero ostendemus in hunc modum. Quoniam ex hypothesi quantitas x est prima ex duabus mediis proportionalibus inter unitatem, & numerum 10; erit, ut 1 ad x^3 , ita 1 ad 10. Unde, quia in omni proportionem productum ex mediis æquale esse debet producto ex extremis; erit x^3 , hoc est cubus ipsius x æqualis dato numero 10.

340. Sit tertio eruenda radix quadrato-quadrata ex eodem adhuc numero 10. Dico, perinde esse, ac si quæretur prima ex tribus mediis proportionalibus inter unitatem, & ipsum numerum 10. Ponatur siquidem, quod x sit prima earum mediarum proportionalium; jamque eo res redit, ut ostendamus, quadrato-quadratum quantitatis x æquale esse numero 10. Id vero ostendemus hac ratione. Quoniam ex hypothesi quantitas x est prima ex tribus mediis proportionalibus inter unitatem, & numerum 10; erit, ut 1 ad x^4 , ita 1 ad 10. Est autem in omni proportionem productum ex mediis æquale producto ex extremis. Itaque erit x^4 , hoc est quadrato-quadratum ipsius x æquale dato numero 10.

341. Non dissimiliter ostendetur, invenendam esse primam ex quatuor mediis proportionalibus inter unitatem, & datum numerum in extractione radiceis quintæ; primam ex quinque mediis in extractione radiceis sextæ; primam ex sex mediis in extractione radiceis septimæ; atque ita deinceps. Quæ omnia exinde dependent, quod, sicuti trium quantitatum proportionalium prima ad tertiam duplicatam habet rationem primæ ad secundam; ita, si quocumque fuerint quantitates continue proportionales, prima ad ultimam rationem habebit toties multiplicatam primæ ad secundam, quot sunt ipsæ quantitates, una dempta.

342. Jam, quum problemata de radicibus extrahendis non differant ab iis, in quibus unam, aut plures medias proportionales inter duas datas quantitates oportet invenire; non alia meliore ratione ostendi poterit impossibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, quam ostendendo inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam posse quidem reperiri numerum parem mediarum proportionalium, hoc est duas, quatuor, sex; sed non item numerum imparem, puta unam, tres, quinque. Nam o-

art. 316. riuntur quantitates imaginariæ, quum ex quantitatibus negativis extrahendæ sunt radices numeri paris; hoc * est, quum inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam impar numerus mediarum proportionalium debet inveniri.

343. Ad hoc autem ostendendum, necesse est, certum in primis criterium statuere, quo mediante nullo negotio cognosci possit, num quatuor

tuor quantitates sint proportionales, nec ne. Neque enim ea, quæ passim afferuntur, possunt huic rei ostendendæ usui nobis esse; quum omnia supponant, quantitates, quæ comparantur inter se mutuo, esse unius, ejusdemque status; hoc est, vel omnes positivas, vel omnes negativas. Operæ pretium est ergo, aliud sancire criterium, quod etiam ad quantitates diversi status se extendat; nec vereor dicere, quod hujus defectu doctrina ista semper difficultatibus, iisque gravissimis, fuerit obnoxia.

344. Et quidem vera notio proportionis hæc est, ut tunc quidem dicendæ sint proportionales quatuor quantitates, quotiescumque antecedentes respectu suorum consequentium eadem lege progrediuntur. Hinc autem efficitur, ut non aliud statui possit generale criterium proportionalitatis, quam ut dicamus, proportionales esse quatuor quantitates, quotiescumque, quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut consequentem suum adæquet, id omne fieri debet à alio antecedente, ut consequenti suo æqualis quoque oriatur. Quod sane criterium nulla eget ulteriore demonstratione, quum ex ipsa proportionis idea sponte sua consequatur.

345. Hujus itaque criterii ope, discimus primo, quatuor quantitates 2, 6, $\rightarrow$ 4, $\rightarrow$ 12 proportionales esse; quia, sicuti antecedens 2 sumi debet ter in statu suo, quo consequentem 6, ad quem refertur, adæquet; ita antecedens alter $\rightarrow$ 4 sumendus est etiam ter in suo statu, quo possit suum similiter consequentem $\rightarrow$ 12 adæquare. Discimus secundo, proportionales esse etiam, tam quantitates 2, $\rightarrow$ 6, 4, $\rightarrow$ 12,

K 4 quam

quam quantitates $\rightarrow 2, 6, \rightarrow 4, 12$; quia in utraque analogia, sicuti antecedens unus sumi debet ter in statu contrario, ut consequentem suum adæquet, ita antecedens alter ter quoque sumendus est in statu contrario, quo suum etiam consequentem adæquet. Atque, ob eandem rationem, discimus demum proportionales esse, tam quantitates $2, \rightarrow 6, \rightarrow 4, 12$, quam quantitates $\rightarrow 2, 6, 4, \rightarrow 12$; quandoquidem in utraque proportionem ambo antecedentes sumi debent ter in statu contrario, quo suos possint consequentes adæquare.

346. Discimus, inquam, uno verbo illius criterii ope, quod si quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates; earum proportio non perturbatur, si duæ quævis capiuntur unius status, & aliæ duæ status oppositi. Sed, ejusdem criterii ope, discimus, proportionem quatuor quantitatum perturbari, si ex iis tres quidem capiuntur unius status, & reliqua status contrarii. Neque enim subsistit hæc analogia, ut 2 ad 6, ita 4 ad $\rightarrow 12$; nec item hæc alia, ut $\rightarrow 2$ ad $\rightarrow 6$, ita $\rightarrow 4$ ad 12. Nam in utraque antecedens unus sumi debet ter in statu suo, quo suum consequentem adæquet; quum tamen antecedens alter sumendus sit ter in statu contrario, quo suum similiter consequentem possit adæquare.

V. Impossibilitas quantitatum imaginariarum ex proprio fonte deducta.

art. 346. 347. **P**ostquam nobis innotuerit, proportionem non subsistere inter quatuor

tuor quantitates, quarum tres sint unius status, & reliqua status oppositi; haud difficulter ostendemus veritatem ejus, de quo paulo ante locuti sumus, & unde impossibilitas pendet **art. 342* quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ: nimirum, quod inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam possit quidem par numerus mediarum proportionalium inveniri; sed non item numerus impar.

348. Nam, quotiescumque inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam duæ mediæ proportionales proponuntur inveniendæ; poterit illarum una esse negativa, & altera positiva: ac propterea inter quantitates diversi status proportio consistere. Verumtamen, quum inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam una tantum media proportionalis proponitur invenienda, ea impossibilis erit; quandoquidem, sive capiatur positiva, sive negativa, semper ex quatuor terminis analogiæ tres erunt unius status, & quarta status contrarii; nec proinde inter eos ulla poterit esse proportio.

349. Ut si velim, exempli causa, inter quantitatem positivam 2, & quantitatem negativam — 16 invenire duas medias proportionales, earum una erit — 4, altera 8. Nam, sicuti prima, ut conficiat secundam, sumi debet bis in statu contrario; ita, ut secunda conficiat tertiam, & tertia conficiat quartam, sumendæ sunt pariter bis in statu opposito ei, in quo jam reperiuntur. Sed, si inter quantitatem positivam 2, & quantitatem negativam — 8 quaeratur una tantum media proportionalis; ea exhiberi non potest. Nam in quocumque statu capiatur, non poterit adæ-

adæquare tertiam per id ipsum, per quod ei prima quantitas redditur æqualis.

350. Eadem omnino ratione ostendemus pariter, inter quantitatem positivam, & quantitatem negativam posse quidem quatuor, sex, aut octo medias proportionales inveniri; sed non item tres, quinque, aut septem. Atq; hac ratione jam ex proprio suo fonte impossibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, deducta mihi videtur. Nam, sicuti oriuntur * hujusmodi quantitates, quum extrahendæ sunt radices ordinis parisi ex quantitativibus negativis; ita pro ex-
Art. 336. tractione harum radicum * impar numerus mediarum proportionalium inter unitatem, & positivam quantitatem debet reperiri.

351. Interim nolo hic reticere, impossibilitatem quantitatum imaginariarum in eo tantum consistere, quod quantitates illæ, nec possunt esse positivæ, nec negativæ. Sed non hinc eas omnino fictitias dixerim; quia dari potest tertius quidam status, qui sit medius inter positivum, & negativum, & in quo quantitates illæ sint reponendæ. Et speciatim in Geometria non vereor asserere, quod, sicuti quantitates positivæ, & negativæ explicantur per lineas, tendentes ad plagas oppositas; sic & quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, explicari possunt per lineas, quæ ad plagas intermedias tendant.

352. Id vel exinde liquere potest, quod hujusmodi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, suas habent proprietates, non secus ac eæ, quas reales appellamus. Possunt siquidem inter se mutuo comparari, earumque rationes determinari, perinde ac si essent quantitates veræ,

ac

ac reales . Et quamquam imaginariæ cum realibus conferri non possint, id tamen absolutam earum impossibilitatem minime arguere debet; quia positivæ cum negativis non aliter etiam conferuntur, quam faciendo, ut analogiæ duo quidem termini sint positivi, & alii duo plane negativi: quod pariter in imaginariis locum habere potest.

353. Hinc obiter notetur hic velim, quod, quum proportio inter quantitates diversi status instituitur, semper duo termini debent esse unius status, & alii duo status alterius; nec subsistet unquam proportio inter eas quantitates, quarum tres sunt unius status, & quarta status diversæ. Itaque, sicuti, quum omnes quantitates, inter quas proportio instituitur, sunt reales, earum duæ debent esse positivæ, & duæ negativæ; ita, quum proportio instituenda est inter quantitates, partim reales, & partim imaginarias, debent ex illis duæ esse reales, & aliæ duæ imaginariæ.

354. Distinctio autem quantitatuum in positivas, & negativas obtinet etiam, quum ipsæ quantitates sunt imaginariæ; quandoquidem imaginaria quantitas, quæ oritur, extrahendo ex $\sqrt{-2}$ quadratam radicem, esse potest, tam $+\sqrt{-2}$, quam $-\sqrt{-2}$. Sed non hinc putandum est, quod ubi proportio instituitur inter duas quantitates reales, duasque alias imaginarias, & ex realibus una sumitur positiva, & altera negativa; similiter ex imaginariis una debet esse positiva, & altera negativa. Nam generaliter in huiusmodi proportionibus, quæ instituuntur inter quantitates reales, & imagi-

nariis, tres termini debent esse unius signi, & quartus signi contrarii.

355. Cæterum, unde fiat, ut radix numeri paris quantitatis positivæ, possit esse, tum positiva, cum negativa; facile ex dictis colligi potest. Ubi enim, exempli gratia, extrahenda est quadrata radix ex numero 9, non aliud fieri debet, quam invenire mediam proportionalem inter unitatem, & ipsum numerum 9. Profecto autem media ista proportionalis esse potest, tam $+3$, quam -3 . Nam in utroque casu quidquid efficit prima, ut secundam adæquet, illud idem pariter fieri debet a secunda, ut adæquet tertiam. Quare quadrata radix numeri 9 similiter esse poterit, tam $+3$, quam -3 , hoc est, tam positiva, quam negativa.

356. Sunt qui putant, proportionem nulli modo institui posse, inter quantitates diversi status; nec verum esse, quod 2 sit ad -4 , ut -5 ad 10. Nam, inquiunt, ostensum est ab Euclide in Elementis, quod si quatuor magnitudines proportionales fuerint, prima, & secunda sint, vel una majores, vel una minores, vel una æquales relate ad tertiam, & quartam: quod tamen in allata analogia nequaquam obtinet: est enim 2 major, quam -5 ; & tamen -4 est minor, quam 10. Sed respondetur, considerari ab Euclide in ea propositione excessum, defectum, vel æqualitatem, quæ oritur ex propria cujusque termini quantitate: & profecto verum est dicere, quod sicuti ratione quantitatis -4 minor est, quam 10; sic pariter 2 minor sit, quam -5 .

*VI. Quantitatum imaginariarum in ordines
distributio.*

357. **U**T natura quantitatum imaginariarum distinctior evadat, illud reliquum est, ut differentiam, quæ inter eas existit, ostendamus. Et quidem, quum dicantur generaliter quantitates imaginariæ radices numeri paris, ex quantitativibus negativis extrahendæ; tale nomen meretur, non modo $\sqrt{-a}$, verum etiam $\sqrt[4]{-a}$, $\sqrt[6]{-a}$, $\sqrt[8]{-a}$, atque ita deinceps. Interim non omnes hujusmodi quantitates imaginariæ sunt ejusdem indolis; sed distinguendæ sunt eæ in varios ordines, secundum eos signorum radicalium indices, qui per nullum numerum imparem dividi possunt: adeo, ut dicendæ sint primi ordinis, ubi index signi radicalis est 2; secundi ordinis, quum idem index est 4; tertii ordinis, quum ille index est 8; quarti ordinis, quum habent 16 pro indice sui signi radicalis; atque ita in infinitum. *art. 316.

358. Quo ratio hujus divisionis rectius intelligatur, notandum est primo, quod ubi index signi radicalis per aliquem numerum imparem dividi potest, quantitas imaginaria sit semper ejusdem naturæ cum illa, quæ habet pro indice sui signi quotientem ejus divisionis. Ita, quia par numerus 6, divisus per numerum imparem 3, dat parem 2 in quotiente; quantitas imaginaria, quæ habet pro sui signi indice numerum 6, erit ejusdem indolis cum illa, cujus signum notatur numero 2. Atque ita quoque, quia par numerus 12, divisus per numerum im-

pa-

parem 3, dat parem 4 in quotiente; quantitas imaginaria, cujus signum notatur numero 12, ejusdem naturæ censenda est cum ea, cujus signum notatur numero 4.

359. Neque vero difficile id erit ostendere. Nam $\sqrt[6]{a}$ tantundem valet, ac radix quadrata ipsius $\sqrt[3]{a}$. Sed $\sqrt[3]{a}$ nihil continet imaginarii, quum idem sit *, ac $\sqrt[3]{a}$. Itaque, si $\sqrt[3]{a}$ ponatur æqualis $\rightarrow b$; erit $\sqrt[6]{a}$ idem omnino, ac $\sqrt[3]{b}$. Eadem ratione $\sqrt[12]{a}$ perinde valet, ac radix quarta ipsius $\sqrt[3]{a}$, five $\sqrt[3]{a}$. Quare, ponendo rursus, quod $\sqrt[3]{a}$ sit æqualis $\rightarrow b$; erit $\sqrt[12]{a}$ idem prorsus, ac $\sqrt[4]{b}$. Atque ita quoque $\sqrt[20]{a}$ tantundem significat, ac radix quarta ipsius $\sqrt[5]{a}$, five etiam $\sqrt[5]{a}$. Unde, si ponamus, quod $\sqrt[5]{a}$ sit æqualis $\rightarrow b$; erit $\sqrt[20]{a}$ idem plane, ac $\sqrt[4]{b}$.

360. Istiusmodi autem reductio minime fieri potest in iis quantitatibus imaginariis, quarum signa notantur numeris, qui per nullum numerum imparem dividi possunt. Non enim inficior, $\sqrt[4]{a}$ tantundem valere, ac radix quadrata ipsius $\sqrt{a}$. Sed $\sqrt{a}$, quum sit quantitas imaginaria, supponi nequit æqualis $\rightarrow b$. Unde procul est, ut $\sqrt[4]{a}$ reduci possit ad $\sqrt{b}$. Atque ita pariter, non in dubium verto, quin $\sqrt[8]{a}$ perinde valeat, ac radix quadrata ipsius $\sqrt[4]{a}$. Verum $\sqrt[4]{a}$ est quantitas imaginaria; nec ideo supponi potest æqualis $\rightarrow b$. Quare $\sqrt[8]{a}$ revocari nequit ad $\sqrt{b}$.

361. Patet ergo, diversos ordines quantitatum imaginariarum constituendos esse secundum

dum eos signorum radicalium indices, qui per nullum numerum imparem dividi possunt. Ut autem eorum ordinum differentia cognita fiant, notetur primo velim, indices suorum signorum constituere progressionem geometricam, quæ incipiens a numero binario, continuo in ratione dupla augetur. Hinc enim liquido constat, quod sicuti quantitas imaginaria primi ordinis est quadrata radix quantitatis negativæ, ita quantitas imaginaria cujuscumque alterius ordinis sit radix quadrata alterius quantitatis imaginariæ, quæ ad ordinem præcedentem refertur.

362. Jam, quum agitur de extrahenda radice quadrata ex aliqua quantitate, vidimus superius *, non aliud fieri debere, quam reperire mediam proportionalem inter unitatem, & ipsam quantitatem. Unde licebit etiam asserere, quod sicuti quantitas imaginaria primi ordinis est media proportionalis inter unitatem, & quantitatem negativam; ita quantitas imaginaria alterius cujuscumque ordinis sit media proportionalis inter unitatem, & quantitatem aliam imaginariam, quæ pertinet ad ordinem præcedentem. Ex quibus jam satis, opinor, sit perspecta, ac explorata differentia, quæ inter varios ordines quantitatum imaginariarum existit.

*Art. 338.

CAPUT V.

Calculus quantitatum imaginariarum.

363. **E**Th quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, saltem in statu realium

lium positivo, ac negativo vere, ac realiter non existant; in resolutione tamen problematum sæpe sæpius eæ nobis occurrunt, nec raro contingit, ut eæ etiam ad calculum poni debeant. Quocirca, ne aliquid omittamus, quod ad quantitatum calculum pertinere videtur; illud nunc ostendemus, qua ratione quantitatum imaginaryarum calculus perfici possit.

364. Jam quantitates imaginariæ, quæ frequentius occurrunt, eæ sunt, quæ ad primum ordinem referuntur. Unde, ne longiores simus, quam Elementorum ratio patitur, de istarum tantum calculo agemus. Sed in eo tradendo non multum morabimur. Nam, quum hujusmodi quantitates, perinde ac omnes aliæ imaginariæ, exprimantur ad instar radicalium; perficietur calculus ipsarum iisdem fere regulis, quibus radicalium quantitatum calculus absolvitur.

365. Itaque quantitates imaginariæ, ad instar quantitatum radicalium, suos possunt habere coefficientes; qui tamen reponuntur intra signum, si evecti ad quadratum, multiplicentur per quantitates, sub signo existentes. Quæ ratione $3\sqrt{-2}$ idem erit, ac $\sqrt{-18}$; & $2\sqrt{-5}$ idem, ac $\sqrt{-20}$. Sed vicissim, si in quantitate, sub signo existente, reperiatur divisor aliquis, unde extrahi possit radix quadrata; per extractionem hujus radices, poterit divisor ille extra signum collocari. Ita $\sqrt{-18}$ tantundem valet, ac $3\sqrt{-2}$; & $\sqrt{-20}$ perinde significat, ac $2\sqrt{-5}$.

366. Jam, collocando extra signum maximum divisorem quantitatis, sub signo existentis, ex quo extrahi potest quadrata radix, redu-

ducetur quantitas imaginaria ad simpliciores suam expressionem. Ita maximus divisor quantitatis $\sqrt{72}$, ex quo extrahi potest quadrata radix, est 36. Quare, collocando extra signum istiusmodi divisorem, fiet $6\sqrt{2}$ simplicior expressio quantitatis imaginariæ $\sqrt{72}$. Atque ita quoque quantitas imaginaria $\sqrt{300}$, ubi ad simpliciores suos terminos reducitur, evadet $10\sqrt{3}$.

1. Additio, & subtractio quantitatum imaginariarum.

367. **Q**uantitates imaginariæ adduntur in unum, conjungendo simul coefficientes ipsarum, quotiescumque reductæ methodo, jam * tradita, ad simpliciores suas expressiones, eandem sub signo radicali quantitatem habere reperiuntur. Sic summa ex duabus quantitatibus imaginariis $\sqrt{8}$, & $\sqrt{18}$ est $\sqrt{50}$. Nam, reductæ ad simpliciores suos terminos, fiunt $2\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$; adeoque simul conjunctæ summam exhibent $5\sqrt{2}$, quæ tantundem valet *, ac $\sqrt{50}$. Et similiter, quia *
 quantitates imaginariæ $\sqrt{9}$, & $\sqrt{16}$, ubi ad simpliciores suas expressiones reducuntur, fiunt $3\sqrt{1}$, & $4\sqrt{1}$; erit summa ipsarum $7\sqrt{1}$, sive etiam $\sqrt{49}$. art. 366.

368. Quod si quantitates imaginariæ, reductæ methodo, jam * tradita, ad simpliciores suos terminos, non reperiuntur habere sub signo eandem quantitatem; tunc fiet additio, conjungendo eas signo +. Qua ratione summa ex quantitatibus imaginariis $\sqrt{12}$, & $\sqrt{18}$ erit
 art. 366.

Tom. I.

L

$\sqrt{\quad}$

$\sqrt{} \rightarrow 12 + \sqrt{} \rightarrow 18$. Nam, si reducantur ad simplices suas expressiones, evadunt $2\sqrt{} \rightarrow 3$, & $3\sqrt{} \rightarrow 2$; atque adeo sub signo radicali non eandem, sed diversas continent quantitates.

369. Similiter quantitates imaginariæ subtrahuntur a se mutuo, subducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, quotiescunque reductæ methodo * tradita ad simplices suos terminos, eandem sub signo radicali quantitatem habere reperiuntur. Sic residuum, quod oritur, subtrahendo $\sqrt{} \rightarrow 8$ ex $\sqrt{} \rightarrow 50$, est $\sqrt{} \rightarrow 18$. Nam, eæ quantitates imaginariæ, reductæ ad expressiones suas simplices, fiunt $2\sqrt{} \rightarrow 2$, & $5\sqrt{} \rightarrow 2$; adeoque prior ex secunda subducta dabit pro residuo $3\sqrt{} \rightarrow 2$, quod
 * art. 365. tantundem valet *, ac $\sqrt{} \rightarrow 18$. Et similiter, quia quantitates imaginariæ $\sqrt{} \rightarrow 49$, & $\sqrt{} \rightarrow 9$, ubi ad simplices suos terminos reducuntur, fiunt $7\sqrt{} \rightarrow 1$, & $3\sqrt{} \rightarrow 1$; subducendo secundam ex prima, orietur residuum $4\sqrt{} \rightarrow 1$, sive etiam $\sqrt{} \rightarrow 16$.

370. Quod si quantitates imaginariæ, reductæ methodo * tradita ad simplices suos terminos non reperiantur habere sub signo eandem quantitatem; tunc fiet subtractio, conjungendo eas signo $\rightarrow$. Qua ratione id, quod relinquitur, subducendo $\sqrt{} \rightarrow 20$ ex $\sqrt{} \rightarrow 50$, erit $\sqrt{} \rightarrow 50 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow 20$. Nam, si reducantur quantitates illæ imaginariæ ad simplices suas expressiones evadunt $2\sqrt{} \rightarrow 5$, & $5\sqrt{} \rightarrow 2$; atque adeo sub signo radicali non eandem, sed diversas continent quantitates.

371. Absque ulla reductione possunt etiam quantitates imaginariæ simul addi, vel a se mutuo

tuo subtrahi, dividendo per se invicem quantitates, sub signis radicalibus existentes. Nam, si contingat ex hac divisione talem oriri quotientem, ut extrahi exinde possit radix quadrata; satis erit, eruere radicem istam, eandemque unitate auctam, vel diminutam adscribere, velut coefficientem, quantitati imaginariæ minori.

372. Proponantur, exempli gratia, simul addendæ quantitates duæ imaginariæ $\sqrt{-75}$, & $\sqrt{-3}$. Jam quantitates, sub signis existentes, sunt -75 , & -3 . Quare, divisa majore -75 per minorem -3 , fiet quotiens 25 . Et quoniam ex quotiente isto 25 , velut quadrato perfecto, erui potest quadrata radix, quæ est 5 ; augeatur hæc radix unitate, ita ut fiat 6 . Et summa propositarum quantitatum erit $6\sqrt{-3}$, sive etiam $\sqrt{-108}$.

373. Oporteat etiam, ex quantitate imaginaria $\sqrt{-98}$ subducere quantitatem aliam imaginariam $\sqrt{-2}$. Quoniam quantitates, sub signis existentes, sunt -98 , & -2 ; dividatur major -98 per minorem -2 . Quumque pro quotiente habeatur numerus 49 , qui est quadratum perfectum; eliciatur exinde quadrata radix 7 . Et quia radix ista, unitate diminuta, est 6 ; erit $6\sqrt{-2}$, sive etiam $\sqrt{-72}$ residuum propositæ subtractionis.

374. Cæterum, si additio, & subtractio fieri debeant inter quantitatem imaginariam, & quantitatem realem, sive commensurabilem, sive radicalem; omnino necesse est, signis $+$, & $-$ eas indicare. Qua ratione erit $5 + \sqrt{-2}$ summa duarum quantitatum 5 , & $\sqrt{-2}$; & $\sqrt{10} + \sqrt{-5}$ id, quod oritur, addendo $\sqrt{-5}$ cum

L 2

 $\sqrt{10}$

$\sqrt{10}$. Pariterque erit $15 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow 12$ id, quod remanet, subducendo $\sqrt{} \rightarrow 12$ ex 15; & $\sqrt{} \rightarrow 30 \rightarrow \sqrt{7}$ id, quod superest, subtrahendo realem $\sqrt{7}$ ex imaginaria $\sqrt{} \rightarrow 30$.

11. Multiplicatio, & divisio quantitatum imaginariarum.

375. **Q**uantitates imaginariæ multiplicari possunt per se mutuo, absque ulla ipsarum ad simpliciores suos terminos reductione; quum satis sit, multiplicare per se invicem, tam coefficientes, si quos habent, quam quantitates, sub signis radicalibus existentes. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $2\sqrt{} \rightarrow 3$ per $5\sqrt{} \rightarrow 2$ erit $10\sqrt{6}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{} \rightarrow 5$ per $6\sqrt{} \rightarrow 10$, erit $18\sqrt{50}$. Atque ita quoque erit $12\sqrt{42}$ id, quod gignitur, multiplicando $3\sqrt{} \rightarrow 7$ per $4\sqrt{} \rightarrow 6$.

376. Ex quo patet, productum ex duabus quibuscvis quantitativibus imaginariis esse quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Interim realis quantitas, quæ producitur, sumenda est semper negativa: adeo, ut si multiplicari debeat $\sqrt{} \rightarrow 2$ per $\sqrt{} \rightarrow 18$, quemadmodum productum est $\sqrt{36}$; ita pro radice quadrata numeri 36 sumere oportet $\rightarrow 6$, & non $+6$. Quod vel exinde liquere potest, quod perinde est, multiplicare $\sqrt{} \rightarrow 2$ per $\sqrt{} \rightarrow 2$, ac quadratum efficere ex $\sqrt{} \rightarrow 2$: & profecto, sicuti $\sqrt{} \rightarrow 2$ est quadrata radix quantitatis negativæ $\rightarrow 2$; ita quadratum ex $\sqrt{} \rightarrow 2$ debet esse ipsa quantitas negativa $\rightarrow 2$.

377.

377. Ex eo autem, quod productum ex $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$ fit -6 , & non $+6$, liquet veritas ejus, quod superius * inuimus: nimirum, quod quum in aliqua proportionem duo termini sunt reales, & duo alii sunt imaginarii, debent tres esse unius signi, & reliquus signi contrarii. Nam quum in omni multiplicatione, unitas sit ad multiplicatorem, ut quantitas multiplicanda ad productum; erit quidem, ut 1 ad $\sqrt{-2}$, ita $\sqrt{-18}$ ad -6 . Et perspicuum est, in hac proportionem tres priores terminos esse affectos signo $+$, postremum vero affici signo $-$. *art. 354.

378. Sed ex eo, quod productum ex $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$ fit -6 , sequitur vicissim debere esse $+6$ id, quod producitur, multiplicando, vel $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-18}$, vel $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$. Nam ratione signorum, quibus quantitates, ad invicem multiplicandæ, afficiuntur, productum esse debet $-\sqrt{36}$. Unde semper ac pro quadrata radice numeri 36 sumere oportet -6 ; erit $-\sqrt{36}$ ipsa quantitas -6 , in statu negativo posita: proindeque erit $+6$. Quumque ratione multiplicationis esse debeat, ut 1 ad $\sqrt{-2}$, ita $\sqrt{-18}$ ad 6 ; vel etiam, ut 1 ad $\sqrt{-18}$, ita $\sqrt{-2}$ ad 6 : liquet rursus, in utraque analogia tres terminos affici signo $+$, & reliquum signo $-$ affectum reperiri.

279. Ut ergo productum ex duabus quantitatibus imaginariis est semper quantitas realis; ita realis hæc quantitas erit negativa, quum quantitates imaginariæ iisdem signis afficiuntur, & vicissim positiva, quum contrariis signis sunt affectæ. Interim, si multiplicanda sit quantitas imaginaria per quantitatem aliam realem, pro-

ductum erit semper quantitas alia imaginaria : quæ tamen afficienda erit signo $+$, aut $-$, prout ipsæ quantitates , quæ multiplicantur ad invicem, contrariis, aut iisdem signis afficiuntur. Ita id , quod producitur , multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{5}$, erit $-\sqrt{15}$. Et similiter id , quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per -2 , erit $2\sqrt{-3}$ sive $\sqrt{-12}$.

380. Quod autem ex multiplicatione quantitatis realis per aliam imaginariam , productum oriri debeat affectum signo $+$, aut $-$, prout ipsæ quantitates , quæ multiplicantur inter se, contrariis , aut iisdem signis afficiuntur ; id exinde dependet , quod ubi in aliqua proportionem duo termini sunt reales , & alii duo imaginarii, debent esse * tres unius signi , & reliquus signi contrarii. Nam , ex natura multiplicationis, quotiescumque multiplicare oportet $\sqrt{5}$ per $\sqrt{-3}$, debet esse , ut 1 ad $\sqrt{5}$, ita $\sqrt{-3}$ ad productum . Quare omnino necesse est , ut productum ejus multiplicationis signo $-$ affectum oriatur.

381. Divisio quoque quantitatum imaginaryarum peragi poterit , absque ulla ipfarum ad simplices suas expressiones reductione; quum satis sit , per se mutuo dividere , tam coefficientes , si quos habent , quam quantitates , sub signis existentes . Qua ratione quotiens , qui oritur , dividendo $6\sqrt{-12}$ per $2\sqrt{-2}$ erit $3\sqrt{6}$. Pariterque quotiens , qui producitur, dividendo $20\sqrt{-5}$ per $4\sqrt{-3}$ erit $5\sqrt{15}$ ($5 : 3$) . Atque ita quoque , si dividere oporteat $7\sqrt{-10}$ per $\sqrt{-2}$, sive $\sqrt{-1}$, quotiens fiet $7\sqrt{5}$.

382. Ex quo patet , quotientem , qui oritur,

tur ex divisione duarum quantitatum imaginariarum, esse quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Verum hic quoque notandum est, quod realis illa quantitas, quæ habetur pro quotiente, sumenda est semper negativa: adeo, ut si dividi debeat $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$, quemadmodum quotiens est $\sqrt{9}$; ita pro radice quadrata numeri 9, sumere oportet -3 , & non $+3$: quo fit, ut ratione divisionis 1 sit ad -3 , ut est $\sqrt{-2}$ ad $\sqrt{-18}$.

383. Ex eo autem, quod sit -3 quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$; sequitur debere esse $+3$ quotientem, qui oritur, dividendo, sive $\sqrt{-18}$ per $-\sqrt{-2}$, sive $\sqrt{-18}$ per $\sqrt{-2}$. Unde generaliter, sicuti quotiens, qui oritur ex divisione duarum quantitatum imaginariarum est semper quantitas realis; ita realis hæc quantitas erit negativa, quum quantitates imaginariæ, ad dividendum propositæ, iisdem signis afficiuntur; & vicissim positiva, quum contrariis signis sunt affectæ.

384. Cæterum, si dividenda sit, vel quantitas imaginaria per quantitatem aliam realem, vel quantitas realis per quantitatem aliam imaginariam; quotiens erit quantitas imaginaria, affecta signo $+$, aut $-$, prout quantitates, ad dividendum propositæ, contrariis, aut iisdem signis afficiuntur. Ita quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{-12}$ per $\sqrt{2}$, erit $-\sqrt{-6}$. Atque ita quoque, si dividere oporteat 4 per $-\sqrt{-2}$, hoc est $\sqrt{16}$ per $-\sqrt{-2}$, quotiens fiet $+\sqrt{-8}$.

*III. Formatio potestatum, & extractio radicum
ex quantitatibus imaginariis.*

385. **U**T quantitates imaginariæ ad datam quamcumque potestatem eleventur, neque etiam necesse est, ad simpliciores suos terminos eas revocare; quum sufficiat, ad potestatem illam attollere, tam coefficientes, si quos habent, quam quantitates, sub signis existentes. Qua ratione quantitatis imaginariæ $2\sqrt{} \rightarrow 3$ quadratum erit $4\sqrt{9}$, cubus $8\sqrt{} \rightarrow 27$, quadrato-quadratum $16\sqrt{81}$, quadrato-cubus $32\sqrt{} \rightarrow 243$, atque ita deinceps. Pariterque alterius hujus quantitatis imaginariæ $3\sqrt{} \rightarrow 2$ secunda potestas erit $9\sqrt{4}$, tertia potestas $27\sqrt{} \rightarrow 8$, quarta potestas $81\sqrt{16}$, quinta potestas $243\sqrt{} \rightarrow 32$, atque ita de aliis.

386. Unde patet, quantitatum imaginariarum, de quibus hic agimus, potestates omnes ordinis imparis esse quantitates alias similiter imaginarias; omnes vero potestates ordinis paris esse quantitates veras, ac reales. Sed reales quantitates, quas nobis suppetunt potestates pares quantitatum imaginariarum, nec item omnes sunt ejusdem speciei. Oriuntur siquidem negativæ, quum semisses exponentium ipsarum potestatum sunt numeri impares; & per contrarium prodeunt positivæ, quum iidem semisses sunt numeri pares.

387. Neque vero difficile id erit ostendere. Quum enim $\sqrt{} \rightarrow 3$ sit quadrata radix quantitatis negativæ $\rightarrow 3$; utique debet esse $\rightarrow 3$ quadratum ex $\sqrt{} \rightarrow 3$. Jam vero omnes aliæ potestates

states ordinis paris ejusdem quantitatis imaginariæ $\sqrt{\quad} \rightarrow 2$, relate ad ejus quadratum $\rightarrow 3$, merentur * nomen secundæ, tertiæ, quartæ, * *art. 79.* &c. Quare, quum hujusmodi potestates ipsius $\rightarrow 3$ sint 9, $\rightarrow 27$, 81, &c.; tales etiam erunt omnes aliæ potestates ordinis paris quantitatis imaginariæ $\sqrt{\quad} \rightarrow 3$; & propterea erunt negativæ, ubi semisses suorum exponentium sunt numeri impares; & vicissim positivæ, ubi iidem exponentium semisses sunt numeri pares.

388. Quantum ad extractionem radicum ex quantitibus imaginariis, nec item ulla opus est earum ad simpliciores suas expressiones reductione; quin præstat, ad eam commodè peragendam, ipsos, si quos habent, coefficientes regula, superius * tradita, sub radicali signo reponere. ** art. 365.* Extrahetur ergo quæcumque radix ex quantitate aliqua imaginaria; vel eam eliciendo ex quantitate, sub signo existente; vel, si id fieri nequit, multiplicando indicem signi radicalis per indicem quæsitæ radicis.

389. Ita radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{\quad} \rightarrow 8$ erit $\sqrt{\quad} \rightarrow 2$; sed radix quadrata ejusdem imaginariæ quantitatis erit $\sqrt{\quad} \rightarrow 8$. Similiter radix quinta quantitatis imaginariæ $\sqrt{\quad} \rightarrow 243$ erit $\sqrt{\quad} \rightarrow 3$; sed radix quarta ejusdem quantitatis imaginariæ erit $\sqrt{\quad} \rightarrow 243$. Unde patet, cujuscumque imaginariæ quantitatis radices omnes esse similiter quantitates imaginarias, nec ex illa extrahi posse radicem ullam, quæ quantitatem realem, sive positivam, sive negativam nobis exhibeat.

390. Sed notandum hoc loco est, quod, etsi radices omnes cujuslibet quantitatis imaginariæ
sint

sint aliæ quantitates similiter imaginariæ ; attamen extat inter eas hujusmodi discrimen , quod eas , quarum indices sunt numeri impares , sunt imaginariæ primi ordinis , perinde ac est ipsa quantitas , unde eædem extrahuntur ; illæ vero , quarum indices sunt numeri pares , sunt quantitates imaginariæ ordinum superiorum .

391. Nec obscura est hujus rei ratio . Nam , si quælibet radix extrahatur , multiplicando indicem signi radicalis per indicem quæsitæ radicis ; afficietur quæsitæ radix tali signo radicali , ut index ejus erit ipse radicis index duplicatus . Unde per
art. 357. ea , quæ superius * dicta sunt de imaginariarum in ordines distinctione , omnino necesse est , ut sint imaginariæ primi ordinis radices illæ , quarum indices sunt numeri impares ; & vicissim ordinum superiorum , quarum indices sunt numeri pares .

392. Atque hac occasione obiter notetur hic velim , regulas calculi imaginariarum primi ordinis non omnino habere locum in imaginariis ordinum superiorum . Jam enim vidimus paulo
art. 386. ante * , quod , ubi quantitas imaginaria est primi ordinis , sint similiter imaginariæ , omnes potestates , quarum indices sunt numeri impares ; & vicissim reales , singulæ potestates , quarum indices sunt numeri pares . Sed non perinde res est , quum agitur de imaginariis ordinum superiorum .

393. Nam , si exempli gratia , quantitas imaginaria sit secundi ordinis ; erunt pariter imaginariæ , non modo omnes potestates , quarum indices sunt numeri impares , verum etiam eæ potestates , quarum indices dimidiati sunt numeri
 im-

impares. Quantitatis quippe negativæ $\sqrt{-2}$ radix quarta tantundem valet, ac radix quadrata ipsius $\sqrt{2}$. Unde omnino necesse est, ut quadratum ipsius $\sqrt{4} \rightarrow 2$ sit $\sqrt{-2}$,

394. Sed semper ac quadratum, seu secunda potestas ipsius $\sqrt{4} \rightarrow 2$ est $\sqrt{-2}$, necesse est pariter, ut sit $\sqrt{-8}$ sexta ejus potestas, $\sqrt{-32}$ potestas decima, atque ita de aliis. Nam istiusmodi potestates, quarum exponentes dimidiati sunt numeri impares, relate ad quadratum, eodem cum iis censendæ sunt, quæ ipsos numeros impares pro suis exponentibus habent. * art. 79.

395. Quum ergo quantitas imaginaria est secundi ordinis, eæ tantum ipsius potestates sunt quantitates reales, quarum exponentes dimidiati sunt numeri pares. Atque istæ nec etiam ejusdem indolis omnes deprehenduntur. Nam erunt negativæ, quum quadrantes eorundem exponentium sunt numeri impares; erunt vero positivæ, quum iidem quadrantes sunt numeri pares.

396. Nulli enim dubium esse potest, quin quarta potestas quantitatis imaginariæ $\sqrt{4} \rightarrow 2$ sit $\rightarrow 2$. Unde prono alveo fluit, debere esse 4 octavam ejus potestatem, $\rightarrow 8$ potestatem duodecimam, 16 potestatem decimam sextam, atque ita deinceps: Nam hujusmodi potestates, relate ad quartam, merentur * nomen secundæ, tertiæ, * art. 79. quartæ, &c.; adeoque habentur, sumendo ipsius $\rightarrow 2$ quadratum, cubum, quadrato-quadratum, &c.

IV. *Genesis*, & *calculus imaginariarum compositarum*.

397. **D**istinctio quantitatum in simplices, & compositas habet etiam locum in quantitativibus imaginariis. Si enim contingat, ut imaginariæ quantitates adhæreant aliis, five realibus, five imaginariis, ope signorum $+$, & $-$; tunc eæ dicentur compositæ. Unde perspicuum est, quantitates imaginarias compositas oriri similiter ex simplicium additione, & subtractione.

398. Qua autem ratione fieri debeat calculus imaginariarum compositarum, haud difficile erit ex dictis eruere. Sint enim primo addendæ duæ imaginariæ compositæ $3 - \sqrt{-50}$, & $5 + \sqrt{-18}$. Jam summa ipsarum esse debet $3 - \sqrt{-50} + 5 + \sqrt{-18}$. Verum, quia $3 + 5$ idem est, ac 8 ; & $- \sqrt{-50} + \sqrt{-18}$ perinde valet, ac $- \sqrt{-8}$; erit eadem summa paulo simplicius $8 - \sqrt{-8}$. Atque ita quoque si $\sqrt{12} + \sqrt{-32}$ addi debeat cum $\sqrt{27} - \sqrt{-50}$, summa erit $\sqrt{75} - \sqrt{-2}$.

399. Oporteat secundo, subducere imaginariam compositam $5 + \sqrt{-18}$ ex $8 - \sqrt{-8}$, quæ est quantitas alia imaginaria similiter composita. Jam residuum, quod inde oritur, esse debet $8 - \sqrt{-8} - 5 - \sqrt{-18}$. Est autem $8 - 5$ idem, ac 3 ; estque etiam $- \sqrt{-8} - \sqrt{-18}$ idem, ac $- \sqrt{-50}$. Quare idem residuum erit paulo simplicius $3 - \sqrt{-50}$. Atque ita quoque id, quod remanet, subducendo $\sqrt{12} + \sqrt{-32}$ ex $\sqrt{75} - \sqrt{-2}$, erit $\sqrt{27} - \sqrt{-50}$.

400.

400. Multiplicandæ sint tertio per se invicem imaginariæ duæ compositæ $3 + \sqrt{-12}$, & $4 - \sqrt{-12}$. Fiant quatuor multiplicationes: nimirum primo multiplicetur 3 per 4, deinde $+\sqrt{-12}$ per 4, postea 3 per $-\sqrt{-12}$, & denique $+\sqrt{-12}$ per $-\sqrt{-12}$. Jamque, additis in unum productis omnibus, quæ ex quatuor hisce multiplicationibus oriuntur, fiet $12 - 4\sqrt{-12} + 12 + 3\sqrt{-12} = 3 + 6$, sive etiam $18 - 5\sqrt{-12}$ productum quæsitum.

401. Dividenda sit quarto imaginaria composita $18 - 3\sqrt{-12}$ per $1 + \sqrt{-12}$, quæ est alia quantitas imaginaria similiter composita. Capiatur ipsius $1 + \sqrt{-12}$ quantitas contraria $1 - \sqrt{-12}$; & per eam multiplicetur, tam $18 - 3\sqrt{-12}$, quam $1 + \sqrt{-12}$. Dividatur porro primum productum $12 + 21\sqrt{-12}$ per secundum productum 3; & fiet $4 - 7\sqrt{-12}$ quotiens propositæ divisionis.

402. Elevanda sit quinto ad quadratum quantitas imaginaria composita $5 - \sqrt{-3}$. Fiat primo quadratum ex 5; tum capiatur duplum ejus, quod producit, multiplicando 5 per $-\sqrt{-3}$; denique fiat quadratum ex $-\sqrt{-3}$. Et, additis simul omnibus hisce quantitatibus, erit $25 + 10\sqrt{-3} - 3$, hoc est $22 + 10\sqrt{-3}$ quadratum quæsitum.

403. Denique extrahenda sit quadrata radix ex quantitate imaginaria composita $22 + 10\sqrt{-3}$. Quoniam quadratum ex 22 est 484, & quadratum ex $10\sqrt{-3}$ est -300 ; erit differentia horum quadratorum 784, cujus quadrata radix est 28. Addatur ergo 28 cum 22, & erit 25 summæ semissis. Subtrahatur deinde 28 ex

22, & erit $\rightarrow 3$ semissis residui. Quumque radices quadratæ horum semissium sint 5, & $\sqrt{} \rightarrow 3$; erit $5 \rightarrow \sqrt{} \rightarrow 3$ radix optata.

404. Neque verò mirum censeretur, quod radices eorum semissium signo $\rightarrow$ connectuntur. Jam enim vidimus supra *, quod ubi quantitas
 *Art. 379.
 380. realis per alteram imaginariam multiplicatur, productum affici debet signo +, aut $\rightarrow$, prout ipsæ quantitates, ad invicem multiplicandæ, contrariis, aut iisdem signis afficiuntur. Unde, quia id, quod producitur ex multiplicatione radicum eorum semissium, oriri debet affectum signo +; omnino necesse est, ut connectantur signo $\rightarrow$ ipsæ eorum semissium radices.

405. Cæterum, si ex aliqua quantitate imaginaria composita radix extrahi nequit; tunc poterit ea designari, adhibito signo alio radicali, quod ad quantitatem totam se extendat. Atque hac ratione patet, dari, non modo imaginarias compositas, verum etiam imaginarias universales. Sed de istarum calculo nihil hoc loco subnectemus; tum quia tantum non impossibile est, ut ad calculum poni debeant; tum etiam, quia ex iis, quæ hæcenus dicta sunt, facile erit, intelligere, quo pacto fieri debeat calculus ipsarum.

V. Impossibilitas relativa quantitatum imaginariarum plenius vindicata.

406. **E**X calculo mox tradito quantitatatum imaginariarum, quæ ad primum ordinem referuntur, perspicuum est, eas non aliter quantitibus realibus opponi, quam reales negativæ realibus positivis adversantur.
 Nam

Nam primo, quemadmodum, multiplicando, aut dividendo quantitatem positivam per quantitatem negativam, producitur quantitas alia similiter negativa; ita, multiplicando, aut dividendo quantitatem realem per quantitatem imaginariam, producitur quantitas alia similiter imaginaria. Et secundo, sicuti productum, vel quotiens, qui oritur ex duabus quantitativis negativis, per se mutuo multiplicatis, vel divisis, est quantitas positiva; ita id, quod producitur ex multiplicatione, aut divisione duarum quantitatum imaginaryarum, est quantitas, non quidem imaginaria, sed realis.

407. Verum quidem est, postremum istud non ab omnibus omnino Algebristis admitti; quum non desint, qui in suis Algebræ Elementis doceant, quantitates duas imaginarias, per se mutuo multiplicatas, vel divisas quantitatem aliam imaginariam producere. Sed eos in maximo errore versari, ostendi potest; tum quia ex ipsa genesi quantitatum imaginaryarum notum est, productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, esse quantitatem realem -3 ; tum etiam, quia in confesso est apud omnes, idem esse ex producto, vel quoutiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quam ipsas eorum quadratorum radices per se mutuo multiplicare, vel dividere.

408. Jam, quum quantitates imaginariæ, saltem quæ primi ordinis sunt, perinde realibus opponantur, ac reales negativæ realibus positivis; illud exinde vero simillimum fit, quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, non esse absolute impossibiles, sed tantum, quia in statu realium

litum positivarum, vel negativarum concipi non possunt. Oppositio namque, quæ est inter positivas, & negativas, nihil obstat, quominus negativæ sint perinde reales, ac positivæ. Itaque eadem ratione, tametsi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, opponantur iis, quæ vulgo dicuntur reales: non hinc tamen colligi potest, eas absolute impossibiles esse; sed tantum inferre licet, quod sicuti quantitates negativæ sunt impossibiles in statu positivarum, ita quantitates imaginariæ impossibilitatem involvant in utroque eorum statuum, in quibus reales quantitates considerantur.

409. Atque hinc vero simillimum etiam redditur id, quod jam superius innuimus: nimirum, *art. 351.* quod in Geometria, sicuti quantitates positivæ designantur per lineas, tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas, tendentes ad plagam oppositam; ita quantitates imaginariæ, saltem quæ primi ordinis sunt, designari debent per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam linea, quæ plagas istas ostendit, secat ad rectos angulos lineam, ostendentem plagas duas priores: ex quo fit, ut unæ aliis opponantur ex diametro. Quocirca lineæ, tendentes ad plagas illas intermedias, designare debent quantitates contrarias iis, quas designant lineæ, tendentes ad plagas principales: proindeque, quum istæ lineæ designent quantitates, quæ vulgo dicuntur reales; eæ non alias poterunt designare, quam ipsas illas, quæ ad primum ordinem imaginariarum referuntur.

410. Huc accedit & altera ratio, quæ forsan demonstrationis vices geret apud eos, qui probe

be norint , quam bene Algebra cum Geometria consentiat : nimirum, quod, sicuti quantitatum, quæ vulgo dicuntur reales , aliæ sunt positivæ, aliæ negativæ ; ita quantitates , quæ vocantur imaginariæ , esse possunt, non modo positivæ, verum etiam negativæ. Sic radix quadrata quantitatis negativæ $\rightarrow 2$, ut superius etiam dictum ^{Art. 354.} est , designari potest , tam per $+\sqrt{}$ $\rightarrow 2$, quam per $-\sqrt{}$ $\rightarrow 2$; quia , juxta regulas signorum, utriusque quadratum est $\rightarrow 2$. Itaque, quia plagæ illæ intermediæ opponuntur etiam inter se; exhiberi sane poterunt per lineas , tendentes ad unam illarum , quantitates imaginariæ positivæ; & per lineas, tendentes ad plagam alteram, quantitates imaginariæ negativæ.

411. Quæ quidem si ita vera sint , quemadmodum maximam verisimilitudinis speciem præferre videntur , illud ex iis colligi jure optimo potest , inter quantitates , qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri ; quum omnes sint nihilo majores , omnes æque reales , ac veræ : sed omnem oppositionem oriri ex eo , quod quædam concipi debeant in statu uno , & aliæ in statu contrario; indeque ortas esse eas quantitatum distinctiones , quod aliæ sunt positivæ , seu nihilo majores, aliæ negativæ, seu nihilo minores; quodque etiam quædam sunt reales , seu vere , ac realiter existentes , quædam imaginariæ , hoc est, quæ tantum finguntur , ac imaginantur.

412. Hunc autem diversum statum nihil obstare , quominus positivæ cum negativis , reales cum imaginariis comparentur ; non est , quod in dubium possit revocari. Nam, etsi quantitates, quæ comparantur inter se , Euclide ipso docen-

Tom. I.

M

te

te, debeant esse unius, ejusdemque generis; tales tamen censendæ sunt, non quidem ratione status, in quo considerantur, sed ratione ejus, per quod quantitatis nomen merentur: adeo, ut nec linea cum superficie, nec superficies cum corpore possit comparari, quia scilicet diversa ratione quantitates appellantur. Unde, quum quantitates negativæ, propter solam negationem, non sint diversi generis a positivis; falluntur ii, qui falli eos arbitrantur, penes quos 1 est ad -1 , ut -1 ad 1.

413. Interim, etsi sola diversitas status non efficiat, ut quantitates dici debeant diversi generis; non hinc tamen negamus, diversum illum statum etiam attendendum esse, quo quatuor quantitates dici possint proportionales. Vera
 * art. 79. etenim proportionis idea, ut superius viderimus, hæc est, ut tunc quidem dicendæ sint proportionales quatuor quantitates, quotiescumque, quidquid efficitur a prima, ut secundam adæquet, illud idem fieri debet a tertia, ut adæquet quartam. Unde quatuor quantitates, non solum tales esse debent, ut prima perinde contineat secundam, ac tertia continet quartam; verum etiam, ut status primæ ad statum secundæ perinde se habeat, ac status tertiæ ad statum quartæ.

SE

S E C T I O I I I.

De Calculo Serierum Infinitarum.

414. **D**Uabus præcedentibus sectionibus, ea de calculo litterali, seu specioso a nobis tradita sunt, quæ vulgo Algebristæ in suis Algebræ Elementis de eo tradere consueverunt. Sed, præter illa, pertinent ad eundem calculum quamplura alia, quibus longe ultra in hac scientia progredi licet. Unde, ne aliquid circa calculum omittamus, quod ad maiorem Algebræ perfectionem deinceps conferre queat; non gravabimur, paulo uberiores reddere priorem hunc librum nostrorum Algebræ Elementorum.

415. Quæ autem circa calculum ulterius a nobis in hoc libro tradenda sunt, ut sub initium * pariter innuimus, ad duo summa capita reducuntur: nimirum ad series infinitas, & ad generalem potestatum theoriam. Quare duabus præcedentibus sectionibus duas alias subnectemus; ac in ista quidem agemus de calculo serierum infinitarum; tum sectione sequenti theoriam potestatum ad suam universalitatem revocare conabimur. * art. 3.

416. Jam doctrina serierum infinitarum intelligi rite non potest, nisi cognita prius distinctione quantitatum in indefinite magnas, & parvas; & intellectis item variis ordinibus, qui ex utriusque generis quantitatis fieri debent. Unde, priusquam serierum infinitarum calculum

aggruamur, ostendemus breviter, unde nam
oriatur distinctio quantitatum in indefinite ma-
gnas, & parvas; quæ item fiat ratione, ut tam
illæ, quam istæ in varios ordines dividi debeant.

C A P U T I.

*Distinctio quantitatum in indefinite ma-
gnas, & parvas.*

417. **U**T rectius intelligatur, tam di-
stinctio quantitatum in indefini-
te magnas, & parvas, quam earundem in certos
ordines distributio; rem, oportet, paulo altius
repetamus, & quæ sit vera notio quantitatis,
paucis prius explicemus. Etsi enim quantitas sit
totius Matheſeos objectum, & id omne, de quo
edisserunt Mathematici, ad quantitatem perti-
neat; asserere tamen non vereor, nihil tam ab-
ditum esse, etiam apud vulgus Mathematicorum,
quam id, quod nomine quantitatis intelligi
debet.

*I. Notio quantitatis, & per quid discreta
differat a continua.*

418. **V**ulgo quantum appellatur id o-
mne, quod ex partibus præexi-
stentibus constat. Et, juxta hanc quantitatis
notionem, duæ ejus species passim distinguun-
tur, continua, & discreta. Vocatur enim quan-
titas continua, cujus partes sunt simul copula-
tæ. Vocatur vero quantitas discreta, cujus par-
tes

tes vicissim sunt a se mutuo sejunctæ . Unde differentia inter quantitatem continuam , & quantitatem discretam a partium unione , & separatione communiter deducitur.

419. Sed, hoc tantum inter utramque quantitatis speciem discrimine posito , non satis intelligi potest , cur continua sit semper , & omnifariam divisibilis ; vicissim vero discreta determinatas quasdam divisiones dumtaxat admittat. Itaque , qui supra vulgus sapiunt , differentiam inter continuum, & discretum, non modo ex unione , ac separatione partium ; verum etiam ex earum numero , seu multitudine repetendam esse arbitrantur.

420. Sic igitur statuunt, ut habenda sit velut quantitas continua , cujus partes non modo simul cohærent , verum etiam numero infinitæ deprehenduntur ; & per contrarium , ut censenda sit quantitas discreta , quæ partes habet , & numero finitas , & a se mutuo sejunctas. Sed hujusmodi systema nec etiam omni vacat difficultate . Sic enim oporteret , duas alias quantitatis species admittere ; unam , cujus partes cohærent inter se , & sunt numero finitæ ; alteram , quæ ex partibus constat , & numero infinitis , & a se mutuo sejunctis.

421. Ne igitur aliæ duæ istæ quantitatis species essent admittendæ, illud oporteret ostendere , quod cohæsiō partium , quam continui natura requirit , omnino exigit , ut partes illæ sint numero infinitæ ; & vicissim , ut partium distinctio , quam discreti notio involvit , subsistere nequeat , nisi eædem partes finitæ numero statuantur . Verum , quum id nec ab ullo adhuc

fit ostensum, nec ab aliquo unquam ostendetur; omnino necesse est, ut longe aliter de quantitate sentiamus.

422. Et quidem, si nihil solliciti de quantitate discreta, in continuam statim inquirimus; facile erit, naturam istius perfecte assequi. Quum enim in quantitate continua nullas partes, realiter a se mutuo distinctas, intueamur; nihil certe ad credendum nos inducet, adesse in ea aliquem numerum partium, ex quibus eadem coalescit. Quare poterit illa considerari, non quidem ut complexus, seu aggregatum partium præexistentium; sed tantummodo velut totum, natura sua divisibile.

423. Licebit ergo, vocare quantitatem continuam, non quæ ex partibus componitur, sed quæ natura sua divisibilis est, & per divisionem fit partium capax. Nec ideo putandum est, aliquas dari continuæ quantitatis partes præexistentes; sed eæ in ipsa subnascuntur, ubi experitur eam divisionem, quam natura sua suscipere potest. Plane vero, quum in partes scissa est, & consideratur velut composita ex partibus illis; tunc sortitur naturam aliam, & discreta quantitas est appellanda.

424. Hinc quantitas continua præcedit discretam; & pessime se gerunt, qui nulla continui habita ratione, statim ad discretum animum volvunt. Extat autem inter continuum, & discretum illud discrimen, quod continuum est unum natura sua, fitque multiplex per divisionem; cujus est capax; vicissim vero discretum natura quidem est multiplex, fitque unum, colligendo simul discriptas illas partes, ex quibus compositum censetur.

425.

425. Verum, ut differentia, quæ inter utramque quantitatis speciem intercedit, plenius innotescat, præstat, divisionis ejus, cujus continua quantitas est capax, paulo intimius naturam, ac indolem perscrutari. Nimirum duabus ea conditionibus est prædita. Primo enim peragi potest semper, nec ullibi limitem agnoscit. Deinde vero, non determinata aliqua ratione, sed omnifariam fieri potest.

426. Jam quantitas discreta, quum ex partibus sit composita, in partes quoque dividi potest. Verum, quum non in alias partes sit divisibilis, quam in eas, ex quibus jam componitur; utique ejus divisio non gaudet iis proprietatibus, quibus continuæ quantitatis divisibilitas pollet. Neque enim quantitatem discretam continuo dividere licet; nec ejus divisio subinde fieri potest, ut quæcumque optata pars ex ea detrahi queat.

427. Ita, si habeatur quantitas aliqua discreta, ex decem tantum partibus composita; ejus divisio eousque progreditur, donec decem illæ partes rursus fuerint a se mutuo sejunctæ. Et ex eadem discreta quantitate poterit quidem dimidia, quinta, aut decima pars detrahi; sed tertiam, quartam, sextam, aut aliam quamvis partem nequaquam ex ea subducere licebit; quum hujusmodi divisiones compositioni ejus omnino adversentur.

428. Neque dicas, ex quolibet numero posse per fractiones quamlibet partem detrahi. Nam respondetur, tunc numerum naturam asumere quantitatis continuæ; indeque fieri, ut omnifariam partitionem ejus instituere liceat.

M 4 Quod

Quod quidem mirum esse non debet . Nam , ut
art. 313. diximus superius * , quilibet numerus potest
 quamcumque quantitatem nobis designare; adeo-
 que , repræsentando nobis eam quantitatem , fit
 capax omnium divisionum , quas quantitas illa
 suscipere potest.

429. Quod quum ita sit , en quoque discrimen aliud , quod inter quantitatem continuam , & quantitatem discretam intercedit : nimirum , quod illa dividi potest in infinitum , & quamcumque optatam partem ex ea detrahere licet; vicissim vero ista dumtaxat resolvi potest in eas partes , ex quibus jam componitur , nec aliam partem ex ea subducere fas est , quam quæ compositioni ejus non adversatur.

*II. Genesis quantitatis , ejusque augenda ,
 vel minuenda ratio .*

430. **Q**Uæ hætenus de quantitate disputavimus , huc fere redeunt ; quod quæ primo sub contemplationem cadere debet , est quantitas continua ; quod hujus nullæ dantur partes præexistentes , sed consideranda est velut quid , natura sua divisibile ; quod ejus divisibilitas nullibi limitem agnoscit , nec determinata aliqua ratione , sed omnifariam fieri potest ; quodque demum eadem quantitas continua evadit discreta , atque adeo alterius indolis , ubi patitur eam divisionem , cujus capax est natura sua .

431. Ut autem ulterius viam nobis aperiamus ad id , quod erat præcipuum , inquirendum est modo in genesein ipsius quantitatis , & in id an-
 ni-

nitendum, ut quo pacto oriatur quantitas, quæve item ratione augeatur, aut minuatur, intelligi possit. Et quidem, quantum ad *genesim* discretæ quantitatis, nullam ea patitur difficultatem. Oritur enim ex actuali divisione quantitatis continuæ; adeoque augetur per appositionem aliarum partium, & minuitur per subtractionem earum, ex quibus jam constat.

432. Sed non perinde res est de quantitate continua. Hæc, etsi in partes sit divisibilis; ex partibus tamen præexistentibus non componitur. Unde multum abest, ut oriatur per appositionem partium; & procul est etiam, ut ejus incrementum, aut decrementum partium additioni, aut deductioni ferri possit acceptum. Unde ergo repetenda sit *genesis* quantitatis continuæ, & qua ratione suscipiat eadem suum incrementum, aut decrementum; necesse est, hic paucis aperire.

433. Sane, pro explicanda *genesis* quantitatis continuæ, variæ hypotheses a Mathematicis sunt excogitatæ; sed nulla aptior, magisque ejus naturæ consona meo judicio deprehenditur, quam quæ a motu rem repetit: nimirum in eo, de quo agitur, quantitatis genere concipiendum est primo signum aliquod prorsus indivisibile; tum per continuum hujus signi fluxum, seu motum quæsitam quantitatem oriri, putandum est.

434. Ad hunc modum Veteres Geometræ tradiderunt *genesim* quantitatum, quæ in Geometria considerantur. Jam enim notum est, tria esse harum quantitatum genera; lineam, quæ unicam tantum dimensionem habet; superficiem, cui duæ insunt dimensiones; & solidum, quod

quod tribus dimensionibus constat . Profecto autem lineam per motum puncti , superficiem per motum lineæ , & solidum per motum superficiei oriri docuerunt.

435. Nec dubium esse potest , quin pro genesi cujusque harum quantitatum signum assumpserint prorsus indivisibile . Ut enim punctum , velut omnis expers dimensionis , est quid indivisibile , tam relate ad lineam , quam ex ipsa ejus natura ; ita linea , velut expers latitudinis , haberi debet , velut quid indivisibile , relate ad superficiem ; pariterque superficies , quum careat profunditate , ut quid indivisibile , relate ad solidum , debet existimari.

436. Non dissimiliter iidem Veteres Geometræ tradiderunt genesim figurarum specialium. Oriri namq; docuerunt, parallelogrammum ex latione unius rectæ super rectam aliam immobilem ; circulum ex rotatione radii circa unum ejus extremum fixum , & immobile ; sphaeram ex revolutione semicirculi circa suam diametrum fixam , & quiescentem ; cylindrum ex uniformi latione rectæ per circumferentias immobiles duorum circulorum æqualium , & sibi invicem æquidistantium ; atque ita de aliis.

437. Hac autem ratione , non modo quantitates geometricæ , sed & quævis aliæ possunt oriri . Tempus enim , exempli gratia , velut fluxus signi illius indivisibilis , quod instans dicitur , potest haberi . Verum circa tempus illud peculiari quadam ratione obtinet , quod non aliter oriri concipiendum est , quam per fluxum instantis æquabilem , ac uniformem , hoc est , qui neque acceleretur , neque retardetur . Nam profecto
tem-

tempus labitur æquabiliter, nec ejus labendi ratio unquam intenditur, aut remittitur.

438. Loquimur vero de tempore absoluto, & non relativo; hoc est de duratione, & perseverantia rerum existentium, & non de motu solis, quo vulgo tempus metimur. Neque enim nos latet, motum solis non esse æquabilem, ac uniformem, & inæquales esse dies naturales, qui vulgo tamquam æquales habentur. Sed neque etiam nos fugit, motum illum non esse accuratam temporis mensuram, & corrigere Astronomos eam inæqualitatem, ut verum tempus possint habere.

439. Et sane æquum erat, ut tempus laberetur constanter, ac uniformiter. Tempore enim metimur alios aliorum signorum fluxus, seu motus; putamusque hos celeriores, aut tardiores, prout quantitates, æqualibus temporibus genitæ, sunt majores, vel minores. Unde omnino necesse erat, ut tempus fluere æquabiliter, ac uniformiter. Nam aliter, nec de æqualitate partium ejus certi quidpiam statui, nec ipsi aliorum signorum motus inter se mutuo comparari potuissent.

440. Ut ergo ad propositum redeamus, non aliter oriri censenda est quantitas continua, quam per fluxum signi alicujus indivisibilis, ad eam producendam apti. Id vero signum, non velut pars genitæ quantitatis debet haberi, sed simpliciter tamquam terminus ejus: eadem ferme ratione, ac punctum habetur, velut terminus lineæ; lnea, velut terminus superficiei; & superficies, velut terminus corporis.

441. Hinc generatur quantitas continua,
non

non repetita ejus signi appositione , sed excur-
su illius per locum , ut ita dicam , quo quanti-
tas continetur . Jam enim omnia locantur ; in
tempore quidem, quoad ordinem successionis; in
spatio vero , quoad ordinem situs . Sed , tum
tempus , & spatium , cum omnes alias quantita-
tes, sua quoque loca habere, putandum est : quæ
saltem in modo concipiendi ab ipsis quantitati-
bus differunt.

442. Cæterum, sicuti oritur quantitas con-
tinua per fluxum signi alicujus indivisibilis , ad
eam producendam apti; ita eadem augetur, suum-
que subit augmentum , ubi idem signum fluere
pergit . Minuitur vero , & decrementum patitur
quantitas continua, quotiescumque signum illud,
fluxu contrario , redit ad principium , unde
fluere cœperat . Atque hac ratione perspicuum
est , quantitatem eo usque minui posse , ut eva-
dat , vel plane nulla , vel etiam negativa.

443. Quod si contingat , ut quantitas ali-
qua maneat eadem , & invariata , interea ac aliæ
augentur , ac minuuntur ; tum destitisse fluere
signum suum , oportet cogitemus . Unde obiter
notetur, hic velim, quod sicuti relate ad tempus
fluxus instantis , nec nullus evadere potest , nec
item variari ; ita , relate ad aliam quamvis quan-
titem, fluxus signi sui esse potest , & nullus , &
constans , & variabilis : nimirum nullus , quum
quantitas eadem , ac immutata manet ; constans,
quum augetur , vel minuitur in eadem ratione
cum ipso tempore ; ac denique variabilis , quum
ejus incrementum , aut decrementum fit in alia
quavis ratione.

III. *Quantitatum indefinite parvarum ortus ;
& natura.*

444. **O** Stensa genesi quantitatum , & explicata ratione, qua augentur, ac minuuntur ; videamus modo , unde fiat , ut eadem distingui debeant in indefinite magnas, & parvas . Et quidem , quum oriatur quantitas quævis, per fluxum signi ejus indivisibilis, quod aptum est ad eam producendam ; facile erit intelligere , quod in genesi cujusque quantitatis considerari debet velocitas , qua signum illud fluit indefinenter.

445. Jam ista velocitas quantitibus indefinite parvis locum præbet. Ea enim est, ut quantitas, dato quovis tempore genita , quum eadem semper manet , nec unquam mutatur ; est vero in prima augmenti jam nascentis ratione , quum variabilis est , & continuo patitur mutationem. Nam , ut ut mutationi velocitas illa sit obnoxia ; haberi tamen potest velut constans , ac uniformis , ubi augmentum illud incipit oriri.

446. Hinc , sicuti ad augmenta jam jam nascentia oportet confugere , quotiescumque signorum , quibus quantitates generantur , variables velocitates debent definiri ; ita augmenta illa velut quantitates indefinite parvæ debent haberi . Et quoniam indefinita ista parvitas intelligenda est , relate ad quantitates , quæ subeunt eadem illa augmenta ; hinc est , ut vicissim quantitates istæ , relate ad ea , velut indefinite magnæ debeant existimari.

447. Concipiamus ergo , fluere signum ali-
quod,

quod, & fluxu suo, tum quantitatem generare, cum eandem perpetuo augere. Jam augmentum nascens, relate ad quantitatem jam genitam, quantitas indefinite parva nominatur. Per contrarium vero quantitas jam genita, relate ad nascens illud augmentum, quantitas indefinite magna vocitatur. Adhibentur vero vocabula ista; quia, quum illiusmodi augmentum in prima sui origine consideretur, idem respectu quantitatis, cui accedit, est indefinitæ plane parvitas, & in computu ejus omnino negligi potest.

448. Etsi autem nascentia ista quantitatum augmenta sint indefinitæ parvitas, relate ad quantitates, quibus accedunt, neque adeo eas sensibilibiter adaugeant; possunt tamen inter se mutuo comparari, & per quantitates finitas eorum rationes exhiberi. Quod ut uno, aut altero exemplo hic ostendamus, notabimus primo, arcum jam jam nascentem cujuslibet curvæ posse velut exiguam rectam considerari, coincidentem cum recta illa, quæ curvam in eo loco contingit.

FIG. 3. 449. Esto enim recta quævis AB, eique alia ad datum angulum applicetur AC. Exeat punctum aliquod ex loco A, quod interea ac moveatur velocitate ut ut variabili super AC, feratur recta ista AC motu parallelo, & si placet æquabili super AB. Jam punctum illud, subiens quoque motum rectæ AC, describet in plano rectarum AB, AC lineam curvam AMX. Sit ergo Mx arcus aliquis nascens curvæ hujus. Dico, arcum istum Mx considerari posse velut exiguam rectam, coincidentem cum recta MT, quæ curvam tangit in M.

450.

450. Ducantur namque ad puncta M , & m rectæ NM , nm , ipsi AC parallelæ. Jamque, ubi nascitur arcus Mm , erit Nn augmentum ipsius AN . Et, si ducatur MO , ipsi AB parallela, erit quoque Om augmentum ipsius NM . Ista porro augmenta immutatis fere velocitatibus produciuntur. Quare, ducta inter ipsas Nm , nm recta alia sr , eidem AC parallela; erit * ut Nn * art. 445. ad Nt , ita Om ad sr . Sed Nn est ad Nt , ut MO ad Ms . Quare erit ex æquali, ut MO ad Ms , ita Om ad sr : & propterea punctum r locabitur in eadem recta cum punctis M , & m .

451. Simili ratione ostendetur, quodvis aliud punctum ejusdem arcus Mm in eadem recta locari. Quare ipse arcus Mm velut exigua recta debet haberi. Quod vero recta ista coincidat cum tangente MT ; id ex notione tangentis profluit. Considerando etenim lineas, velut ortas ex motu punctorum, non aliud erit discriminis inter tangentem, & secantem, quam quod in loco occursum punctum describens rectam, & punctum describens curvam feruntur eadem directione, quum recta est tangens; & directionibus diversis, quum recta est secans. Unde omnino necesse, ut tangens MT intercipiat longitudine sua arcum Mm ; quippe qui velut jam nascens immutata, tum velocitate, cum directione describitur.

452. Hoc prænotato, maximum in doctrina curvarum usum habente, jam primum rei, de qua agitur, exemplum suppeditat nobis idem schema, quod præ manibus habemus; quum facile sit ostendere, augmenta nascentia rectarum AN , NM , & arcus AM esse inter se, ut latera trian-

- trianguli TNM , Ponatur enim, quod arcus Mm sit nascens augmentum ipsius AM . Jamque,
 *art.450. iisdem ut supra * manentibus, erunt MO , Om nascentia augmenta ipsarum AN , NM . Sed triangulum MOm in forma sua nascente est æquiangulum triangulo TNM ; quum arcus Mm
 *art.448. sit exigua recta * coincidens cum tangente MT . Quare, tria illa nascentia augmenta Mm , MO , Om proportionalia erunt tribus rectis finitis MT , NT , NM .

453. Deinde, ut aliud ejusdem rei exemplum afferamus, revolvatur recta CM circa polum C , & hac ejus revolutione secet interea rectam aliam positione datam AB . Demittatur super AB perpendicularis CD . Et nascentia augmenta ipsarum AM , CM erunt, ut rectæ CM , DM . Est enim Mm nascens augmentum ipsius AM . Jamque, si juncta Cm , describatur centro C , intervalloque CM arcus MO , erit Om nascens augmentum alterius CM . Quia autem
 *art.448. arcus MO ab ejus tangente * non differt, triangulum MOm in forma sua nascente erit æquiangulum triangulo CDm . Unde erit, ut Mm ad Om , ita Cm ad Dm . Sed Cm , Dm non differunt * sensibilibiter ab ipsis CM , DM . Quare
 *art.447. erit quoque, ut Mm ad Om , ita CM ad DM .

454. Denique ultimum rei, de qua agitur, exemplum subsistet nobis species, a præcedente non dissimilis. Nimirum recta CM revolutione sua circa polum C secet non unam, sed rectas duas positione datas AB , AE . Et nascentia augmenta ipsarum AM , AN erunt in ratione composita ex AM ad AN , & ex CM ad CN . Si enim Mm sit nascens augmentum ipsius AM ;
 jun-



juncta Cm , fiet Nn augmentum nascens alterius
 AN. Et quoniam, ducta MO , ipsi AE paral-
 lala; fiunt æquiangula, tam duo triangula MOm ,
 Anm , quam triangula duo CmO , CNn ; erit,
 ut Mm ad MO , ita Am ad An , sive ita AM ad
 AN ; & ut MO ad Nn , ita CM ad CN . Sed
 Mm est ad Nn in ratione composita ex Mm ad
 MO , & ex MO ad Nn . Quare Mm ad Nn ha-
 bebunt quoque rationem compositam ex AM ad
 AN , & ex CM ad CN .

455. Nec reticebimus hoc loco, quod eadem determinatio pariter obtinet, si recta revolvens CM, loco rectorum, secet in punctis M, & N duas quasvis curvas positione datas, & in locis intersectionum M, & N tangant curvas istas rectæ duæ AB, AE, sibi invicem occurrentes in A. Nam augmentum nascens curvæ, quam tangit recta AB, ad augmentum nascens curvæ, quam tangit recta AE, adhuc erit in ratione composita ex AM ad AN, & ex CM ad CN; quum nascentia augmenta earum curvarum * *art. 443.* coincident cum rectis AB, AE. Sed idem etiam eveniet, si recta CM, non quidem revolvatur circa polum immobilem C, sed curvam aliquam positione datam perpetuo tangat alicubi in C.

IV. *Quantitatum indefinite parvarum in ordines distinctio.*

456. **V** Idimus *, distinctiōni quantita- *art. 445
tum in indefinite magnas, &
parvas præbere locum velocitates signorum, qui-
bus quantitates ipsæ generantur. Nam, sicuti
Tom. I. N ve-

- adeo proportionē correspondere ei, quod accedit incremento primo velocitatis. Unde, quum
- *art. 446. illud sit *indefinitæ parvitatis relatæ ad ipsum, cui accedit, velocitatis incrementum; erit ea differentiarum differentia pariter indefinite parva relatæ ad differentiam priorem: & propterea, sicut
- *art. 459, hæc est *indefinites indefinite parva respectu genitæ quantitatis, spectatque adeo ad secundum genus quantitatum indefinite parvarum; ita illa relatæ ad eandem quantitatem erit parvitatis adeo indefinitæ, ut ad tertium genus quantitatum indefinite parvarum debeat referri.

463. Oriuntur ergo quantitates indefinite parvæ tertii generis in hypothesi, quod augeatur indefinenter, tam velocitas primitiva signi, per cujus fluxum quantitas generatur, quam incrementum quodque nascens ejus velocitatis. Unde sedulo notandum hoc loco est, quod si augeatur dumtaxat velocitas primitiva signi, & incrementa ejus nascentia maneat semper eadem; nullæ erunt quantitates indefinite parvæ tertii generis. Eodem autem argumento ostendimus, oriri quantitates indefinite parvas quarti generis in hypothesi, quod augeatur, & velocitas primitiva signi, & ejus incrementum nascens, & id, quod huic rursus accedit. Atque hac ratione perspicuum est, in infinitum progredi licere.

464. Cæterum eadem quantitatum indefinite parvarum genera subnascuntur, si ponamus velocitatem signi, fluxu suo quantitatem producentis, non quidem augeri, sed minui. Nam,
- *art. 445, sicuti ex primitiva illa velocitate oriuntur *quantitates indefinite parvæ primi generis; ita de-

decremento, quod eadem velocitas primo loco patitur, ferenda est accepta genesis quantitatum indefinite parvarum, quæ secundi sunt generis; ex ea, quam ratione prioris decrementi rursus subit, diminutione suam trahunt originem quantitates indefinite parvæ tertii generis; atque ita deinceps. Quorum quidem demonstrationes sunt prorsus eadem; & superfluum puto, eas denuo repetere.

465. Juvat interim, in summam contrahere, nec non paulo intimius rationem hic perpendere, qua hujusmodi quantitates indefinite parvæ oriri concipiuntur. Nimirum jam quantitas generari, & augeri intelligitur per fluxum signi, ad eam producendam apti. Sed iste fluxus, ut tempore perficitur, sic etiam velocitate quadam debet absolvi. Rursus autem, & tempus, & velocitas per fluxus suorum signorum generantur. Verum fluxus temporis est * *art. 437* semper constans, ac uniformis; non ita vero fluxus velocitatis, ut qui, & nullus, & constans, & variabilis esse * potest. *art. 443*

466. Incrementa ergo nascentia temporis considerari debent velut æqualia. In lapsu autem eorum temporis incrementorum, si velocitas signi, quantitatem producentis, nullum patiatur fluxum; erunt genitæ quantitatis nascentia augmenta perpetuo pariter æqualia; adeoque in genesis ejus tantum quantitates indefinite parvas primi generis considerare licebit. Quod si vero velocitas illa fluxum subeat constantem, ac uniformem; inæqualia quidem erunt nascentia augmenta quantitatis genitæ, sed eorum differentia primæ fient æquales: quo fit, ut in ejus

quantitatis productione usq; ad quantitates indefinite parvas secundi generis progredi fas sit.

467. Superest tertius casus, nimirum, quum velocitas signi, quantitatem producentis, fluxu gaudet variabili. Et quum id contingit, inæqualitas etiam ad differentiarum differentias, imo pro lege variationis longe ultra se extendet: proindeque in genesi hujus quantitatis alia quoque genera quantitatum indefinite parvarum locum habebunt. Hæc autem quum ita sint, abunde, opinor, liquet, varia quantitatum indefinite parvarum genera, non jam ex fluxu temporis, qui est semper constans, & uniformis; sed ex fluxu velocitatis, qui esse potest, & nullus, & constans, & variabilis, repeti debere.

468. Sed notandum hoc loco est, quod quum plures quantitates simul producuntur, fieri potest, ut non eodem modo fluant velocitates, quibus eæ generantur. Neque enim quicquam obstat, ut pro una fluxus velocitatis sit nullus; pro aliis vero, vel constans sit, vel etiam variabilis. Unde, quum id contingit, relate ad priorem quantitatem tantum quantitates indefinite parvæ primi generis locum habebunt; relate vero ad alias, eas quoque, quæ secundi sunt generis, & forte etiam aliorum considerare oportebit. Si quæ vero sit quantitas, quæ inter eas eadem semper manet, ac immutata; respectu illius fluxus velocitatis, non jam ut nullus, sed velut imaginarius debet haberi.

469. Nec silentio hic præteribimus, quod ubi plures quantitates simul generantur, præstat pro una ex iis fluxum velocitatis, velut nullum, assumere; ut scilicet per augmenta ejus nascen-
tia,

tia, quæ produnt * æqualia, designari possint * *art. 466*.
 æqualia illa incrementa, quæ subit tempus lapsu suo constanti, ac uniformi. Jam enim, ad determinanda nascentia augmenta, quæ singulis quantitatibus indefinenter accedunt, opus est æqualibus iis temporis incrementis. Unde, ut eorum accurata mensura habeatur, non abs re erit, considerare aliquam quantitatem, velut crescentem in eadem omnino ratione cum ipso tempore.

*V. Theoria præcedentis præclara quædam
 consuetaria.*

470. **E**X iis, quæ hætenus dicta sunt de variis generibus quantitatum indefinite parvarum, plura modo præclara consuetaria colligi possunt, suos deinceps usus habitura. Priusquam vero ea deducamus, notetur hic velim, quod sicuti quantitates jam genitæ vulgo dicuntur finitæ; ita augmenta illa indefinite parva, quæ eis indefinenter accedunt, tum quantitates infinitesimales, cum etiam infinitesimæ passim appellantur. Unde, quum volupe sit in posterum, tali nomine ea vocitare; operæ pretium est, ad infinitesimas transferre distinctionem illam quantitatum indefinite parvarum, quam paulo ante ostensam exhibuimus.

471. Dicemus ergo infinitesimam primi generis, primum nascens augmentum alicujus finitæ quantitatis; dicemus infinitesimam secundi generis, differentiam inter augmentum primum, & augmentum secundum; dicemus infinitesimam tertii generis, differentiam, quæ inter duos illius-

modi proximas differentias intercedit ; atque ita deinceps . Quumque notiones sint omnino eadem ; erit infinitesima primi generis indefinite parva relate ad quantitatem finitam ; infinitesima secundi generis indefinita adhuc parvitatibus relate ad infinitesimam generis primi ; infinitesima tertii generis similiter indefinite parva respectui infinitesimæ generis secundi ; atque ita de aliis.

472. Jam ex tradita ista quantitatum infinitesimarum idea illud primo colligi potest , quod , sicuti quantitates finitæ augentur quidem per additionem aliarum quantitatum finitarum , sed non item per additionem infinitesimarum , quæ relate ad eas * negligi possunt ; sic & ipsæ quantitates infinitesimæ tunc quidem additione aliarum infinitesimarum augentur , quotiescumque sunt ejusdem generis ; sed non item , quum infinitesimæ , quæ iis adduntur , fuerint generis inferioris . Qua ratione duplum , aut triplum alicujus infinitesimæ non est fere idem cum ipsa infinitesima ; sed infinitesima alicujus generis , aucta infinitesima generis inferioris , nihil obstat , quominus pro ipsa infinitesima capiatur.

473. Colligi potest secundo , eam quantitatem , ad quam infinitesima alicujus generis habet eandem rationem , quam quantitas finita ad quantitatem finitam , esse infinitesimam aliam ejusdem generis ; eam vero , ad quam ita se habet infinitesima alicujus generis , ut est quantitas finita ad infinitesimam generis primi , esse infinitesimam generis proxime inferioris ; & eam demum , ad quam infinitesima alicujus generis est vicissim , ut infinitesima generis primi ad quantitatem finitam , esse infinitesimam generis proxime
suæ

superioris. Unde, quia unitas, per quam multiplicatio, & divisio ad proportionem revocantur, est quantitas finita; omnino necesse est, ut multiplicando, vel dividendo infinitesimam alicujus generis per quamlibet quantitatem finitam, producat infinitesima alia ejusdem generis; multiplicando vero eam, vel dividendo per infinitesimam generis primi, oriatur infinitesima alia generis, vel proxime inferioris, vel proxime superioris.

474. Colligi potest demum, eam quantitatem, ad quam infinitesima alicujus generis habet eandem rationem, quam quantitas finita ad infinitesimam alterius cujusvis generis, esse infinitesimam aliam generis, tot gradibus relate ad illam depressioris, quot ista distat a quantitate finita; eam vero, ad quam infinitesima alicujus generis est vicissim, ut infinitesima alterius cujusvis generis ad quantitatem finitam, esse infinitesimam aliam generis, tot gradibus respectu illius altioris, quot a quantitate finita hæc altera distat. Unde consequens fit, ut si alicujus generis infinitesima multiplicetur, vel dividatur per aliam cujusvis alterius generis infinitesimam, oriatur infinitesima tertia generis, tot gradibus relate ad priorem depressioris, vel altioris, quot secunda distat a quantitate finita.

475. Atque hinc liquet ulterius, infinitesimæ, quæ oriuntur ex multiplicatione, vel divisione aliarum infinitesimarum, non melius cognosci posse, ad quod genus sint revocandæ, quam adhibitis ipsis infinitesimarum exponentibus; quandoquidem summa exponentium mul-

tiplicandi, & multiplicatoris dabit exponentem producti; exponens vero divisoris, subductus ab exponente dividendi, relinquet exponentem quotientis. Ita infinitesima primi generis, multiplicata per infinitesimam secundi generis, producet infinitesimam generis tertii, quia $1 + 2$ est 3 ; & infinitesima secundi generis, multiplicata per infinitesimam generis tertii, dabit pro producto infinitesimam generis quinti, quia $2 + 3$ est 5 . Atque ita quoque id, quod producitur, dividendo infinitesimam generis quarti per infinitesimam generis tertii, erit infinitesima primi generis, quia $4 - 3$ est 1 ; & id, quod gignitur, dividendo infinitesimam noni generis per infinitesimam generis quarti, erit infinitesima generis quinti, quia $9 - 4$ est 5 .

476. Jam exponens quantitatis finitæ in ordine ad exponentes infinitesimarum est zero, seu nihil. Unde, si infinitesima alicujus generis dividatur per infinitesimam generis ejusdem, quotientis erit quantitas finita; quandoquidem, facta exponentium subtractione, nihil remanet. Sed, si porro dividatur infinitesima generis secundi per infinitesimam generis tertii, tunc orietur in quotiente infinitesima, cujus exponens erit -1 ; quia scilicet $2 - 3$ est idem, ac -1 . Et similiter, si infinitesima generis tertii dividatur per infinitesimam generis quinti, producet infinitesima, cujus exponens erit -2 ; quia nempe $3 - 5$ perinde valet, ac -2 . Unde discimus, præter infinitesimas, quarum exponentes sunt positivi, dari infinitesimas alias, quarum exponentes sunt negativi.

477. Sed quæ sit natura harum infinitesim-

marum, quarum exponentes sunt negativi; haud arduum erit definire. Nimirum, quum negativum opponatur semper positivo, profecto, sicuti infinitesimæ, exponentes positivos habentes, designant quantitates indefinite parvas, relate ad quantitates finitas; ita infinitesimæ, quæ habent exponentes negativos, designare debent quantitates indefinite magnas, relate ad easdem finitas quantitates. Nec mirum. Nam, sicuti, descendendo a quantitate finita, varia infinitesimarum genera distinguere possunt; ita vicissim, ascendendo ab eadem finita quantitate, varia genera infinitorum poterunt considerari. Quæ ratione quantitas, quæ sit ad quantitatem finitam, ut est quantitas finita ad infinitesimam primi generis, dicenda est quantitas infinita generis primi. Et similiter quantitas, quæ ita se habeat ad quantitatem finitam, ut est quantitas finita ad infinitesimam secundi generis, quantitas infinita generis secundi poterit appellari.

478. Itaque, dividendo infinitesimam generis secundi per infinitesimam generis tertii, producet quantitas infinita generis primi; pariterque, dividendo infinitesimam tertii generis per infinitesimam generis quinti, quotiens erit quantitas infinita generis secundi. Sed & ipsæ quantitates infinitæ poterunt eadem ratione, tam inter se, quam cum ipsis infinitesimis multiplicari, ac dividi. Sic quantitas infinita generis primi, multiplicata per infinitesimam generis secundi, producet infinitesimam generis primi; divisa vero per eandem infinitesimam, dabit pro quotiente quantitatem infinitam generis tertii. Atque ita quoque infinitesima primi generis, mul-

multiplicata per quantitatem infinitam generis tertii, producet quantitatem infinitam generis secundi; divisa vero per eandem quantitatem infinitam, dabit pro quotiente infinitesimam generis quarti.

479. Atque hinc sequens theorema sua sponte profluit, quod si quantitas infinita cujuscumque generis multiplicetur per infinitesimam generis non dissimilis, productum sit semper quantitas finita; quandoquidem, additis simul exponentibus, summa sit zero, seu nihil. Unde vicissim duo alia theoremata colligere licebit. Primum est, quod si quantitas aliqua finita dividatur per infinitesimam cujuscumque generis, quotiens debet esse quantitas infinita generis non dissimilis. Alterum est, quod si quantitas aliqua finita dividatur e contra per quantitatem infinitam cujuscumque generis, quotiens oriri debet infinitesima generis non diversi.

480. Cæterum, si in constituendis generibus infinitesimarum eo usque cogitatione progredi fas sit, ut tandem ad zero absolutum deveniatur; omnino necesse est, ut vicissim in ordinandis generibus infinitorum eo usque ascendere liceat, ut tandem deveniatur ad infinitum absolutum. Unde non verebimur de infinito absoluto, & de zero absoluto hæc tria theoremata statuere. Primo, quod infinitum absolutum, ductum in zero absolutum, producit quantitatem finitam. Secundo, quod quantitas finita, divisa per zero absolutum, exhibet in quotiente infinitum absolutum. Et denique, quod quantitas finita, divisa vicissim per infinitum
tum

LIBER PRIMUS. 205
tum absolutum, producit e contra zero abso-
lutum,

C A P U T II.

Genesis, & natura serierum infin- itarum.

481. **S**eries infinitæ locum habent in calculo rationalium compositarum; æque oriuntur, vel a divisione, vel ab extractione radicum. Jam enim vidimus supra, utramque harum operationum non posse semper ad exitum perducī. Quumque id contingit quotientes quidem per fractiones, radices autem per radicales quantitates, diximus debere designari. Verum si libuerit, eas operationes in infinitum extendere, iisdem plane regulis, quæ pro ipsis traditæ sunt; tunc vitabuntur fractiones, & radicales quantitates, sed orientur quantitates aliæ, quæ quum ex infinitis numero terminis constent, serierum infinitarum nomine vocantur.

482. Hinc usus serierum infinitarum in calculo rationalium compositarum est, ut per eas vitentur, tum fractiones, cum radicales quantitates. Id autem intelligi debet; & de iis fractionibus, quarum denominatores ex duabus, aut pluribus partibus constant; & de iis quantitatibus radicalibus, quæ compositam aliquam quantitatem sub radicali signo complectuntur. Nam cæteroquin fractiones, quæ simplices quantitates pro suis denominatoribus habent, in ip-
sis

sis etiam seriebus infinitis occurrunt ; & quandoque ab iisdem seriebus , nec etiam eas radicales , quæ sub signo radicali simplicem continent quantitatem , excludere licebit.

1. Series numerorum naturalium ad examen revocata.

483. **T**heoriæ de seriebus infinitis duo prima facie negotium non leve faceffunt . Primum est , quod illiusmodi series , quum ex terminis a se mutuo sejunctis **art.423.* constent , discretæ quantitatis *** obtinent rationem : plane vero non apparet , fieri posse , ut discreta quantitas ex infinitis numero terminis coalescat ; quum notio numeri limitationem involvere videatur . Alterum est , quod nec etiam intelligi potest , quo pacto infiniti numero termini finitæ quantitatis valorem possint exhibere ; nam semper ac ponuntur numero infiniti , videtur , quod infinita pariter esse debet quantitas , quæ ex iis componitur.

484. Hæc duo igitur obstacula sunt a nobis removenda , priusquam infinitarum serierum genesis ostendamus . Et quantum ad primum , haud quidem negamus , series infinitas discretæ quantitatis rationem obtinere . Sed , quod discreta quantitas ex infinitis numero partibus componi nequeat ; id sane omnino negamus . **art.423.* Plane enim vidimus supra *** , discretam quantitatem oriri , quotiescumque ipsa quantitas continus subit eam divisionem , cujus natura sua est capax . Quum ergo divisibilitas quantitatis **art.425.* continuæ abeat *** in infinitum , nec ullibi terminum agno-

agnoscat; consequens est, ut etiam discreta quantitas possit ex infinitis numero partibus componi.

485. Neque dicas, continuæ quantitatis divisionem abire quidem in infinitum; sed non ideo licere ad ejus portionem infinitesimam tandem devenire. Id enim ultro concedimus; nec item negamus, serierum infinitarum, de quibus hic a nobis agendum est, non posse terminos omnes peragari. Hinc vero non sequitur, quod nequit quantitas discreta ex infinitis numero partibus componi. Dividatur namque per continuam, si placet, bisectionem quantitas aliqua continua in partes, decrecentes in ratione dupla. Jamque, si eodem tempore, quo ejus divisio peragitur, componatur ex partibus adeptis quantitas altera discreta; abunde liquet, non posse illius divisionem in infinitum abire, quin istius compositio in infinitum pariter progrediatur.

486. Et sane seriem numerorum naturalium, in qua suas sedes habent omnes discretæ quantitates, vel ex eo probari potest in infinitum abire, quod ipsa divisio quantitatis continuæ in infinitum pariter abit. Jam enim numeri naturales oriri concipiuntur per continuam unitatis additionem. Itaque, quia nova divisione numerus divisionum præcedentium unitate semper augetur; licebit, per repetitam divisionem quantitatis continuæ omnes gradatim numeros concipere. Unde, sicuti ea divisio nullibi terminum agnoscit, sed in infinitum potest promoveri; sic & numerorum nullus erit terminus, seu finis, sed ii quoque in infinitum pregredientur.

487.

487. Et si autem series numerorum naturalium nullibi sistatur, sed in infinitum abeat; non tamen censendi sunt ejusdem indolis numeri omnes, quos ea complectitur. Licebit ergo, in duo summa genera eos partiri. Unum namque genus erit eorum, in quibus quousque repetita sit unitas, mente assequi possumus. Et hujusmodi numeros effabiles, seu exprimibiles appellabimus; quia, sicuti ab unitate ad eos usque progredi licet, sic exprimi, enunciarique pariter possunt. Alterum genus erit illorum, qui quoties unitatem continent, nequit definiri. Et quum tales numeri nec item exprimi, enunciarique possint; ineffabiles, seu inexprimibiles eos dicemus.

488. Est vero inter utriusque generis numeros illud discrimen, quod qui prioris sunt generis, ordine sumpti, progressionem componunt dumtaxat arithmeticam; qui vero pertinet ad secundum genus, ubi ordine capiuntur, progressionem constituunt, tum arithmeticam, cum geometricam. Plane enim, quod utriusque generis numerorum progressio sit arithmetica; id ex eo liquet, quod ex unitate sæpius repetita omnes oriuntur. Quod autem ii, qui secundi sunt generis, constituent progressionem geometricam, suaderi id potest hac ratione.

489. Nimirum, jam convenit apud Geometras, æquales fieri tandem eas quantitates, quarum differentia minor semper, ac minor evadit. Capiantur ergo in serie numerorum naturalium duo numeri, se statim excipientes; tum in ordine ad eos quæraturs tertius geometricæ proportionalis. Sane hunc majorem esse eo, qui duos
il-

illos immediate subsequitur, haud quidem negamus; sed differentia inter utrumque eo minor deprehendetur, quo magis duo illi assumpti numeri ab unitate, seu principio seriei remouentur. Quare necesse est, ut tandem ei æqualis oriatur.

490. Sic tertius geometricæ proportionalis post 1, & 2 est 4, qui differt a 3 per unitatem. Sed tertius, qui geometricam proportionem constituit post 2, & 3, est 9: 2, qui differt a 4 per semissem unitatis. Et, qui geometrica proportionem excipit duos 3, & 4, est 16: 3, qui differt a 5 per unitatis trientem. Fit itaque differentia continuo minor, ac minor. Unde deveniendum est tandem ad numeros tales, ut, qui post ipsos est tertius geometricæ proportionalis, adæquet illum, qui in ipsa serie numerorum naturalium immediate eos subsequitur.

491. Quod autem hujusmodi sunt numeri illi, quos ineffabiles, seu inexprimibiles appellavimus, nec item in dubium potest revocari. Quantitates enim, quarum differentia sit semper minor, ac minor, tunc demum evadunt æquales, quum differentia illa oritur minor quavis differentia assignabili. Plane vero numeri inexprimibiles per id ipsum, quod exprimi nequeunt, majores sint oportet quocumque numero, qui possit assignari. Unde omnino necesse est, ut relate ad eos differentia illa, de qua agitur, fiat minor quacumque differentia assignabili.

492. Licebit ergo, demonstrationem ejus, de quo est quæstio, hunc in modum concipere. Sit n numerus aliquis inexprimibilis, adeoque major quocumque numero assignabili. Dico,

Tom. I.

O

ter-

tertium geometricæ proportionalem post n , & $n + 1$, esse $n + 2$. Si enim ille, per regulam passim notam, inveniatur, prodibit $n + 2 + 1 : n$. Sed $1 : n$ est fractio minor quacumque fractione assignabili. Quare talis etiam erit differentia inter $n + 2$, & $n + 2 + 1 : n$: proindeque numerus, qui post duos n , & $n + 1$ geometricam proportionem constituit, erit $n + 2$.

493. Atque hinc modo definiri quodammodo potest limes inter utrumque genus numerorum, tametsi ex uno in aliud genus, nec liceat transire, nec transitus intelligi possit. Nimirum, numeros exprimibiles ad eum usque progredi cogitandum est, donec unitas, per ipsum divisa, exhibet fractionem, tantum non evanescentem, relate ad eundem numerum. Per contrarium vero putandum est, incipere numeros inexprimibiles ab eo numero, per quem si unitas dividatur, oritur fractio, relate ad eum prorsus evanescens.

494. Unde etiam adumbrare quodammodo licebit numerum illum, qui pro infinito debet haberi, & ad quem usque progreditur series numerorum naturalium. Jam enim numerus infinitus talis sit oportet, ut per unitatis additionem non amplius augeatur. Quare fiet ei locus, quum relate ad eum ipsa unitas prorsus evanesceat: & propterea omnino necesse est, ut numerus infinitus sit ad eum, qui limes extat inter utrumque genus numerorum, ut est idem hic numerus ad unitatem.

495. Non inficior, computum istum nihil certi, ac determinati nobis exhibere. Sed meminisse oportet, quod agitur de numeris, qui natu-

tura sua nullam determinationem patiuntur. Fateor quoque, theoriam istam non omni prorsus difficultate vacare. Verum id limitationi nostræ mentis potius ferri debet acceptum; nec proinde in me suscipere vellem solutionem eorum omnium, quæ contra objici possunt. Ut autem pateat, theoriam istam a vero non abludere; ostendemus hic breviter, qua ratione ex iis numeris, quos vocamus ineffabiles, seu inexprimibiles, radicales numeri oriantur.

II. Numerorum radicalium, tum item fractionum natura, ac genesis explicata.

496. **I**N serie numerorum naturalium, qualem paulo ante descripsimus, omnes quantitatum rationes continentur. Jam enim in ea duo extant * numerorum genera; ^{* art. 437.} unum eorum, qui exprimi, enunciarique possunt; illorum alterum, quos nulla ratione exprimere, ac enunciare fas est. Quare, sicuti per numeros prioris generis exhibentur rationes quantitatum commensurabilium; ita per numeros alterius generis quantitatum incommensurabilium rationes vicissim poterunt exhiberi.

497 Ut, melius id intelligatur, præstat prius, inquirere in differentiam, quæ inter utriusque generis quantitates intercedit. Sane vulgo habentur, ut quantitates commensurabiles, quæ communem quandam mensuram admittunt; habentur vero, ut quantitates incommensurabiles, quarum nulla extat mensura communis. Sed huiusmodi definitiones non satis accuratæ videntur; quandoquidem omnes quantitates com-

munem aliquam mensuram admittunt.

498. Sint namque duæ quævis quantitates a , & b , una quidem major, & altera minor. Dico, duas istas quantitates admittere mensuram aliquam communem. Subducatur enim, quousque fieri potest, & minor ex majore, & residuum primum ex minore, & residuum secundum ex residuo primo, & residuum tertium ex residuo secundo, atque ita deinceps. Sane, evenire tandem oportebit, vel ut nihil prorsus supersit, vel ut id, quod remanet, sit indefinitæ parvitatæ, relate ad utramque quantitatem. Unde residuum, quod illud præcedit, erit utriusque quantitatis mensura communis.

499. Id quum ita sit, videtur, de utriusque generis quantitatis sic potius statui debere, ut quantitates dicantur commensurabiles, quum definiri potest, quoties earum mensura communis easdem metitur; dicantur vero incommensurabiles, quum vicissim determinari id nequit. Unde liquido patet, rationes quantitatum commensurabilium quærendas esse in numeris prioris generis; per contrarium vero rationes quantitatum incommensurabilium in numeris, qui secundi sunt generis, suas sedes habere.

500. Et quidem, si quantitatum rationes in propriis suis sedibus quærerentur, nulli forent numeri fracti, nulli item numeri radicales. Ponamus enim, quod duarum quantitatum a , & b mensura communis metitur quinquies majorem a , & ter minorem b . Jamque, si rationem earum quantitatum quæramus in sede sua propria; fiet, ut a ad b , ita 5 ad 3 . Sed quandoque pro prio-
re

re termino rationis assumimus ipsam unitatem; & tunc omnino necesse est, ut alter terminus sit numerus fractus, nimirum $3 : 5$.

501. Eadem ratione, si ponamus, duarum quantitatum a , & b mensuram communem adeo pluries eas metiri, ut numeri vicium sint prorsus inassignabiles; quærenda esset ratio earum quantitatum in iis numeris, quos vocavimus ineffabiles, seu inexprimibiles. Verum, quia limitatione nostræ mentis ad eos usque numeros progredi non possumus; pro priore termino ejus rationis assumimus numerum aliquem exprimibilem: quo fit, ut terminus alter ejusdem rationis esse debeat numerus aliquis radicalis.

502. Ut ergo oriuntur numeri fracti, quum rationes quantitatum commensurabilium ex propriis suis sedibus ad unitatem, seriei initium, retrahuntur; sic ortum habent numeri radicales, quum rationes quantitatum incommensurabilium quærentur, non jam inter numeros ineffabiles, in quibus habent suas proprias sedes, sed inter eos, qui exprimi, enunciarique possunt. Nec difficile id erit ostendere, si probe consideremus, numeros radicales aliud non esse, quam medias proportionales geometricas inter unitatem, & numeros illos, qui sub signis radicalibus reperiuntur.

503. Plane enim $\sqrt{2}$ est quadrata radix, elicienda ex numero 2. Quare ex superius * ostensis non aliud erit $\sqrt{2}$, quam media proportionalis inter 1, & 2. Similiter $\sqrt[3]{2}$ est radix cubica, extrahenda ex numero 2. Unde per id, quod supra * ostensum est, $\sqrt[3]{2}$ erit prima ex duabus mediis proportionalibus inter 1, & 2.

O 3

Et

Et generaliter, si index signi radicalis sit quilibet numerus n , & sub tali signo reperiatür numerus 2; erit istiusmodi numerus radicalis prima ex tot mediis proportionalibus inter 1, & 2, quot designat $n - 1$.

504. Hac observatione præmissa, memoria *art. 433.* modo recolamus id, quod supra * ostensum est circa numeros ineffabiles; nimirum, eos ordine sumptos, non modo arithmetica, sed geometrica quoque progressionem constituere. Inde enim sequitur, quod si N sit numerus aliquis ineffabilis, & inter 1, & 2 inveniantur tot mediarum proportionales geometricæ, quot designat $N - 1$; nequit N per unitatem exhiberi, nisi omnes alij ineffabiles numeri, qui cadunt inter N , & $2N$, per inventas medias proportionales exhibeantur.

505. Repræsentato namque per unitatem numero N , exhiberi debet per 2 numerus $2N$; quum sit, ut 1 ad 2, ita N ad $2N$. Jam vero omnes numeri ineffabiles, qui cadunt inter N , & $2N$, constituunt progressionem geometricam cum ipsis N , & $2N$. Quare inventis inter 1, & 2 totidem mediis geometricè proportionalibus, nonnisi per istas numeri ii ineffabiles debent repræsentari. Nec dubium esse potest, quin numerus harum mediarum esse debeat $N - 1$; quandoquidem inter N , & $2N$ tot præcise cadunt numeri inexprimibiles, quot designat $N - 1$.

506 Eadem autem ratione ostendemus, quod si numerus inexprimibilis N repræsentetur unitate, & inter 1, & 3 inveniantur tot mediarum proportionales geometricæ, quot designat $2N$

— 15.

$\rightarrow 1$; exhiberi debent per medias istas omnes numeri inexprimibiles , qui cadunt inter N , & $3N$. Et generaliter , si inter unitatem , & quemvis numerum exprimibilem n quærantur tot mediæ proportionales geometricæ , quot designat $nN \rightarrow N \rightarrow 1$, istæ exhibere debent omnes numeros inexprimibiles , qui cadunt inter N , & nN .

507. Atque hinc modo facile erit , ostendere , quod si rationis , inter duas quantitates incommensurabiles existentis , prior terminus sit numerus aliquis exprimibilis , terminus alter omnino esse debet numerus aliquis radicalis. Sint enim b , & a duæ quantitates incommensurabiles , b quidem minor , a vero major ; & rationis , inter ipsas existentis , prior terminus sit numerus aliquis exprimibilis , & si placet , ipsa unitas. Dico , terminum alterum omnino debere esse numerum aliquem radicalem.

508. Quoniam ex hypothese b , & a sunt duæ quantitates incommensurabiles ; earum mensura communis adeo pluries * easdem metietur , * *art. 499.* ut numeri vicium erunt prorsus inexprimibiles. Sit ergo N numerus inexprimibilis , indicans , quoties communis illa mensura metitur minorem b . Qui ergo indicabit , quoties eadem mensura communis metitur majorem a , major erit numero N : proindeque cadet inter N , & aliquem ejus multiplicem .

509. Sit nN multiplex iste . Et per ea , quæ mox * ostensa sunt , si inter unitatem , & numerum exprimibilem n quærantur tot mediæ proportionales geometricæ , quot designat $nN \rightarrow N \rightarrow 1$, & repræsentetur unitate numerus inexprimibilis N ; oportebit , exhibere per medias istas

O 4 omnes

omnes numeros inexprimibiles, qui cadunt inter N , & nN : proindeque per aliquam earumdem mediarum exhibendus erit numerus ille inexprimibilis, qui indicat, quoties communis mensura quantitatum b , & a metitur majorem a .

510. Jam vidimus paulo superius **, radices omnes numeri n non aliud esse, quam medias geometricè proportionales inter unitatem, & ipsum numerum n ; hoc est unam mediam, quum radix est quadrata; primam ex duabus mediis, quum radix est cubica; primam ex tribus mediis, quum radix est quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Quare, quum numerus inexprimibilis, indicans, quoties communis mensura quantitatum b , & a metitur majorem a ,
 * 418. 509. exhiberi * debet per unam ex tot mediis proportionalibus, inveniendis inter unitatem, & numerum n , quot designat $nN \rightarrow N \rightarrow 1$; omnino exhibendus ille erit per radicem aliquam numeri n .

511. Jam ergo extra omnem dubitationis aleam est, in serie numerorum naturalium, omnes quantitatum rationes contineri. Nec sane aliis opus essent numeris, si liceret, seriem illam ab una ad aliam extremitatem peragrarè; & per numeros ejus seriei convenientes, ac proprios omnes omnino quantitatum rationes exhiberentur. Verrum id mens nostra finita, ac limitata, nec gestit, nec patitur. Unde præter eos, qui dicuntur, & sunt naturales, alios oportuit numeros excogitare: qui proinde non sunt confundendi cum ipsis numeris naturalibus: aliter enim plura circa numeros paradoxa nobis sese offerent, quibus non aliter, quam distinctione illa, poterit accurate satisfieri.

III.

III. *Progressionēs geometricæ decreſcentes ad
examen revocatæ.*

512. **R** Emoto eo adverſus ſeries inſinitas obſtaculo, quod, velut diſcretæ quantitates, non videntur ex inſinitis numero terminis poſſe componi; nunc alterum obſtaculum oportet removeamus, quod non apparet, fieri poſſe, ut inſiniti numero termini finitam quantitatem quandoque componant. Et iſtud quidem obſtaculum vel exinde poſſet removeri, quod quantitas continua, etiam quum finita eſt, inſinitas ſubit diviſiones, inſinitumque adeo numerum partium nobis ſuppeditat. Sed, ut argumentum a diſcreta quantitate petamus, conſiderabimus hic progrefſiones geometricas decreſcentes, quarum termini, etſi numero inſiniti, ſimul tamen collecti finitam ſummam conſtituunt.

513. Hunc in finem ſciendum eſt primo, quod ſicuti progrefſiones geometricæ extendi poſſunt in inſinitum, nec ullibi limitem agnoſcunt; ſic eadem dicuntur decreſcentes, quum in iis quiſq; terminus eſt major ſuo ſubſequentē. Sit ergo a prior terminus progrefſionis, eademque decreſcat in ea ratione, quam habet a ad 1. Erit itaque $a : n$ ſecundus terminus, $a : n^2$ terminus tertius, $a : n^3$ terminus quartus, atque ita deinceps. Colligantur jam in unum omnes ejus termini, & fiet ſumma omnium æqualis quantitati finitæ $na : (n - 1)$.

514. Neque vero difficile id erit oſtendere. Quum enim progrefſio ſit decreſcens, ultimus
ejus

ejus terminus, si ita loqui fas sit, velut nullus debet haberi. Quare, si vocetur s summa omnium terminorum; erit adhuc s summa omnium antecedentium, & $s \rightarrow a$ summa omnium consequentium. Unde, quum ex notissimo theoremate Euclidæ esse debeat, ut s ad $s \rightarrow a$, ita n ad 1; erit convertendo, ut s ad a , ita n ad $n - 1$: proindeque summa quæsitæ s erit æqualis quantitati finitæ $na : (n - 1)$.

515. Quod si hæc demonstratio paulo durior videatur, quia de ultimo progressionis termino in ea fit mentio; licebit, eam lenire in hunc modum. Fiat rursus ab a progressio, decrescens in ea ratione, quam habet n ad 1, quæ continuetur usque ad alium quemvis terminum c . Dico, summam s omnium suorum terminorum esse $(na \rightarrow c) : (n \rightarrow 1)$. Nam in isto casu fit $s \rightarrow c$ summa omnium antecedentium, & $s \rightarrow a$ summa omnium consequentium. Unde, quum esse debeat, ut $s \rightarrow c$ ad $s \rightarrow a$, ita n ad 1; comperiemus summam quæsitam s æqualem quantitati $(na \rightarrow c) : (n \rightarrow 1)$.

516. Quoniam autem progressio continuo decrescit; termini ejus fiunt semper minores, ac minores. Nihil itaque obstat, pro c sumere terminum, qui sit indefinitæ parvitatæ relate ad priorem a . Quumque in isto casu $na \rightarrow c$ sit idem, ac na ; fiet summa omnium terminorum s æqualis quantitati $na : (n \rightarrow 1)$. Unde, si ostendi possit, omnes alios terminos progressionis, qui c subsequuntur, simul collectos exhibere summam indefinite parvam relate ad $na : (n \rightarrow 1)$; erit
 * art. 447. eadem quantitas $na : (n \rightarrow 1)$ summa totius progressionis,

517.

§17. Id vero nullo negotio ostendemus. Si enim capiatur in progressionem terminus alius, qui sit ad c , ut est c ad a ; hic erit $c^2 : a$, & relate ad ipsum c erit indefinitæ quoque parvitas. Unde summa terminorum, qui a c usque ad $c^2 : a$ progrediuntur, ex ostensis * erit $nc : (n - 1)$: *art. §16. quæ quidem est indefinitæ parvitas relate ad $na : (n - 1)$; quum ratio unius ad alteram sit illa eadem, quam habet c ad a .

§18. Eadem ratione, si capiatur in progressionem terminus alter, qui sit ad $c^2 : a$, ut est $c^2 : a$ ad c , sive etiam, ut est c ad a ; hic erit $c^3 : a^2$, & relate ad ipsum $c^2 : a$ erit pariter indefinite parvus. Quare summa terminorum, qui a $c^2 : a$ progrediuntur usque ad $c^3 : a^2$, per superius ostensa *, erit $nc^2 : a(n - 1)$: quæ est indefinitæ parvitas, non modo relate ad summam primam $na : (n - 1)$, verum etiam respectu alterius $nc : (n - 1)$; quum ratio, quæ inter ipsas intercedit, sit æqualis ei rationi, quam habet c ad a . *art. §16.

§19. Eodem prorsus argumento ostendemus, esse $nc^3 : a^2(n - 1)$ summam omnium terminorum, qui progrediuntur a $c^3 : a^2$ usque ad $c^4 : a^3$; esse $nc^4 : a^3(n - 1)$ summam omnium illorum, qui a $c^4 : a^3$ protrahuntur usque ad $c^5 : a^4$; atque ita deinceps. Unde, quia omnes istæ summæ ejus naturæ deprehenduntur, ut quælibet ipsarum sit indefinitæ parvitas, tum relate ad summam priorem $na : (n - 1)$, cum respectu ejus, quam immediate subsequitur; consequens * est, ut summa totius progressionis sit *art. 447. $na : (n - 1)$. 472.

§20. Non ergo dubitari potest, quod sit $na : (n - 1)$.

($n - 1$) summa omnium infinitorum terminorum progressionis geometricæ, incipientis ab a , & decrescens in ea ratione, quam habet n ad 1. Unde, ope hujus theorematidis generalis, facile erit, determinare summam finitam, quam omnes termini cujuscumque progressionis geometricæ decrescens simul collecti constituunt. Quod non abs re fore judicamus, uno, aut altero exemplo illustrare, ut eo magis pateat, infinitos numero terminos posse simul finitam quantitatem quandoque componere.

521. Primo itaque fiat progressio geometrica, subinde decrescens, ut quisque terminus subsequens sit semissis sui præcedentis. Jamque, si prior terminus statuatur a erit secundus $a : 2$, tertius $a : 4$, quartus $a : 8$, quintus $a : 16$, atque ita deinceps. Decrescit ergo in hoc casu progressio in ea ratione, quam habet 2 ad 1. Quare in theoremate generali erit 2 valor ipsius n : & propterea, sicuti, fractio $na : (n - 1)$ vertitur in $2a$; sic erit $2a$ summa omnium infinitorum terminorum constitutæ progressionis.

522. Fiat secundo progressio geometrica, tali pacto decrescens, ut quisque terminus subsequens sit triens sui præcedentis. Et siquidem prior terminus adhuc statuatur a ; erit secundus $a : 3$, tertius $a : 9$, quartus $a : 27$, quintus $a : 81$, atque ita deinceps. Jam in hoc casu progressio decrescit in ea ratione, quam habet 3 ad 1. Unde in theoremate generali erit 3 valor ipsius n : proindeque, quemadmodum fractio $na : (n - 1)$ evadit $3a : 2$; ita erit $3a : 2$ summa, quam constitutæ progressionis termini omnes simul collecti exhibent.

523. Fiat tertio progressio geometrica, ea lege decrefcentis, ut quilibet terminus subsequens sit quadrans sui præcedentis. Jamque, si pro termino priore capiatur pariter a , fiet secundus $a : 4$, tertius $a : 16$, quartus $a : 64$, quintus $a : 256$, atque ita deinceps. Et quoniam in hoc casu progressio decrefcit in ea ratione, quam habet 4 ad 1; crit 4 valor ipsius n in theoremate generali. Unde, sicuti fractio $na : (n - 1)$ evadit $4a : 3$; sic erit $4a : 3$ summa omnium infinitorum terminorum constitutæ progressionis.

524. Eadem ratione determinare licebit summas finitas omnium aliarum progressionum geometricarum, subinde decrefcientium, ut quisque terminus subsequens sit data pars aliquota sui antecedentis. Sed, si quisque terminus fuerit sui præcedentis pars data aliquanta, vi ejus theorematis generalis, adhuc finita summa totius progressionis poterit definiri. Ita, si progressio ea lege decrefcit, ut quisque terminus subsequens adæquet duos trientes sui præcedentis, & prior terminus statuatur a ; fiet summa omnium ejus infinitorum terminorum $3a$. Nam, quum in hac hypothefi progressio decrefcit in ea ratione, quam habet 3 : 2 ad 1; erit 3 : 2 valor ipsius n in theoremate generali; adeoque fractio $na : (n - 1)$ evadet $3a$.

525. Ope ejusdem theorematis generalis, determinari quoque potest summa omnium infinitorum terminorum progressionis geometricæ decrefcientis, in qua tantum per radicales numeros definire licet, quanto quisque terminus subsequens minor sit relate ad suum præcedentem. Ita, si velimus, unumquemque subsequen-

quentem adæquare eam partem sui præcedentis, quam denominat $\sqrt{2}$, & ponamus a esse primum progressionis terminum; fiet summa quæsitæ $a\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$. Nam in isto casu progressio decrescit in ea ratione, quam habet $\sqrt{2}$ ad 1; adeoque, quum fiat $\sqrt{2}$ valor ipsius n in theoremate generali, erit $a\sqrt{2} : (\sqrt{2} - 1)$ valor fractionis $na : (n - 1)$.

526. Cæterum nolo hic reticere, progressionis geometricæ decrescientis terminos omnes tunc quidem simul collectos exhibere summam finitam, quotiescumque sensibilibiter decrescit. Nam, si contingat, eam decrescere insensibiliter; adeo nempe, ut differentia terminorum rationis, in qua decrescit, sit indefinite parva, relate ad utrumque terminum; tunc summa orietur infinita. Quod sane, ex ipso theoremate generali abunde deducitur. Etenim, quum summa debeat esse generaliter æqualis fractioni
 *art. 479. $na : (n - 1)$; per ea, quæ superius ostensa sunt, liquet, valorem hujus fractionis debere esse indefinite magnum, quum $n - 1$ est indefinite parvitatatis relate ad n .

IV. Genesis serierum infinitarum ex divisione.

527. **R** Emotis iis obstaculis, quæ in doctrina serierum infinitarum moram facere poterant; ipsam modo earum serierum genefim, ac naturam ostendamus: Et
 *art. 481. quidem diximus initio hujus capituli, oriri series infinitas, vel a divisione rationalium compositarum, vel ab extractione radicum ex iisdem rationalibus. Unde primo ostendemus, quo pacto

Et oriantur series infinitæ ex divisione; tum, quæ ratione ab extractione radicum suam illæ originem trahant, explicabimus.

528. Notum est in divisione numerorum, quod quum divisor non est pars aliquota numeri dividendi, procedi potest per fractiones decimales in infinitum. Ad eundem itaque modum in divisione quantitatum, quæ Alphabeti litteris sunt designatæ, si contingat, ut divisor, qui ex duabus, aut pluribus partibus constet, non exacte contineatur in quantitate dividenda, divisio in infinitum per fractiones simplices poterit continuari.

529. Proponatur, exempli causa, dividenda quantitas simplex b^2 per quantitatem aliam compositam $a \longmapsto c$. Plane divisio fieri nequit; quia scilicet divisor $a \longmapsto c$ non exacte contineatur in quantitate dividenda b^2 : proindeque designandus est quotiens, quemadmodum suo loco docuimus, per fractionem compositam $b^2 : a \longmapsto c$. Sed, adhibitis fractionibus simplicibus, en quo pacto institui potest divisio, eademque in infinitum continuari.

530. Dividatur primo quantitas b^2 per primam partem divisoris a . Jamque, multiplicato quotiente $b^2 : a$ per divisorem ipsum $a \longmapsto c$, producit quantitas $(ab^2 \longmapsto cb^2) : a$, sive etiam $b^2 \longmapsto cb^2 : a$, quæ subtracta ex quantitate dividenda b^2 relinquit $cb^2 : a$. Itaque dividatur secundo residuum istud $cb^2 : a$ per eandem partem divisoris a ; & habebitur alter quotiens $cb^2 : a^2$.

531. Jam alter iste quotiens $cb^2 : a^2$, ductus in divisorem $a \longmapsto c$, producit quantitatem $(acb^2 \longmapsto c^2b^2)$:

$(a - cb^2) : a^2$, sive etiam $cb^2 : a - c^2b^2 : a^2$, quæ subducta ex illo residuo $cb^2 : a$ relinquit $c^2b^2 : a^2$. Quare dividatur tertio novum istud residuum per a , ut habeatur tertius quotiens $c^2b^2 : a^2$. Quumque ex hac divisione novum adhuc oriatur residuum, nec unquam divisio fieri potest exacte; liquet, operationem abire in infinitum, totumque adeo quotientem divisionis ex infinitis numero terminis compositum oriri.

532. Est autem integer divisionis quotiens series infinita $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 + \&c.$, cujus termini constituunt progressionem geometricam, in ea ratione progredientem, quam habet a ad c . Unde, ad continuandam seriem illam, trahentem a divisione originem suam, haud quidem necesse est, divisionem ipsam continuare; sed satis erit, ei progressionem geometricæ novos continuo terminos apponere.

533. Valor ergo compositæ fractionis $b^2 : (a - c)$ est series infinita $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 + \&c.$ Jam series ista fit $b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a + b^2 : a + \&c.$, hoc est fractio simplex $b^2 : a$ infinities sumpta, quum a , & c inter se sunt æquales. Unde, quia in hypothesi hujus æqualitatis $a - c$ idem est, ac zero, seu nihil; liquet
Cor. 430. veritas theorematis, superius * positi, nempe quod debet esse infinitus quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam per zero, seu nihil absolutum.

534. Et sane non video, cur id mirum nonnullis censeretur. Jam enim notum est, quotientem, qui oritur ex divisione alicujus datæ quan-

quantitatis , eo majorem oriri , quo minor est
quantitas altera, per quam dividitur. Quare, si hæc
minuatur in infinitum , hoc est eo usque , ut
evanescat , & fiat nulla ; omnino necesse est , ut
per contrarium quotiens augeatur in infinitum,
& infinitus prorsus evadat.

535. Neque vero , ut infinita evadit sum-
ma seriei infinitæ $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3$
 $+ c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5$ &c. , quum a & c inter
se sunt æquales ; sic pariter infinita censenda est
summa ejusdem seriei , quum a major est , quam
 c . Nam , etsi series illa etiam in hoc casu com-
ponatur ex infinitis numero terminis ; attamen
termini isti , ut jam dictum * est , constituunt * *art. 532.*
progressionem geometricam , decrecentem in ea
ratione , quam habet a ad c ; atque adeo , per
ea , quæ superius * ostensa sunt , iidem ter- * *art. 533.*
mini simul collecti component quantitatem fini-
tam.

536. Oritur autem hoc loco difficultas, quam
silentio præterire nolo. Nimirum, etsi verissimum
sit , summam seriei infinitæ $b^2 : a + cb^2 : a^2 +$
 $c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 +$ &c. esse fi-
nitam , quum a major est , quam c ; eadem tamen
summa prodit infinita , quum vicissim a minor
est , quam c ; quandoquidem in hoc casu termini
ipsius seriei constituunt progressionem geome-
tricam , crescentem in ea ratione , quam habet
 a ad c . Unde, quia in hypothesi, quod a sit minor,
quam c , fractio $b^2 : (a - c)$ sit negativa ; se-
queretur exinde, quantitatem finitam negativam
adæquare quantitatem infinitam positivam.

537. Pro hujus difficultatis enodatione ,
præstat prius advertere , quod per series infini-
tas

Tom. I.

P

tas

tas propius semper, ac propius ad quæsitæ quantitatis valorem debet accedi. Verum, ubi a minor est, quam c , tantum abest, ut capiendo a , velut primam partem divisoris, propius semper, ac propius ad quæsitum quotientem per continuam divisionem accedamus, quin potius magis semper, ac magis ab eo recedimus; quum id, quod superest in qualibet divisione, majus semper oriatur quantitate divisa.

538. Hinc itaque discimus, quod ubi a minor est, quam c , pro prima parte divisoris capi debet $\text{---}c$. Profecto autem dividendo b^2 per $\text{---}c + a$, emergit series infinita $\text{---}b^2 : c \text{---} ab^2 : c^2 \text{---} a^2b^2 : c^3 \text{---} a^3b^2 : c^4 \text{---} a^4b^2 : c^5 \text{---} \&c.$, cujus termini, quum constituent progressionem geometricam decreascentem, dabunt simul collecti summam finitam, eamque negativam. Unde, in constituendis seriebus infinitis, ope divisionis, in id sedulo incumbendum est, ut pro prima divisoris parte major semper quantitas capiatur.

539. Quod si volupe sit in casu, de quo agitur, seriem infinitam $b^2 : a + cb^2 : a^2 + c^2b^2 : a^3 + c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 + \&c.$ considerare, veluti ortam ex divisione quantitatis b^2 per aliam $a \text{---} c$; tunc natura illius seriei hæc erit, ut ad infinitum usque continuata debeat descendere per totidem terminos negativos usque ad $\text{---}b^2 : a$, ubi neque etiam sistitur, sed deprimitur adhuc in infinitum per terminos alios negativos $\text{---}b^2 : c \text{---} ab^2 : c^2 \text{---} a^2b^2 : c^3 \text{---} a^3b^2 : c^4 \text{---} a^4b^2 : c^5 \text{---} \&c.$; quo fit, ut deletis terminis, qui contrarietate signorum sese mutuo destruunt, reducatur ad $\text{---}b^2 : c \text{---} ab^2 : c^2 \text{---} a^2b^2 : c^3 \text{---} a^3b^2 :$

$a^3b^2 : c^4 - a^4b^2 : c^5 - \&c.$, cujus summa est
quantitas finita negativa.

540. Cæterum, si dividenda sit quantitas
simplex b^2 per aliam compositam $a + c$, & capia-
tur a , velut prima pars divisoris; habebitur pro
quotiente series infinita $b^2 : a - cb^2 : a^2 +$
 $c^2b^2 : a^3 - c^3b^2 : a^4 + c^4b^2 : a^5 - \&c.$, cujus
termini signis $+$, & $-$ alternatim afficiuntur.
Hinc vero paradoxum fuit non inelegans: nimi-
rum, quod series ista infinita $b^2 : a - b^2 : a +$
 $b^2 : a - b^2 : a + b^2 : a - \&c.$, cujus termini
contrarietate signorum sese mutuo destruere vi-
dentur, adæquat quantitatem finitam $b^2 : 2a$.
Nam, ubi a , & c ponuntur æquales, sicuti prior
series vertitur in illam, sic fractio $b^2 : (a + c)$
mutatur in hanc aliam $b^2 : 2a$.

541. Pro paradoxo hujus solutione, haud
quidem dici potest, quod ultimus seriei termi-
nus, exhausta infinitate, oritur affectus signo
 $+$. Sic enim fiet summa seriei $b^2 : a$, & non
 $b^2 : 2a$. Intelligetur autem, unde fuit parado-
xum istud, si dividatur b^2 per $a + a$. Hac si-
quidem ratione patebit, post duas quasque di-
visiones, sese destruere partes quotientis, sed
rursus emergere b^2 pro dividenda quantitate. Ex
quo fiet, ut, exhausta infinitate, ultimus seriei
terminus, non modo concipiendus sit affectus
signo $+$, verum etiam esse debeat $b^2 : 2a$; quia
id, quod ultimo relinquitur dividendum per
 $a + a$, sive etiam $2a$, est ipsa quantitas b^2 .

V. *Genesis serierum infinitarum ex extractione radicam.*

542. **N**on dissimiliter series infinitæ suum ortum trahunt ex extractione radicam. Jam enim notum est, quod quum radix extrahi debet ex numero aliquo, qui non sit potestas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, procedi potest per fractiones decimales in infinitum. Ad eundem itaque modum, quotiescumque in calculo litterali extrahi nequit quæsitæ radix ex rationali aliqua composita; adhibitis fractionibus simplicibus, exprimi illa poterit per seriem infinitorum numero terminorum. Quod ut liquido constet, dabimus hujus rei duplex specimen, unum in extractione radicis quadratæ, & alterum in extractione radicis cubicæ.

543. Proponatur itaque primo extrahenda quadrata radix ex $a^2 + b^2$. Hæc per regulam, superius traditam, nequit haberi. Nam quadratum quantitatis, duabus ex partibus constantis, componi debet * ex quadratis partium, duploque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione. Plane vero in proposita quantitate, etsi adsint quadrata partium a , & b , duplum tamen ejus, quod producitur ex iis, per se mutuo multiplicatis, minime adest. Quocirca radix illa designanda esset per $\sqrt{a^2 + b^2}$. Interim, continuata in infinitum operatione, quæ quadrata radix extrahitur, licebit, eandem illam radicem exprimere per seriem infinitorum numero terminorum,

544.

544. Primo igitur extrahatur quadrata radix ex priore termino a^2 ; eoque deleto, dividatur terminus alter b^2 per duplum ejus radicis $2a$. Jam, multiplicato postea quotiente hujus divisionis $b^2 : 2a$ per duplum illud, factoque quadrato ejusdem quotientis, oritur quantitas $b^2 + b^4 : 4a^2$, quæ subtracta ex quantitate proposita, priore termino multata, relinquitur $-b^4 : 4a^2$. Itaque, duplicata radice hætenus acquisita $a + b^2 : 2a$, per priorem ejus partem $2a$ dividatur residuum illud $-b^4 : 4a^2$; eritque quotiens $-b^4 : 8a^3$ pars tertia quæsitæ radicis.

545. Et quoniam quadratum hujus quotientis $b^8 : 64a^6$, additum ei, quod producitur, multiplicando duplum ipsius $a + b^2 : 2a$ per $-b^4 : 8a^3$ dat quantitatem $-b^4 : 4a^3 - b^6 : 8a^4 + b^8 : 64a^6$, quæ subducta ex illo residuo relinquit $+b^6 : 8a^4 - b^8 : 64a^6$; fiat rursus duplum radicis hætenus acquisitæ $a + b^2 : 2a - b^4 : 8a^3$, & per priorem ejus partem $2a$ dividatur prior terminus novi illius residui $+b^6 : 8a^4$; qua ratione alter hic quotiens $+b^6 : 16a^5$ erit pars quarta quæsitæ radicis. Quumque per hanc operationem novum adhuc oriatur residuum, nec unquam operatio fieri potest exacte; liquet, extractionem quæsitæ radicis abire in infinitum, ipsamque adeo radicem per seriem infinitorum numero terminorum expressam oriri.

546. Radix ergo quadrata propositæ quantitatis $a^2 + b^2$ est series infinita $a + b^2 : 2a - b^4 : 8a^3 + b^6 : 16a^5 - b^8 : 128a^7 + \&c.$; quæ quidem, sicuti mutatur in hanc aliam $a + a : 2 - a : 8 + a : 16 - 5a : 128 + \&c.$ quum par-

tes quantitatis propositæ a^2 , b^2 inter se sunt æquales; sic etiam fiet $1 + 1 : 2 \rightarrow 1 : 8 + 1 : 16 \rightarrow 5 : 128 + \&c.$; si earum partium unaquæque ponatur æqualis unitati. Unde, quia in hypothefi, quod, tam a^2 , quam b^2 adæquat unitatem, fit $a^2 + b^2$ numerus binarius; liquet, radicem quadratam numeri binarii esse seriem istam infinitam $1 + 1 : 2 \rightarrow 1 : 8 + 1 : 16 \rightarrow 5 : 128 + \&c.$

547. Similiter, si extrahenda proponatur radix quadrata ex quantitate $a^2 \rightarrow b^2$, hæc per regulam, superius traditam, neque etiam poterit haberi; tum quia deest id, quod bis oritur ex mutua multiplicatione partium a , & b ; tum etiam, quia non ambo quadrata partium signo + afficiuntur. Sed, adhibita vulgari radicem quadratam extrahendi ratione, & operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda series infinita $a \rightarrow b^2 : 2a \rightarrow b^4 : 8a^3 \rightarrow b^6 : 16a^5 \rightarrow 5b^8 : 128a^7 \rightarrow \&c.$, in qua, priore termino excepto, omnes alii signo — afficiuntur.

548. Sed hic difficultas oritur, prima facie non levis: nimirum, quod si radix quadrata quantitatis $a^2 \rightarrow b^2$ posset per series infinitas exhiberi, liceret quoque, quantitatem imaginariam per aliam quantitatem realem exprimere. Jam enim nihil vetat, supponere b^2 majorem, quam a^2 . Verum ista positione $a^2 \rightarrow b^2$ fit quantitas negativa; adeoque ejus quadrata radix est
Art. 309. quantitas imaginaria. Unde semper ac radix illa exhiberi potest generaliter per seriem infinitam $a \rightarrow b^2 : 2a \rightarrow b^4 : 8a^3 \rightarrow b^6 : 16a^5 \rightarrow 5b^8 : 128a^7 \rightarrow \&c.$; erit eadem hæc series expressa.

pressio ejus radice etiam , quum illa non est realis , sed evadit imaginaria .

549. Interim respondetur , sequi inde tale quidpiam , si in casu , quod b^2 major sit , quam a^2 , series ad quæsitæ radice valorem propius semper , ac propius accedat . Id autem tantum a vero abest , quin potius in eo casu series a quæsitæ radice valore magis semper , ac magis remotetur . Unde series infinita $a \rightarrow b^2 : 2a \rightarrow b^4 : 8a^3 \rightarrow b^6 : 16a^5 \rightarrow 5b^9 : 128a^7 \rightarrow \&c.$ exhibet quidem radicem quadratam quantitatis $a^2 \rightarrow b^2$, quum a^2 major est , quam b^2 ; sed minime illam repræsentat , quum vicissim a^2 minor est , quam b^2 .

550. Id ut rectius intelligatur , notandum est , in extractione radice ex data aliqua quantitate idcirco , per repetitas operationes , propius semper , ac propius ad ejus valorem accedi ; quia ipsa quantitas , unde radix est extrahenda , per easdem operationes , minor semper , ac minor evadit . Unde , si contingat , eandem illam quantitatem fieri semper majorem , ac majorem , quemadmodum proculdubio evenit in casu nostro , quum a^2 minor est , quam b^2 ; tunc a quæsitæ radice valore magis semper , ac magis disceditur .

551. Et sane in casu , quod a^2 minor est , quam b^2 , fiet quantitas , per repetitas operationes , minor semper , ac minor , si radix extrahatur , non jam ex $a^2 \rightarrow b^2$, sed ex $\rightarrow b^2 + a^2$, ita ut incipiatur operatio a parte negativa $\rightarrow b^2$. Verum , quum sic operabitur , emerget series $b\sqrt{\rightarrow 1 + a^2 : 2b\sqrt{\rightarrow 1 + a^4 : 8b^3\sqrt{\rightarrow 1 + a^6 : 16b^5\sqrt{\rightarrow 1 + 5a^8 : 128b^7\sqrt{\rightarrow 1 + \&c.}}$, quæ componitur quidem ex infinitis numero terminis , sed quisque ejus terminus est quantitas

P 4 ima-

imaginaria; quo fit, ut imaginaria sit etiam summa omnium ejus infinitorum terminorum.

552. Sed earundem serierum usum ostendamus modo in cubicæ radicis extractione. Quem in finem proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate $a^3 + b^3$. Plane hujusmodi radix methodo, superius exposita, nequit haberi; quum in quantitate proposita, etsi adsint cubi partium a , & b , attamen, tam triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis per secundam, quam triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum secundæ partis per primam, nequaquam adest. Quocirca quæsitæ radix non alia ratione in terminis finitis exprimi poterit, quam in hunc modum $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$.

553. Interim eodem illo artificio, quo radices cubicæ extrahuntur, poterit optata radix per seriem infinitorum numero terminorum exhiberi. Extrahatur enim radix cubica ex priore termino a^3 ; eoque deleta, dividatur terminus alter b^3 per $3a^2$, triplum quadrati inventæ radicis, & fiet quotiens $b^3 : 3a^2$ pars altera radicis inveniendæ. Subtrahatur porro ex altero illo termino, non modo triplum producti, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis a^2 per secundam $b^3 : 3a^2$; verum etiam, tum triplum producti, quod gignitur, multiplicando quadratum secundæ partis $b^6 : 9a^4$ per primam a , cum cubus ejusdem secundæ partis $b^9 : 27a^6$. Et, subtractione ista peracta, remanebit $-b^6 : 3a^3 - b^9 : 27a^6$.

554. Hinc, quum radix acquisita sit $a + b^3 : 3a^2$, capiatur triplum sui quadrati $3a^2 + 2b^3 : a + b^6 : 3a^4$; & per priorem ejus partem $3a^2$

$3a^3$ dividatur prior terminus illius residui $\rightarrow b^6$: $3a^3$: qua ratione dabit quotiens $\rightarrow b^6$: $9a^5$ tertiam partem quæsitæ radicis . Paratis autem iisdem productis, eorundemq; facta subductione, remanet adhuc $5b^9$: $27a^6$ $\rightarrow b^{15}$: $81a^{12}$ $\rightarrow b^{18}$: $729a^{15}$. Quare dividatur similiter prior terminus hujus residui $5b^9$: $27a^6$ per primam partem quadrati triplicati acquisitæ radicis ; & in hunc modum fiet quotiens $5b^9$: $81a^8$ pars quarta quæsitæ radicis . Quumq; novum adhuc oriatur residuum , nec unquam operatio fieri potest exacte ; liquet, extractionem quæsitæ radicis abire in infinitum, ipsamque adeo radicem per seriem infinitorum numero terminorum expressam oriri.

555. Radix itaque cubica propositæ quantitatis $a^3 + b^3$ est series infinita $a + b^3$: $3a^2 \rightarrow b^6$: $9a^5 + 5b^9$: $81a^8 \rightarrow 10b^{12}$: $243a^{11} + \&c.$: quæ quidem, sicuti mutatur in $a + a : 3 \rightarrow a : 9 + 5a : 81 \rightarrow 10a : 243 + \&c.$, quum partes quantitatis propositæ a^3 , b^3 inter se sunt æquales ; sic etiam fiet $1 + 1 : 3 \rightarrow 1 : 9 + 5 : 81 \rightarrow 10 : 243 + \&c.$, si earum partium unaquæque statuatur æqualis unitati . Unde , quia in hypothesis, quod tam a^3 , quam b^3 adæquet unitatem, fit $a^3 + b^3$ numerus binarius ; liquet , radicem cubicam numeri binarii esse seriem infinitam $1 + 1 : 3 \rightarrow 1 : 9 + 5 : 81 \rightarrow 10 : 243 + \&c.$

556. Eadem ratione, si extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate $a^3 \rightarrow b^3$; ea per regulam , superius traditam , neque etiam poterit haberi ; quum non adsint in proposita quantitate partes omnes , ex quibus componitur cubus quantitatis alicujus bimembris . Unde non aliter in terminis finitis eam exprimere licebit ,
quam

quam in hunc modum $\sqrt[3]{a^3 \rightarrow b^3}$. Nihilominus, adhibita vulgari radicem cubicam extrahendi ratione, & operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda series infinita $a \rightarrow b^3 : 3a^2 \rightarrow b^6 : 9a^5 \rightarrow 5b^9 : 81a^8 \rightarrow 10b^{12} : 243a^{11} + \&c.$, in qua, priore termino excepto, omnes alii signo $\rightarrow$ afficiuntur.

VI. Serierum infinitarum notio generalis.

557. **Q**ua ratione in calculo quantitatum rationalium, tum per divisionem, cum per radicem extractionem, oriuntur series infinitæ; jam quidem abunde demonstravimus. Reliquum nunc est, ut in ipsam serierum infinitarum naturam generatim inquiremus, & quæ esse debeant cujusque seriei affectiones, paucis aperiamus. Neque enim satis est dicere, series infinitas esse quantitates, per infinitos numero terminos expressas; sed necesse est quoque, ut ipsi serierum termini certis quibusdam conditionibus in infinitum progrediantur. Nam aliter series nullam omnino determinationem subire poterunt; neque adeo in solutione problematum, quorum hæc omnia tendunt, ulli nobis usui erunt.

558. Ac primo quidem, etsi, limitatione nostræ mentis, infinitos seriei terminos peragraré non liceat, necesse est tamen, ut quilibet seriei terminus possit nostro animo sisti, quum de eo est quæstio. Hinc prima conditio, quæ in seriei terminis requiritur, est, ut non vaga, ac indeterminata quadam ratione; sed certa, ac præfixita lege in infinitum progrediantur. Sic enim

sa-

fatis erit , legem istam non ignorare , ut quemcumque optatum seriei terminum mente assequi valeamus . Unde nec etiam opus erit , per operationes laboriosas , & immenso tædio plenas , series ipsas continuare ; sed sufficiet , tum legem illam , cum primum seriei terminum perspectum , ac exploratum habere .

559. Uno verbo, pro seriebus infinitis illud idem requiritur , quod locum habet in progressionibus , tum geometricis , cum arithmeticis . Jam enim , cognito priore termino progressionis , & data quoque , sive ratione , sive differentia , quam progressionis termini servant inter se ; in proclive est , tum progressionem continuare , cum quemlibet ejus terminum speciatim definire . Ad eundem itaque modum cujusque seriei constitutio talis sit oportet , ut , dato priore ejus termino , & cognita item lege , qua termini alii in infinitum progrediuntur , possit nullo negotio , tum ipsa series continuari , cum quilibet ejus optatus terminus ad amissum definiri .

560. Et sane , si de continuanda serie tantum sit quæstio , sufficiet , cognitam habere relationem , quam quisque seriei terminus habet ad suum præcedentem . Ponamus etenim , adesse seriem aliquam , in qua quilibet terminus ad eum , quem statim excipit , habeat rationem compositam ex a ad c , & ex summa numerorum , utriusque loca ostendentium , ad eandem summam , unitate auctam . Jamque , si primus seriei terminus statuatur a , erit terminus secundus $3a^2 : 4c$, terminus tertius $15a^3 : 24c^2$, terminus quartus $105a^4 : 192c^3$, terminus quintus $945a^5 : 1920c^4$, atque ita deinceps . Sed , hac sola relatione cogni-

gnita, optatum quemcumque seriei terminum non aliter licebit definire, quam serie ipsa usque ad eum terminum continuata.

561. Hinc, si determinandus sit aliquis seriei terminus independenter ab iis, qui eum præcedunt, nota etiam esse debet relatio, quam quilibet seriei terminus habet ad primum. Hanc vero semper definire fas erit, ubi cognita est relatio, quam quivis terminus habet ad suum præcedentem. Sic in exemplo proposito, si n sit numerus aliquis integer, & fiant duæ progressionæ arithmeticæ, una a $2n - 1$, & altera a $2n$, ambæ decrescentes intervallo binarii, usque donec prior perveniat ad ternarium, & posterior ad quaternarium; habebit terminus, qui occupat in serie locum n , ad terminum primum rationem compositam ex ea, quam habet a ad c , toties multiplicata, quot sunt unitates in $n - 1$, & ex ea, quam productum ex omnibus terminis primæ progressionis habet ad productum omnium terminorum secundæ progressionis.

562. Si ergo quærat^rur seriei illius terminus tertius, erit n numerus ternarius; adeoque progressionum una erit 5, 3, altera 6, 4. Unde, quum terminus tertius ad terminum primum habere debeat rationem compositam ex a^2 ad c^2 , & ex 15 ad 24; erit terminus tertius ^{Art. 560.} $15a^3 : 24c^2$, prorsus ut antea. Et similiter, si quærat^rur ejusdem seriei terminus quintus; erit n numerus quinaris; proindeque progressionum una erit 9, 7, 5, 3, altera 10, 8, 6, 4. Quare, quum terminus quintus ad terminum primum habere debeat rationem compositam ex a^4 ad c^4 , & ex 945 ad 1920; fiet terminus quintus

tus 945a^r : 1920c⁴, omnino ut supra *.

*art. 560.

563. Cæterum, quod non vaga, ac indeterminata quadam ratione, sed certa, ac præfinita lege progrediuntur in infinitum termini, tam in seriebus, quæ per divisionem habentur, quam in iis, quæ ab extractione radicum suam originem trahunt; non est in dubium revocandum. Jam enim quantum ad priores, notavimus supra*, *art. 532. terminos ipsarum adeo quidem ordinate in infinitum abire, ut progressionem constituent geometricam. Sed constanti etiam, ac invariato ordine protrahuntur in infinitum termini secundarum serierum. Etsi enim hic ordo prima facie in illis non appareat, unde nec etiam a nobis supra notatus; latet nihilominus in iis, & a nobis ostendetur inferius, quum per generalem potestatum formulam series infinitas conficere docebimus.

564. Præterea quælibet series infinita, per summam omnium suorum terminorum, exhibere nobis debet valorem alicujus quantitatis: & ipsius seriei usus in eo unice situs sit oportet, ut valor quantitatis, ad quam refertur, habeatur exacte, quum summa illa potest determinari; habeatur vero per approximationem, hoc est, colligendo simul, methodo vulgari, aliquot seriei terminos, quum eadem illa summa definiri minime potest. Quare secunda conditio, quæ in cujusque seriei terminis requiritur, est, ut ii, non modo certa, ac præfinita lege in infinitum progrediantur; sed tali quoque ratione abeant in infinitum, ut propius semper, ac propius accedant ad valorem quantitatis, cui ipsa series correspondet.

565.

565. Hujusmodi series, quæ ad valores quantitatum, ad quas referuntur, propius semper, ac propius accedunt, dicuntur passim convergentes; quia nempe ad valores illos digitum intendunt, & ad eos quodammodo convergunt. Unde, si quæ sint series, quæ a valoribus quantitatum, quibus correspondent, magis semper, ac magis removentur; eæ per contrarium divergentes sunt appellandæ. Interim ex seriebus convergentibus quædam celerrime convergunt, aliæ vero adeo lente, ut quandoque mille, & amplius termini sunt simul colligendi, quo quantitatum valores possint subinde per approximationem haberi, ut error non adeo sensibilis evadat. Unde, quum id contingit, præstat, series lentissime convergentes transmutare in alias, quæ celerissime convergant. Quod tamen qua fieri possit ratione, nequit hoc loco commode tradi.

566. Hac vero transmutatione est opus, quum summa totius seriei nequit reperiri: idque ea ratione, ut valor quantitatis, cui correspondet, collectione pauciorum terminorum possit per approximationem haberi. Num autem sit summabilis aliqua series, non ita facile licet definire. Nam, problema de inveniendis summis finitis serierum, sicuti non semper est capax solutionis, sic summam difficultatem involuit. Plane vero non est hujus loci, problematis ejus solutionem generatim aggredi. Unde hic tantum methodis quibusdam specialibus ostendemus, quo pacto specialium quarundam serierum summæ finitæ possint haberi. Fiunt autem series, quas hic considerabimus, numeris figuratis, tum primi generis, cum generum superiorum.

CA-

CAPUT III.

Series summabiles , quæ figuratis primi generis fiunt.

567. **N**umeris figuratis primi generis duæ serierum classes fieri possunt, in quibus determinare licet summas finitas omnium suorum terminorum. Sed, priusquam de finitis summis harum serierum agamus, ipsa res exigit, ut paucis ostendamus, qui sint numeri isti, quos figuratos primi generis dicimus. Et quoniam eorum consideratio profecta est ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipsis Veteribus facta: proinde, qui sint numeri multanguli, seu polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

I. Numeri Veterum multanguli, tum item figurati Recentiorum.

568. **N**umeri multanguli, seu polygoni dicuntur ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium. Pro diversitate autem hujus intervalli, varix numerorum multangulorum species distinguuntur. Dicuntur enim trianguli, si intervallum sit unitas; dicuntur quadrati, si intervallum sit binarius; dicuntur pentagoni, si idem intervallum sit ternarius; atque ita deinceps.

569. Hac ratione, si numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, sint ipsi numeri
na-

naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ; erit unitas intervallum, quo numeri progrediuntur. Unde ex eorum continua collectione habebuntur omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; $1 + 2$, sive 3 erit triangulus secundus; $1 + 2 + 3$, sive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

570. Quod si numeri, æquali intervallo ab unitate progredientes, sint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, &c. ; erit numerus binarius intervallum, quo numeri progrediuntur. Quare ex continua illorum collectione orientur omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quadratus; $1 + 3$, seu 4 erit quadratus secundus; $1 + 3 + 5$, seu 9 quadratus tertius; atque ita continuo.

571. Sed si porro series numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, sit 1, 4, 7, 10, 13, 16, &c.; erit numerus ternarius intervallum, quo numeri progrediuntur. Unde ex eorum continua collectione orientur omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; $1 + 4$, seu 5 erit pentagonus secundus; $1 + 4 + 7$, seu 12 pentagonus tertius; & sic in infinitum.

572. Hos numeros polygonos, seu multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, consideravit primus omnium Hypsicles, qui genesim ipsorum hac definitione complexus est: si fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; summa omnium erit triangulus, si intervallum sit unitas; quadratus, si binarius; pentagonus, si ternarius; atque ita deinceps.

573. Patet autem, in hac Hypsiclis definitione numerum angulorum designari per numerum, binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur. Unde Diophantus eandem illam definitionem sic generaliter concepit: si fuerint quocumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; omnium summa multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario superans intervallum, habet unitates.

574. Hujusmodi porro numeri dicti sunt a Veteribus multanguli, seu polygoni; quia ipsorum unitates, per æqua intervalla, in polygoni æquilateri formam disponi possunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque possunt numeri multanguli, seu polygoni, quorum unitates, æqualibus intervallis, multangulum, seu polygonum æquilaterum exhibent.

575. Jam, quemadmodum Veteres considerarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; eosque multangulos, seu polygonos numeros appellarunt, quia ipsorum unitates, per æqua intervalla dispositæ, multangulum, seu polygonum æquilaterum repræsentant. Sic Recentiores, ulterius progressi, considerarunt numeros alios, qui generantur ex continua additione, tum ipsorum multangulorum, cum aliorum inde ortorum numerorum; & tam hos, quam illos figuratos appellarunt, quia unitatibus ipsorum, per æqua intervalla dispositis,

Tom. I.

Q

tis,

tis, diversimode possunt configurari.

576. Hinc numeri figurati dicuntur, non modo ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verum etiam illi, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Et quo patet, numeros istos figuratos, non modo in varia genera distingui posse, pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti, ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse, pro diversa ratione, qua ex iisdem illis genitoribus eruuntur.

577. Interim pro seriebus, de quibus hoc capite agendum est, non aliis figuratis est opus, quam qui sunt generis primi, quique oriuntur a numeris, per unitatis intervallum ab unitate progredientibus. Eos autem in certos ordines ita dividemus, ut quemadmodum dicuntur genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; ita dici debeant figurati primi ordinis, qui oriuntur ex additione continua genitorum; figurati secundi ordinis, qui producuntur per additionem continuam eorum, qui sunt ordinis primi; figurati tertii ordinis, qui gignuntur collectione continua eorum, qui sunt ordinis secundi; atque ita deinceps.

578. In primo itaque genere figuratorum, de quibus in præsentiarum est quæstio, erunt genitores numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; erunt figurati primi ordinis numeri 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui additione conti-
nua

nua ipsorum genitorum producantur; erunt figurati secundi ordinis numeri 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui per continuam additionem figuratorum primi ordinis generantur; erunt figurati tertii ordinis numeri 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui oriuntur collectione continua figuratorum secundi ordinis; atque ita in infinitum.

11. Figuratorum primi generis præclara proprietates demonstrata.

579. **N**umeris naturalibus, qui sunt genitores figuratorum primi generis, illud accidit, ut si iis zero præfigatur, summa terminorum aliquot sit ad summam terminorum totidem, maximo æqualium, in ratione subdupla, hoc est, ut unitas ad binarium. Jam enim numeri naturales sunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. Plane vero, si iis zero præfigatur, & addantur in unum quinque termini; fiet summa eorum $0 + 1 + 2 + 3 + 4$, sive etiam 10. Unde, quum summa terminorum totidem, æqualium maximo 4, sit 20; liquet, eam esse subduplam istius.

580. Simile quidpiam evenit quoque numeris figuratis, qui ex continua collectione numerorum naturalium oriuntur. Nam, si iis tot zero præfigantur, quot designat exponens ordinis ipsorum, auctus unitate una, hoc est duo in figuratis primi ordinis, tria in figuratis secundi ordinis, quatuor in figuratis tertii ordinis, atque ita deinceps; summa terminorum aliquot erit ad summam terminorum totidem, maximo æqua-

Q 2 lium,

lium, ut est unitas ad eundem exponentem, auctum duabus unitatibus, hoc est, ut 1 ad 3 in figuratis ordinis primi, ut 1 ad 4 in figuratis ordinis secundi, ut 1 ad 5 in figuratis ordinis tertii, atque ita in infinitum.

581. Hac ratione, si figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. duplex zero præfigatur, & in unum addantur quinque termini; erite eorum summa 10, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 6, erit 30. Similiter, si figuratis secundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. triplex zero præfigatur, & addantur in unum termini septem; erit eorum summa 35, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 20, erit 140. Atque ita quoque, si figuratis tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c. quatuor zero præfigantur, addanturque simul termini novem; erit summa eorum 126, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 70, erit 630.

582. Pro hujus proprietatis demonstratione, ostendendum est prius hoc theorema. Nimirum, quod si fuerit series quædam numerorum a, b, c, d , &c., quorum ea sit proprietas, ut summa terminorum quocumque sit ad ultimum, toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus m , perpetuo ut unitas ad numerum n ; & e, f, g, h , &c. sit alia series numerorum, qui ex illorum continua collectione oriuntur: quod inquam in hac alia serie summa quocumque terminorum est ad ultimum, toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m + 1$, ut est unitas ad numerum $n + 1$.

583.

583. Nequevero difficile erit, theorema istud ostendere. Nam ex hypothese a est ad $(m+1)a$, ut 1 ad n ; & similiter in hac eadem ratione est quoque, non modo $a+b$ ad $(m+2)b$, verum etiam $a+b+c$ ad $(m+3)c$, & $a+b+c+d$ ad $(m+4)d$. Itaque, conjungendo simul, tam omnes antecedentes, quam omnes consequentes, erit quoque, ut 1 ad n , ita $4a+3b+2c+d$ ad $(m+1)a+(m+2)b+(m+3)c+(m+4)d$; & addendo antecedentes consequentibus, erit pariter, ut 1 ad $n+1$, ita $4a+3b+2c+d$ ad $(m+5).(a+b+c+d)$.

584. Præterea ex hypothese numeri e, f, g, b , &c. oriuntur ex collectione continua numerorum a, b, c, d , &c. Quare, sicuti $a+b+c+d$ perinde valet, ac b ; ita $4a+3b+2c+d$ idem erit, ac $c+f+g+b$. Ostensum est * art. 583, autem, $4a+3b+2c+d$ esse ad $(m+5).(a+b+c+d)$, ut est 1 ad $n+1$. Itaque erit quoque, ut $e+f+g+b$ ad $(m+5)b$, ita 1 ad $n+1$; hoc est, ut summa quatuor terminorum e, f, g, b ad ultimum b , toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ita unitas ad numerum $n+1$.

585. Hoc ostenso theoremate, proprietas illa numerorum figuratorum sua sponte sequitur. Nam numeri figurati primi ordinis oriuntur * ex art. 572, additione continua numerorum naturalium. Sed horum numerorum, ut superius * inuimus, ea * art. 579, est proprietas, ut summa terminorum aliquot sit ad ultimum, toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitate una, veluti est 1 ad 2. Itaque in numeris figuratis pri-

mi ordinis summa terminorum quotcumque erit ad ultimum, toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, duabus unitatibus aucta, ut est 1 ad 3.

586. Similiter figurati secundi ordinis generantur * collectione continua figuratorum ordinis primi. Sed in figuratis primi ordinis ostenditur jam est *, summam terminorum aliquot esse ad ultimum, toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta duabus unitatibus, veluti est 1 ad 3. Quare, per ostensum theorema, omnino necesse est, ut in figuratis ordinis secundi summa terminorum quotcumque sit ad ultimum, toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, tribus unitatibus aucta, ut est 1 ad 4.

587. Eadem ratione gradatim eruere licebit ex ostenso theoremate proprietates figuratorum aliorum ordinum. Nec reticebimus, quod exinde colligi quoque potest ipsa numerorum naturalium proprietas. Oriuntur siquidem numeri naturales ex continua collectione unitatum. Plane vero in serie unitatum summa terminorum aliquot est ad ultimum, toties sumptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitate nulla, in ratione æqualitatis, hoc est, ut 1 ad 1. Quare, vi ostensi theorematis, in numeris naturalibus summa quotcumque terminorum erit ad ultimum, toties acceptum, quota est ipsa terminorum multitudo, aucta unitate una, in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2.

588. Cæterum in numeris naturalibus memorata proprietas pendet ex theoremate isto, nulli non cognito, quod summa quotcumque ter-

terminorum cujusque progressionis arithmetice habetur, si summa extremorum multiplicetur per multitudinem terminorum dimidiatam. Hinc enim sequitur, eandem summam terminorum subduplam esse summæ extremorum, acceptæ toties, quota est ipsa terminorum multitudo: proindeque, quia numeri naturales constituunt progressionem arithmeticam, & quum ii incipiunt a zero, summa extremorum est ipse maximus terminus; omnino necesse est, ut summa quotcumque numerorum naturalium, a zero incipientium, subdupla sit summæ terminorum totidem, maximo æqualium.

589. Perspicuum est autem, proprietatem istam numeris naturalibus non alia ratione competere, quam quia constituunt progressionem arithmeticam, cujus prior terminus est zero, seu nihil. Unde, si qui sint alii numeri, qui similiter a zero incipientes, progressionem constituent arithmeticam; eos eandem prorsus proprietatem habere, non est in dubium revocandum: proindeque theorema enunciari potest generaliter in hunc modum, quod summa quotcumque terminorum cujusvis progressionis arithmetice, a zero inchoatæ, est subdupla summæ terminorum totidem, maximo æqualium. Sic summa istorum terminorum 0, 2, 4, 6, 8 est 20, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 8, est 40. Pariterque summa horum terminorum 0, 3, 6, 9, 12 est 30, & summa terminorum totidem, æqualium maximo 12, est 60.

III. Ratio colligendi, tum figuratos, cum potestates numerorum naturalium.

590. **M** Ediante ea proprietate figuratorum, quam modo ostensam exhibuimus, facile erit, eorundem quotcumque terminos in unam summam colligere, atque ita statim exhibere in quolibet figuratorum ordine eum, quem libuerit, terminum. Et ut ab ipsis figuratorum genitoribus ordiamur, proponantur in unum colligendi tot numerorum naturalium termini, quot designat numerus m . Jam ultimus, seu maximus terminus est ipse numerus m , sive $m : 1$. Sed, præfixo numeris istis unico zero, summa quotcumque terminorum
- *art. 579. fit subdupla * summæ terminorum totidem, maximo æqualium. Quare, si maximus ille terminus sumatur toties, quot designat $m + 1$, & producti inde orti capiatur semissis; fiet summa quæsitæ productum ex $m : 1$ in $(m + 1) : 2$.
591. Proponantur secundo in unam summam colligendi termini totidem figuratorum primi ordinis, quot designat idem numerus m .
- *art. 577. Quoniam figurati primi ordinis oriuntur * ex additione continua numerorum naturalium;
- *art. 590. erit * ultimus, seu maximus terminus factum ex $m : 1$ in $(m + 1) : 2$. Jam vero in figuratis primi ordinis, si duplex iis zero præfigatur, summa terminorum aliquot * fit subtripla summa terminorum totidem, maximo æqualium. Itaque si maximus ille terminus toties capiatur, quot unitates continet $m + 2$, & producti inde orti sumatur triens; fiet summa quæsitæ productum
- cx

ex $m : 1$ in $(m + 1) : 2$ in $(m + 2) : 3$.

592. Proponantur tertio in unum addendi tot termini figuratorum ordinis secundi, quot designat idem adhuc numerus m . Quoniam figurati secundi ordinis oriuntur ex continua collectione figuratorum ordinis primi; erit ultimus, seu maximus terminus factum ex $m : 1$ in $(m + 1) : 2$ in $(m + 2) : 3$. Sed in figuratis secundi ordinis, si triplex his zero præfigatur, summa quotcumque terminorum fit quadrupla summæ terminorum totidem, æqualem maximo. Quare, si maximus ille terminus toties accipiatur, quot unitates continet $m + 3$, & producti inde orti quadrans capiatur: fiet summa quæsitæ productum ex $m : 1$ in $(m + 1) : 2$ in $(m + 2) : 3$ in $(m + 3) : 4$.

593. Non dissimili ratione colligi poterunt in unam summam termini quotcumque figuratorum ordinum superiorum. Sed perspicuum est, ad eas summas inveniendas, posse generaliter hanc regulam adhiberi. Nimirum fiant duæ progressionæ arithmeticæ, ambæ ascendentes per unitatis incrementum; una quidem a multitudine terminorum, in unam summam colligendorum, altera ab unitate; & utraque tot terminorum, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Multiplicentur deinde inter se mutuo, tam termini prioris progressionis, quam termini secundæ. Jamque, diviso producto ex primis per productum ex secundis, fiet quotiens hujus divisionis terminorum summa quæsitæ.

594. Ita si m sit numerus terminorum, quos oportet in unam summam colligere; erit $m, m +$

1, m

1, $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, &c. prior progressio arithmetica; & 1, 2, 3, 4, 5, &c. progressio altera. Unde, si quæstio sit de ipsis figuratorum genitoribus, qui nullum ordinem constituentes, zero habent pro suo exponente; fiet summa quæsitæ $(m^2 + m) : 2$. Quod si vero agatur de figuratis primi ordinis, quorum exponens est 1; erit summa $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$. Atque ita quoque eadem summa erit $(m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m) : 24$, si figurati sint secundi ordinis; erit $(m^5 + 10m^4 + 35m^3 + 50m^2 + 24m) : 120$, si figurati sint ordinis tertii; sicque deinceps.

595. Quod si numerus m statuatur infinitus; tunc omnes potestates inferiores ipsius m sunt velut infinitesimæ, atque adeo evanescent. *art. 447.* relate ad maximam potestatem ejusdem numeri m . Unde summa quæsitæ erit $m^2 : 2$ in numeris naturalibus, $m^3 : 6$ in figuratis primi ordinis, $m^4 : 24$ in figuratis ordinis secundi, $m^5 : 120$ in figuratis ordinis tertii, atque ita de aliis. Et *art. 577.* quoniam figurati cujusque ordinis oriuntur ex collectione continua figuratorum ordinis præcedentis; omnino necesse est, ut summa infinitorum terminorum ad summam terminorum totidem, æqualium maximo, sit, ut 1 ad 2 in numeris naturalibus, ut 1 ad 3 in figuratis primi ordinis, ut 1 ad 4 in figuratis secundi ordinis, ut 1 ad 5 in figuratis tertii ordinis, atque ita deinceps.

596. Mediantibus summis numerorum figuratorum, determinari quoque possunt summæ potestatum, quæ fiunt ex numeris naturalibus. Et quantum ad primas potestates numerorum
pa-

naturalium, eæ ab ipsis numeris naturalibus non differunt; quum prima potestas cujusque quantitatis sit * ipsa quantitas semel posita. Quare, *art. 577. ad inveniendam summam primarum potestatum numerorum naturalium; satis erit, ipsos numeros naturales in unam summam colligere: proindeque, si quilibet numerus naturalis designetur per m , erit $(m^2 + m) : 2$ summa omnium m ; nam hæc eadem quantitas inventa est paulo ante *art. 594. pro summa numerorum totidem naturalium, quot 594. designat numerus m .

597. Proponatur secundo invenienda summa quadratorum. Et jam, si m referat indefinite quemcumque numerum naturalem; designabit * etiam *art. 577. indefinite $(m^2 + m) : 2$ quemcumque numerum 590. figuratum ordinis primi. Sed summa indefinita, omnium figuratorum primi ordinis est * $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$. Itaque hæc eadem quantitas *art. 591. erit summa omnium $(m^2 + m) : 2$; & consequenter illa eadem duplicata, erit summa omnium $m^2 + m$. Jam vero summa omnium m est * $(m^2 + m) : 2$. Quare, si ex quantitate illa *art. 596. duplicata hæc alia subducatur, fiet residuum $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$ summa omnium quadratorum m^2 .

598. Proponatur tertio invenienda summa cuborum. Quoniam m refert indefinite quemcumque numerum naturalem; designabit * etiam *art. 577. indefinite $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$ quemcumque numerum figuratum ordinis secundi. Sed summa indefinita figuratorum secundi ordinis est * $(m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m) : 24$. Itaque hæc eadem quantitas erit summa omnium *art. 592. $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$; & consequenter illa eadem 594. dem

dem sextuplicata erit summa omnium $m^3 + 3m^2 + 2m$. Et quoniam summa omnium m inventa

*art. 596. * est $(m^2 + m) : 2$, erit summa omnium $2m$ æqualis $m^2 + m$. Pariterque, quia summa omnium

*art. 597. m^2 inventa * est $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$, erit summa omnium $3m^2$ æqualis $(2m^3 + 3m^2 + m) : 2$. Quare, si ex quantitate illa sextuplicata hæc aliæ duæ subducantur, fiet residuum $(m^4 + 2m^3 + m^2) : 4$ summa omnium m^3 .

599. Non dissimili methodo ad altiores gradatim potestates pergere licet, earumque summas determinare ex definitis summis figuratorum ordinum superiorum. Sed nolo hic reticere, quod, sicuti summa indefinita numero-

*art. 595. rum naturalium $(m^2 + m) : 2$ est * tantum $m^2 : 2$, quum numerus m ponitur infinitus; sic in eadem hypothese summa indefinita omnium quadratorum $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$ erit tantum $m^3 : 3$. Unde, sicuti summa numerorum omnium naturalium est ad summam totidem, maximo æqualium, in ratione subdupla, hoc est, ut 1 ad 2; ita summa omnium quadratorum erit ad summam totidem, maximo æqualium, in ratione subtripla, nimirum, ut 1 ad 3.

*art. 598. 600. Similiter autem, quia * summa indefinita cuborum est $(m^4 + 2m^3 + m^2) : 4$; hæc erit tantum $m^4 : 4$, quum numerus m ponitur infinitus: proindeque summa omnium cuborum erit ad summam totidem, maximo æqualium, ut 1 ad 4, hoc est in ratione subquadrupla. Atque ita quoque, si potestatum altiorum summæ indefinitæ, tradita methodo, determinentur; inveniatur, summam ex omnibus quadrato-quadratis esse ad summam totidem, æqualium maximo, ut
1 ad

1 ad 5 ; & summam ex omnibus quārato-cubis,
ut 1 ad 6 ; & summam ex omnibus cubo-cubis,
ut 1 ad 7 ; atque ita deinceps.

601. Cæterum, quum summa indefinita quadratorum * sit $(2m^3 + 3m^2 + m) : 6$, & summa **art. 596.*
indefinita figuratorum primi ordinis * sit $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$; *art. 111.*
erit prior summa ad secundam, ut $2m^3 + 3m + 1$ ad $m^3 + 3m + 2$. Quumque in hypotheli, quod m sit numerus infinitus, hæc ratio fiat æqualis ei, quam habet $2m^2$ ad m^2 , sive 2 ad 1 ; liquet, summam omnium quadratorum ad summam omnium figuratorum primi ordinis esse pariter, ut 2 ad 1 . Eodem argumento ostendemus, summam omnium cuborum ad summam omnium figuratorum tertii ordinis esse, ut 6 ad 1 . Nec dissimiliter determinare licebit proportionem inter potestates altiores, & figuratos ordinum superiorum.

IV. Theorematum præcedentium ad figuras geometricas applicatio.

602. **Q**uod mox * ostensum est de ratione subdupla, quam habet **art. 595.*
summa omnium numerorum naturalium ad summam terminorum totidem, æqualium maximo, usui nobis esse potest, pro ostendendo geometrico illo theoremate, quod triangulum est semissis parallelogrammi, eandem cum ipso basim, & altitudinem habentis. Esto enim triangulum aliquod ABC . Jamque, si ejus latus AB dividatur in partes æquales Aa, ab, bc, cd, &c., & ducantur per puncta divisionum rectæ aa, bb, cc, dd, &c., parallele lateri BC ; fient portionibus

LIBER PRIMUS

15; & summae de omnibus numeris
ad 6; & summae de omnibus numeris
ad 7; & deinde de numeris

601. Certe summae numerorum
atorum. Et sic de summa numerorum
definita figurarum. Item summa numerorum
 $3m^2 + 2n^2$ & deinde de summa numerorum
m, ut $2m^2 - n^2$ & deinde de summa numerorum
in hypotenusa. Item de summa numerorum
ec ratio inter summas. Item de summa numerorum
 2 , five $2m^2$ & deinde de summa numerorum
atorum ad summas. Item de summa numerorum
in ordinis esse. Item de summa numerorum
unento of summae. Item de summa numerorum
um ad summas. Item de summa numerorum
linis esse. Item de summa numerorum
are summae. Item de summa numerorum
es, & figurarum. Item de summa numerorum

II. De summae numerorum summae numerorum

602. Quid sit summa numerorum
summae numerorum. Item de summa numerorum
mae numerorum. Item de summa numerorum
ufai nobis esse. Item de summa numerorum
trico de summae. Item de summa numerorum
miffis paralelogramis. Item de summa numerorum
& altitudine. Item de summa numerorum
aliquod ABC. Item de summa numerorum
deur in parte. Item de summa numerorum
summae per partem. Item de summa numerorum
es, & figurarum. Item de summa numerorum

bus $Aa, Ab, Ac, Ad, &c.$ proportionales paralle-
læ istæ $aa, bb, cc, dd, &c.$; quum harum unaquæ-
que ad portionem, ei correspondentem, sit in con-
stanti illa ratione, quam habet BC ad AB .

603. Hinc, sicuti portiones $Aa, Ab, Ac, Ad,$
&c. possunt numeros naturales, ab unitate se-
consequentes, nobis repræsentare; sic eosdem nu-
meros exhibere quoque licebit per parallelas $aa,$
 $bb, cc, dd, &c.$, quæ portionibus iis proportio-
ne correspondent. Augeatur jam numerus par-
ticularum æqualium $Aa, ab, bc, cd, &c.$ in infi-
nitum, faciendo, ut eæ particulæ sint indefinitæ
parvitatibus. Et parallelæ $aa, bb, cc, dd, &c.$, conti-
nuatæ ad latus usque BC , quum infinitæ etiam
numero fiant, omnes omnino numeros natura-
les nobis exhibebunt. Quare summa omnium
illarum parallelarum erit ad summam totidem
aliarum, æqualium maximæ BC , in ratione sub-
dupla.

604. Compleatur porro parallelogrammum
 $ABCD$. Et siquidem producantur omnes illæ
parallelæ, usque donec occurrant lateri CD ; fiet
unaquæque illarum sic producta æqualis ipsi
 BC . Unde summa omnium parallelarum, quæ
continentur in triangulo ABC , ad summam om-
nium parallelarum, quæ continentur in paral-
lelogrammo $ABCD$, erit in ratione subdupla.
Sed per hæc parallelas trianguli, & paralle-
logrammi areæ quodammodo nobis exhibentur.
Quare triangulum ABC ad parallelogrammum
 $ABCD$ subduplam quoque rationem habebit: &
propterea unum erit semissis alterius.

605. Quemadmodum autem in triangulo
 ABC parallelæ $aa, bb, cc, dd, &c.$ exhibere no-
bis

bis possunt numeros omnes naturales , ab unitate se consequentes , quia proportionem correspondentibus $Aa, Ab, Ac, Ad, \&c.$; ita, si figura ABC talis statuatur , ut parallelæ illæ aa , FIG. 8. $bb, cc, dd, \&c.$ sint in duplicata ratione eundem portionum Aa, Ab, Ac, Ad ; tunc per easdem parallelas exhiberi poterunt quadrata numerorum naturalium , ab unitate se consequentium . Unde , ob alterum illud theorema , quod summa omnium quadratorum est * ad summam * *art. 599.* terminorum totidem , æqualium maximo , in ratione subtripla , demonstrare licebit , figuram ABC esse tertiam partem parallelogrammi $ABCD$.

606. Sed , nihil vetat , figuram ABC talis naturæ concipere , ut parallelæ $aa, bb, cc, dd, \&c.$ sint in triplicata ratione portionum , ipsis correspondentium, $Aa, Ab, Ac, Ad, \&c.$ Et in isto casu eadem illæ parallelæ exhibere nobis poterunt cubos numerorum naturalium , ab unitate se consequentium . Unde , vi ejus theorematum , quod summa omnium cuborum est * *art. 600.* ad summam terminorum totidem , æqualium maximo , in ratione subquadrupla , concludere fas erit , figuram ABC esse quartam partem parallelogrammi $ABCD$. Et ad eundem modum licebit , concipere figuram ABC ejus indolis , ut parallelæ $aa, bb, cc, dd, \&c.$ referant numerorum naturalium potestates altiores ; & per theorematum , eis correspondentia , definire rationem , quam figura ABC habet ad parallelogrammum $ABCD$.

607. Cæterum , cujus indolis sint figuræ istæ , in quibus parallelæ $aa, bb, cc, dd, \&c.$ referunt , non jam numeros naturales , ab unitate se
con-

consequentes, sed numerorum naturalium potestates; non est hujus loci definire. Hic potius præstat, non nihil inquirere in methodum, quantum ad triangulum, cum ad hujusmodi figuras transtulimus theoremata, superius ostensa. Videtur enim, id præstitum a nobis esse, supponendo aream, tam trianguli, quam earum figurarum componi ex iis parallelis: quæ sane hypothesis omnino abhorret a vero. Nam, ut superius dictum est, etsi oriatur, & linea ex motu puncti, & superficies ex motu lineæ, & solidum ex motu superficiei; attamen, nec linea ex punctis, nec ex lineis superficies, nec denique solidum ex superficiebus componitur.

Art. 449.

608. Et sane vulgata indivisibilium methodus, quum primum lucem adspexit, vel hac sola ratione quamplures Geometrarum offendit, quod pro unaquaque quantitate indivisibilia quædam componentia assumebat. Verum in methodi hujus applicatione aliud etiam adhibebatur, quod corripiebat hypothesim eorum indivisibilium, & omnino eam ad verum revocabat. Nam in cujusque quantitatis compositione, non modo ad indivisibilia illa, verum etiam ad eorundem intervalla oportebat attendere: quo fiebat, ut vera quantitatum componentia essent cognomines illæ quantitates, quæ ex iis indivisibilibus, per sua respective intervalla latis, orirentur; atque adeo, ut linea ex aliis lineolis, superficies ex aliis exiguis superficieibus, & corpus demum ex aliis corpusculis componeretur.

609. Ad eundem itaque modum in casu nostro, ultro quidem concedimus, figuræ planæ ABC componentia, non esse parallelas aa, bb,

cc,

cc, dd, &c., sed spatiola *Aaa, abba, bccb, cddc*, &c. Verum, sicuti, ob portiones indefinite parvas *Aa, ab, bc, cd*, &c., spatiola illa considerari possunt, velut totidem exigua parallelogramma; ita, ob æqualitatem earundem portionum, parallelogrammis hisce proportionales fiunt parallelæ *aa, bb, cc, dd*, &c. Unde non veriti fuimus, habere figuram *ABC*, velut summam earum parallelarum; & parallelogrammum *ABCD*, velut summam parallelarum totidem, æqualium maximæ *BC*: quia nempe, ob portiones *Aa, ab, bc, cd*, &c. indefinite parvas, & æquales, figura *ABC*, & parallelogrammum *ABCD* summis iis proportionem correspondent.

610. Hinc autem discimus generaliter, duas quasvis superficies haberi posse, veluti summas infinitarum parallelarum, in iis ductarum; quotiescumque intervalla, quibus eæ parallelæ a se invicem distant; in utraque figura sunt æqualia, ac indefinite parva. Sed eodem argumento duo quævis solida haberi poterunt, veluti summæ infinitarum superficierum æquidistantium, in iis ductarum; ubi intervalla, per quæ distant a se mutuo in utroque solido eæ superficies, sunt indefinitæ parvitatæ, & ejusdem magnitudinis. Nam profecto, sicuti in primo casu proportionales fiunt iis parallelis exiguæ superficies, quæ inter easdem continentur; sic in secundo casu superficiebus iis æquidistantibus proportionem respondebunt exigua solida, quæ inter easdem superficies jacent.

611. Id vero quum ita sit, ope ejus theorematis, quod summa quadratorum ex numeris omnibus naturalibus est * ad summam terminorum * *art. 595.*

Tom. I.

R

to-

totidem, æqualium maximo, in ratione subtripla; nullo negotio demonstrare licebit, esse pariter in ratione subtripla, tam pyramidem, & prisma, quam conum, & cylindrum, quorum eadem est basis, & eadem altitudo. Nam, divisa altitudine in portiones æquales, & indefinite parvas, ductisque intra conum, & pyramidem per puncta divisionum planis totidem, basi parallelis; poterunt plana ista quadrata numerorum naturalium nobis exhibere. Unde, quia, productis iisdem planis usque ad superficiem prismatis, & cylindri, sit eorum unumquodque æquale maximo plano, quod est basis ipsa; vi ejus theorematis omnino necesse est, ut tertia pars sit, tam conus ipsius cylindri, quam pyramis ipsius prismatis.

V. Prima classis serierum summabilium, quæ figuratis primi generis sunt,

612.

Figuratis primi generis, ut ab initio hujus capituli inuimus, duæ serierum classes fieri possunt, in quibus determinare licet summas finitas omnium suorum terminorum. Prima classis complectitur series illas, quæ oriuntur, multiplicando ordine ipsos numeros figuratos per terminos alicujus progressionis geometricæ decrescantis. Secunda vero classis comprehendit eas series, quæ oriuntur ex inversione eorundem figuratorum, hoc est, quum evadunt denominatores fractionum totidem, habentium unitatem pro suis numeratoribus. Utriusque classis series singularem quandam methodum nobis suppeditant, pro determinandis summis finitis serierum infinitarum.

art. 567.

613.

613. Ut ergo a seriebus, quæ ad primam classem referuntur, ordiamur; jam illud superius ^{art. 532.} ostensum est, quod si progressio aliqua geometrica decreseat in ea ratione, quam habet n ad 1, & sit a primus terminus talis progressionis, debet esse $na : (n - 1)$ summa omnium suorum terminorum. Jam numeri naturales, qui sunt genitores figuratorum primi generis, ut alibi ^{art. 537} etiam dictum est, oriuntur ex continua collectione unitatum. Unde, si ipsis figuratorum ordinibus apponamus, tum seriem numerorum naturalium, cum seriem unitatum; illud primo loco statui potest, quod si termini, constituentēs seriem unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c., multiplicentur ordine per terminos progressionis geometricæ decrescētis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., summa seriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$ sit $na : (n - 1)$.

614. Multiplicentur nunc secundo termini, constituentes seriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, &c., ordine per terminos ejusdem progressionis geometricæ decrescētis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c. Dico, summam seriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ esse $n^2a : (n - 1)^2$. Resolvatur enim quisque terminus ejus seriei in plures alios, quorum coefficientes sint unitates, ex quibus componitur coefficientis illius. Jamque, resolutione ista, habebuntur infinitæ aliæ series, quarum una erit $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$, secunda $1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$, tertia $1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$, quarta $1a : n^3$

R 2 + a

+ $1a : n^4 + \&c.$, quinta $1a : n^4 + \&c.$, atque ita deinceps.

615. Istarum porro serierum quælibet ad primam est in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius. Unde, sicuti summa prioris seriei est * $na : (n - 1)$, sic erit $a : (n - 1)$ summa secundæ seriei, $a : n(n - 1)$ summa seriei tertiæ, $a : n^2(n - 1)$ summa seriei quartæ, $a : n^3(n - 1)$ summa seriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque series, de qua agitur, $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ æqualis erit alteri huic seriei $na : (n - 1) + a : (n - 1) + a : n(n - 1) + a : n^2(n - 1) + a : n^3(n - 1) + \&c.$ Sed altera hæc series est ad seriem $1a + 1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$ in ea ratione, quam habet n ad $n - 1$.

*art. 613. Quare, sicuti summa istius est * $na : (n - 1)$, sic summa illius erit $n^2a : (n - 1)^2$: & propterea etiam $n^2a : (n - 1)^2$ erit summa seriei principalis $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$

616. Multiplicentur tertio termini, constituentes seriem figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c., ordine per terminos ejusdem progressionis geometricæ decrescentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4, \&c.$ Dico, summam seriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$ esse $n^3a : (n - 1)^3$. Resolvatur enim quisque terminus ejus seriei in plures alios, quorum coefficientes sint numeri naturales, ex quibus componitur coefficientis illius. Jamque, resolutione ista, habebuntur infinitæ aliæ series, quarum prima erit $1a +$
1a:

$1a : n + 1a : n^2 + 1a : n^3 + 1a : n^4 + \&c.$, secunda $2a : n + 2a : n^2 + 2a : n^3 + 2a : n^4 + \&c.$, tertia $3a : n^2 + 3a : n^3 + 3a : n^4 + \&c.$, quarta $4a : n^3 + 4a : n^4 + \&c.$, quinta $5a : n^4 + \&c.$, atque ita deinceps.

617. Istarum autem serierum quælibet ad primam est in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius. Unde, sicuti summa prioris seriei est $* na : (n - 1)$, ^{*art. 613.} sic erit $2a : (n - 1)$ summa secundæ seriei, $3a : n(n - 1)$ summa seriei tertiæ, $4a : n^2(n - 1)$ summa seriei quartæ, $5a : n^3(n - 1)$ summa seriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque series, de qua agitur, $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$ æqualis erit alteri huic seriei $na : (n - 1) + 2a : (n - 1) + 3a : n(n - 1) + 4a : n^2(n - 1) + 5a : n^3(n - 1) + \&c.$ Sed altera hæc series est ad seriem $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ in ea ratione, quam habet n ad $n - 1$. Quare, sicuti summa istius est $* n^2a : (n - 1)^2$, ^{*art. 614.} sic summa illius erit $n^3a : (n - 1)^3$: & propterea etiam $n^3a : (n - 1)^3$ erit summa seriei principalis $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$

618. Multiplicentur quatto termini, constituentes seriem figuratorum secundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, &c., ordine per terminos ejusdem progressionis geometricæ decrescentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4, \&c.$ Dico, summam seriei infinitæ, inde ortæ, $1a + 4a : n + 10a : n^2 + 20a : n^3 + 35a : n^4 + \&c.$ esse $n^4a : (n - 1)^4$. Resolvatur enim quisque terminus ejus seriei in plures alios, quorum coefficientes sint figurati

R 3 pri₂

primi ordinis, ex quibus componitur coefficientis illius. Jamque, resolutione ista, habebuntur infinitæ aliæ series, quarum prima erit $1a + 1a:n + 1a:n^2 + 1a:n^3 + 1a:n^4 + \&c.$, secunda $3a:n + 3a:n^2 + 3a:n^3 + 3a:n^4 + \&c.$, tertia $6a:n^2 + 6a:n^3 + 6a:n^4 + \&c.$, quarta $10a:n^3 + 10a:n^4 + \&c.$, quinta $15a:n^4 + \&c.$, atque ita deinceps.

619. Istarum vero serierum qualibet ad primam est in ea ratione, quam habet primus terminus unius ad primum terminum alterius.

*art. 613. Unde, sicuti summa prioris seriei est $\cdot na:1$ ($n-1$), sic erit $3a:(n-1)$ summa secundæ seriei, $6a:n(n-1)$ summa seriei tertiæ, $10a:n^2(n-1)$ summa seriei quartæ, $15a:n^3(n-1)$ summa seriei quintæ, atque ita in infinitum: proindeque series, de qua agitur, $1a + 4a:n + 10a:n^2 + 20a:n^3 + 35a:n^4 + \&c.$ æqualis erit alteri huic seriei $na:(n-1) + 3a:(n-1) + 6a:n(n-1) + 10a:n^2(n-1) + 15a:n^3(n-1) + \&c.$ Sed altera hæc series est ad seriem $1a + 3a:n + 6a:n^2 + 10a:n^3 + 15a:n^4 + \&c.$ in ea ratione, quam habet n ad $n-1$. Quare, sicuti summa

*art. 616. istius est $\cdot n^3a:(n-1)^2$, sic summa illius erit $n^4a:(n-1)^4$; & propterea etiam $n^4a:(n-1)^4$ erit summa seriei principalis $1a + 4a:n + 10a:n^2 + 20a:n^3 + 35a:n^4 + \&c.$

620. Eodem artificio invenire licebit summam finitam infinitorum terminorum cujuslibet seriei, quæ oriatur, multiplicando ordine numeros figuratos ordinis superioris per terminos progressionis geometricæ decrescentis $a, a:n, a:n^2, a:n^3, a:n^4, \&c.$ Nimirum, resolvendo unumquem-

quemq; terminum illius seriei in plures alios, quorum coefficientes sint numeri figurati ordinis præcedentis, ex quibus componitur termini illius coefficientes; & constituendo infinitas alias series, quarum termini geometricam progressionem decrecentem constituent. Nam, si summæ harum serierum inveniantur, & ex iis fiat nova series; hæc ad seriem, ortam ex numeris figuratis ordinis præcedentis, erit perpetuo, ut n ad $n - 1$. Quare, ex cognita summa istius seriei, facile erit, illius quoque summam invenire.

621. Sed ex iis, quæ hætenus ostensa sunt, haud difficile erit, regulam cudere adeo generalem, quæ ad omnes casus, speciales se extendat. Quemadmodum enim termini progressionis geometricæ decrecentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 + \&c.$, ubi afficiuntur unitatibus 1, 1, 1, 1, 1, &c., dant simul collecti summam ^{Art. 613.} $na : (n - 1)$; ita summa eorundem sit ^{Art. 614.} $(n - 1)^2$, quum afficiuntur numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, 5, &c.; $n^3 a : (n - 1)^3$, quum ^{Art. 616.} afficiuntur figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c.; $n^4 a : (n - 1)^4$, quum ^{Art. 618.} afficiuntur figuratis secundi ordinis 1, 4, 10, 20, 35, &c.; atque ita deinceps. Quare, si ipsi numeri naturales ita quidem inter figuratorum ordines collocentur, ut exponens ordinis eorum sit zero, seu nihil; regula generalis hæc erit.

622. Inveniatur summa omnium terminorum progressionis geometricæ decrecentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 + \&c.$, quum quisque terminus afficitur unitate. Ea quantitas, quæ est ad hanc summam in ratione, quam habet n ad $n - 1$, toties multiplicata, quæ designat ex-

ponens ordinis numerorum, auctus unitate una, erit summa quæsitæ. Qua ratione, si termini progressionis geometricæ decreſcentis $a + a : n + a : n^2 + a : n^3 + a : n^4 + \&c.$ afficiantur figuratis sexti ordinis, summa erit $n^6 a : (n - 1)^6$. Nam summa omnium ejus infinitorum terminorum, quum quisque afficitur unitate, est $\ast na : (n - 1)$. Plane vero quantitas, quæ sit ad $na : (n - 1)$ in eadem illa ratione, quam habet n^7 ad $(n - 1)^7$, est $n^6 a : (n - 1)^6$.

VI. Secunda classis serierum summabilium, quæ figuratis primi generis sunt.

623. **Q**uantum ad series infinitas alterius classis, hoc est ad eas, quæ oriuntur per inversionem numerorum figuratorum; etiam determinare licebit earum summas finitas. Est autem hujus rei hoc quidem theorema generale: nimirum, quod in numeris figuratis inversis summa omnium terminorum, qui primum excipiunt, adæquat eam partem unitatis, quam designat exponens ipse ordinis numerorum; hoc est unitatem integram, quum figurati sunt primi ordinis; unitatis semissem, quum figurati sunt ordinis secundi; unitatis trientem, quum figurati sunt ordinis tertii; atque ita deinceps. Nec sane difficile erit, theorematibus hujus veritatem ostendere.

624. Invertantur etenim primo numeri figurati primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c., ita, ut fiat series $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + \&c.$ Ostendendum est, summam omnium terminorum hujus seriei, excepto primo, uni-

tatem adæquare. Fiat series harmonica ex numeris naturalibus inverſis $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + \&c.$ Et jam, ſi ab ea ſubducatur ipſamet, multata primo termino; reſiduum erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Plane vero, ſi ſubtractio fiat ea lege, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius; emergit hæc alia ſeries $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + \&c.$, cujus duplum eſt ſeries, de qua agitur $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + \&c.$ Itaque ſumma huius ſeriei æqualis erit duplo unitatis: & propterea, dempto priore termino, qui ſupererunt, unitatem ipſam adæquabunt.

625. Invertantur ſecundo numeri figurati ſecundi ordinis $1, 4, 10, 20, 35, \&c.$, ita, ut fiat ſeries $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + \&c.$ Oſtendendum eſt modo, terminos omnes huius ſeriei, excepto primo, unitatis ſemiſſem adæquare. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum ordinis primi $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + \&c.$ Et, ſiquidem ab ea ſubducatur ipſamet, multata primo termino; reſiduum erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Jam vero, ſi ſubtractio ea lege inſtituatur, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius; naſcitur hæc alia ſeries $2 : 3 + 3 : 18 + 4 : 60 + 5 : 150 + 6 : 315 + \&c.$, cujus termini ad terminos ſeriei, de qua eſt quæſtio, $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + \&c.$, ſunt ut 2 ad 3. Itaque, quum valor illius ſeriei ſit unitas, erit valor alterius huius ſeriei $3 : 2$: proindeque, dempto priore termino, qui remanebunt, ſemiſſem unitatis adæquabunt.

626.

626. Invertantur tertio numeri figurati tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, &c., ita, ut fiat series 1 : 1 + 1 : 5 + 1 : 15 + 1 : 35 + 1 : 70 + &c. Dico, omnes terminos hujus seriei, excepto primo, trientem unitatis adæquare. Fiat series ex inversione numerorum figuratorum secundi ordinis 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 10 + 1 : 20 + 1 : 35 + &c. Et, siquidem ab ea subducatur ipsamet, multata primo termino; id, quod remanebit, erit terminus primus, qui unitatem adæquat. Sed, si subtrahitio ea lege fiat, ut termini unius ordine subducantur ex terminis alterius; gignitur hæc alia series 3 : 4 + 6 : 40 + 10 : 200 + 15 : 700 + 21 : 1760 + &c., cujus termini ad terminos seriei, de qua agitur, 1 : 1 + 1 : 5 + 1 : 15 + 1 : 35 + 1 : 70 + &c., sunt, ut 3 ad 4. Itaque, quum valor illius seriei sit unitas, necesse est, ut valor alterius hujus seriei sit 4 : 3 : & propterea, dempto priore termino, qui supererunt, trientem unitatis adæquabunt.

627. Non dissimiliter veritatem propositi theorematism ostendemus, invertendo numeros figuratos ordinum superiorum. Sed, si ipsi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum subinde collocentur, ut exponens ordinis eorum sit zero, seu nihil; poterit idem theorema iis etiam numeris applicari. Invertantur etenim numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., & constituatur eorum inversione series harmonica 1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + &c. Dico, omnes terminos hujus seriei, qui primum excipiunt, simul collectos, eam unitatis partem adæquare, quam designabit zero, seu nihil, hoc est

est exponens ordinis numerorum naturalium; adeoque summam illorum esse infinitam, quum dividendo finitum per zero oriatur * infinitum. *art. 486.

628. Id autem, velut prorsus memorabile, dupliciter ostendemus. Et primo quidem in hunc modum. Fiat series ex inversione figuratorum primi ordinis $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 6 + 1 : 10 + 1 : 15 + \&c.$ Et quoniam omnes termini, qui primum excipiunt, adæquant * unitatem; *art. 624. erit tota series æqualis binario, adeoque dimidium ejusdem seriei unitatem rursus adæquabit. Capiatur autem dimidium illius seriei, sumendo semissem cujusque termini. Et jam oriatur nova series $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + \&c.$, quæ considerari poterit, velut generatrix seriei harmonicæ $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + \&c.$. Nam, quemadmodum tota illa series dat primum terminum istius; ita ex eadem, multata primo termino, orietur istius terminus secundus; ex eadem, multata duobus primis terminis, orietur istius terminus tertius; atque ita deinceps.

629. Hinc, si seriei illius $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + \&c.$ quisque terminus capiatur toties, quotus est locus, quem ipse occupat in serie; ipsa series harmonica debet oriri. Id vero quum fit, oritur series $1 : 2 + 2 : 6 + 3 : 12 + 4 : 20 + 5 : 30 + \&c.$, quæ, reductis terminis omnibus ad simplices suas expressiones, mutatur in hanc aliam $1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + 1 : 6 + \&c.$, scilicet in ipsam seriem harmonicam, primo termino multatam. Itaque series harmonica talis est, ut a se ipsa, multata primo termino, non differat: proindeque

que primus terminus, nempe unitas, evanescit respectu totius seriei: quod non aliter fieri posse perspicuum est *, nisi summa infinitorum terminorum seriei harmonicæ sit infinita.

630. Sed aliam adhuc ejusdem rei demonstrationem afferamus. Nimirum ea summa censeri debet infinita, ex qua, detracta unitate, rursus alia, atque alia in infinitum detrahi potest. Itaque a principio seriei harmonicæ abscindantur termini aliquot, quorum summa unitatem vel adæquet, vel excedat. Ergo, si hæc terminorum abscissio in infinitum potest continuari, jam totius seriei harmonicæ summa erit infinita. Quod si vero, facta sæpius ea terminorum abscissione, negas, ulterius eam fieri posse, quia forte termini reliqui unitatem non excedant; repræsentet indefinite n numerum illum, qui dividit unitatem in primo reliquorum terminorum.

631. Jam primi illius termini capiaturs pars, denominata ab $(n + 1) : n$, hujusque iterum pars consimilis, atque ita deinceps. Constituetur ergo in hunc modum progressio geometrica decrescens, cujus quisque terminus minor erit unoquoque reliquorum seriei harmonicæ. Quare summa illius progressionis minor erit summa terminorum omnium, qui ramanferunt in serie harmonicæ. Est autem summa infinitorum terminorum ejus progressionis * æqualis unitati. Itaque erit unitate major summa reliquorum terminorum seriei harmonicæ: proindeque adhuc ex iis abscindi poterunt termini aliquot, qui unitatem, vel adæquent, vel proxime excedant. Et quoniam eadem est semper demonstratio de

re.

reliquis terminis ; concludendum est , seriem harmonicam talem esse, ut, detracta ex ea unitate una , rursus alia , atque alia in infinitum detrahi possit . Unde summam infinitorum ejus terminorum infinitam esse oportebit .

632. Theorema igitur, superius * positum, *art. 623. obtinet etiam in serie, quæ oritur ex inversione numerorum naturalium , dummodo numeri naturales inter ordines figuratorum subinde collocentur, ut sit zero , seu nihil exponens ordinis ipsorum . Cur autem hæc series dicatur harmonica , haud difficile erit intelligere: nimirum, quia tres ejus quilibet termini, consecutive sumpti , harmonicam proportionem constituunt . Quod ut generaliter ostendamus, sit $1 : n$ seriei illius terminus aliquis . Erunt igitur $1 : (n + 1)$, $1 : (n + 2)$ termini duo, qui immediate illum excipiunt . Unde ostendendum est , tres istos terminos esse in proportionem harmonicam , hoc est maximum $1 : n$ esse ad minimum $1 : (n + 2)$, ut est differentia inter maximum , & medium ad differentiam inter medium , & minimum . Quod quidem perspicuum est . Nam prior differentia est $1 : (n^2 + n)$, secunda vero est $1 : (n^2 + 3n + 2)$. Profecto autem, ut est $1 : n$ ad $1 : (n + 2)$, ita est $1 : (n^2 + n)$ ad $1 : (n^2 + 3n + 2)$.

633. Cæterum artificium, quo hic usi sumus, pro inveniendis summis finitis serierum infinitarum, per subtractionem unius seriei a se ipsa, prioræ termino multata, nonnisi cum cautione debet adhiberi . Nam , exempli gratia , si a serie harmonica $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + \&c.$ subducatur eademmet,

mul-

multata primo termino ; orietur series $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + \&c.$ æqualis unitati, hoc est priori termino ipsius seriei harmonice . Sed , si a serie $2 : 1 + 3 : 2 + 4 : 3 + 5 : 4 + 6 : 5 + \&c.$ subducatur eadem series , multata similiter primo termino ; relinquetur adhuc $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + \&c.$, nec tamen dici potest , summam istius seriei æqualem esse illius priori termino ; quum prior terminus illius , non sit unitas , sed binarius.

634. Hujus rei ratio ut clarius intelligatur , notetur velim , quod quum ab aliqua serie eademmet , priore termino multata , subtrahitur ; summa seriei reliquæ , non est quidem primus terminus , sed primus , ultimo minutus . Per hujusmodi enim subtractionem non aliud efficitur , quam ut terminorum differentie capiantur . Unde eo res redit , ut ostendamus , omnes illas differentias simulte æquales esse differentie inter primum , & ultimum terminum . Id vero liquet abunde . Nam , si fuerint quocumque magnitudines $a , b , c , d , e , f , g$, clare patet , omnium differentias simul $a - b , b - c , c - d , d - e , e - f , f - g$ æquales esse $a - g$; hoc est primæ , ultimæ minutæ .

635. Jam , quum ultimus seriei terminus evanescit in infinitum , ut contingit in serie harmonica , nihil obstat , quominus dicamus , id , quod relinquitur , quotiescumque ab aliqua serie eademmet , priore termino multata , subtrahitur , priorem terminum adæquare ; quandoquidem prior terminus , per ultimi subtractionem , non minuitur . Sed quum ultimus seriei terminus non evanescit , tunc ad inveniendam summam

nam seriei reliquæ, necesse est, ut ultimus terminus a priori subducatur. Quocirca, quia in serie $2 : 1 + 3 : 2 + 4 : 3 + 5 : 4 + 6 ; 5 +$ &c. ultimus terminus unitatem adæquat, quum æquales fiant * ejus numerator, & denominator: *art. 294, proinde summa seriei reliquæ erit prior terminus, unitate minutus, hoc est eadem omnino cum illa, quæ per seriem harmonicam invenitur.

C A P U T IV.

Series summabiles, quæ figuratis aliorum generum fiunt.

636. **F**iguratis aliorum generum similiter fieri possunt series nonnullæ, in quibus determinare licet summas finitas omnium suorum terminorum. Ut autem de alijs hisce seriebus commodè differamus, non abs re erit, ipsam primo naturam horum figuratorum nonnihil contemplari. Et quantum ad eorum in genera distinctionem, jam quidem diximus supra *, quomodo ea sit facienda; nimirum, *art. 576. pro diversitate intervalli, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur: adeo, ut quemadmodum dicuntur primi generis, quum genitores progrediuntur intervallo unitatis; sic dici debeant secundi generis, quum progrediuntur intervallo binarii; tertii generis, quum progrediuntur intervallo ternarii; atque ita deinceps.

637. Sed, quemadmodum figuratos primi generis distinximus superius * in varios ordines, pro diversa ratione, qua ex suis genitoribus ori-

ri

ri intelliguntur ; sic eadem distinctio fieri quoque potest, relate ad figuratos aliorum generum. Unde in quolibet genere dicemus figuratos primi ordinis , qui oriuntur ex continua collectione ipsorum genitorum ; dicemus figuratos secundi ordinis , qui ex additione continua figuratorum primi ordinis suam originem trahunt ; dicemus figuratos tertii ordinis , qui generantur per continuam collectionem figuratorum ordinis secundi ; atque ita in infinitum.

1. Genitorum , & figuratorum omnium generum proprietas singularis .

638. **G**enitores figuratorum omnium generum hanc habent proprietatem , quod si iis , qui primi sunt generis , zero præfigatur , iidemque ordine adjungantur genitoribus alterius cujusque generis , oriuntur genitores generis sequentis . Ita numeri 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , &c. , qui sunt genitores primi generis , zero habentes in principio , si addantur ordine cum ipsis genitoribus primi generis 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , &c. , orientur numeri 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , &c. , qui sunt genitores generis secundi ; si vero addantur ordine cum aliis hisce genitoribus secundi generis , habebuntur numeri 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , &c. , qui sunt genitores generis tertii.

639. Hac mediante proprietate , facile erit , ex genitoribus primi generis cujuscumque alterius generis genitores derivare . Præfigatur etenim zero genitoribus primi generis . Et , siquidem ii , toties accepti , quot unitates continet exponens generis derivandorum genitorum , una dem-

dempta, addantur ordine cum ipsis primi generis genitoribus; habebuntur genitores generis quarti. Ita, si quærantur genitores generis quarti, capiatur ter unusquisque numerorum 0, 1, 2, 3, 4, &c., qui sunt genitores primi generis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 6, 9, 12, &c.; deinde addantur ordine cum genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, &c.; eruntque numeri prodeuntes 1, 5, 9, 13, 17, &c. genitores generis quarti.

640. Eadem proprietas, non solum genitoribus figuratorum, sed ipsis etiam figuratis competit. Si enim numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere constituunt, zero præfigatur, hique ordine adjungantur numeris, qui constituunt primum ordinem figuratorum in quovis alio genere; orientur figurati primi ordinis generis subsequentis. Ita numeri 0, 1, 3, 6, 10, &c., qui in primo genere sunt figurati primi ordinis, zero habentes in principio, si addantur ordine cum ipsis numeris, 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere secundo; si vero ordine addantur cum istis, habebuntur numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui sunt figurati primi ordinis in genere tertio.

641. Unde etiam, proprietatis hujus beneficio, facile erit, ex numeris, qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui sint figurati primi ordinis in quovis alio genere. Præfigatur etenim zero iis, qui sunt primi generis. Et siquidem

Tom. I.

S

ii-

iidem, toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, una dempta, addantur ordine cum ipsis numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere constituunt; habebuntur figurati primi ordinis generis quæsti. Ita, si quærantur figurati primi ordinis generis quartis; capiatur ter unusquisque numerorum 0, 1, 3, 6, 10, &c., qui in primo genere sunt figurati primi ordinis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 9, 18, 30, &c.; deinde addantur ordine cum numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum primi generis; & numeri, inde orti, 1, 6, 15, 28, 45, &c. erunt figurati primi ordinis in genere quarto.

642. Eadem ratione, si numeris, qui secundum ordinem figuratorum in primo genere constituunt, zero præfigatur, iique ordine adjungantur numeris, qui constituunt secundum ordinem figuratorum in quovis alio genere; orientur figurati secundi ordinis generis subsequen-
tis. Ita numeri 0, 1, 4, 10, 20, &c., qui in primo genere sunt figurati secundi ordinis, zero habentes in principio, si addantur ordine cum ipsis numeris 1, 4, 10, 20, 35, &c., qui constituunt secundum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 5, 14, 30, 55, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere secundo; & si porro ordine addantur cum istis, habebuntur numeri 1, 6, 18, 40, 75, &c., qui sunt figurati secundi ordinis in genere tertio.

643. Unde similiter, ope hujus proprietatis, facile erit, ex numeris, qui constituunt secundum

dum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui sint figurati secundi ordinis in quovis alio genere. Præfigatur etenim zero iis, qui sunt primi generis. Et siquidem iidem, toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, una dempta, addantur ordine cum ipsis numeris, qui secundum ordinem figuratorum in primo genere constituunt; habebuntur figurati secundi ordinis generis quæsi. Ita, si quærantur figurati secundi ordinis generis quarti, capiatur ter unusquisque numerorum 0, 1, 4, 10, 20, &c., qui in primo genere sunt figurati secundi ordinis, zero habentes in principio, ita, ut evadant 0, 3, 12, 30, 60, &c.; deinde addantur ordine cum numeris 1, 4, 10, 20, 35, &c., qui constituunt secundum ordinem figuratorum primi generis; & numeri, inde orti, 1, 7, 22, 50, 95, &c. erunt figurati secundi ordinis in genere quarto.

644. Pro hujus proprietatis demonstratione, ostendendum est prius hoc theorema, quod si fuerint quocumque series numerorum, eam proprietatem habentes, ut præfixo zero iis, qui primam seriem constituunt, iisdemque additis ordine cum numeris cujuscumque seriei, oriantur numeri seriei subsequenter; & ex collectio-
ne continua numerorum, series illas constituentium, conficiantur totidem aliæ numerorum series: quod inquam aliæ istæ series eandem habent proprietatem, ac primæ: adeo, ut si numeris primæ seriei zero præfigatur, iique ordine addantur cum numeris cujusque seriei; qui inde oriuntur, sint numeri seriei subsequenter.

645. Sint igitur $a, b, c, d, \&c., a, e, f, g,$
 $S \quad 2 \quad \&c.,$

&c., a, b, i, k , &c., a, l, m, n , &c. series aliquot numerorum, quæ eam habeant proprietatem, ut si numeris, qui primam seriem constituunt, zero præfigatur, iique ordine adjungantur numeris cujuscumque seriei, oriantur numeri seriei subsequæntis. Fiant autem collectione continua numerorum, series illas constituentium, totidem aliæ series a, a, p, q , &c., a, r, s, t , &c., a, u, x, y , &c., a, z, ϕ, w , &c. Dico, novas istas series eandem cum primis proprietatem habere; ita nempe, ut si numeris, qui primam seriem constituunt, zero præfigatur, iique ordine addantur cum numeris cujusque seriei; oriantur exinde numeri, qui constituunt seriem subsequæntem.

646. Ex hypothesi enim primæ series eam habent proprietatem, ut præfixo zero numeris, qui primam seriem constituunt, iisdemque additis ordine cum numeris alicujus seriei, oriuntur numeri seriei subsequæntis. Quare, existentibus numeris primæ seriei a, b, c, d , &c.; fient numeri seriei secundæ $a, a + b, b + c, c + d$, &c.; numeri seriei tertiæ $a, 2a + b, 2b + c, 2c + d$, &c.; numeri seriei quartæ $a, 3a + b, 3b + c, 3c + d$, &c.; atque ita deinceps. Et quoniam secundæ series oriuntur ex collectione continua numerorum, series primas constituentium; prima ex secundis istis seriebus erit $a, a + b, a + b + c, a + b + c + d$, &c.; secunda $a, 2a + b, 2a + 2b + c, 2a + 2b + 2c + d$, &c.; tertia $a, 3a + b, 3a + 3b + c, 3a + 3b + 3c + d$, &c.; quarta $a, 4a + b, 4a + 4b + c, 4a + 4b + 4c + d$, &c.; atque ita in infinitum.

647.

647. Jam, designatis hac ratione secundis seriebus, liquet, primos terminos ipsarum a se mutuo non differre, quum omnes per a designentur; sed non item terminos alios, quum secundi differant a se mutuo per a , tertii per $a + b$, quarti per $a + b + c$, atque ita deinceps. Unde, quum oriatur semper terminus subsequens, si alicui ex secundis addatur a , alicui ex tertiis addatur $a + b$, alicui ex quartis addatur $a + b + c$, atque ita in infinitum; perspicuum est, quod si termini, $0, a, a + b, a + b + c$, &c. addantur ordine terminis cujusque ex iis seriebus, oriuntur termini seriei subsequenter. Sunt autem $0, a, a + b, a + b + c$, &c. numeri, constituentes primam earum serierum, & zero habentes in principio. Quare proprietas illa non solum in primis, verum etiam in secundis seriebus locum habebit.

648. Ostenso hoc theoremate, haud difficile modo erit, rationem reddere ejus proprietatis, quæ deprehenditur in numeris, qui in singulis generibus eundem figuratorum ordinem constituunt. Primo enim numeri, qui in unoquoque genere sunt figurati primi ordinis, oriuntur ex ^{art. 637.} continua collectione genitorum, qui ad sua quæque genera referuntur. Jam vero numeri isti genitores hanc ^{art. 638.} habent proprietatem, ut si iis, qui sunt primi generis, zero præfigatur, iidemque ordine adjungantur genitoribus cujusque generis; oriuntur genitores generis subsequenter. Itaque, per ostensum theorema, hæc eadem proprietas obtinebit etiam in numeris, qui in singulis generibus primum figuratorum ordinem constituunt.

649. Et quoniam numeri, qui in singulis generibus constituunt secundum ordinem figurarum, oriuntur ex continua collectione eorum, qui in iisdem generibus constituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa
art. 637. obtinet in istis, ita etiam, per ostensum theorema, locum habebit in iis. Unde porro, quia numeri, qui constituunt in unoquoque genere
art. 637. tertium figurarum ordinem, oriuntur ex collectione continua eorum, qui in eodem genere constituunt ordinem secundum; obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis. Atque hac ratione gradatim in omnibus aliis figuratis, qui sunt unius, ejusdemque ordinis, proprietatem illam locum habere comperiemus.

650. Cæterum, eandem proprietatem comperere pariter numeris, quos figurarum genitores appellamus; liquebit, si consideremus, genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continua collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c.; genitores secundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continua binariorum, quibus unitas sit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c.; genitores tertii generis, tamquam progredientes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continua ternariorum, quibus similiter unitas sit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

651. Quum enim series horum numerorum
 1, 1, 1, 1, 1, &c., 1, 2, 2, 2, 2, &c., 1, 3, 3, 3, 3, &c., 1, 4, 4, 4, 4, &c., ex quibus genitores generum omnium continua collectione oriuntur,

tur, hujusmodi sint, ut inter primos ipsarum terminos nulla adsit differentia, inter alios vero ea intercedat, ut ubique quisque antecedens deficiat a subsequente per unitatem; perspicuum est, in iis seriebus proprietatem illam locum habere. Unde, per ostensum theorema, eadem proprietas obtinebit etiam in seriebus, quæ genitores generum omnium comprehendunt; quandoquidem istæ series, ut dictum est *, oriuntur ^{*art.670.} ex iis per continuam collectionem suorum terminorum.

II. Ratio colligendi figuratæ cujusque ordinis in singulis generibus.

652. **Q**uomodo sint colligendi figurati cujusque ordinis, qui primi sunt generis; jam quidem superius demonstravimus. Sed, cognitis summis figuratorum primi generis, per ea, quæ mox ostensa sunt, facile erit, figuratos aliorum generum in unam quoque summam colligere. Ut autem ab ipsis genitoribus ordiamur, jam vidimus superius *, genitores cujuscumque alterius generis haberi, si ^{*art.639.} iis, qui primi sunt generis, zero præfigatur, iidemque, toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæsitorem genitorum, una dempta, addantur ordine cum ipsis genitoribus primi generis. Quare, ad inveniendam in quovis alio genere summam genitorum totidem, quot designat numerus m , non aliud fieri debet, quam in unum addere tot genitores primi generis, quot designat numerus $m - 1$, & summam istam, toties acceptam, quot unita-

649. Et quoniam numeri, qui in singulis generibus constituunt secundum ordinem figuratorum, oriuntur ex continua collectione eorum, qui in iisdem generibus constituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa obtinet in istis, ita etiam, per ostensum theorema, locum habebit in iis. Unde porro, quia numeri, qui constituunt in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex collectione continua eorum, qui in eodem genere constituunt ordinem secundum; obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis. Atque hac ratione gradatim in omnibus aliis figuratis, qui sunt unius, ejusdemque ordinis, proprietatem illam locum habere comperiemus.

650. Cæterum, eandem proprietatem competere pariter numeris, quos figuratorum genitores appellamus; liquebit, si consideremus, genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continua collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c.; genitores secundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continua binariorum, quibus unitas sit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c.; genitores tertii generis, tamquam progredientes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continua ternariorum, quibus similiter unitas sit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita cæteris.

651. Quum enim series horum numerorum
 1, 1, 1, 1, 1, &c., 1, 2, 2, 2, 2, &c.,
 1, 3, 3, 3, 3, &c., 1, 4, 4, 4, 4, &c., ex quibus
 generum omnium continua colligitur

tur, huiusmodi sunt, ut per
terminos nulla additio
ea intercedat, ut ubique
deficiat a subsequente
est, in iis seriebus pro
bere. Unde, per
proprietas obtine
nitores generum
doquidem iste
ex iis per commun
minorum.

II. Ratio

641.

funt gen
vires. In
mi gen
erit, f
summa
ribus
nitores
iis, qu
iide
net ex
um d
ribus
in qu
den
si de
P
&

ui
ti-
os ^{Art. 641}
is,
mq;
po-
dem-
qui
e, ad
am to-
designat
quam in
his in ge-
e summam
os continet
ratorum, una
qua oritur ex
am, qui in gene-
stituunt, quot
de-

tes continet exponens generis addendorum genitorum, una dempta, conjungere cum summa, quæ oritur ex additione tot aliorum genitorum primi generis, quot designat ipse numerus m .

*art. 590. 653. Jam per ea, quæ superius * ostensa
594. sunt, summa ex tot genitoribus primi generis, quot designat m , est semissis ejus, quod oritur, multiplicando m per $m + 1$. Atque ita quoque summa ex tot genitoribus ejusdem generis, quot designantur per $m - 1$, est semissis ejus, quod producitur, multiplicando $m - 1$ per m . Quocirca, quia primum productum est $m^2 + m$, & productum secundum est $m^2 - m$; inveniatur in unoque alio genere summa tot genitorum, quot denotat numerus m , si ad $(m^2 + m) : 2$ addatur toties $(m^2 - m) : 2$, quot unitates habet exponens generis addendorum genitorum, una dempta; hoc est semel, si genitores addendi fuerint generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quartis atque ita deinceps.

654. Itaque, quia si ad $(m^2 + m) : 2$ addatur semel $(m^2 - m) : 2$, summa tota est $2m^2 : 2$, sive potius $(2m^2 + 0m) : 2$; erit $(2m^2 + 0m) : 2$ summa ex tot genitoribus generis secundi, quot designat numerus m . Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $(m^2 - m) : 2$ bis ad $(m^2 + m) : 2$, est $(3m^2 - m) : 2$; erit $(3m^2 - m) : 2$ summa ex tot genitoribus generis tertii, quot designat numerus m . Atque ita quoque, designante semper m multitudine genitorum addendorum, erit summa quæ sita $(4m^2 - 2m) : 2$, relate ad genitores generis quartis; $(5m^2 - 3m) : 2$, relate ad genitores generis

neris quinti ; $(6m^2 - 4m) : 2$, relate ad genitores generis sexti ; atque ita deinceps.

655. Unde patet , summas istas indefinitas numerorum genitorum cujuscunque generis miro quidem ordine progredi in infinitum ; neque adeo oportere , exposito artificio singulas invenire . Est enim unaquæque semissis quantitatis , quæ duobus terminis constat . Atque horum terminorum primi constituuntur , multiplicando numeros , qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur , per quadratum numeri m , qui designat , quot genitores in unum sunt addendi ; secundi vero habentur , multiplicando numeros , qui ab unitate per unitatis intervallum regrediuntur , per ipsum numerum m .

656. Progrediamur modo ad figuratos , qui primum ordinem in unoquoque genere constituunt . Jamque vidimus superius * , figuratos ^{art. 641.} primi ordinis in omni alio genere haberi , si iis , qui primi sunt generis , zero præfigatur , iidemque toties accepti , quot unitates continet exponens generis quæstorum figuratorum , una dempta , addantur ordine cum ipsis figuratis , qui in primo genere primi sunt ordinis . Quare , ad inveniendam in quovis alio genere summam totidem figuratorum primi ordinis , quot designat numerus m , non aliud fieri debet , quam in unum addere tot figuratos primi ordinis in genere primo , quot designat $m - 1$, & summam istam , toties acceptam , quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum , una dempta , conjungere cum summa , quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum , qui in genere primo primum ordinem constituunt , quot de-

designat ipse numerus m .

Art. 591. 594. 657. Jam per ea, quæ superius * ostensa sunt, summa ex tot figuratis primi ordinis in genere primo, quot designat numerus m , habetur, multiplicando per se invicem tres istos numeros m , $m+1$, $m+2$, & dividendo productum $m^3 + 3m^2 + 2m$ per 6. Atque ita quoque summa ex tot figuratis primi ordinis in eodem primo genere, quot designat $m-1$, habetur, multiplicando per se mutuo tres istos numeros $m-1$, m , $m+1$, & productum $m^3 - m$ dividendo similiter per 6. Quocirca, quia quotiens primæ divisionis est $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$, & quotiens secundæ est $(m^3 - m) : 6$; invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum primi ordinis, quot denotat numerus m , si ad $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$ addatur toties $(m^3 - m) : 6$, quot unitates habet exponentis generis addendorum figuratorum, una dempta; hoc est semel, si figurati addendi sunt secundi generis; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

658. Itaque, quia si ad $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$ semel addatur $(m^3 - m) : 6$, summa tota est $(2m^3 + 3m^2 + 1m) : 6$; erit hæc eadem quantitas summa ex tot figuratis primi ordinis in genere secundo, quot designat numerus m . Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $(m^3 - m) : 6$ bis ad $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$ est $(3m^3 + 3m^2) : 6$, sive etiam $(3m^3 + 3m^2 + 0m) : 6$; erit hæc alia quantitas summa ex tot figuratis primi ordinis in genere tertio, quot designat idem adhuc numerus m . Atque ita quoque, designante semper m multitudine figuratorum adden-

dendorum, erit summa quæsitæ ($4m^3 + 3m^2 - 1m$):6 relate ad eos, qui sunt quarti generis; ($5m^3 + 3m^2 - 2m$):6 respectu eorum, qui sunt generis quintis; ($6m^3 + 3m^2 - 3m$):6 in ordine ad illos, qui sunt generis sexti; atque ita deinceps.

659. Ex quo patet, summas istas indefinitas numerorum, qui in omni genere primum figuratorum ordinem constituunt, miro quoque ordine progredi in infinitum; neque adeo oportere, exposito artificio singulas invenire. Est enim unaquæque sexta pars quantitatis, quæ tribus terminis constat. Atque horum terminorum primi constituuntur, multiplicando numeros naturales per cubum ipsius numeri m , qui designat, quot figurati in unum sunt addendi; secundi, multiplicando numerum ternarium per quadratum ejusdem numeri m ; & tertij decimum, multiplicando numeros, qui a binario per unitatis intervallum regrediuntur, per ipsum numerum m .

660. Eadem ratione determinare licebit summas indefinitas figuratorum, qui ad ordines alios in singulis generibus referuntur. Jam enim figurati, constituentes datum aliquem ordinem in omni alio genere, habentur, si iis, qui sunt ejusdem ordinis in genere primo, zero præfigatur, iidemque, toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæsitorum figuratorum, una dempta, addantur ordine cum ipsis figuratis, qui sunt ejus ordinis in genere primo. Quare, ad inveniendam in quovis alio genere summam totidem figuratorum dati cujusdam ordinis, quot designat numerus m , non aliud

aliud fieri debet, quam in unum addere tot figuratos ejus ordinis in genere primo, quot designat numerus $m \rightarrow 1$, & summam istam, toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta, conjungere cum summa, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo eundem ordinem constituunt, quot designat ipse numerus m .

661. Ita, si de inveniendis summis indefinitis figuratorum secundi ordinis quæstio sit; per
 *art. 592. ea, quæ superius * ostensa sunt, summa ex tot
 594. figuratis secundi ordinis in genere primo, quot designat numerus m , habetur, multiplicando per se invicem quatuor istos terminos m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, & dividendo productum per 24. Atque ita quoque summa ex tot figuratis secundi ordinis in eodem primo genere, quot designat $m \rightarrow 1$, habetur, multiplicando per se mutuo quatuor istos terminos $m \rightarrow 1$, m , $m + 1$, $m + 2$, & productum dividendo similiter per 24. Quocirca invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum secundi ordinis, quot denotat numerus m , si ad priorem quotientem addatur toties quotientiens secundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta; hoc est semel, si figurati addendi sint generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

662. Similiter, si agatur de inveniendis summis indefinitis figuratorum tertii ordinis;
 *art. 593. per ea, quæ superius * ostensa sunt, summa ex
 594. tot figuratis tertii ordinis in genere primo, quot
 de-

designat numerus m , habetur, multiplicando per se mutuo istos quinque numeros m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, & dividendo productum per 120. Atque ita quoque summa ex tot figuratis tertii ordinis in eodem primo genere, quot designat $m - 1$, habetur, multiplicando per se invicem hos quinque numeros $m - 1$, m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, & dividendo productum similiter per 120. Quare invenietur in unoquoque alio genere summa tot figuratorum tertii ordinis, quot designat numerus m , si ad quotientem, ortum ex prima divisione, addatur toties quotiens, ortus ex divisione secunda, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, una dempta.

663. Cæterum, quemadmodum in primo genere figuratorum ostensum est superius *, summani omnium infinitorum terminorum esse ad summam terminorum totidem, æquale *art. 595.* maximum, ut 1 ad 2 in ipsis genitoribus, ut 1 ad 3 in figuratis primi ordinis, ut 1 ad 4 in figuratis secundi ordinis, ut 1 ad 5 in figuratis ordinis tertii, atque ita deinceps; ita licebit ostendere, quod eadem proportionibus continent quoque in figuratis cujuscunque alterius generis. Dabimus autem præclaræ hujus theoriæ specimen dumtaxat in iis, qui secundi sunt generis. Quem in finem notabimus primo, quod quum genitores secundi generis progrediantur ab unitate per intervallum binarii, oriuntur ii per continuam additionem binariorum, quibus unitas sit præfixa. Ex quo fit, ut genitor existens in loco m , sit $2m - 1$; adeoque, si m statu-

tuatur numerus infinitus, idem genitor, quæ

*art.494. omnium maximus evadit, erit * simpliciter $2m$.

664. Hoc prænotato, pergamus ad id, quod erat præcipuum. Ac primo quidem summa in-

*art.654. definita genitorum secundi generis est * $(2m^2 + 0m) : 2$, five etiam m^2 ; & ubi m ponitur infinitus, eadem summa adhuc manet m^2 . Quare summa ista m^2 ad maximum genitorem $2m$, infinities etiam acceptum, hoc est ad $2m^2$, erit, ut 1 ad 2. Similiter summa indefinita figura-

*art.655. torum primi ordinis in genere secundo est * $(2m^3 + 3m^2 + 1m) : 6$. Itaque existente m numero infinito, hæc eadem summa erit $m^3 : 3$; & propterea ad maximum figuratum m^2 , infinities etiam acceptum, hoc est ad m^3 , erit, ut 1 ad 3. Atque ita quoque summa indefinita figurato-

*art.661. rum secundi ordinis in eodem secundo genere est * $(2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m) : 24$. Quare, ubi m ponitur infinitus, hæc eadem summa erit $m^4 : 12$; adeoque ad maximum figuratum $m^3 : 3$, infinities etiam acceptum, hoc est ad $m^4 : 3$, erit, ut 1 ad 4.

III. Quæ sint series summabiles, quæ figuratis aliorum generum fieri possunt.

665. **Q**uemadmodum series, quæ sunt, multiplicando figuratos primi generis ordine per terminos alicujus progressionis geometricæ decrefcentis, sunt summabiles natura sua; sic etiam licebit, determinare summas finitas earum serierum, quæ oriuntur, multiplicando figuratos aliorum generum ordine per terminos progressionis non dissimilis. Præstari id

Id autem poterit, ope ejus proprietatis, quæ in ipsis aliorum generum figuratisprehenditur, & quam paulo ante ostensam exhibuimus. Quod ut liquido constet, experiemur id primum in ipsis figuratorum genitoribus, qui intelligendi sunt habere zero, velut exponentem sui ordinis, quotiescumque ipsos quoque inter figuratorum ordines reponere lubet.

666. Multiplicentur itaque primo genitores secundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. ordine per terminos progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut fiat series $1a + 3a : n + 5a : n^2 + 7a : n^3 + 9a : n^4 + \&c.$ Et quoniam genitores secundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. oriuntur *, addendo genitores * *art. 638*, generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum ipsis primi generis genitoribus 1, 2, 3, 4, 5, &c.; componetur series illa per additionem terminorum duarum istarum serierum $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 + \&c.$, $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ Quare summa omnium infinitorum terminorum illius seriei æqualis erit summis, quæ ex infinitis istorum terminis, simul collectis, oriuntur,

667. Jam series $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ est summabilis natura sua, estque ejus summa * $n^2 a : (n - 1)^2$, Unde eo * *art. 614*, res redit, ut investigemus summam alterius seriei $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 + \&c.$ Id vero factu facile erit. Nam, neglecto primo ejus termino $0a$, velut nullius magnitudinis; perspicuum est, unumquemque terminum ipsius ad correspondentem terminum prio-

prioris seriei $1a + 2a : n + 3a : n^2 + 4a : n^3 + 5a : n^4 + \&c.$ esse in ea ratione, quam habet 1 ad n . Quare in eadem ratione erunt etiam inter se summæ ipsarum serierum: & propterea, quemadmodum summa unius est $n^2a : (n - 1)^2$, sic erit summa alterius $na : (n - 1)^2$. Ex quo fit, ut summa seriei, de qua agitur, sit $na : (n - 1)^2 + n^2a : (n - 1)^2$, sive etiam $(na + n^2a) : (n - 1)^2$.

668. Multiplicentur secundo genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. ordine per terminos ejusdem progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$ &c., ita, ut habeatur series $1a + 4a : n + 7a : n^2 + 10a : n^3 + 13a : n^4 + \&c.$ Et quoniam genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. oriuntur, addendo genitores generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum genitoribus secundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c.; componetur series illa per additionem terminorum duarum istarum serierum $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 + \&c., 1a + 3a : n + 5a : n^2 + 7a : n^3 + 9a : n^4 + \&c.$

art. 667. Sed harum serierum, ut jam ostensum est, prima est æqualis $na : (n - 1)^2$, secunda vero est æqualis $(na + n^2a) : (n - 1)^2$. Itaque summa seriei, de qua est quæstio, erit $na : (n - 1)^2 + (na + n^2a) : (n - 1)^2$, sive etiam $(2na + n^2a) : (n - 1)^2$.

669. Multiplicentur tertio genitores quarti generis 1, 5, 9, 13, 17, &c. per terminos ejusdem adhuc progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut constituatur series $1a + 5a : n + 9a : n^2 + 13a : n^3 + 17a : n^4 + \&c.$ Et quoniam genitores quarti

ge-

generis 1, 5, 9, 13, 17, &c., oriuntur *, addendo genitores generis primi, zero habentes in principio, 0, 1, 2, 3, 4, &c. ordine cum genitoribus tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c.; componetur series illa per additionem terminorum duarum istarum serierum $0a + 1a : n + 2a : n^2 + 3a : n^3 + 4a : n^4 + \&c.$, $1a + 4a : n + 7a : n^2 + 10a : n^3 + 13a : n^4 + \&c.$ Sed harum serierum prima est æqualis * $na : (n - 1)^2$, secunda vero est æqualis * $(2na + n^2a) : (n - 1)^2$. Quare summa illius seriei erit $na : (n - 1)^2 + (2na + n^2a) : (n - 1)^2$, sive etiam $(3na + n^2a) : (n - 1)^2$. *art. 638.

670. Eodem artificio determinare licebit summam finitam cujusque alterius seriei, quæ oriatur, multiplicando genitores cujusvis generis altioris per terminos progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4, \&c.$ Nimirum, considerando seriem illam, velut compositam ex duabus aliis seriebus; quarum una sit constituta ex genitoribus primi generis, zero habentibus in principio; altera ex genitoribus illius generis, quod proxime præcedit genus, de cujus genitoribus agitur. Sed, perpensa ratione, qua harum serierum summæ progrediuntur, poterit regula quædam generalis confici, ad omnes casus se extendens: scilicet, addendo semper ad $n^2a : (n - 1)^2$ toties $na : (n - 1)^2$, quot unitates habet exponens generis datorum genitorum, una dempta; hoc est nullies, si genitores fuerint primi generis; semel, si generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

671. Hoc idem ostendamus modo in numeris.

Tem. I.

T

ris,

ris, qui primum figuratorum ordinem in alijs generibus constituunt. Quem in finem multiplicentur primo figurati, qui constituunt primum ordinem in genere secundo, 1, 4, 9, 16, 25, &c. ordine per terminos progressionis geometricæ decrescentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut habeatur series $1a + 4a : n + 9a : n^2 + 16a : n^3 + 25a : n^4 + \&c.$ Et quoniam figurati primi ordinis in genere secundo oriuntur, addendo eos, qui sunt primi ordinis in genere primo, zero habentes in principio, 0, 1, 3, 6, 10, &c. ordine cum ipsis numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui primum figuratorum ordinem in primo genere constituunt; componetur series illa ex additione terminorum duarum istarum seriesum $0a + 1a : n + 3a : n^2 + 6a : n^3 + 10a : n^4 + \&c., 1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$ Quare summa omnium infinitorum terminorum illius seriei æqualis erit summis, quæ ex infinitis istarum terminis simul collectis oriuntur.

672. Jam series $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$ est summabilis natura sua, estque ejus summa $n^3a : (n - 1)^3$. Unde eo res redit, ut investigemus summam alterius seriei $0a + 1a : n + 3a : n^2 + 6a : n^3 + 10a : n^4 + \&c.$ Id vero factu facile erit. Nam, neglecto primo ejus termino $0a$, velut nullius magnitudinis; perspicuum est, unumquemque terminum ipsius ad correspondentem terminum prioris seriei $1a + 3a : n + 6a : n^2 + 10a : n^3 + 15a : n^4 + \&c.$ esse in ea ratione, quam habet 1 ad n . Quare in eadem ratione erunt etiam inter se summæ ipsarum serierum; & propterea, quem-

quemadmodum summa unius est $n^2a : (n - 1)^2$, sic erit summa alterius $n^2a : (n - 1)^2$. Ex quo fit, ut summa seriei, de qua agitur, sit $n^2a : (n - 1)^2 + n^2a : (n - 1)^2$, sive etiam $(n^2a + n^2a) : (n - 1)^2$.

673. Multiplicentur secundo numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum tertii generis, ordine per terminos ejusdem progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut constituatur series $1a + 5a : n + 12a : n^2 + 22a : n^3 + 35a : n^4 + \&c.$ Et quoniam figurati primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c., oriuntur *, addendo eos, qui sunt primi ordinis in genere primo, & zero habent in principio, 0, 1, 3, 6, 10, &c. ordine cum numeris 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum in genere secundo: componetur series illa ex additione terminorum duarum istarum serierum $0a, 1a : n + 3a : n^2 + 6a : n^3 + 10a : n^4 + \&c.$, $1a + 4a : n + 9a : n^2 + 16a : n^3 + 25a : n^4 + \&c.$ Sed harum serierum, ut jam ostensum est *, prima est æqualis $n^2a : (n - 1)^2$, secunda vero est æqualis $(n^2a + n^2a) : (n - 1)^2$. Itaque summa seriei, de qua est quæstio, erit $n^2a : (n - 1)^2 + (n^2a + n^2a) : (n - 1)^2$, sive etiam $(2n^2a + n^2a) : (n - 1)^2$. *art. 640.

674. Multiplicentur tertio numeri 1, 6, 15, 28, 45, &c., qui constituunt primum ordinem figuratorum quarti generis, ordine per terminos ejusdem adhuc progressionis geometricæ decreſcentis $a, a : n, a : n^2, a : n^3, a : n^4$, &c., ita, ut fiat series $1a + 6a : n + 15a : n^2 + 28a : n^3 + 45a : n^4 + \&c.$ Et similiter, quia figura-

ti primi ordinis in genere quarto 1, 6, 15, 28, &c. oriuntur *, addendo eos, qui sunt primi generis, & zero habent in principio, 0, 1, 3, 6, 10, &c. ordine cum figuratis primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c., componetur series illa ex additione terminorum duarum istarum serierum $0a + 1a; n + 3a; n^2 + 6a; n^3 + 10a; n^4 + \&c., 1a + 5a; n + 12a; n^2 + 22a; n^3 + 35a; n^4 + \&c.$ Sed harum serierum prima est *
 *art. 672. $35a; n^4 + \&c.$ Sed harum serierum prima est *
 *art. 673. æqualis $n^2a : (n - 1)^3$, secunda vero est * æqualis $(2n^2a + n^3a) : (n - 1)^3$. Quare summa illius seriei erit $n^2a; (n - 1)^3 + (2n^2a + n^3a) : (n - 1)^3$, sive etiam $(3n^2a + n^3a) : (n - 1)^3$.

675. Eadem methodo progredi licebit in infinitum, summamque finitam determinare infinitorum terminorum cujusque alterius seriei, quæ oriatur, multiplicando figuratos, constituentes primum ordinem in quovis alio genere altiore, ordine per terminos progressionis geometricæ decrescentis $a, a; n, a; n^2, a; n^3, a; n^4, \&c.$ Nimirum, considerando seriem illam, velut compositam ex duabus aliis seriebus; quarum una sit constituta ex figuratis primi ordinis in genere primo, altera ex figuratis ejusdem ordinis in eo genere, quod proxime præcedit genus, de quo agitur. Sed, inspecta similiter ratione, qua harum serierum summæ progrediuntur, poterit hic quoque generalis quædam regula confici, quæ ad omnes casus se extendat; scilicet, addendo semper ad $n^3a : (n - 1)^3$ toties $n^2a : (n - 1)^3$, quot unitates habet exponens generis datorum figuratorum, una dempta; hoc est nullies, si figurati fuerint primi generis; semel, si ge-

si generis secundi; bis, si generis tertii; ter, si generis quarti; atque ita deinceps.

676. Non dissimiliter res ostendetur in numeris, qui in singulis generibus datum quemcumque alium figuratorum ordinem constituunt. Et pro unoquoque ordine poterit semper generalis quædam regula confici, quæ ad omnes omnino casus se extendat. Ita, si agatur de numeris, qui in unoquoque genere secundum figuratorum ordinem constituunt; satis erit ad $n^4a : (n-1)^4$ toties addere $n^3a : (n-1)^4$, quot unitates habet exponens generis figuratorum, una dempta. Quod si vero quæstio sit de numeris, constituentibus in quolibet genere tertium figuratorum ordinem; non aliud fieri debet, quam ad $n^5a : (n-1)^5$ addere toties $n^4a : (n-1)^5$, quot sunt unitates in exponente generis figuratorum, dempta prius una. Atque ita quoque in numeris, constituentibus in singulis generibus quartum ordinem figuratorum, satis erit ad $n^6a : (n-1)^6$ addere toties $n^5a : (n-1)^6$, quoties illud designat exponens generis figuratorum, unitate una minutus.

IV. Series, quæ sunt inversione potestatum, & radicum numerorum naturalium.

677. **V**idimus superius, figuratis primi generis duas serierum classes fieri posse, in quibus determinare licet summas finitas infinitorum suorum terminorum; unam, multiplicando figuratos ipsos ordine per terminos alicujus progressionis geometricæ decrescen-

T 3

tis;

tis ; alteram , invertendo eodẽ figuratos , & faciendo , ut sint denominatores fractionum totidem , quarum quælibet unitatem habeat , velut suum numeratorem . Unde , quum ostensum sit , figuratos aliorum generum , ordine etiam multiplicatos per terminos progressionis non dissimilis , præbere nobis series , quarum summæ finitæ possunt determinari ; dubium hic oriri potest , num sint pariter summabiles series illæ , quæ habentur , si iidem aliorum generum figurati invertantur , & denominatores fiant fractionum , pro numeratore unitatem habentium . Esse enim finitas summas harum serierum , quæ constituuntur per inversionem figuratorum aliorum generum ; vel exinde erui potest , quod termini ipsarum , collati sigillatim cum terminis serierum , quæ fiunt per inversionem figuratorum primi generis , iisdem manifesto sunt minores .

678. Verum , rei periculo instituto , variisque methodis tentatis , numquam id assequi potuimus . Unde , tametsi summæ serierum , quæ constituuntur per inversionem figuratorum aliorum generum , sint finitæ ; eas tamen non esse summabiles natura sua , affirmare non veremur . Novit id etiam Vir clarissimus Jacobus Bernoullius , sed in uno casu speciali , nimirum in serie infinita $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + \&c$, quæ constituitur per inversionem quadratorum numerorum naturalium , qui sunt figurati primi ordinis in genere secundo . Nam in suo de seriebus infinitis tractatu , ex quo non pauca mutuati nos sumus , ingenue fatetur , pervestigationem finitæ summæ illius seriei difficiliorem esse , quam quis expectaverit ,
& in-

& industriam suam prorsus eluisse. Exhibuit tamen rationem, quam summa ex terminis omnibus locorum imparium $1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + \&c.$ habet ad summam terminorum, existentium in locis paribus, $1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + \&c.$ idque sequenti artificio.

679. Constituantur infinitæ series, quæ, incipientes a quadratis numerorum imparium inversis, progrediantur in ea ratione, quam habet 4 ad 1. Erit itaque harum serierum prima $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 64 + \&c.$, secunda $1 : 9 + 1 : 36 + 1 : 144 + 1 : 576 + \&c.$, tertia $1 : 25 + 1 : 100 + 1 : 400 + 1 : 1600 + \&c.$, atque ita deinceps. E: quoniam in cunctis hisce seriebus continentur quadrati omnes inversi numerorum naturalium; eadem simul adæquabunt seriem, de qua agitur, $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + \&c.$ Jam vero illiusmodi series, veluti totidem progressionem geometricæ decrecentes, sunt * summabiles natura sua, & e-
*art. 513d
 jusque summa reperitur æqualis priori suo termino, una cum tertia parte ejusdem. Itaque, quia priores termini omnium illarum serierum sunt quadrati inversi numerorum imparium; erit series $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + \&c.$ æqualis seriei $1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + \&c.$ una cum tertia parte ejusdem: proindeque differentia utriusque seriei $1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + \&c.$ adæquabit tertiam partem istius $1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + \&c.$

680. Hoc igitur artificio laudatus Jacobus Bernoullius novit, in serie $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9$

T 4 + 1 :

+ 1 : 16 + 1 : 25 + &c. , quæ constituitur per inversionem quadratorum numerorum naturalium , summam terminorum in locis imparibus esse ad summam terminorum in locis paribus, ut 3 ad 1. Neque vero putandum est, eadem metho- do posse simile quidpiam determinari in seriebus, quæ constituuntur per inversionem aliorum fi- guratorum. Nam licuit Viro clarissimo, theorema illud invenire in serie ista speciali 1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + &c. , non jam, quia numeri 1, 4, 9, 16, 25, &c. sunt figurati primi ordinis in genere secundo, sed quia sunt qua- drati numerorum naturalium. Et, notante eo- dem Jacobo Bernoullio, id commune est omni- bus potestatibus numerorum naturalium, ut si- quidem ex earum inversione constituantur toti- dem series infinitæ; ratio, quam in his habet summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis pari- bus, sit æqualis ei, quam habet potestas non dissimilis binarii, unitate multata, ad ipsam uni- tatem.

681. Demonstratur id vero in aliis potesta- tibus eadem omnino ratione, qua ostensum est
** art. 679. ** in quadratis. Nimirum, resolvendo seriem, de qua agitur, in infinitas alias series, quarum termini a potestatibus numerorum imparium in- versis progrediantur in ea ratione, quam habet potestas non dissimilis binarii ad unitatem; hoc est, ut 8 ad 1, si agatur de cubis; ut 16 ad 1, si agatur de quadrato-quadratis; ut 32 ad 1, si quæstio sit de quadrato-cubis; atque ita deinceps.
** art. 113. ** Quum enim omnes istæ series sint sum- mabiles, & cujusque summa finita adæque pri-
 prio-

priorem suum terminum, una cum ea ejusdem parte, quam denominat prædicta potestas binarii, unitate una multata; fiet tota series, de qua agitur, æqualis seriei, quæ oritur ex potestatibus inversis numerorum imparium, una cum ea ejusdem seriei parte, quam potestas binarii, unitate minuta, designat. Quare, subducendo seriem istam ex illa; fiet summa terminorum omnium in locis imparibus ad summam terminorum omnium in locis paribus, ut est potestas binarii, unitate multata, ad ipsam unitatem.

682. Eodem omnino argumento patebit; hanc eandem determinationem sibi etiam locum vindicare in ipsis numeris naturalibus inversis, qui sunt primæ ipsorum potestates; adeoque in serie harmonica $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + \&c.$ summam terminorum imparium esse ad summam terminorum parium, ut est prima potestas binarii, unitate multata, ad ipsam unitatem, hoc est in ratione æqualitatis. Sed obtinet quoque eadem determinatio, vi ejusdem ratiocinii, in radicibus numerorum naturalium, sive quadratis, sive cubicis, sive alterius cujusque generis. Qua ratione in ista serie $1 : \sqrt{1} + 1 : \sqrt{2} + 1 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{4} + 1 : \sqrt{5} + \&c.$ summa terminorum in locis imparibus est ad summam terminorum in locis paribus, ut $\sqrt{2} \rightarrow 1$ ad 1. Atque ita quoque in hac alia serie $1 : \sqrt[3]{1} + 1 : \sqrt[3]{2} + 1 : \sqrt[3]{3} + 1 : \sqrt[3]{4} + 1 : \sqrt[3]{5} + \&c.$ summa ex terminis locorum imparium est ad summam ex terminis locorum parium, ut est $\sqrt[3]{2} \rightarrow 1$ ad 1.

683. Interim, circa hujusmodi series, quæ oriuntur

oriuntur ex inversione radicum numerorum naturalium, præclarum hic nobis sese offert paradoxum. In iis enim summa ex terminis locorum imparium est ad summam ex terminis locorum parium, ut est radix non dissimilis binarii, unitate multata, ad ipsam unitatem; adeoque in ratione minoris ad majus. Plane vero, si termini locorum imparium sigillatim conferantur cum terminis locorum parium; eos istis manifesto majores deprehendemus. Sic in serie $1 : \sqrt{1} + 1 : \sqrt{2} + 1 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{4} + 1 : \sqrt{5} + 1 : \sqrt{6} + \&c.$, liquido patet esse, & $1 : \sqrt{1}$ majorem, quam $1 : \sqrt{2}$; & $1 : \sqrt{3}$ majorem, quam $1 : \sqrt{4}$; & $1 : \sqrt{5}$ majorem, quam $1 : \sqrt{6}$; atque ita deinceps. Quare oportebit, ut summa priorum terminorum major sit etiam summa posteriorum; quum tamen summa illorum ad summam istorum esse debeat in ratione minoris ad majus, hoc est, ut $\sqrt{2} = 1$ ad 1 .

684. Novit paradoxum istud ipse hujus theoriæ Auctor Jacobus Bernoullius: qui etsi ejus rationem, ut ipse ait, satis perspectam habuisset; illam tamen cum orbe mathematico nequaquam communicare dignatus est. Idem autem paradoxum deprehenditur quoque in serie, quæ constituitur per inversionem numerorum naturalium, nimirum in serie harmonica $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + 1 : 6 + \&c.$ In ea enim summa terminorum in locis imparibus est ad summam terminorum in locis paribus in ratione æqualitatis; quum tamen ii, sigillatim cum istis comparati, manifesto majores deprehendantur. Verum in serie harmonica paradoxum istud, notante ipso Bernoullio, potius

tius argumento nobis esse potest pro infinitate summæ ejus adstruenda. Nam ex eo, quod summa terminorum imparium ad summam terminorum parium rationem habet æqualitatis, colligere licebit, differentiam inter utramque summam evanescere relate ad eas: quod non aliter fieri potest, nisi sit infinita, tam summa terminorum imparium, quam summa terminorum parium.

685. Jam enim notum est, finitum evanescere relate ad infinitum. Plane vero in serie harmonica finitam esse differentiam inter summam terminorum in locis imparibus, & summam terminorum in locis paribus; sic quidem conjici potest. Subducantur etenim termini secundæ summæ ordine ex terminis primæ. Jamque differentia inter utramque summam fiet hæc series $1 : 2 + 1 : 12 + 1 : 30 + 1 : 42 + 1 : 72 + \&c.$ Conferantur porro termini hujus seriei cum terminis istius $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + \&c.$ Et quamquam idem sit primus terminus utriusque seriei, reliqui tamen termini prioris seriei sunt manifesto minores reliquis terminis seriei secundæ. Quare summa seriei $1 : 2 + 1 : 12 + 1 : 30 + 1 : 42 + 1 : 72 + \&c.$ minor erit summa seriei $1 : 2 + 1 : 6 + 1 : 12 + 1 : 20 + 1 : 30 + \&c.$; adeoque, quum summa hujus seriei sit æqualis unitati, non modo erit finita, verum etiam unitate minor summa seriei illius. art. 624.

*V. Solutio propositi paradoxæ, & examen theore-
matis, unde illud derivatur.*

686. **S**I vera sunt, quæ de seriebus, or-
tis per inversionem potestatum,
& radicum numerorum naturalium, ex Jacobo
Bernoullio superius exhibuimus; jam illud
generaliter statuendum esset, quod in illius-
modi seriebus summa terminorum in locis im-
paribus est ad summam terminorum in locis pa-
ribus, ut est potestas, vel radix binarii
non dissimilis, unitate minuta, ad ipsam uni-
tatem. Et quidem generale istud theorema in
hunc modum olim ostendebam. Capiatur ex
unoquoque termino seriei, de qua agitur, ea
pars, quam binarii potestas, aut radix non dis-
similis ostendit. Jamque hac ratione nova orie-
tur series, quæ eos tantum seriei prioris termi-
nos continebit, qui in locis paribus existunt.
Est autem prior series ad hanc aliam, ut prædi-
cta potestas, aut radix binarii ad unitatem. Qua-
re, dividendo, summa terminorum in locis im-
paribus ad summam terminorum in locis pari-
bus erit, ut eadem potestas, aut radix binarii,
unitate multata, ad unitatem.

687. Hac ratione, si fiat series ex ipsis nu-
meris naturalibus inversis, qui sunt primæ ipso-
rum, tum potestates, cum radices, $1 : 1 + 1 : 2 + 1 : 3 + 1 : 4 + 1 : 5 + \&c.$, & cujusque
termini capiatur ea pars, quam designat ipse
binarius, prodibit hæc altera series $1 : 2 + 1 : 4 + 1 : 6 + 1 : 8 + 1 : 10 + \&c.$, quæ
eos tantum prioris terminos continet, qui in
lo-

locis paribus existunt . Unde , quum prior series sit ad hanc aliam , ut est 2 ad 1 ; erit , dividendo , ut $1 : 1 + 1 : 3 + 1 : 5 + 1 : 7 + 1 : 9 + \&c.$ ad $1 : 2 + 1 : 4 + 1 : 6 + 1 : 8 + 1 : 10 + \&c.$, ita 1 ad 1 . Similiter , si fiat series $1 : 1 + 1 : 4 + 1 : 9 + 1 : 16 + 1 : 25 + \&c.$ ex quadratis inversis numerorum naturalium , & cujusque termini capiatur ea pars , quam designat quadratum binarii ; orietur hæc altera series $1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + \&c.$, quæ continet dumtaxat terminos prioris seriei , existentes in locis paribus . Itaque , quia prior series est ad hanc aliam , ut 4 ad 1 ; erit , dividendo , ut $1 : 1 + 1 : 9 + 1 : 25 + 1 : 49 + 1 : 81 + \&c.$ ad $1 : 4 + 1 : 16 + 1 : 36 + 1 : 64 + 1 : 100 + \&c.$, ita 3 ad 1 .

688. Eadem omnino ratione , si constitutur series $1 : \sqrt{1} + 1 : \sqrt{2} + 1 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{4} + 1 : \sqrt{5} + \&c.$ ex radicibus quadratis inversis numerorum naturalium , & cujusque termini capiatur ea pars , quam designat $\sqrt{2}$; habebitur hæc alia series $1 : \sqrt{2} + 1 : \sqrt{4} + 1 : \sqrt{6} + 1 : \sqrt{8} + 1 : \sqrt{10} + \&c.$, quæ continet eos tantum terminos prioris seriei , qui in locis paribus existunt . Unde , quia prior series est ad hanc aliam , ut $\sqrt{2}$ ad 1 ; erit , dividendo , ut $1 : \sqrt{1} + 1 : \sqrt{3} + 1 : \sqrt{5} + 1 : \sqrt{7} + 1 : \sqrt{9} + \&c.$ ad $1 : \sqrt{2} + 1 : \sqrt{4} + 1 : \sqrt{6} + 1 : \sqrt{8} + 1 : \sqrt{10} + \&c.$, ita $\sqrt{2}$ ad 1 . Atque ita quoque , si conficiatur series $1 : \sqrt[3]{1} + 1 : \sqrt[3]{2} + 1 : \sqrt[3]{3} + 1 : \sqrt[3]{4} + 1 : \sqrt[3]{5} + \&c.$ ex radicibus cubicis inversis numerorum naturalium , & ex unoquoque termino capiatur ea pars , quam designat $\sqrt[3]{2}$; prodibit hæc alia series $1 : \sqrt[3]{2} + 1 : \sqrt[3]{4} + 1 : \sqrt[3]{6} + 1 : \sqrt[3]{8}$

3 : $\sqrt[3]{8} + 1$; $\sqrt[3]{10} + \&c.$, quæ continet propriis seriei dumtaxat terminos , existentes in locis paribus . Quare , quum prior series sit ad hanc aliam , ut $\sqrt[3]{2}$ ad 1 ; erit , dividendo , ut 1 : $\sqrt[3]{2} + 1$; $\sqrt[3]{3} + 1$: $\sqrt[3]{5} + 1$: $\sqrt[3]{7} + 1$: $\sqrt[3]{9} + \&c.$ ad 1 ; $\sqrt[3]{2} + 1$: $\sqrt[3]{4} + 1$: $\sqrt[3]{6} + 1$: $\sqrt[3]{8} + 1$: $\sqrt[3]{10} + \&c.$, ita $\sqrt[3]{2} - 1$ ad 1 .

689. Sed, re pressius considerata, novi deinceps, demonstrationem istam, utut elegantem, suas pati exceptiones . Nam profecto, ubi ex unoquoque termino seriei, de qua agitur, sumitur ea pars, quam binarii potestas, aut radix non dissimilis ostendit; constituitur alia series, eandem habens terminorum multitudinem cum serie priore . Quare dici nequit absolute, quod in ea ii tantum prioris seriei termini continentur, qui in locis paribus existunt; quum manifestum sit, iis peragatis, alios totidem deinceps subsequi debere . Plane vero, si aliorum istorum summa fiat indefinitæ parvitatæ, relate ad summam priorum; tunc nihil obstat, quominus eos * negligamus, ipsamque seriem consideremus tantum, ut compositam ex primis terminis, iisdem plane cum iis, qui existunt in locis paribus prioris seriei, Quod quum ita sit, abunde liquet, allatam demonstrationem dumtaxat in isto casu vim suam habere; nec adeo extendendam esse ad casum alterum, quum summa reliquorum terminorum non evanescit, relate ad summam priorum.

690. Jam prior casus obtinet, quum agitur de seriebus, quæ oriuntur, invertendo potestates numerorum naturalium. Si enim statuatur * *art. 494.* # numerus infinitus, relate ad eum * unitas evanescit-

nescet; adeoque, quum sit, ut n ad 1, ita 1 ad n ; evanescet quoque relate ad unitatem fractio $1 : n$; multoque magis respectu ejusdem unitatis evanescunt fractiones $1 : n^2$, $1 : n^3$, $1 : n^4$, $1 : n^5$, &c. Est autem quisque ex reliquis illis terminis paulo minor aliqua istarum fractionum. Quare relate ad unitatem fiet indefinitæ parvitatæ, non modo quilibet eorum terminorum, sed summa ipsorum omnium. Obtinet ergo prior casus in seriebus, quæ fiunt per inversionem potestatum numerorum naturalium. Quare in iis habebit vim suam allata demonstratio: & propterea, vi ejus demonstrationis, concludere licebit, quod in qualibet earum serierum summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam terminorum omnium in locis paribus, ut est potestas non dissimilis binarii, unitate minuta, ad ipsam unitatem.

691. Alter porro casus locum habet, quum quaestio est, de seriebus, quæ constituuntur, invertendo radices numerorum naturalium. Nam, posito adhuc n numero infinito, evanescet quidem relate ad unitatem fractio $1 : n$; sed respectu ejusdem unitatis nulla harum fractionum $1 : \sqrt{n}$, $1 : \sqrt[3]{n}$, $1 : \sqrt[4]{n}$, $1 : \sqrt[5]{n}$, &c. fiet indefinitæ parvitatæ. Est autem quisque ex reliquis illis terminis paulo minor aliqua illarum fractionum. Quare, quum nullus eorum terminorum evanescat relate ad unitatem, nec etiam summa omnium evanescet relate ad summam omnium primorum terminorum. Obtinet ergo secundus casus in seriebus, quæ fiunt per inversionem radicum numerorum naturalium. Quare in iis nullius momenti erit allata demonstratio

ne-

neque adeo, vi ejus, concludere fas erit, quod in qualibet istarum serierum summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam terminorum omnium in locis paribus, ut est radix non dissimilis binarii, unitate minuta, ad ipsam unitatem.

692. Relinquitur series harmonica, orta ex inversione numerorum naturalium, quæ ad utramque earum serierum classẽ referri potest; quum numeri naturales haberi queant, velut primæ ipsorum, sive radices, sive potestates. Et quidem in hac serie, manente adhuc n numero infinito, unusquisque reliquorum terminorum sit paulo minor fractione $1 : n$. Plane vero fractio ista, etsi sit indefinitæ parvitatẽ relate ad unitatem, attamen si sumatur toties, quot designat semissis numeri n , æqualis fiet semissi unitatis. Quare omnes illi reliqui termini simul unitatis semisse minores erunt; & consequenter summa ex iis evanescet, relate ad summam primorum terminorum, quæ est infinita. Hinc relate ad seriem harmonicam obtinet prior casus. Unde habebit in ea vim suam allata demonstratio; atque adeo, ope ejus, tuto concludi poterit, quod in serie harmonica summa terminorum omnium in locis imparibus est ad summam terminorum omnium in locis paribus in ratione æqualitatis.

693. Si ergo de generali illo Bernoullii theoremate ex nostra demonstratione dijudicandum esset; afferere oporteret, verum quidem id esse in seriebus, ortis ex inversione, tum numerorum naturalium, cum suarum potestatum; sed non item in seriebus, quæ sunt, invertendo

radices eorundem numerorum . Unde , si ita res foret , paradoxum , de quo paulo ante * locuti sumus , jam non amplius locum haberet ; ut quod obtinebat in hypothese , quod verum esset theorema illud , etiam in seriebus , ortis ex radicibus inversis numerorum naturalium . Sed quoniam illiusmodi theorema generaliter demonstravit Jacobus Bernoullius ; non abs re erit , Bernoullii demonstrationem paulo diligentius hoc loco expendere . Nam fieri facile potest , ut ipse etiam Vir clarissimus aliquid humanitatis in ea passus fuerit .

694. Sane Jacobus Bernoullius , ut superius * vidimus , sic suum theorema generaliter * ostendit . Primo jubet , ut fiant infinitæ series , quarum termini a potestatibus , vel radicibus numerorum imparium inversis decrecant in ea ratione , quam habet potestas , vel radix non dissimilis binarii ad unitatem . Deinde , velut certum assumit , in omnibus hisce seriebus contineri eisdem plane terminos , qui continentur in serie , de qua agitur ; adeoque eas simul seriem ipsam principalem adæquare . Jam horum primum , ut factu possibile , ultro quidem admittimus . Sed & alterum suam patitur difficultatem . Nam in omnibus illis seriebus , præter terminos seriei principalis , continentur infinites infiniti alii . Quare tunc tantum omnes illæ series simul adæquabunt seriem principalem , quum summa aliorum terminorum , in iis contentorum , evanescit , relate ad summam ex terminis primis .

695 . Quod quum ita sit , perspicuum est , Jacobo Bernoullii demonstrationem easdem pati

Tom. I.

V

ex-

Art. 693. exceptiones, quibus nostra erat obnoxia. Unde, quemadmodum, ope nostræ demonstrationis, theorema illud, de quo est quæstio, comperuimus * verum dumtaxat in seriebus, ortis ex inversione, tum numerorum naturalium, cum suarum potestatum; sic facile erit, ostendere, quod ipsa Bernoullii demonstratio tantummodo relate ad istas series theorematis ejus veritatem potis erit evincere. Non ergo obtinet theorema in iis seriebus, quæ fiunt, invertendo radices numerorum naturalium. Unde nil mirum censi debet, si in hisce seriebus singuli termini, existentes in locis imparibus, majores sint singulis terminis, qui extant in locis paribus; quia omnino abhorret a vero, summam illorum terminorum esse ad summam istorum in ratione minoris ad majus.

VI. Enodatio aliorum paradoxorum, quæ sunt affinia præcedenti.

696. **A**ffinia ei, de quo mox egimus, plura alia asserere licebit paradoxa, quibus tamen eadem prorsus ratione satisfieri debet. Ita in serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$ si capiatur duplum cujusque termini, prodibit hæc alia series $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \&c.$, quæ dumtaxat terminos, existentes in locis paribus prioris seriei, continere videtur. Quare dicendum foret, hanc aliam seriem minorem esse serie priore; quum tamen ex ipsa ejus constitutione prioris dupla sit oporteat. Atque ita quoque, si in eadem serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$ capiatur tri-

triplum cujusque termini, orietur hæc alia series $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + \&c.$, quæ eos ex priorie serie terminos excerpere videtur, qui tertio quoque loco reperiuntur; quum tamen ejus constitutio talis sit, ut tripla prioris esse debeat.

697. Possumus quoque, in eadem serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$ sumere quadrata suorum terminorum. Et tunc prodibit hæc alia series $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \&c.$, quæ aliquos prioris seriei terminos, valde a se mutuo distitos, comprehendere videtur. Quare hanc aliam seriem multo minorem priore statuere deberemus; quum tamen, per ea, quæ superius * ostensa sunt, summa ^{*art. 599} prioris seriei sit ad summam secundæ seriei in eadem omnino ratione, quam habet numerus finitus ad numerum infinitum. Nec ullus erit paradoxorum finis, si in serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$ capiantur cubi, quadrato-quadrata, tum item potestates aliæ superiores suorum terminorum; & ex iis novæ adhuc series constituentur.

698. Omnium ergo horum paradoxorum solutio exinde repeti debet, quod ubi ex serie numerorum naturalium eruitur alia series, capiendo, sive multiplices, sive potestates suorum terminorum, plane falsum est, hanc aliam seriem tantum terminos nonnullos seriei prioris continere; quandoquidem ex ipsa ejus formatione tot præcise terminos contineat oportet, quot existunt in ipsa serie numerorum naturalium. Sed difficultas hic oritur, circa possibilitatem aliorum istorum terminorum. Jam enim series numerorum naturalium, continuata ad eum us-

que numerum , qui pro infinito debet haberi , ulterius progredi non potest . Plane vero , si in aliis illis seriebus , quæ oriuntur , capiendo numerorum naturalium , sive multiplices , sive potestates , continerentur termini alii , non contenti in serie numerorum naturalium ; hanc quobis ultra numerum infinitumliceret extendere.

699. Interim huic difficultati facile quidem erit occurrere . Numeri enim naturales oriuntur per continuam unitatis additionem . Sed unitas ista potest nobis quamcumque rem exhibere . Licebit ergo , unitate illa repræsentare , tam palmum , exempli gratia , quam ulnam , quæ ex octo componitur palmis . Utroque casu subinde ad infinitum usque progreditur series , ut eadem sit semper multitudo suorum terminorum , & iidem numeri , quibus seriei termini sunt notandi . Sed omne discrimen in eo situm est , quod quilibet seriei terminus unitatibus suis in priore casu tot palmos , in secundo vero casu ulnas totidem nobis repræsentat . Unde , si duæ hujusmodi series considerentur in abstracto , hoc est , non habita ratione rei , quam unitas designat , eadem plane erunt inter se ; different vero a se mutuo , quum considerantur in concreto , & rei , quam unitas exhibet in quaque serie , ratio velit haberi.

700. Ad eundem itaque modum in serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$ licebit , sumere duplum , triplum , quadruplum , aut alium quemvis multiplicem cujusq; termini . Verum , id agentes , non aliud efficimus , quam augere in eadem ratione valorem unitatis , per quam numerorum naturalium series constituitur . Unde novæ seriei termini , tam multitudine , quam no-

tatione, censendi sunt iidem cum terminis seriei prioris; & omne discrimen inter eos non aliunde est repetendum, quam ex diversitate valorum, quos unitas habet in utraque serie. Quod luce clarius apparebit, si ipsa series numerorum naturalium exhibeatur in hunc modum $1. 1 + 2. 1 + 3. 1 + 4. 1 + 5. 1 + \&c.$ Nam hac ratione exhibenda erit per $1. 2 + 2. 2 + 3. 2 + 4. 2 + 5. 2 + \&c.$ series, quæ oritur, capiendo duplum cujusque termini illius; per $1. 3 + 2. 3 + 3. 3 + 4. 3 + 5. 3 + \&c.$ series, quæ constituitur, capiendo triplum; atque ita deinceps.

701. Quantum ad series, quæ oriuntur, capiendo in serie numerorum naturalium datam cujusque termini potestatem; eæ etiam, & multitudine, & notatione suorum terminorum, censendæ sunt eadem cum serie ipsa numerorum naturalium; discrimen vero exinde est deducendum, quod relate ad eos valor unitatis in quoque termino suum subit incrementum. Nec aliter se rem habere, hic etiam liquido patebit, si ipsa numerorum naturalium series in hunc modum exhibeatur $1. 1 + 2. 1 + 3. 1 + 4. 1 + 5. 1 + \&c.$ Ita enim oportebit, exhibere per $1. 1 + 2. 2 + 3. 3 + 4. 4 + 5. 5 + \&c.$ seriem, quæ oritur, capiendo quadratum cujusque termini illius; per $1. (1. 1) + 2. (2. 2) + 3. (3. 3) + 4. (4. 4) + 5. (5. 5) + \&c.$ seriem, quæ producit, capiendo cubum; atque ita de aliis.

702. Ex serie numerorum naturalium aliæ erui possunt, capiendo, siue datas aliquas partes, siue radices aliquas ex terminis ejus. Et istæ pariter, tam multitudine, quam notatione termi-

norum, eadem censendæ sunt cum serie ipsa numerorum naturalium. Nec aliunde, quam a valore unitatis, discrimen, inter eas existens, est repetendum. Nam profecto, exhibita semper in hunc modum $1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + \&c.$ serie numerorum naturalium; exhibenda erit per $1 \cdot (1:2) + 2 \cdot (1:2) + 3 \cdot (1:2) + 4 \cdot (1:2) + 5 \cdot (1:2) + \&c.$ series, quæ oriatur, capiendo semissem cujusque termini illius; & per $1 \cdot (1:\sqrt{1}) + 2 \cdot (1:\sqrt{2}) + 3 \cdot (1:\sqrt{3}) + 4 \cdot (1:\sqrt{4}) + 5 \cdot (1:\sqrt{5}) + \&c.$ series, quæ constituitur, capiendo cujuslibet termini radicem quadratam.

703. Hinc, si valores, quos habet unitas in singulis seriei terminis, designentur litteris $a, b, c, d, e, \&c.$; poterunt omnes hujusmodi series sub generali ista comprehendi $1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c + 4 \cdot d + 5 \cdot e + \&c.$ Atque hac ratione liquido patet, non modo eandem esse in singulis hisce seriebus multitudinem terminorum; sed nec etiam differre eas a se mutuo, notatione eorundem terminorum, si earum litterarum, quæ valores unitatis in singulis terminis repræsentant, nulla ratio velit haberi. Unde, si quod discrimen intercedit inter hujusmodi series, id totum ex multiplici valore, quem unitas habere potest, vel in ipsis seriebus, vel in singulis ipsarum terminis, repeti debet.

704. Cæterum nolo hic reticere, quod eadem difficultas erui quoque potest ex seriebus numerorum figuratorum. Ipsa enim harum serierum constitutio illud præferre videtur, ut in iis quamplures alii contineantur numeri, omnino non contenti in serie numerorum naturalium

lium. Unde, cur per hosce alios numeros etiam ista series non excurrat, plane difficultatem facit. Sed facile quoque erit ostendere, quod ipsæ figuratorum series tantum pro vario valore, quem in iis unitas subit, differunt a serie numerorum naturalium; adeoque, quod sunt eadem inter se, tam multitudine, quam notatione terminorum, quotiescumque diversi ejus valoris, quem unitas patitur, nulla ratio velit haberi.

705. Plane enim in serie numerorum naturalium $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c.$, sicuti prior terminus significat rem unicam, ita secundus designat res duas, tertius tres, quartus quatuor, atque ita deinceps. Unde, si litteris diversis omnes hæc res repræsentemus, fiet $1. a$ primus ejusdem seriei terminus, $1. b + 1. c$ terminus secundus, $1. d + 1. e + 1. f$ terminus tertius, $1. g + 1. h + 1. i + 1. k$ terminus quartus, $1. l + 1. m + 1. n + 1. o + 1. p$ terminus quintus, atque ita de aliis. Qua ratione ipsa numerorum naturalium series exhiberi poterit in hunc modum $1. a + (1. b + 1. c) + (1. d + 1. e + 1. f) + (1. g + 1. h + 1. i + 1. k) + (1. l + 1. m + 1. n + 1. o + 1. p) + \&c.$

706. Jam, si in serie ista generali pro singulis litteris scribatur 1; revera oriatur ipsa series numerorum naturalium. Sed, si pro litteris cujusque termini scribantur totidem numeri naturales, ab unitate se semper excipientes; tunc prodibit series numerorum, qui constituunt primum ordinem figuratorum primi generis. Et, si pro iis scribantur totidem horum figuratorum, semper ab initio sumpti; emerget series numerorum, qui in eodem primo genere constituunt secundum

dum ordinem figuratorum ; atque ita deinceps. Unde clare liquet , discrimen inter istiusmodi series oriri etiam ex multiplici valore , quem unitas subit in singulis partibus cujusque termini .

707. Serierum ergo , quas modo contemplati sumus , tres classes statui possunt . Prima enim series illas continet , quæ oriuntur , capiendo multiplices , aut partes numerorum naturalium . Secunda complectitur eas series , quæ constituuntur , capiendo potestates , aut radices eorundem numerorum . Et tertia demum ipsas figuratorum numerorum series comprehendit . Singulæ cujusque classis series non alia ratione differunt a serie numerorum naturalium , quam , quia unitas , relate ad eas , alios subit valores ab eo , quem habet in ipsa numerorum naturalium serie . Interim hæc valoris mutatio , quam unitas patitur , non est ejusdem indolis in omnibus seriebus .

708. Plane enim in qualibet serierum primæ classis subit quidem unitas valorem alium , sed eum retinet eundem , ac immutatum in singulis seriei terminis . At vero in unaquaque serierum secundæ classis unitas valorem mutat in quolibet seriei termino , & nonnisi in partibus ejus illum retinet eundem , ac invariatur . Denique in singulis seriebus tertiæ classis valor unitatis mutationi subjacet , non modo in terminis omnibus serierum , verum etiam in partibus singulis eorum terminorum . Quæ quum ita sint , liquet , series primæ classis retinere quidem indolem , ac naturam seriei numerorum naturalium ; sed non item series alias , quæ ad classes duas postremas referuntur .

709.

709. Seriei namque numerorum naturalium ea quidem est indoles, atque natura, ut unitas, a qua ea trahit initium suum, & per cujus continuam additionem in infinitum promovetur, eadem semper maneat, ac immutata. Id vero in seriebus primæ classis adhuc obtinet. Nam in iis unitas ita quidem mutat valorem suum, ut tamen in singulis terminis maneat idem, ac invariatus. Sed non perinde est in seriebus, tum secundæ, cum tertiæ classis. Enim vero in his mutatur valor unitatis in singulis serierum terminis, in istis autem mutationi est obnoxius, non modo in terminis omnibus, verum etiam in singulis partibus cujusque termini.

710. Ex eo autem, quod in seriebus primæ classis unitatis valor manet idem, ac immutatus in singulis terminis, fit, ut summa terminorum quotcumque cujusque earum serierum fit ad summam terminorum totidem seriei numerorum naturalium, ut est valor, quem habet unitas in illa serie, ad valorem ejus naturalem. Unde, si valor unitatis sit a , erit $(m^2 + m) a : 2$ summa tot terminorum, quot designat numerus m ; quandoquidem summa ex totidem terminis seriei numerorum naturalium inventa est superius * $(m^2 + m) : 2$. Et quoniam, si m statuatur numerus infinitus, eadem summa fit simpliciter $m^2 a : 2$; liquet, in hisce etiam seriebus summam terminorum omnium esse ad summam terminorum totidem, æqualium maximo, in ratione subduple, hoc est, ut 1 ad 2.

* Art. 590.
594.

SE;

S E C T I O I V .

De Generali Potestatum Theoria.

711. **A**bsolute calculo serierum infinitarum, earundemq; theoria paulo fufius expenfa, quam prioris hujus libri noftrorum Algebræ elementorum ratio pati videbatur; reliquum modo eft, ut potestatum theoriam ad fuam universalitatem revocemus. Universalio-rem autem reddemus theoriam istam duplici quidem ratione. Primo nempe, confiderando, præter potestates vulgares, de quibus jam superius locuti fumus, plures alias potestatum species, vulgo Algebristarum antehac incognitas. Deinde, generalem quandam formulam affigendo, cujus ope quælibet quantitas compofita ad quancumque ex iis potestatibus nullo negotio evehi poffit.

712. Hac formula mediante, immenfus ille calculus, & summo tædio plenus, quem in conficiendis feriebus infinitis, five per divisionem, five per radicum extractionem, superius experti fumus, omnino removetur. Sed ejusdem formulæ beneficio liquido etiam patebit veritas ejus, quod fupradictum eft: nimirum, quod certa, ac definita lege in infinitum abeunt, non modo termini earum serierum, quæ ex divisione oriuntur; verum etiam termini illarum, quæ ab extractione radicum trahunt originem fuam. Unde, quanto pretio istiusmodi formula fit habenda, fatis pro dignitate enarrare non licet.

CA-

CAPUT I.

Varie potestatum species explicata.

713. **P**otestatem superius * appellavi-
 mus id, quod producitur, quum art. 76
 quantitas aliqua semel, aut pluries per se ipsam
 multiplicatur; & indicem, seu exponentem po-
 testatis diximus numerum illum, adscriptum a
 tergo quantitati, qui designat, quoties quanti-
 tas illa per multiplicationem poni debet. Jam
 in posterum vocabimus potestatem, omnem quan-
 titatem, cui a tergo numerus aliquis sit adscri-
 ptus; & similiter dicemus exponentem, seu in-
 dicem potestatis, numerum illum, quem quan-
 titas adscriptum habet a tergo.

714. Juxta hanc potestatis definitio-
 nem, non minus dicenda erit potestas quan-
 titas illa, cujus exponens est numerus integer;
 quam ea, cujus exponens est numerus fra-
 ctus. Et similiter non minus merebitur nomen
 potestatis quantitas, quæ habet pro suo indice
 numerum positivum; quam, quæ pro exponente
 habet numerum negativum. Unde perspicuum
 est, potestates omnes bifariam dividi posse: pri-
 mo nempe in positivas, & negativas; deinde ve-
 ro in perfectas, & imperfectas.

715. Plane enim, quæ exponentes habent
 positivos, potestates erunt positivæ; quæ vero
 negativos, negativæ. Et eadem ratione potesta-
 tes illæ, quarum exponentes sunt numeri inte-
 gri, potestates erunt perfectæ; eæ vero, qua-
 rum

rum exponentes sunt numeri fracti, potestates erunt imperfectæ. Sic a^2 , a^3 , a^4 , &c. potestates sunt perfectæ positivæ; sed a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} , &c. sunt potestates perfectæ negativæ. Atque ita quoque $a^{1:2}$, $a^{2:3}$, $a^{3:4}$, &c. potestates sunt imperfectæ positivæ; sed $a^{-1:2}$, $a^{-2:3}$, $a^{-3:4}$, &c. sunt potestates imperfectæ negativæ.

1. Natura progressionis arithmetica, & geometrica.

716. **U**T natura earum omnium potestatis specierum, quas modo * re-
*art. 714.
 715. censuimus, rectius intelligatur & explicanda est prius natura progressionis arithmeticæ, & geometricæ; tum item analogia est ostendenda, quæ inter utramque progressionem intercedit. Ut vero rem paulo altius repetamus, notabimus primo, quantitates inter se mutuo duplici quidem ratione posse comparari: primo nempe ratione excessus, vel defectus; & deinde ratione continentiæ.

717. Conferuntur duæ quantitates, ratione excessus, vel defectus, quum quæritur, quantum una excedit alteram, vel ab altera deficit. Conferuntur vero, ratione continentiæ, quum quæritur, quoties una continet alteram, vel in altera continentur. Ita duo numeri 2, & 6 dicentur collati inter se mutuo, ratione excessus, vel defectus, quum notatur numerus 4, per quem primus deficit a secundo, vel secundus excedit primum; dicentur vero collati, ratione continentiæ, quum notatur numerus 3, qui ostendit, quoties primus continetur in secundo,
 vel

vel secundus continet primum.

718. Quocumque ex his modis duæ quantitates conferantur inter se invicem, ipsa quantitatuum comparatio rationis vocabulo semper designabitur. Sed, ob duplicem modum, quo conferri possunt quantitates inter se mutuo, duplex etiam distinguitur species rationis; & una, quæ dicitur arithmetica, quantitates comparat ratione excessus, vel defectus; altera, quæ vocatur geometrica, confert quantitates ratione continentiae.

719. Duæ porro quantitates, quæ in qualibet ratione, sive arithmetica, sive geometrica, conferuntur ad invicem, vocantur communiter termini ipsius rationis. Et speciatim dicitur antecedens, prior terminus, qui confertur; & vocatur consequens, terminus secundus, cum quo prior comparatur. Sed usu etiam receptum est, ut haberetur antecedens, velut terminus excedens, vel continens; & vicissim haberetur consequens, velut terminus deficiens, vel contentus.

720. Jam in ratione arithmetica vocatur exponens rationis quantitas illa, quæ designat, quantum antecedens consequentem suum excedit. Et liquido patet, haberi hunc exponentem, quotiescumque consequens ex antecedente subducitur. Unde in ratione arithmetica, quam habet a ad b , exponens ipsius rationis erit $a - b$; quandoquidem, si subducatur consequens b ex antecedente a , residuum fiet $a - b$.

721. Hinc, si alicujus rationis arithmetice habeatur, tum exponens, cum terminus primus; invenietur terminus secundus, subducendo exponentem ex termino primo. Ita,
si ex-

si exponens sit b , & terminus primus sit a ; erit terminus alter $a \rightarrow b$. Sed, si una cum exponente habeatur vicissim terminus secundus; tunc invenietur terminus primus, addendo exponentem cum secundo termino. Qua ratione, si exponens sit b , & terminus secundus sit a ; fiet $a + b$ terminus primus.

722. In ratione autem geometrica vocatur exponens rationis quantitas illa, quæ designat quoties antecedens continet consequentem. Et perspicuum est, haberi hunc exponentem, quotiescumque antecedens per consequentem dividitur. Unde in ratione geometrica, quam habet a ad b , exponens ipsius rationis erit $a : b$; quandoquidem, si dividatur antecedens a per consequentem b , quotiens fiet $a : b$.

723. Hinc, si alicujus rationis geometricæ habeatur, tum exponens, cum terminus primus; invenietur terminus secundus, dividendo priorem terminum per exponentem. Ita, si exponens sit b , & terminus primus sit a ; erit terminus alter $a : b$. Sed, si una cum exponente habeatur vicissim terminus secundus; tunc invenietur terminus primus, multiplicando secundum terminum per exponentem. Qua ratione, si exponens sit b , & terminus secundus sit a ; fiet ab terminus primus.

724. Præterea duæ rationes, sive arithmeticae, sive geometricæ, dicuntur æquales inter se, quum æquales sunt exponentes ipsarum. Ita ratio arithmetica, quam habet a ad b , dicetur æqualis rationi arithmeticae, quam habet c ad d ; si quantitates duæ $a \rightarrow b$, & $c \rightarrow d$, quæ sunt exponentes earum rationum, æquales fuerint

in-

inter se . Et ad eundem modum , si fuerint æquales inter se fractiones duæ $a : b$, & $c : d$; ratio geometrica , quam habet a ad b , dicetur æqualis rationi geometricæ , quam habet c ad d .

725. Duarum autem rationum æqualitas vocatur communiter proportio . Unde quatuor quantitates dicuntur proportionales , quum ratio , quam habet prima ad secundam , est æqualis rationi , quam habet tertia ad quartam . Sed & ipsa proportio alia erit arithmetica , alia geometrica . Nam æqualitas duarum rationum arithmeticarum dicetur proportio arithmetica ; æqualitas vero duarum rationum geometricarum proportio geometrica appellabitur .

726. Jam proportionis arithmeticæ illud est accidens præcipuum , ut summa extremorum æqualis sit summæ mediorum . Esto enim a primus terminus proportionis arithmeticæ , & c terminus tertius ; sitque etiam b exponens utriusque rationis , hoc est excessus , quo , tum primus terminus superat secundum , cum tertius superat quartum . Itaque erit $a - b$ terminus secundus , & $c - b$ terminus tertius . Unde , quum a , $a - b$, c , $c - b$ sint quatuor termini proportionis arithmeticæ ; liquet , summam extremorum $a + c - b$ æqualem esse summæ mediorum $a - b + c$. *art. 721.

727. Proportionis autem geometricæ ea est proprietas præcipua , ut productum extremorum æquale sit producto mediorum . Ponatur enim , quod a sit primus terminus proportionis geometricæ , & c terminus tertius ; & ponatur quoque , quod b sit exponens utriusque rationis , hoc est quantitas , designans , quoties primus terminus

con-

continet secundum, & tertius continet quartum.

Art. 723. Itaque erit $a : b$ terminus secundus, & $c : b$ terminus quartus. Unde, quum $a, a : b, c, c : b$ sint quatuor termini proportionis geometricæ; liquet, productum ex extremis $ac : b$ æquale esse producto ex mediis $ac : b$.

728. Tam arithmetica, quam geometrica proportio quatuor terminos exigit; quum utraque sit æqualitas duarum rationum, quarum unaquæque duos terminos requirit. Sed potest etiam quælibet proportio sub tribus tantum terminis consistere: scilicet, quum terminus medius bis sumitur, & gerit vices consequentis in prima ratione, & vices antecedentis in secunda. Id quum accidit, proportio dicitur continua. Et perspicuum est, in proportionem continua arithmetica summam extremorum æqualem esse duplo termini medii; in proportionem continua geometrica productum extremorum æquale esse quadrato, quod fit ex termino medio.

729. Quum non tres, sed plures habentur quantitates continue proportionales, dicentur eæ progressionem constituere. Atque hæc rursus erit, vel arithmetica, vel geometrica: prout nempe quantitates, progressionem constituentes, sunt vel arithmetice, vel geometricæ proportionales. Ita series numerorum 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, &c. constituit progressionem arithmeticam; quia idem est ubique excessus. Per contrarium vero series numerorum 64, 32, 16, 8, 4, 2, &c. constituit progressionem geometricam; quia eadem est ubique continentia.

730. Inter terminos ergo progressionis arithmeticæ idem ubique servatur excessus, & quatuor-

quantum primus excedit secundum, tantundem secundus excedit tertium, tertius excedit quartum, atque ita deinceps. Unde, si in hujusmodi progressionem b sit exponens, & a terminus primus; erit $\cdot a \rightarrow b$ secundus terminus, $a \rightarrow 2b$ terminus tertius, $a \rightarrow 3b$ terminus quartus, atque ita in infinitum. Qua ratione progressionis arithmetice termini omnes sic poterunt exhiberi $a, a \rightarrow b, a \rightarrow 2b, a \rightarrow 3b, a \rightarrow 4b, a \rightarrow 5b, a \rightarrow 6b$, &c. *art. 721.

731. Inter terminos autem progressionis geometricæ eadem ubique servatur continentia, & quoties primus continet secundum, toties secundus continet tertium, tertius continet quartum, atque ita deinceps. Unde, si in hujusmodi progressionem b sit exponens, & a terminus primus; erit $\cdot a : b$ secundus terminus, $a : b^2$ terminus tertius, $a : b^3$ terminus quartus, atque ita in infinitum. Qua ratione progressionis geometricæ termini omnes sic poterunt efferri $a, a : b, a : b^2, a : b^3, a : b^4, a : b^5, a : b^6$, &c. *art. 723.

732. Ex quibus modo facile erit intelligere, quæ sint utriusque progressionis proprietates principales. Nimirum in progressionem arithmetica evidens est, hæc duo esse accidentia præcipua. Primum, ut summa duorum quorumvis terminorum equalis sit summæ ex duobus aliis, equaliter hinc inde distantibus ab iis. Alterum, ut duplum unius termini adæquet summam duorum aliorum, qui utrinque æque distent ab eo.

733. In progressionem autem geometrica, perspicuum est, has duas esse proprietates præcipuas. Prima, ut productum ex duobus quibuscumque terminis æquale sit ei, quod producitur ex

Tom. I.

X

ma.

mutua multiplicatione duorum aliorum, utrinque ab iis æqualiter distantium. Altera, ut quadratum unius termini æquale sit ei, quod oritur, multiplicando per se invicem duos alios terminos, qui æqualiter hinc inde distent ab illo.

734. Cæterum nolo hic reticere, quod utraque progressio potest esse, tum crescens, cum decrescens. Ita termini progressionis arithmeticæ $a, a - b, a - 2b, a - 3b, a - 4b, \&c.$ fient 20, 17, 14, 11, 8, &c., si a sit 20, & b sit 3; fient vero 20, 23, 26, 29, 32, &c., si exhibente a numerum 20, ponatur b æqualis -3 . Atque ita quoque termini progressionis geometricæ $a, a : b, a : b^2, a : b^3, a : b^4, \&c.$ evadent 32, 16, 8, 4, 2, &c., si a sit 32, & b sit 2; evadent vero 32, 64, 128, 256, 512, &c., si exhibente a numerum 32, ponatur b æqualis fractioni huic $1 : 2$.

735. Est autem notatu dignum, quod ubi progressio est geometrica, ea, tum crescendo, cum decrescendo progreditur semper per terminos positivos; quotiescumque vero progressio est arithmetica, ea, crescendo quidem, promovetur in infinitum per terminos positivos; decrescendo vero, non aliter abire potest in infinitum, quam per terminos negativos. Atque hinc est, ut in progressionem arithmetica decrescente potest quidem aliquis ejus terminus evanescere, & fieri æqualis zero, seu nihilo; sed non item in progressionem geometrica decrescente, ubi omnis ejus terminus semper valorem aliquem contineat oportet.

II. Ana-

*II. Analogia inter progressionem arithmeticam,
& geometricam.*

736. **O**stenſa natura progressionis, tum arithmeticae, cum geometricae; ostendenda est modo analogia, quae inter utramque progressionem intercedit. Haec potissimum consistit in eo, quod, quemadmodum termini progressionis arithmeticae inveniuntur additione, & subtractione; ita termini progressionis geometricae multiplicatione, & divisione debent reperiri. Verum ex ista analogia plura colligi possunt consuetaria, quae recensitis potestatum speciebus explicandis non parum conducent.

737. Assumantur etenim termini, progressionem arithmeticam constituentes, velut indices, seu exponentes eorum, qui constituunt progressionem geometricam. Jamque illud statui primo loco potest, quod, si in progressionem geometricam capiantur quatuor termini geometricae proportionales; eorundem exponentes tales esse debent, ut summa ex exponentibus extremorum aequet summam ex exponentibus mediorum. Neque vero difficile id erit ostendere.

738. Nam ex hypothese exponentes eorum terminorum sunt termini totidem arithmetice proportionales. Sed quatuor terminorum arithmetice proportionalium illud est * accidens praecipuum, ut summa extremorum aequalis sit summae mediorum. Itaque, si capiantur in progressionem geometricam quatuor termini geometricae proportionales, summa ex exponentibus extremorum aequalis erit summae ex exponentibus mediorum.

X 2

739.

739. Eadem hypothesi manente, statui secundo loco potest, quod, si in eadem progressionē geometricā capiantur tres termini geometricē proportionales, adeo nempe, ut prior terminus sit ad secundum, veluti est secundus ad tertium; eorundem exponentes tales esse debent, ut summa ex exponentibus extremorum adæquet duplum exponentis termini medii.

740. Nam ex hypothesi exponentes trium illorum terminorum sunt termini totidem arithmetice proportionales. Sed trium terminorum arithmetice proportionalium ea est proprietas præcipua, ut summa extremorum æqualis sit duplo termini medii. Itaque, si in progressionē geometricā capiantur tres termini geometricē proportionales, summa ex exponentibus extremorum æqualis erit duplo exponentis termini medii.

741. Quod si autem progressio geometrica ab unitate trahat initium suum, tum item progressio arithmetica incipiat a zero, ita, ut ipsum zero sit index, seu exponens unitatis; licebit, ex duabus iis utriusque progressionis simul junctæ proprietatibus alias etiam derivare, quarum ope facile erit, super terminis progressionis geometricæ additione, & subtractione peragere quæcumque multiplicatione, & divisione essent peragenda.

742. Primo namque, si multiplicandi sum per se mutuo duo quilibet termini progressionis geometricæ; satis erit, exponentes eorum terminorum in unum addere, & velut productum habere terminum illum, qui eam summam habet pro suo exponente. Enim vero generaliter,
quum

quum tales sunt ambæ progressionēs ; quales paulo ante * eas supposuimus ; summa ex exponentibus multiplicandi , & multiplicatoris , exponenti ipsius producti æqualis esse debet. **art. 741.*

743. Ostendemus autem generalis hujus regulæ veritatem in hunc modum . Ex multiplicationis definitione , unitas est ad multiplicatorem in eadem ratione geometrica , quam habet multiplicandus ad productum . Quare ex ostensis * summa ex exponentibus multiplicandi , & multiplicatoris æqualis erit summæ ex exponentibus unitatis , & producti . Sed ex hypothesi exponens unitatis est zero . Itaque summa ex exponentibus multiplicandi , & multiplicatoris solius producti exponentem adæquabit. **art. 737.*

744. Secundo , si dividendi sunt per se mutuo duo quilibet termini progressionis geometricæ ; satis crit , ex exponente termini dividendi subducere exponentem alterius termini , qui gerit vices divisoris , & velut quotientem habere terminum , qui illud residuum habet pro suo exponente . Nam generaliter , quum tales sunt progressionēs , quales superius * eas supposuimus ; differentia exponentium dividendi , & divisoris æqualis esse debet exponenti ipsius quotientis. **art. 741.*

745. Hujus vero generalis canonis veritas sic poterit ostendi . Ex definitione divisionis , divisor est ad dividendum in eadem ratione geometrica , quam habet unitas ad quotientem . Quare ex ostensis * summa ex exponentibus divisoris , & quotientis æqualis erit summæ ex exponentibus dividendi , & unitatis . Sed ex hypothesi exponens unitatis est zero . Itaque summa exponentium divisoris , & quotientis æ-

X 3 qua

qualis erit exponenti solius dividendi : & propterea, si ex exponente dividendi subducatur exponens divisoris, remanebit exponens quotientis.

746. Tertio, si aliquis terminus progressionis geometricæ elevari debet ad quadratum, cubum, aut aliam quamvis potestatem altiore; fatis erit, exponentis illius termini sumere duplum, triplum, quadruplum, &c., & velut quæsitam potestatem habere terminum, qui eum multiplicem pro suo exponente habet. Nam generaliter, ubi utraque progressio est talis, qualis
**art. 741.* superius * posita est; duplum exponentis lateris dabit exponentem quadrati; triplum, exponentem cubi; quadruplum, exponentem quadrato-quadrati; atque ita deinceps.

747. Neque vero difficile erit, generalis huius regulæ veritatem ostendere. Nam, quum quadratum oriatur, multiplicando latus per se ipsum; erunt unitas, latus, & quadratum in geometrica proportionem. Quare ex ostensis * summa ex exponentibus unitatis, & quadrati æqualis erit exponenti lateris duplicato. Sed ex hypothesis exponens unitatis est zero. Itaque exponens solius quadrati duplum exponentis lateris adæquabit.

748. Eadem ratione, quia cubus oritur, multiplicando latus per quadratum; erunt unitas, latus, quadratum, & cubus in geometrica proportionem. Quare ex ostensis * summa ex exponentibus unitatis, & cubi æqualis erit summa ex exponentibus lateris, & quadrati. Sed ex hypothesis exponens unitatis est zero; & in
**art. 747.* hac eadem hypothesis exponens quadrati est æqualis exponenti lateris duplicato. Itaque ex-
 po-

pones solius cubi triplum exponentis lateris adæquabit.

749. Non dissimiliter res ostendetur de potestatibus altioribus. Nam quadrato-cubus, exempli gratia, oritur ex ductu quadrati per cubum. Quare unitas ad quadratum erit in eadem ratione geometrica, quam habet cubus ad quadrato-cubum: proindeque ex ostensis * summa ex ^{*art.737.} exponentibus unitatis, & quadrato-cubi æqualis erit summæ ex exponentibus quadrati, & cubi. Sed ex hypothesei exponens unitatis est zero; & in hac eadem hypothesei exponens quadrati adæquat * duplum, & exponens cubi adæ- ^{*art.767.} quat * triplum exponentis, qui refertur ad la- ^{*art.748.} tus. Itaque exponens solius quadrato-cubi quintuplum exponentis lateris adæquabit.

750. Denique, si ex aliquo termino progressionis geometricæ extrahenda est radix quadrata, cubica, aut alterius cujuscvis ordinis; factis erit, exponentis illius termini sumere semissem, trilentem, quadrantem, &c., & velut quæsitam radicem habere terminum, qui eam partem aliquotam habet pro suo exponente. Nam generaliter, quum utraque progressio est talis, qualis superius * a nobis posita est; semissis ex- ^{*art.741.} ponentis alicujus quantitatis erit æqualis exponenti suæ quadratæ radice, triens exponenti suæ radice cubicæ, quadrans exponenti suæ radice quadrato-quadratæ, atque ita deinceps.

751. Ostendetur vero generalis hic canon in hunc modum. Quum progressio geometrica incipit ab unitate, & exponens unitatis est zero, seu nihil; jam quidem ostensum est *, du- ^{*art.746.} plum exponentis lateris exhibere nobis expo-

X 4

nen-

nentem quadrati, triplum exponentem cubi, quadruplum exponentem quadrato-quadrati, atque ita in infinitum. Quare per contrarium omnino necesse est, ut in eadem hypothefi semiffis exponentis datæ quantitatis adæquet exponentem suæ quadratæ radice, triens exponentem suæ radice cubicæ, quadrans exponentem suæ radice quadrato-quadratæ, atque ita de aliis.

III. Natura potestatum, quæ dicuntur perfecta negativa.

752. **C**ognita analogia, quæ existit inter progressionem arithmetica, & progressionem geometricam; haud difficile modo erit, naturam potestatum omnium intelligere. Et quidem jam vidimus supra *, quatuor dari posse potestatum species, nimirum perfectas positivas, perfectas negativas, imperfectas positivas, & imperfectas negativas. Quum ergo potestates perfectæ positivæ jam satis superque superius explicatæ sint; videamus modo, quæ sit natura earum potestatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ, & qua ratione eas a perfectis positivis distinguantur.

753. Circa potestates perfectas positivas, quæ habent pro suis exponentibus numeros integros, eosque positivos, jam illud supra * statuimus, eas exponentibus suis designare, quoties quantitas per multiplicationem poni debet: ita nempe, ut a , seu a^1 designet ipsam quantitatem a semel positam; a^2 eandem quantitatem a positam bis, hoc est productum, quod oritur, multiplicando a per se ipsam; a^3 eandem adhuc quan-

quantitatem a positam ter, sive etiam productum ex a^2 per a ; atque ita de aliis.

754. Inde vero liquet, potestates perfectas positivas, si ordine scribantur, progressionem geometricam constituere; quandoquidem a^1 est ad a^2 ut a^2 ad a^3 ; & a^2 est ad a^3 , ut a^3 ad a^4 ; & a^3 est ad a^4 , ut a^4 ad a^5 ; atque ita deinceps. Sed exponentes earundem potestatum, ordine etiam sumpti, progressionem component arithmeticam; quippe qui sunt ipsi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., qui ab unitate per unitatis intervallum in infinitum progrediuntur.

755. Hinc hujusmodi potestatibus, earundemq; exponentibus applicari poterunt duo illa theoremata, quæ de utraque progressionem simul juncta paulo ante ostensa sunt. Itaque primo, *art. 737.* si in serie potestatum capiantur quatuor termini *739* geometricæ proportionales, erit summa ex exponentibus extremorum æqualis summæ ex exponentibus mediorum. Et secundo, si in eadem serie capiantur tres termini in geometrica proportionem, erit summa ex exponentibus extremorum æqualis duplo exponentis termini medii.

756. Jam, si seriei potestatum a^1, a^2, a^3, a^4, a^5 , &c. unitas præfigatur, hæc quoque cum ipsis illis potestatibus progressionem constituet geometricam; quum sit, ut 1 ad a^1 , ita a^1 ad a^2 . Sed ejus exponens non alius, quam zero, esse potest. Nam, quum sint geometricæ proportionales 1, a^1 , a^2 ; erit *art. 739.* summa exponentium, qui referuntur ad 1, & a^2 , æqualis duplo exponentis, qui refertur ad a^1 : proindeque, quia duplum hujus exponentis adæquat exponens solius a^2 ; omnino necesse est, ut sit zero exponens unitatis, *757.*

757. Ubi autem exponens unitatis est zero, tunc summa exponentium multiplicandi, & multiplicatoris adæquat * exponentem producti. Unde, si in serie earum potestatum duo quilibet termini per se mutuo debeant multiplicari; satis erit, in unum addere eorum exponentes, & velut productum habere terminum illum, qui eam summam habet pro suo exponente. Qua ratione erit a^5 productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a^3 ; & a^7 id, quod producit, multiplicando a^3 per a^4 .

758. Sed in eadem hypothefi, quod exponens unitatis est zero, exponens divisoris, subductus ab exponente dividendi, relinquit * exponentem quotientis. Quare, si in serie earundem potestatum duo quilibet termini per se mutuo dividi debeant; satis erit, ab exponente dividendi subducere exponentem divisoris, & habere velut quotientem terminum illum, qui illiusmodi residuum habet pro suo exponente. Qua ratione erit a^3 quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^2 ; & a^4 quotiens, qui producit, dividendo a^7 per a^3 .

759. Atque hinc modo haud difficile erit, naturam intelligere earum potestatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ. Nam, quemadmodum a^2 est quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^3 ; ita a^{-3} designare debet quotientem, qui producit, dividendo vicissim a^3 per a^5 ; quandoquidem, si ab exponente dividendi 3 subducatur exponens divisoris 5, residuum erit $2 - 5$, hoc est -3 . Et ob eandem rationem, sicuti a^4 est quotiens, qui oritur, dividendo a^7 per a^3 ; ita a^{-4} exhibebit quotientem, qui producit,

di

dividendo vicissim a^3 per a^7 .

760. Jam, si methodo vulgari dividatur a^4 per a^5 , quotiens fiet $a^4 : a^5$, sive etiam $1 : a^1$. Unde, quia idem quotiens exhiberi quoque potest per a^{-3} ; consequens est, ut a^{-3} idem sit, ac $1 : a^3$. Atque ita quoque, si dividatur a^3 per a^7 , prout vulgo divisio peragitur, prodibit quotiens $a^3 : a^7$, sive etiam $1 : a^4$. Quare, quum idem quotiens possit quoque designari per a^{-4} , omnino necesse est, ut a^{-4} perinde valeat, ac $1 : a^4$.

761. Quæ quum ita sint, liquet, potestates perfectas negativas aliud non esse, quam fractiones, quæ velut numeratores habent unitatem, velut denominatores vero easdem illas potestates, consideratas tanquam positivas. Qua ratione, sicuti a^{-3} idem est, ac $1 : a^3$; & a^{-4} idem, ac $1 : a^4$; sic quoque a^{-5} perinde significabit, ac $1 : a^5$; & a^{-7} tantundem valebit, ac $1 : a^7$. Unde etiam a^{-1} idem erit, ac $1 : a^1$, sive $1 : a$.

762. Ex quo patet, ope earum potestatum, quæ dicuntur perfectæ negativæ, posse fractiones quodammodo ad quantitates integras revocari. Nam in fractione $a^3 : c^2$ quantitas a^3 reperitur multiplicata per $1 : c^2$; proindeque, quia $1 : c^2$ idem est, ac c^{-2} , scribi poterit loco ^{art. 761.} ejus fractionis $a^3 : c^2$ hæc quantitas quodammodo integra $a^3 c^{-2}$. Et similiter, quia in fractione $a^4 : bc^2$ quantitas a^4 reperitur multiplicata, non modo per $1 : c^2$, verum etiam per $1 : b$; designari poterit fractio illa $a^4 : bc^2$ ad instar quantitatis integræ in hunc modum $a^4 b^{-1} c^{-2}$. Nam, sicuti $1 : c^2$ idem valet, ac c^{-2} ; ita $1 : b$ perinde significat, ac b^{-1} .

763. Sed vicissim, ope earundem potestatum, poterunt quantitates integræ quodammodo ad fractiones revocari. Nam quantitas integræ a^3c^2 producitur, dividendo a^3 per $1 : c^2$. Unde, quia $1 : c^2$ idem est, ac c^{-2} , scribi poterit loco integræ ejus quantitatis a^3c^2 hæc fractio $a^3 : c^{-2}$. Et similiter, quia quantitas integræ a^4b^3 oritur, dividendo a^4 per $1 : b^3$, sive etiam a^4 per b^{-3} ; designari ea poterit ad instar fractionis in hunc modum $a^4 : b^{-3}$.

764. Generaliter autem, sicuti quælibet quantitas, saltem subscripta ei unitate, suum habet numeratorem, suumque denominatorem; ita, inutato signo exponentis, licebit, transferre aliquid, sive ex numeratore in denominatorem, sive vicissim ex denominatore in numeratorem. Ita, si habeatur quantitas $a^2b : cd$, sive etiam $a^2b^1 : c^1d^1$, & in ea transferendum sit b^1 ex numeratore in denominatorem; scribendum est $a^2 : c^1d^1b^{-1}$. Quod si vero in eadem quantitate $a^2b^1 : c^1d^1$ transferri debeat d^1 ex denominatore in numeratorem, satis erit, scribere $a^2b^1d^{-1} : c^1$.

IV. De potestatibus imperfectis, tum positivis, cum negativis.

765. **Q**uid sibi velint potestates perfectæ, tam positivæ, quam negativæ; jam quidem nobis innotuit. Sequitur modo, ut naturam ostendamus earum potestatum, quæ sunt, vel imperfectæ positivæ, vel imperfectæ negativæ. Et quantum ad primas, consideremus rursus, potestates perfectas positivas, ordine dispositas, progressionem geometricam

con-

constituere; & earum indices, seu exponentes, ordine etiam collocatos, progressionem aliam arithmeticam componere.

766. Memoria etiam recolamus, geometricam illam potestatum progressionem posse ab unitate sumi suum initium, quum eandem rationem habeat 1 ad a^1 , quam habet a^1 ad a^2 ; nec alium esse debere exponentem unitatis, quam zero, seu nihil, quum summa exponentium, qui referuntur ad 1, & a^2 , æqualis esse debeat duplo exponentis ipsius a^1 . His enim præmissis, facile erit, ostendere naturam earum potestatum, quæ dicuntur imperfectæ positivæ.

767. Vidimus namque superius, quod, quum ^{art. 746.} exponens unitatis est zero, tunc exponens lateris, duplicatus dat exponentem quadrati, triplicatus exponentem cubi, atque ita deinceps. Quare, si in serie illa potestatum quærat quadratum, cubus, aut alia quævis potestas altioris ordinis alicujus termini; satis erit, sumere duplum, triplum, quadruplum sui exponentis, & ut quæsitam potestatem habere terminum illum, qui eum multiplicem habet pro suo exponente. Quæ ratione ipsius a^2 quadratum erit a^4 , cubus a^6 , quadrato-quadratum a^8 , atque ita in infinitum.

768. Similiter demonstravimus supra, quod, ^{art. 750.} ubi zero est exponens unitatis, semissis exponentis alicujus quantitatis exhibet exponentem suæ quadratæ radicis, triens exponentem suæ radicis cubicæ, atque ita deinceps. Quare, si in eadem illa serie potestatum quærat radix quadrata, cubica, aut altioris cujusvis ordinis alicujus termini; satis erit, sumere semissem, trientem, quadrantem sui exponentis, & ut quæsitam

tam radicem habere terminum illum, qui eam partem aliquotam habet pro suo exponente. Qua ratione ipsius $a^{1:2}$ quadrata radix erit a^6 , radix cubica a^4 , & radix quadrato-quadrata a^3 .

769. Quod quum ita sit, haud arduum modo erit, naturam intelligere earum potestatum, quæ dicuntur imperfectæ positivæ. Plane enim, quemadmodum a^2 est quadrata radix ipsius a^4 , ita $a^{1:2}$ designare debet quadratam radicem, quæ elicitur ex a , sive a^1 ; quandoquidem, sicuti exponens ipsius a^2 est semissis exponentis alterius a^4 , ita exponens ipsius $a^{1:2}$ adæquat semissem exponentis alterius a^1 . Et similiter, sicuti a^3 est radix cubica, quæ elicitur ex a^6 , ita $a^{1:3}$ erit radix cubica, quæ extrahitur ex a^1 ; nam, non minus exponens ipsius a^2 est tertia pars exponentis alterius a^6 , quam exponens ipsius $a^{1:3}$ est tertia pars exponentis alterius a^1 .

770. Ob eandem rationem $a^{2:3}$ designabit quadratam radicem ipsius a^3 ; $a^{2:4}$ radicem cubicam ipsius a^2 ; $a^{3:4}$ radicem quadrato-quadratam ipsius a^3 ; atque ita de aliis. Quocirca generaliter potestates imperfectæ positivæ non aliud erunt, quam radices, designatæ a denominatoribus earum fractionum, quæ sunt exponentes talium potestatum, & extractæ ex potestatibus perfectis positivis, quarum exponentes sunt numeratores earundem fractionum. Qua ratione, per potestates imperfectas positivas, usus signorum radicalium omnino ex Algebra eliminatur.

771. Supersunt potestates imperfectæ negativæ, hoc est, quæ habent pro suis exponentibus numeros fractos negativos. Ut harum po-
te-

testatum naturam ostendamus, notabimus primo, potestates perfectas negativas, non minus ac eas, quæ positivæ sunt, ordine sumptas, progressionem geometricam constituere. Jam enim vidimus supra $a^1, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c.$ perinde valere, ac $1 : a, 1 : a^2, 1 : a^3, 1 : a^4, &c.$ Quare, sicuti quantitates istæ $1 : a, 1 : a^2, 1 : a^3, 1 : a^4, &c.$ progressionem constituunt geometricam; sic eandem progressionem formabunt quoque quantitates priores $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c.$ *art. 761.

772. Notabimus quoque, quod, licet exponentes harum potestatum $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c.$ sint negativi; tamen, ordine sumpti, constituunt progressionem arithmeticam, non secus ac ii, qui referuntur ad potestates perfectas positivas $a^1, a^2, a^3, a^4, &c.$ Unde, quia præfixa iisdem potestatibus unitate, hæc pariter cum iis progressionem constituit geometricam; omnino necesse est, ut, etiam relate ad istiusmodi potestates, zero sit exponens unitatis. Nam aliter summa exponentium unitatis, & a^{-2} non foret æqualis duplo exponentis, qui refertur ad a^{-1} .

773. Hæc vero quum ita sint, liquet, ea omnia, quæ locum habent in potestatibus perfectis positivis, obtinere quoque, relate ad potestates perfectas negativas. Quocirca, sicuti potestatis perfectæ positivæ a^2 quadratum est a^4 , cubus a^6 , quadrato-quadratum a^8 , atque ita de aliis; ita quoque potestatis perfectæ negativæ a^{-2} quadratum erit a^{-4} , cubus a^{-6} , quadrato-quadratum a^{-8} , atque ita deinceps. Pariterque, sicuti potestatis perfectæ positivæ a^1

ra-

radix quadrata est a^6 , radix cubica a^4 , & radix quadrato-quadrata a^3 ; sic pariter potestatis perfectæ negativæ a^{-12} radix secunda erit a^{-6} , radix tertia a^{-4} , & radix quarta a^{-3} .

774. Unde porro, quemadmodum $a^1:2$, $a^1:3$, $a^1:4$ sunt radices quadrata, cubica, quadrato-quadrata ipsius a^1 ; ita $a^{-1}:2$, $a^{-1}:3$, $a^{-1}:4$ erunt radices cognomines ipsius a^{-1} . Pariterque, sicuti $a^2:3$, $a^3:4$, $a^4:5$ sunt radices tertia, quarta, quinta ipsarum a^2 , a^3 , a^4 ; ita $a^{-2}:3$, $a^{-3}:4$, $a^{-4}:5$ erunt radices non dissimiles ipsarum a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} . Quare, quum a^{-2} , a^{-3} , a^{-4} perinde valeant, ac $1:a^2$, $1:a^3$, $1:a^4$; liquet, $a^{-2}:3$ esse radicem cubicam fractionis $1:a^2$, $a^{-3}:4$ radicem quadrato-quadratam fractionis $1:a^3$, & $a^{-4}:5$ radicem quadrato-cubicam fractionis $1:a^4$.

775. Jam, quæcumque radix ex unitate sit extrahenda, ea erit ipsa unitas. Quocirca potestates imperfectæ negativæ generaliter non aliud erunt, quam fractiones, habentes pro suis numeratoribus unitatem, & pro denominatoribus easdem illas radicales, quas eæ potestates designarent, si utique essent positivæ. Ita $a^2:3$ idem est, ac $\sqrt[3]{a^2}$; proindeque $a^{-2}:3$ tantundem valebit, ac $1:\sqrt[3]{a^2}$. Similiter $a^3:4$ idem est, ac $\sqrt[4]{a^3}$; ideoque $a^{-3}:4$ perinde significabit, ac $1:\sqrt[4]{a^3}$.

776. Mediantibus ergo potestatibus imperfectis, radicalia signa omnino ex Algebra eliminare licebit. Nam quadrata radix, exempli gratia, quantitatis a , sicuti vulgo exhibetur per $\sqrt{a}$, sic poterit designari ad instar potestatis in hunc modum $a^1:2$. Et similiter radix cubica quantita-

tis

tis a^3 , quæ vulgo designatur per $\sqrt[3]{a^3}$, formam induens potestatis, exprimi poterit per $a^1 : 3$. Sed, si quæretur quadrata radix ipsius ab , sive $a^1 b^1$; ea erit $a^1 : 2 b^1 : 2$. Pariterque, si extrahenda sit radix cubica ex $a^2 b$, sive etiam ex $a^2 b^1$; erit $a^2 : 3 b^1 : 3$ radix ista.

*V. Genesis aliarum potestatum, & calculi
omnium per exponentes.*

777. **E**X iis, quæ hætenus dicta sunt, abunde, opinor, liquet, quæ sit natura potestatum omnium, quodve discrimen inter eas. Verum, ut genesis aliarum potestatum clarior evadat, consideretur primo velim, quod, sicuti progressio geometrica potestatum vulgarium a^1, a^2, a^3, a^4 , &c., continuata versus a^1 , primo per unitatem, tum per terminos istos $1 : a, 1 : a^2, 1 : a^3, 1 : a^4$, &c. excurrit; sic progressio arithmetica suorum exponentium $1, 2, 3, 4$, &c., continuata versus 1 , primo quidem per zero, deinde vero per numeros negativos $-1, -2, -3, -4$, &c. promovetur.

778. Hinc ergo facile erit intelligere, debere esse zero exponentem unitatis, & $-1, -2, -3, -4$, &c. exponentes terminorum $1 : a, 1 : a^2, 1 : a^3, 1 : a^4$, &c. Unde, si alii isti termini per suos exponentes essent designandi; oporteret, unitatem quidem exhibere per a^0 , terminos vero alios $1 : a, 1 : a^2, 1 : a^3, 1 : a^4$, &c. per $a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}$, &c. : proindeque oriuntur potestates perfectæ negativæ, quotiescumque progressio geometrica potestatum

Pbm. I.

Y

vul.

vulgarium $a^1, a^2, a^3, a^4, \&c.$ continuatur versus a^1 .

779. Inter terminos porro ejusdem progressionis geometricæ, utrinque continuatæ, nihil prohibet, quin infiniti alii interponantur. Licet enim, inter duos quosque terminos ejus progressionis, sive unam, sive duas, sive quotvis alias medias proportionales interponere; nec ideo progressionis geometricæ naturam amittet. Sed interpositorum terminorum exponentes habebuntur, si alii totidem interjiciantur inter terminos progressionis arithmeticæ, quæ est series, seu locus exponentium.

780. Ita, si inter duos quosque terminos progressionis geometricæ una media proportionalis interponatur; istæ erunt $\sqrt{a}, \sqrt{a^3}, \sqrt{a^5}, \sqrt{a^7}, \&c.$, quum ab unitate ascendimus ad potestates perfectas positivas; & $1 : \sqrt{a}, 1 : \sqrt{a^3}, 1 : \sqrt{a^5}, 1 : \sqrt{a^7}, \&c.$, quum vicissim ab unitate ad potestates perfectas negativas descendimus. Unde, relate ad primas, exponentes erunt $1 : 2, 3 : 2, 5 : 2, 7 : 2, \&c.$; relate vero ad secundas, erunt exponentes $1 : 2, 3 : 2, 5 : 2, 7 : 2, \&c.$; proindeque, adhibitis exponentibus, primæ quidem per $a^1 : 2, a^3 : 2, a^5 : 2, a^7 : 2, \&c.$, secundæ vero per $a^{-1} : 2, a^{-3} : 2, a^{-5} : 2, a^{-7} : 2, \&c.$ debent exhiberi.

781. Eadem ratione, si inter duos quosque terminos progressionis geometricæ duæ medię proportionales interponantur; istæ erunt $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a^3}, \sqrt[3]{a^5}, \sqrt[3]{a^7}, \sqrt[3]{a^9}, \sqrt[3]{a^{11}}, \sqrt[3]{a^{13}}, \sqrt[3]{a^{15}}, \&c.$, ascendendo ab unitate ad potestates perfectas positivas; & $1 : \sqrt[3]{a}, 1 : \sqrt[3]{a^3}, 1 : \sqrt[3]{a^5}, 1 : \sqrt[3]{a^7}, 1 : \sqrt[3]{a^9}, 1 : \sqrt[3]{a^{11}}, 1 : \sqrt[3]{a^{13}}, 1 : \sqrt[3]{a^{15}}, \&c.$

&c. ; descendendo ab unitate ad potestates perfectas negativas. Quare, in ordine ad primas, exponentes erunt $1:3, 2:3, 4:3, 5:3, 7:3, 8:3, 10:3, 11:3$; &c. ; in ordine vero ad secundas, erunt $1:3, 2:3, 4:3, 5:3, 7:3, 8:3, 10:3, 11:3$; &c. & propterea, ope exponentium, primæ quidem per $a^1:3, a^2:3, a^4:3, a^5:3, a^7:3, a^8:3, a^{10}:3, a^{11}:3$; &c., secundæ vero per $a^{-1}:3, a^{-2}:3, a^{-4}:3, a^{-5}:3, a^{-7}:3, a^{-8}:3, a^{-10}:3, a^{-11}:3$; &c. forent repræsentandæ.

782. Quæ quum ita sint, liquet, oriri potestates imperfectas, sive positivas, sive negativas, quoriscumq; inter terminos progressionis geometricæ potestatum vulgarium, utrinque continuatæ, interponuntur termini alii. Sed, quum hæc sit genesis aliarum potestatum, perspicuum est quoque, in una eademque progressionem geometricam omnes omnino potestates includi. Et quoniam in hac eadem progressionem reperitur unitas, quæ non alium in ea exponentem habet, quam zero; licebit, calculum potestatum omnium, adhibitis exponentibus, paulo simplicius in hunc modum absolvere.

783. Nimirum primo, quantum ad multiplicationem duarum potestatum unius, ejusdemque quantitatis; licebit, eam instituere, addendo simul exponentes datarum potestatum, & scribendo summam pro exponente producti. Ita, ad multiplicandum a^2 per a^3 , scribendum est a^5 ; quia exponentes 2, & 3 simul additi conficiunt 5. Similiter, ad multiplicandum a^5 per a^{-3} , scribendum est a^2 ; quia summa exponentium 5, & -3 est 2. Atque ita quoque, ad multi-

plicandum a^2 per $a^1 : 2$, scribi debet $a^5 : 2$; quia 2, & 1 : 2 simul sunt 5 : 2. Tandemque erit $a^{-3} : 2$ productum, quod oritur, multiplicando a^{-2} per $a^1 : 2$; quandoquidem $\rightarrow 2$, & 1 : 2 simul sunt $\rightarrow 3 : 2$.

784. Secundo, quantum ad divisionem duarum potestatum unius, ejusdemque quantitatis, poterit ea institui, subducendo a se mutuo exponentes datarum potestatum, & scribendo residuum pro exponente quotientis. Ita, ad dividendum a^5 per a^2 , scribendum est a^3 ; quia exponens 2, subductus ab exponente 5, relinquit 3. Similiter, ad dividendum a^2 per a^{-2} , scribendum est a^4 ; quia, si ex exponente 2 subducatur exponens $\rightarrow 3$, residuum erit 5. Eadem ratione, ad dividendum $a^5 : 2$ per a^2 , scribi debet $a^1 : 2$; quia, si ex 5 : 2 subtrahatur 2, residuum fiet 1 : 2. Atque ita demum erit a^{-2} quotiens, qui oritur, dividendo $a^{-3} : 2$ per $a^1 : 2$; quandoquidem 1 : 2, subductus ex $\rightarrow 3 : 2$, relinquit $\rightarrow 4 : 2$, sive $\rightarrow 2$.

785. Tercio, quantum ad formationem potestatum vulgarium, fiet ea, si exponens datae quantitatis toties accipiatur, quot sunt unitates in exponente potestatis, ad quam illa est elevanda. Ita quantitatis a^2 quadratum erit a^4 , cubus a^6 , & quadrato-quadratum a^8 ; nam ejus exponens 2, sumptus bis facit 4, sumptus ter facit 6, sumptus quater facit 8. Similiter quantitatis a^{-2} quadratum erit a^{-4} , cubus a^{-6} , & quadrato-quadratum a^{-8} ; quandoquidem, sumendo bis, ter, quater exponentem ejus $\rightarrow 2$, oriuntur numeri $\rightarrow 4$, $\rightarrow 6$, $\rightarrow 8$. Et ob eandem rationem erunt a^1 , $a^3 : 2$,

a^2 confimiles potestates quantitatis $a^1 : 2$; & a^{-1} , $a^{-2} : 2$, a^{-3} potestates cognomines quantitatis $a^{-1} : 2$.

786. Denique , quantum ad radicem extractionem , instituetur ea , si ex exponente datæ potestatis ea pars capiatur , quam denominat exponens radice extrahendæ . Ita quantitatis a^2 quadrata radix erit a^1 , radix cubica $a^{2/3}$, radix quadrato-quadrata $a^{1/2}$; nam sui exponentis 2 semissis est 1 , triens est $2/3$, quadrans est $1/2$. Similiter quantitatis a^{-2} radix quadrata erit a^{-1} , radix cubica $a^{-2/3}$, radix quadrato-quadrata $a^{-1/2}$; quandoquidem semissis , triens , quadrans sui exponentis — 2 sunt — 1 , — $2/3$, — $1/2$. Et ob eandem rationem erunt $a^1 : 4$, $a^1 : 6$, $a^1 : 8$ confimiles radices quantitatis $a^1 : 2$; & $a^{-1} : 4$, $a^{-1} : 6$, $a^{-1} : 8$ radices cognomines quantitatis $a^{-1} : 2$.

787. Pendent autem hæc omnia ex iis , quæ superius circa quatuor hæc operationes ostensa sunt . Nimirum , quod , ubi exponens unitatis est zero , tunc necesse est ; primo , ut summa exponentium multiplicandi , & multiplicatoris adæquet * exponentem producti ; secundo , ut exponens divisoris , subductus ab exponente dividendi , relinquat * exponentem quotientis ; tertio , ut duplum exponentis lateris adæquet * exponentem quadrati , triplum exponentem cubi , quadruplum exponentem quadrato-quadrati , atque ita deinceps ; & quarto demum , ut semissis exponentis alicujus quantitatis adæquet * exponentem suæ quadratæ radice , triens exponentem suæ radice cubicæ , quadrans exponentem suæ radice quadrato-quadratæ , atque ita in infinitum .

X 3 788.

788. Præterea, quum fractiones, per pote-
art. 762. states negativas, possint quodammodo * ad
 quantitates integras revocari; nolo hic reticere,
 hujusmodi artificio posse calculum fractionum
 iisdem omnino regulis perfici, quibus quantita-
 tum integrarum calculus instituitur. Ita, si
 oporteat multiplicare $a^2 : b$ per $c^2 : d$; revoco
 primum fractiones istas $a^2 : b$, $c^2 : d$ ad quantita-
 tes integras $a^2 b^{-1}$, $c^2 d^{-1}$; & fiet productum
 quæsitum $a^2 b^{-1} c^2 d^{-1}$, quod reducitur ad
 $a^2 c^2 : bd$. Similiter, si dividere oporteat $a^3 : c$
 per $b^2 : d$; exprimo prius fractiones istas $a^3 : c$,
 $b^2 : d$ ad instar quantitatuum integrarum in hunc
 modum $a^3 c^{-1}$, $b^2 d^{-1}$; & fiet quotiens quæ-
 situs $a^3 c^{-1} : b^2 d^{-1}$, qui perinde valet, ac
 $a^3 d : b^2 c$.

789. Denique, considerando quantitates
 radicales, velut potestates imperfectas, facillime
art. 154. intelligitur veritas regulæ, superius * traditæ,
 pro reducendis radicalibus ad eandem denomi-
 nationem. Jam enim radicales duæ $\sqrt{a}$, & $\sqrt{b}$,
 reductæ ope ejus regulæ ad idem nomen, fiunt
 $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$. Plane vero, quum $\sqrt{a}$ idem sit,
 ac $a^1 : 2$, & $\sqrt{b}$ idem, ac $b^1 : 2$; pro earum radi-
 calium reductione non aliud fieri debet, quam
 revocare ad eandem denominationem fractiones
 duas $1 : 2$, & $1 : 3$, quæ sunt earundem expo-
 nentes. Unde, quia fractiones duæ $1 : 2$, & $1 : 3$,
 reductæ ad idem nomen, evadunt $3 : 6$, & $2 : 6$;
 erunt $a^1 : 2$, & $b^1 : 3$ idem ac $a^3 : 6$, & $b^2 : 6$;
 hoc est idem, ac $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$.

CAPUT II.

Potestatum vulgarium formula generalis.

790. **E**X iis, quæ de formatione potestatum vulgatum superius dicta sunt, perspicuum est, quantitatem, ex duabus partibus compositam, non una, eademque regula ad potestatem quamvis evehi posse; sed alia quidem opus esse, pro elevanda ea ad quadratum; alia, pro elevanda ad cubum; & alia demum, pro elevanda eadem quantitate ad potestatem aliam superiorem. Itaque, quum pro singulis potestatibus totidem regulæ diversæ requirantur; erit equidem compendii, numquam satis deprædicandi, si quæ possit formula generalis excogitari, quæ ad omnem quamcumque potestatem se extendat.

791. Et quidem, ubi quantitas est simplex, facile quidem erit, una eademque expressione omnes ejus potestates exhibere. Ut enim quilibet numerus potest generaliter, ac indefinite representari littera m ; sic, scribendo a^m , jam omnes potestates exhibentur, ad quas evehi potest quantitas simplex a . Ponatur namque m æqualis unitati; & fiet a^1 idem, ac a^1 . Ponatur deinde m æqualis binario; & a^2 perinde valebit, ac a^2 . Atque ita quoque, si pro m successive scribantur 3, 4, 5, &c.; fient a^3 , a^4 , a^5 , &c. valores ipsius a^m .

792. Sed non perinde res est, quum quantitas duabus ex partibus constat. Nam, si ad de-

Y 4

signan-

signandam quamcumque potestatem quantitatis binomiæ $a + b$, scribi velit $(a + b)^m$; generali ista expressione optatum finem nequaquam assequemur. Ponatur enim, exempli gratia, exponens generalis m æqualis binario. Et licet $(a + b)^m$ evadat in hoc casu $(a + b)^2$; non tamen cognitæ fiunt, ac exploratæ partes, ex quibus componitur quadratum ipsius $a + b$. Itaque formula generalis, relate ad quantitatem bimembrem $a + b$, talis sit oportet, ut ope ejus partes cujuscumque suæ potestatis statim habeantur.

1. Terminorum cujusque potestatis generalis expressio.

793. **Q**uum quantitas est bimembris, quæcumque ejus potestas non modo plures partes, seu terminos involvit, sed quisque horum terminorum suum habet coefficientem. Unde, pro conficienda formula generali, quæ ad omnes omnino potestates se extendat, duo quidem erunt nobis ostendenda. Primum, qua ratione designari debeant generaliter, ac indefinite termini cujuscumque potestatis ex quantitate bimembri. Deinde, quo pacto generaliter, ac indefinite sint designandi coefficientes eorum terminorum.

794. Sane in formatione potestatum, quod potissimum difficultatem facit, est inventio coefficientium, quibus affiendi sunt termini ipsarum potestatum. Nam, quantum ad ipsos terminos, habentur ii nullo negotio, si constituantur duæ progressionēs geometricæ, quarum

una

una a quæſita primæ partis poteſtate deſcendat per poteſtates inferiores uſque ad unitatem, altera viciffim ab unitate aſcendat per omnes inferiores poteſtates uſque ad quæſitam poteſtatem partis alterius; & termini unius progreſſionis ordine multiplicentur per terminos alterius.

795. Ut ſi velim, exempli gratia, invenire terminos cubi ex quantitate binomia $a + b$, conſtituo primum duas progreſſiones geometricas; quarum una deſcendat a cubo prioris partis a per poteſtates inferiores uſque ad unitatem; altera viciffim aſcendat ab unitate ſimiliter per poteſtates inferiores uſque ad cubum partis alterius b . Jamque harum progreſſionum prior erit $a^3, a^2, a, 1$; altera $1, b, b^2, b^3$. Multiplico deinde terminos unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & quantitates, inde ortæ, a^3, a^2b, ab^2, b^3 erunt termini cubi quæſiti.

796. Similiter, ſi inveniendi ſint termini, quos continet quadrato-cubus, ſeu quinta poteſtas ejuſdem quantitatis binomiæ $a + b$, formentur prius duæ progreſſiones geometricæ; quarum una a quadrato-cubo ipſius a deſcendat per poteſtates inferiores uſque ad unitatem, ita, ut ſit $a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1$; altera viciffim ab unitate per poteſtates inferiores aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b , ita, ut ſit $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5$. Multiplicentur deinde termini unius progreſſionis ordine per terminos alterius; & quæ inde oriuntur quantitates $a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$, erunt termini quadrato-cubi quæſiti.

797. Eadem ratione, ſi quæſtio ſit de inveniendis terminis ſeptimæ poteſtatis ejuſdem
quan-

quantitatis bimembris $a + b$, fiant duæ progressionēs geometricæ; quarum una a septima potestate prioris partis a descendat per potestates inferiores usque ad unitatem; altera vicissim ab unitate per potestates inferiores ascendat usque ad septimam potestatem partis alterius b . Istarum ergo progressionum prior erit $a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a$, 13 posterior $1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7$. Multiplicentur postea termini unius progressionis ordine per terminos alterius; & fient termini quæsitæ potestatis quantitates, quæ inde producuntur, $a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7$.

798. Jam ex hac methodo determinandi terminos cujuscunque potestatis ex radice binomia colligere licet primo, in unaquaque potestate terminorum numerum designari ab exponente ipsius potestatis, aucto unitate una. Nam habentur * termini cujuscunque potestatis, multiplicando per se invicem terminos duarum progressionum geometricarum; quarum una a quæsita potestate partis prioris descendat per omnes potestates inferiores usque ad unitatem; altera per contrarium ab unitate ascendat per omnes potestates inferiores usque ad quæsitam potestatem partis alterius. Itaque, quia numerus terminorum in utraque progressionē designatur ab exponente potestatis, aucto unitate una; designabit idem exponens, unitate auctus, numerum terminorum quæsitæ potestatis.

799. Colligere licet secundo, in terminis extremis cujuscunque potestatis ex radice binomia contineri tantummodo potestates partium ejusdem ordinis cum illa, de qua agitur in terminis

autem intermediis contineri potestates omnes inferiores earundem partium, per se mutuo inverso ordine multiplicatas. Nam ex duabus illis progressionibus geometricis, quarum ope termini cujusque potestatis inveniuntur, una quidem a quæsita primæ partis potestate descendit ad unitatem usque per potestates omnes inferiores; altera vicissim ab unitate per easdem potestates inferiores ascendit usque ad quæsitam potestatem partis alterius. Unde quæsitæ potestates partium multiplicantur per unitatem, earundem vero potestates inferiores multiplicantur per se mutuo ordine inverso.

800. Colligere licet demum, terminos cujusque potestatis ex radice aliqua bimembri progressionem geometricam constituere, progredientem in ea ratione, quam habent ipsæ radicis partes inter se. Notum est enim, quod si termini unius progressionis geometricæ multiplicentur per terminos alterius progressionis geometricæ, producta progressionem aliam similiter geometricam constituunt. Itaque, quia ad inveniendos terminos cujuscumque potestatis ex radice aliqua binomia, multiplicandi sunt termini unius progressionis geometricæ per terminos alterius, omnino necesse est, ut ipsi ejus potestatis termini progressionem aliam pariter geometricam componant. Art. 794.

801. Sed ex eadem methodo colligere quoque licet, qua ratione termini cujusque potestatis ex radice bimembri generaliter, ac indefinito possint designari. Oporteat enim, invenire terminos potestatis ex $a + b$, cujus exponentis generaliter, ac indefinitè sit numerus m . Consti-

tuens

tuendæ sunt ergo duæ progressionēs geometri-
cæ; quarum una ab ea potestate partis a , quam
designat numerus m , descendat per potestates
omnes inferiores usque ad unitatem; altera vi-
cissim ab unitate per potestates omnes inferiores
ascendat usque ad eam potestatem partis alterius
 b , quæ habet pro suo exponente eundem nume-
rum m . Unde istarum progressionum una erit
 $a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4}, \&c.$ altera
 $1, b, b^2, b^3, b^4, \&c.$ Multiplicentur postea ter-
mini unius progressionis ordine per terminos
alterius; & fient termini quæsi quantitates,
quæ inde oriuntur, $a^m, a^{m-1}b, a^{m-2}b^2, a^{m-3}b^3,$
 $a^{m-4}b^4, \&c.$

802. Verum quidem est, quod termini isti
videntur esse numero infiniti; attamen, quum ex-
ponens generalis m determinatur, multitudo eo-
rum evadit finita. Eo namque determinato, necesse
est tandem pervenire ad terminum aliquem, in
quo exponens potestatis, ad quam ascendit pars
prior radice a , est zero, seu nihil. Plane vero,
quum ad hujusmodi terminum perventum est,
non amplius progredi licet; quia ea potestas tan-
tundem valet, ac unitas. Ita, si ponamus exponen-
tem generalem m binarium repræsentare, prior
terminus erit a^2 , secundus ab , tertius autem b^2 ;
nam a^{m-2} , quum idem sit, ac a^0 , non differt
ab unitate: proindeque termini quæsi erunt a^2 ,
 ab, b^2 . Similiter, si ponatur m æqualis ternario,
prior terminus erit a^3 , secundus a^2b , tertius
 ab^2 , & quartus b^3 ; quandoquidem a^{m-3} , quum
sit idem, ac a^0 , tantundem valet, ac unitas: &
propterea quæsi termini erunt a^3, a^2b, ab^2, b^3 .

803. Cæterum, quod quantitas elevata ad
po.

potestatem, cujus exponens sit zero, tantundem
 valet, ac unitas, id liquet ex eo, quod superius ^{*art. 756.}
 ostensum est: scilicet, quod, unitate inter potesta-
 tes collocata, non alius esse debet ejus exponens,
 quam zero, seu nihil. Idem autem licebit etiam
 exinde deducere, quod munus exponentis sit de- ^{*art. 76.}
 signare, quoties quantitas poni debet per mul-
 tiplicationem in eo termino, in quo reperitur.
 Hinc enim fit, ut quoties habetur a^0 , sive $1a^0$,
 quantitas a nullies in hoc termino poni debeat;
 proindeque $1a^0$ idem erit, ac 1 . Ex quo facile
 modo erit intelligere, quod licet idem sit valor,
 tam ipsius a^0 , quam ipsius b^0 , non hinc tamen
 colligi potest, quantitates a , & b æquales esse
 inter se; quandoquidem hujusmodi quantitates
 apparenter tantum in iis terminis continentur.

*II. Tabula, terminorum cujusque potestatis
 coefficientes exhibentis, constitutio.*

804. **Q**uo pacto termini cujuscunque
 potestatis ex radice aliqua binó-
 mia possint generaliter, ac indefinite designari;
 jam quidem nobis ^{*innotuit.} Videndum est mo-
 do, qua ratione coefficientes eorundem termino- ^{*art. 801.}
 rum eadem universalitate exprimi queant. Hunc
 in finem exhibeantur prius in tabula aliqua or-
 dine coefficientes illi, prout ad terminos cujusq;
 potestatis referuntur; & sedulo perpendamus,
 num aliqua iis insit proprietas generalis, qua
 mediante generaliter etiam eos exprimere liceat.

805. Itaque in columnis horizontalibus se-
 quentis tabulæ collocentur ordine coefficientes
 terminorum cujusque potestatis: nimirum in
 ,pri-

prima coefficientes terminorum potestatis primæ 1, 1; in secunda coefficientes terminorum potestatis secundæ 1, 2, 1; in tertia coefficientes terminorum potestatis tertiæ 1, 3, 3, 1; in quarta coefficientes terminorum potestatis quartæ 1, 4, 6, 4, 1; atque ita deinceps. Jamque in prima columnarum verticalium ejusdem tabulæ erit coefficientis primi termini cujusque potestatis; in secunda coefficientis termini secundi; in tertia coefficientis termini tertii; atque ita in infinitum.

1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0	0
1	6	15	20	15	6	1	0	0
1	7	21	35	35	21	7	1	0
1	8	28	56	70	56	28	8	1

806. Hinc tabulæ hujus structura talis erit, ut numeri, existentes in quacumque columna horizontali, designent ordine coefficientes terminorum ejus potestatis, quam columnæ locus

cus ostendit; numeri vero, existentes in quaque columna verticali designent ordine coefficients, qui in singulis potestatibus ad eum terminum referuntur, quem locus indicat ejusdem columnæ. Unde eo res redit, ut inquiramus, an numeri cujusque columnæ verticalis aliquam habeant proprietatem, cujus ope possint generaliter, ac indefinite designari.

807. Et quidem in tabula ista termini prioris columnæ verticalis constituunt seriem unitatum, termini secundæ columnæ constituunt seriem numerorum naturalium, ac demum termini aliarum columnarum tales sunt, ut quilibet ex iis in quaque columna æquetur summæ omnium superiorum columnæ præcedentis. Unde, sicuti, ope hujus proprietatis, tabula ipsa nullo negotio potest in infinitum continuari; ita exinde colligere licet, quod, ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quavis aliarum columnarum, satis est, in unum addere omnes terminos superiores, qui sunt in columna præcedente.

808. Sed exinde colligi quoque potest, numeros, qui sunt in aliis columnis verticalibus ejusdem tabulæ, esse numeros figuratos primi generis. Jam enim in iis columnis numerus quisque oritur ex collectione numerorum superiorum columnæ præcedentis. Itaque, quia in secunda columna adsunt numeri naturales, qui ex continua unitatum collectione oriuntur; omnino necesse est, ut in tertia columna reperiantur numeri, constituentes in primo genere primum ordinem figuratorum; in quarta numeri, constituentes in eodem genere secundum ordinem

*art. 577.

352 ALGEBRÆ ELEMENTORUM
nem figuratorum ; atque ita deinceps.

809. Neque vero difficile erit ostendere , constitutionem tabulæ prædictæ talem esse oportere , qualem modo descripsimus . Jam enim ex generis potestatum vulgarium , superius tradita , manifestum est , unamquamque harum potestatum oriri , multiplicando potestatem proxime præcedentem per radicem , ad quam refertur . Itaque omnino necesse est , ut si coefficientes terminorum alicujus potestatis , quibus cyphra sit præfixa , addantur ordine cum iisdem coefficientibus , quibus eadem cyphra sit postposita , oriantur coefficientes terminorum potestatis proxime sequentis .

810. Ita quadratum , seu secunda potestas radicis binomiæ $a + b$ oritur , multiplicando primam ejus potestatem $1a + 1b$ per radicem ipsam $a + b$. Unde , si fiat multiplicatio , & producta partialia homogenea , hoc est iisdem litteris notata , in eodem loco scribantur ; abunde constabit , coefficientes terminorum quadrati 1 , 2 , 1 oriri , addendo coefficientes primæ potestatis , zero habentes in principio , 0 , 1 , 1 ordine cum iisdem coefficientibus , zero habentibus in fine , 1 , 1 , 0 .

811. Similiter cubus , seu tertia potestas radicis binomiæ $a + b$ producitur , multiplicando quadratum $1a^2 + 2ab + 1b^2$ per radicem ipsam $a + b$. Quare , si in multiplicatione peragenda scribantur in iisdem locis producta illa partialia , quæ homogenea sunt ; liquido patebit , coefficientes terminorum cubi 1 , 3 , 3 , 1 prodire , addendo coefficientes quadrati , zero habentes in principio , 0 , 1 , 2 , 1 ordine cum iisdem coefficientibus .

tibus, cyphram habentibus in fine 1, 2, 1, 0.

812. Id vero quum ita sit, liquet, coefficientes terminorum cujusque potestatis ex radice binomia haberi, si præfixa, ac postposita cyphra iis coefficientibus, qui referuntur ad terminos potestatis præcedentis, addatur quisque eorum cum suo subsequente. Nam hac ratione, non aliud efficitur, quam coefficientes istos, cyphram habentes in principio, addere cum iisdem coefficientibus, cyphram habentibus in fine.

813. Ut, quoniam coefficientes terminorum secundæ potestatis, habentes cyphram, tam in principio, quam in fine, sunt 0, 1, 2, 1, 0; sient coefficientes terminorum tertix potestatis $0+1$, $1+2$, $2+1$, $1+0$; hoc est 1, 3, 3, 1. Et similiter, quia isti coefficientes, quum cyphram, utrinque habent, sunt 0, 1, 3, 3, 1, 0; erunt coefficientes terminorum quartæ potestatis $0+1$, $1+3$, $3+3$, $3+1$, $1+0$; hoc est 1, 4, 6, 4, 1.

814. Hinc, siquidem tabula coefficientium construatur in hunc modum, proprietas ejus hæc erit, ut quilibet terminus cujusque columnæ verticalis adæquet, & sibi imminens terminum, & qui ad dexteram hujus reperitur. Unde, quia in prima columna verticali adest series unitatum; omnino necesse est, ut in secunda columna reperiantur numeri naturales, qui per continuam unitatis additionem oriuntur.

815. Jam aliæ columnæ verticales similiter ab unitate suum sumunt initium; sed unaquæque ex iis est uno termino depressior sua præcedente. Quare in iisdem columnis non poterit quisque terminus adæquare, & terminum sibi imminens, & eum, qui ad dexteram hujus reperitur,

Tom. I.

Z

nisi

nisi adæquet eodem tempore terminos omnes superiores columnæ præcedentis: proindeque termini cujusque aliarum columnarum orientur ex collectione continua terminorum superiorum, qui in præcedente columna reperiuntur.

III. Coefficientiam terminorum cujusque potestatis expressio generalis.

816. **C**ognita constitutione tabulæ, terminorum cujusque potestatis coefficientes exhibentis; videamus modo, quæ ratione iidem coefficientes possint generaliter, ac indefinite repræsentari. Et quidem, si loca vacua columnarum verticalium cyphris repleantur, habebit in principio unam cyphram tertia columna, duas cyphras quarta, tres cyphras quinta, atque ita deinceps. Unde, si in singulis columnis capiantur tot termini, quot designat numerus m ; multitudo terminorum significantium erit m , tam in prima, quam in secunda columna; sed erit $m - 1$ in tertia, $m - 2$ in quarta, $m - 3$ in quinta, atque ita in infinitum.

817. Id vero quum ita sit, facile erit, designare generaliter, ac indefinite terminum quemcumque cujusque columnæ verticalis. Nam, quantum ad primam columnam, quia in ea habetur series unitatum, quæ nullam habet cyphram in principio; designabit ipsa unitas terminum quemcumque ejus columnæ. Quantum vero ad secundam, quia in ea existit series numerorum naturalium, cui similiter nulla cyphra est præfixa; si proponatur inveniendus terminus, qui occupet locum, designatum a numero m , exhi-

exhibebit idem numerus m terminum, quem oportet invenire,

818. Quantum autem ad alias columnas, neque etiam difficile erit, in iis terminum quemcumque generaliter, ac indefinite designare. Quum enim in columnis illis contineantur * ordine ^{*art. 303.} series numerorum figuratorum primi generis; satis erit, in unum colligere tot eorum numerorum, ex quorum collectione ii generari intelliguntur, quotus est locus, quem in columna occupat terminus inveniendus, exclusis cyphris initialibus.

819. Ita in tertia columna existunt numeri, qui in primo genere primum ordinem figuratorum constituunt, iidemque unam cyphram habent in principio. Quare, si in ea oporteat invenire terminum, qui occupet locum, designatum a numero m ; satis erit, in unum addere tot numeros naturales, quot designat $m - 1$. Atque ita quoque in quarta columna habentur numeri, constituentes in eodem primo genere secundum ordinem figuratorum, iisque duæ cyphræ sunt præfixæ. Itaque, si inveniendus sit in ea terminus, cujus locum referat numerus m ; addendi erunt in unum tot figurati primi ordinis, quot designat $m - 2$.

820. Jam vidimus supra *, summam quot- ^{*art. 593.} cumque numerorum figuratorum primi generis reperiri; constituendo duas progressionem arithmeticas, ambas ascendentes per unitatis incrementum, unam quidem a multitudine numerorum, in unam summam colligendorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot designat exponens ordinis numerorum, duabus

Z 2 uni-

unitatibus auctus ; & dividendo productum ex terminis primæ progressionis per productum ex terminis secundæ.

821. Itaque , si inveniendus sit terminus , qui in tertia columna verticali locum occupet , designatum ab m ; progressionum constituendarum una erit $m - 1 , m$, altera $1 , 2$: proindeque , ostendentibus punctis , inter progressionum terminos positis , mutuam eorum multiplicationem , erit $(m . m - 1) : (1 . 2)$ terminus quæsitus . Sed , si consimilis terminus inveniendus sit in quarta columna verticali ; ex progressionibus constituendis una erit $m - 2 , m - 1 , m$, altera $1 , 2 , 3$: & propterea quæsitus terminus erit $(m . m - 1 . m - 2) : (1 . 2 . 3)$.

822. Hinc facile modo erit , coefficientes terminorum cujusque potestatis generaliter , ac indefinite designare . Nam numeri , existentes in quaque columna verticali , designant ordine coefficients , qui in singulis potestatibus ad eum terminum referuntur , quem indicat locus ejusdem columnæ . Quare illæ eadem quantitates , quæ numeros columnarum verticalium generaliter , ac indefinite designant , designabunt quoque in unaquaque potestate generaliter , ac indefinite coefficients suorum terminorum.

823. Ut ergo relate ad primum terminum coefficientis pro qualibet potestate debet esse unitas ; ita generalis expressio coefficientis erit m , sive $m : 1$ relate ad terminum secundum , $(m . m - 1) : (1 . 2)$ relate ad terminum tertium , $(m . m - 1 . m - 2) : (1 . 2 . 3)$ relate ad terminum quartum , atque ita deinceps . Nam istæ eadem quantitates designant generaliter , ac in-
de-

definite numeros earum columnarum verticalium, quæ primam excipiunt.

824. Quemadmodum autem multitudo terminorum cujusque potestatis evadit finita, ubi exponens generalis m determinatur; ita, determinato eodem exponente, multitudo eorum coefficientium tanta prodit, quotus est numerus terminorum illius potestatis, ad quam exponens ille refertur. Qua ratione, si exponens generalis m sit 2, non plures, quam tres coefficientes habebuntur 1, 2, 1. Pariterque, si idem exponens m sit 3, invenientur quatuor tantum coefficientes 1, 3, 3, 1.

825. Hujus rei ratio exinde est repetenda, quod omnis quantitas, per zero multiplicata, fit etiam zero. Nam, ubi m est 2, valet $m - 2$ tantundem, ac zero: proindeque negligi debent omnes illi coefficientes, in quibus reperitur $m - 2$. Atque ita quoque, quum m est 3, nulla ratio haberi debet eorum coefficientium, in quibus extat $m - 3$; quandoquidem $m - 3$ perinde valet, ac zero. Unde liquido patet, pro qualibet potestate tantam fieri coefficientium multitudinem, quotus est numerus suorum terminorum.

IV. Potestatum formula generalis exhibetur.

826. **E**Xpressis generaliter, ac indefinitè, tum terminis cujusque potestatis ex radice binomia, cum coefficientibus, qui ad terminos illos referuntur; haud difficile modo erit, ipsam potestatum formulam generalem exhibere. Afficiantur etenim ordine singu-

Z 3 li

li termini propriis suis coefficientibus . Et siquidem iidem termini iis signis inter se mutuo conjungantur , quæ multiplicationis exigunt regulæ ; jam quæsitæ formula orietur.

827. Sint ergo a , & b partes radices binomiæ. Et elevanda sit radix ista ad eam potestatem, cujus exponens est numerus m . Per ea itaque,
art. 301. quæ superius * ostensa sunt, erit a^m primus terminus quæsitæ potestatis, $a^{m-1}b$ terminus secundus, $a^{m-2}b^2$ terminus tertius, $a^{m-3}b^3$ terminus quartus, atque ita deinceps . Et, ut vidi-
art. 323 mus paulo ante *, erit 1 coefficientis primi termini, $m : 1$ coefficientis secundi termini, $(m . m - 1) :$
 (1 . 2) coefficientis termini tertii, $(m . m - 1 . m - 2) :$
 (1 . 2 . 3) coefficientis termini quarti, atque ita in infinitum.

828. Afficiantur modo singuli termini suis propriis coefficientibus . Et fiet quæsitæ potestatis $1a^m$ pars prima, $ma^{m-1}b : 1$ pars secunda, $(m . m - 1) a^{m-2}b^2 : (1 . 2)$ pars tertia, $(m . m - 1 . m - 2) a^{m-3}b^3 : (1 . 2 . 3)$ pars quarta, sicque deinceps . Unde, non aliud superest, quam ut partes istæ iis signis simul connectantur, quæ multiplicationis exigunt opus, hoc est, quæ requirunt producta ex inferioribus potestatibus ipsarum partium a ; & b .

829. Hunc in finem meminisse oportet eo-
art. 311. rum, quæ superius * dicta sunt : nimirum potestates pares esse semper positivas, siue positivæ sint radices ipsarum, siue negativæ; sed non item potestates impares : ut quæ esse debent ejusdem generis cum radicibus ipsis, ad quas referuntur; hoc est positivæ, quum radices sunt positivæ; & negativæ, quum per contrarium negativæ sunt ipsæ radices.

830. Hinc itaque liquet, partes omnes formulæ generalis esse simul conjungendas signo $+$, quum radix binomia, ad quam refertur, est $a + b$. Sed, si eadem radix binomia fuerit $a - b$; tunc evidens est, mutanda esse signa iis partibus, in quibus quantitatis negativæ $-b$ potestates impares occurrunt; cujusmodi profecto sunt et omnes, quæ locis paribus positæ reperiuntur.

831. Si ergo radicis binomiæ $a + b$ quærat^r ea potestas, quam designat generaliter, ad indefinite numerus m ; illa erit $1a^m + ma^{m-1}b : 1 + (m \cdot m - 1) a^{m-2}b^2 : (1 \cdot 2) + (m \cdot m - 1 \cdot m - 2) a^{m-3}b^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3) + \&c.$ Quod si vero quærat^rur potestas non dissimilis radicis binomiæ $a - b$; ea fiet $1a^m - ma^{m-1}b : 1 - (m \cdot m - 1) a^{m-2}b^2 : (1 \cdot 2) - (m \cdot m - 1 \cdot m - 2) a^{m-3}b^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3) - \&c.$ Sed utroque casu poterunt partes quæsitæ potestatis eleganter contrahi in hunc modum.

832. Vocetur c quotiens, qui oritur, dividendo secundam partem b per primam a . Et quoniam quotiens, in multiplicatorem ductus, restituit dividendum, erit ac æqualis ipsi b . Ponatur deinde in singulis partibus ac loco ipsius b ; & fiet $ma^m c : 1$ pars secunda, $(m \cdot m - 1) a^{m-2} c^2 : (1 \cdot 2)$ pars tertia, $(m \cdot m - 1 \cdot m - 2) a^{m-3} c^3 : (1 \cdot 2 \cdot 3)$ pars quarta, atque ita deinceps.

833. Sed singulæ istæ partes possunt ulterius contrahi. Quum enim pars prima sit $1a^m$, & pars secunda $ma^m c : 1$; liquet partem primam esse ad partem secundam, ut 1 ad $mc : 1$. Quare, si pars prima dicatur d , fiet pars secunda $md : 1$. Et similiter, quia pars secunda est $ma^m c : 1$, & pars tertia est $(m \cdot m - 1) a^{m-2} c^2 : (1 \cdot 2)$; liquet,

2 4

paræ

partem secundam esse ad partem tertiam, ut est 1 ad $(m-1)c:2$. Unde, si pars secunda vocetur e , fiet pars tertia $(m-1)ce:2$.

834. Eadem ratione, quoniam pars tertia est $(m.m-1)a^m c^2:(1.2)$, itemq; pars quarta est $(m.m-1.m-2)a^m c^3:(1.2.3)$; liquet, partem tertiam esse ad partem quartam, ut est 1 ad $(m-2)c:3$. Quocirca, si pars tertia dicatur f , fiet pars quarta $(m-2)cf:3$. Atque ita quoque, quia pars quarta est $(m.m-1.m-2)a^m c^3:(1.2.3.)$, & pars quinta esse debet $(m.m-1.m-2.m-3)a^m c^4:(1.2.3.4)$; liquet, partem quartam esse ad partem quintam, ut est 1 ad $(m-3)c:4$. Quare, si pars quarta dicatur g , fiet pars quinta $(m-3)cg:4$.

835. Si ergo radix binomia, elevanda ad potestatem, cujus exponens est m , sit $a+ac$; erit potestas quæsitæ $1a^m+mdc:1+(m-1)ec:2+(m-2)fc:3+(m-3)gc:4+\&c$. Quod si vero sit $a-ac$, eadem potestas erit $1a^m-mdc:1+(m-1)ec:2-(m-2)fc:3+(m-3)gc:4\&c$. Verum in utroque casu illud observandum est, quod, sicuti in radice binomia c refert quotientem, qui oritur, dividendo secundam partem per primam; ita in ipsa ejus radice potestate $d, e, f, g, \&c$. referunt ordine partes ipsius primam, secundam, tertiam, quartam, &c.

836. Patet autem, in utroque casu partes potestatis certa, ac præfinita lege in infinitum abire. Quum enim litteræ $d, e, f, g, \&c$. referant partes, quæ proxime præcedunt eas, in quibus litteræ illæ reperiuntur; & c sit quotiens, qui ori-

oritur, dividendo secundam partem radicis, per primam: liquet, unamquamque partem potestatis esse ad suam subsequenter in ratione composita ex prima parte radicis ad secundam, & ex numero, locum partis indicante, ad exponentem potestatis, auctum unitate una, & eodem numero diminutum.

V. Formula usus in conficiendis potestatibus ostenditur.

837. **E**Xhibita potestatum vulgarium formula generali, ostendamus modo usum ejus in casibus specialibus, & videamus, quo pacto, ea mediante, radix binomia ad quamcumque datam potestatem evehi possit. Id itaque obtinetur, scribendo prius in formula generali primam partem radicis binomiæ propositæ loco a ; quotientem, qui oritur, dividendo secundam partem per primam, loco c ; & exponentem quæsitæ potestatis loco m . Nam, si deinde loco ipsarum d , e , f , g , &c. valores sui reponantur, signis probe observatis, habebitur potestas quæsitæ.

838. Fieri autem debet hujusmodi substitutio usque donec ad eam partem formulæ generalis perventum fuerit, quæ evanescit, subrogando loco m valorem suum. Nam, quum pars ista in omnibus aliis, quæ ipsam excipiunt, reperiatur posita per multiplicationem; cæ quoque evanescent, & fient nihilo æquales. Unde haud quidem necesse est, ulterius progredi; sed sistendum in ea parte, quæ prima omnium evanescit.

839. Proponatur, exempli gratia, elevando
ad

ad quadratum, seu secundam potestatem radicis binomia $p + x$. Quoniam partes ejus sunt simul conjunctæ signo $+$, eligenda est formula generalis, quæ refertur ad $a + ac$, nimirum $1a^m + mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 + (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 + \&c.$; & scribendum est in ea p loco a , $x : p$ loco c , & 2 loco m .

840. Jam, hujusmodi substitutionibus, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $1p^2$, secunda $+ mdc : 1$ fiet $+ 2dx : 1p$, tertia $+(m - 1)ec : 2$ evadet $+ 1ex : 2p$, & quarta $+(m - 2)fc : 3$ evanescet. Quare in casu, de quo agitur, formula generalis mutabitur in istam $1p^2 + 2dx : 1p + 1ex : 2p$. Ponatur deinde $1p^2$ loco d , & $2dx : 1p$, sive etiam $2px$ loco e . Et fiet quadratum quæsitum $1p^2 + 2px + 1x^2$.

841. Oporteat, eandem radicem binomiam $p + x$ elevare ad cubum, seu tertiam potestatem. Assumatur rursus formula generalis, quæ refertur ad $a + ac$, nimirum $1a^m + mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 + (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 + \&c.$; & in ea scribatur quidem p loco a , & $x : p$ loco c , verum pro m substituatur numerus 3 , qui est exponens quæsitæ potestatis.

842. Hujusmodi ergo substitutionibus, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $1p^3$, secunda $+ mdc : 1$ evadet $+ 3dx : 1p$, tertia $+(m - 1)ec : 2$ prodibit $+ 2ex : 2p$, quarta $+(m - 2)fc : 3$ vertetur in $1fx : 3p$, & quinta demum evanescet. Quare in proposito exemplo formula generalis mutabitur in istam $1p^3 + 3dx : 1p + 2ex : 2p + 1fx : 3p$. Ponantur deinde loco d, e, f valores sui. Et fiet cubus quæsitus $1p^3 + 3p^2x + 3px^2 + 1x^3$.

843. Quod si autem elevanda sit ad quadratum,

tum, seu secundam potestatem radix binomia $p \rightarrow x$; tunc, ob partes ejus simul conjunctas signo $\rightarrow$, eligenda est formula generalis, quæ refertur ad $a \rightarrow ac$, nimirum $1a^m \rightarrow mdc : 1 + (m \rightarrow 1)ec : 2 - (m \rightarrow 2)fc : 3 + (m \rightarrow 3)gc : 4 - \&c.$; ac in ea scribendum est pariter p loco a , $x : p$ loco c , & 2 loco m .

844. Jam, per hasce substitutiones, prima pars formulæ generalis $1a^m$ fiet $2p^2$, secunda $\rightarrow mdc : 1$ fiet $\rightarrow 2dx : 1p$, tertia $+ (m \rightarrow 1)ec : 2$ evadet $1ex : 2p$, & quarta demum $\rightarrow (m \rightarrow 2)fc : 3$ evanescet. Quare in casu, de quo est questio, formula generalis mutabitur in istam $1p^2 \rightarrow 2dx : 1p + 1ex : 2p$. Ponatur deinde $1p^2$ loco d , & $2dx : 1p$, sive etiam $2px$ loco e . Et quadratum quæsitum erit $1p^2 \rightarrow 2px + 1x^2$.

845. Similiter, si radix binomia $p \rightarrow x$ ele- vanda sit ad cubum, seu tertiam potestatem, confugere rursus oportet ad formulam genera- lem, quæ refertur ad $a \rightarrow ac$, nimirum ad $a^m \rightarrow mdc : 1 + (m \rightarrow 1)ec : 2 - (m \rightarrow 2)fc : 3 + (m \rightarrow 3)gc : 4 - \&c.$ Et quamquam in ea scri- bendum sit adhuc p loco a , & $x : p$ loco c ; tamen loco m substitui debet numerus 3, qui est ter- tiæ potestatis exponens.

846. Fiant ergo substitutiones istæ, & for- mulæ generalis prima pars $1a^m$ fiet $1p^3$, secun- da $\rightarrow mdc : 1$ evadet $\rightarrow 3dx : 1p$, tertia $+ (m \rightarrow 1)ec : 2$ vertetur in $+ 2ex : 2p$, quarta $\rightarrow (m \rightarrow 2)fc : 3$ prodibit $\rightarrow 1fx : 3p$, & quinta de- mum $+ (m \rightarrow 3)gc : 4$ abibit in nihilum. Quæ- re in hoc alio casu formula generalis mutabitur in hanc aliam $1p^3 \rightarrow 3dx : 1p + 2ex : 2p \rightarrow 1fx : 3p$. Ponantur deinde loco d, e, f valores sui. Et erit
 $1p^3$

$1p^3 - 3p^2x + 3px^2 - 1x^3$ cubus, qui quaeritur.

847. Cæterum, ope earum formularum, ad quamcumque potestatem evehi poterit, non modo radix, quæ duabus partibus constat, verum etiam radix, quæ plures, quam duas, partes comprehendit: scilicet, si omnes partes priores, velut una, considerentur. Ita, si radix, ad potestatem quamvis elevanda, sit $p - q + x$, quæ ex tribus partibus componitur; considerandæ sunt priores duæ $p - q$ velut una, & scribendum est in formula generali $p - q$ loco a , & x : ($p - q$) loco c .

848. Quod ut liquido constet, proponatur elevanda radix $p - q + x$ ad quadratum. Jamque, si in formula generali, quæ refertur ad $a + ac$, scribatur $p - q$ loco a , x : ($p - q$) loco c , & 2 loco m ; pars ejus prima $1a^m$ fiet $1(p - q)^2$, pars secunda $+ mdc$: 1 evadet $+ 2dx$: 1 ($p - q$), pars tertia $+ (m - 1)cc$: 2 prodibit $1ex$: 2 ($p - q$), & pars quarta $+ (m - 2)fc$: 3 omnino evanescet. Quare ipsa formula generalis vertetur in istam $1(p - q)^2 + 2dx$: 1 ($p - q$) + $1ex$: 2 ($p - q$).

849. Et quoniam in casu isto valor ipsius a est $1(p - q)^2$; erit $+ 2dx$: 1 ($p - q$) idem, ac $+ 2x(p - q)^2$: 1 ($p - q$ five $+ 2x(p - q)$); & $+ 1ex$: 2 ($p - q$) idem, ac $+ 2x^2(p - q)$: 2 ($p - q$), five $1x^2$. Unde quadratum ex $p - q + x$ erit $1(p - q)^2 + 2x(p - q) + 1x^2$. Est autem $(p - q)^2$ idem, ac $+ 1p^2 - 2pq + 1q^2$; & $+ 2x(p - q)$ idem, ac $2px - 2qx$. Quare quadratum quaesitum erit $1p^2 - 2pq + 1q^2 + 2px - 2qx + 1x^2$.

850. Elevanda sit quoque eadem radix $p - q + x$ ad cubum, seu tertiam potestatem. Scribatur rursus in formula generali, quæ refertur ad $a + ac$, $p - q$ loco a , & $x : (p - q)$ loco c ; sed loco m ponatur numerus 3. Vertetur ergo formula generalis in istam $1(p - q)^3 + 3dx : 1(p - q)^2 + 2ex : 2(p - q) + 1fx : 3(p - q)$; adeoque, positis loco d, e, f valoribus suis, fiet cubus quæsitus $1(p - q)^3 + 3x(p - q)^2 + 3x^2(p - q) + 1x^3$, hoc est $1p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - 1q^3 + 3p^2x - 6pqx + 3q^2x + 3px^2 - 3qx^2 + 1x^3$.

851. Patet autem, non posse fieri potestates ex radicibus, quæ plures habent partes, quam duas, nisi prius innotuerit, qua ratione fiant ex radicibus, quæ partes continent, una pauciores. Ita nequit fieri quadratum ex $p - q + x$, nisi antea constiterit, quo pacto illud fiat ex $p - q$. Et similiter, ut formetur cubus ex $p - q + x$, scire prius oportet, qua ratione fiat, tam quadratum, quam cubus ex $p - q$. Sed, totum obtineri possit eodem tempore per easdem illas formulas generales; liquet abunde.

CAPUT III.

Usus formulæ præcedentis in conscribendis serieribus infinitis.

852. **Q**Uamquam formula generalis, præcedenti capite exhibita, pro illis tantum potestatibus constructa videatur, quæ vulgares sunt, & dicuntur perfectæ positivæ.

eadem tamen usui etiam nobis esse potest, pro aliis potestatum speciebus, quas superius consideravimus: adeo, ut sicuti expressio ista a^m potis est nobis exhibere omnes omnino potestates ipsius a , sive sint perfectæ, sive imperfectæ, sive positivæ, sive negativæ; sic pariter in formula illa generali reperire licebit quamcumque potestatem radice binomiæ, ad quam ea refertur.

853. Posse autem exhiberi per a^m omnes potestates ipsius a ; id sane nullam difficultatem facit. Ut enim in ea expressione exponens generalis m nihil certi, ac determinati significat; ita per eum omnes quoscumque numeros, sive positivos, sive negativos, sive integros, sive fractos, representare fas erit. Unde, sicuti, quum pro m scribitur 2, fit a^m idem, ac a^2 ; ita, scribendo $\text{---} 2$ pro m , valebit a^m idem, ac a^{-2} . Et ad eundem modum, si pro m ponatur, vel 1:2, vel $\text{---} 1:2$; fiet a^m , vel $a^{1:2}$, vel $a^{-1:2}$.

854. Mirum vero censei debet, quod in formula illa generali omnes omnino potestates contineantur radice binomiæ, ad quam ea refertur. Nam, etsi exponens m etiam in illiusmodi formula nihil certi, ac determinati significet; attamen, attenta constructione ipsius formulæ, videtur, non alios numeros loco ejus exponentis scribi posse, quam qui sunt integri simul, & positivi. Asserti ergo veritate exemplis prius comprobata, unde ejus ratio sit repetenda, paucis deinceps ostendemus.

855. Ex eo autem, quod allata formula generalis usui nobis esse potest, non modo pro potestatibus vulgaribus, verum etiam pro aliis omnibus, quas superius consideravimus; poterunt

runt ope ejus nullo negotio fieri, tam series infinitæ, quæ oriuntur a divisione, quam quæ ab extractione radicum suam trahunt originem. Unde, sicuti partes ejus formulæ certo, ac constanti ordine in infinitum * progrediuntur; sic & ^{art. 336.} termini utriusque generis serierum, non vaga, ac indeterminata quadam ratione, sed certa, ac constanti lege in infinitum abibunt.

1. Usus formulæ pro seriibus, quæ oriuntur a divisione,

856. **Q**UUM radix aliqua binomia elevanda est ad potestatem quamvis perfectam positivam, vidimus supra *, non ^{art. 337.} aliud fieri debere, quam scribere in formula generali pro a primam partem radice, pro c quotientem, qui oritur, dividendo secundam partem per primam, pro m exponentem quæsitæ potestatis, & pro $d, e, f, g, \&c.$ valores suos. Jam, si hoc idem fiat, quum eadem radix binomia elevanda est ad potestatem aliquam perfectam negativam; adhuc optata potestas obtinebitur.

857. Oporteat namque, exempli gratia, radicem binomiam $p + x$ evehere ad potestatem, cujus exponens sit $m - 1$. Capiatur formula generalis $1a^m + mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 + (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 + \&c.$, quæ refertur ad $a + ac$; & in ea scribatur p pro a , x pro c , & $m - 1$ pro m . Mutabitur ergo, substitutionibus hisce, generalis illa formula in hanc aliam $1p^{m-1} - 1dx : 1p^{m-2} - 2cx : 2p^{m-3} - 3fx : 3p^{m-4} - 4gx : 4p^{m-5} - \&c.$, sive etiam $1 : p - dx : p - ex : p - fx : p - gx : p - \&c.$ Unde, positis loco $d, e,$

d, e, f, g , &c. valoribus suis, signis probe observatis, fiet potestas quæsitæ $1 : p \rightarrow x : p^2 + x^2 : p^3 \rightarrow x^3 : p^4 + x^4 : p^5 \rightarrow$ &c.

858. Esse vero $1 : p \rightarrow x : p^2 + x^2 : p^3 \rightarrow x^3 : p^4 + x^4 : p^5 \rightarrow$ &c. eam potestatem radicis binomiæ $p + x$, quam designat exponens $\rightarrow 1$; ostendi potest hunc modum. Per ea, quæ superius ostensa sunt, $(p + x)^{-1}$ tantundem valet, ac $1 : (p + x)$. Itaque idem erit, quantitatem $p + x$ ad eam potestatem attollere, quam dividere unitatem per eandem illam quantitatem $p + x$. Sed, instituta divisione ista, eademque in infinitum continuata, oritur quotiens $1 : p \rightarrow x : p^2 + x^2 : p^3 \rightarrow x^3 : p^4 + x^4 : p^5 \rightarrow$ &c. Quare hic idem quotiens erit ea potestas radicis binomiæ $p \rightarrow x$, quæ habet pro suo exponente $\rightarrow 1$.

859. Oporteat similiter, radicem binomiam $p \rightarrow x$ attollere ad potestatem, cujus exponens sit $\rightarrow 2$. Assumatur formula generalis $1a^m \rightarrow mdc : 1 + (m \rightarrow 1)ec : 2 \rightarrow (m \rightarrow 2)fc : 3 + (m \rightarrow 3)gc : 4 \rightarrow$ &c., quæ refertur ad $a \rightarrow ac$; & in ea scribatur p pro a , x pro c , & $\rightarrow 2$ pro m . Per hæc ergo substitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-2} + 2dx : 1p \rightarrow 3ex : 2p + 4fx : 3p \rightarrow 5gx : 4p +$ &c., sive etiam $1 : p^2 + 2dx : p \rightarrow 3ex : 2p + 4fx : 3p \rightarrow 5gx : 4p +$ &c. Quare, positis loco d, e, f, g , &c. valoribus suis, signis probe observatis, fiet quæsitæ potestas $1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 +$ &c.

860. Quod autem $1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 +$ &c. est ea potestas radicis binomiæ $p \rightarrow x$, quam refert expo-
nens

nens $\rightarrow 2$; demonstratur hac ratione. Ex superius * ostensis $(p \rightarrow x)^{-2}$ perinde valet, ac **art. 761.*
 $1 : (p \rightarrow x)^2$, sive etiam $1 : (p^2 \rightarrow 2px + x^2)$.
 Quare idem erit, quantitatem $p \rightarrow x$ ad eam potestatem evehere, quam dividere unitatem per quadratum ejus quantitatis, hoc est per $p^2 \rightarrow 2px + x^2$. Jam vero, per istiusmodi divisionem, in infinitum continuatam, oritur quotiens $1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 +$ &c. Itaque idem hic quotiens erit ea potestas radice binomiæ $p \rightarrow x$, quæ habet pro suo exponente $\rightarrow 2$.

861. Id vero quum ita sit, liquet, mediante formula illa generali, nullo negotio confici posse series infinitas, quæ a divisione oriuntur. Oporteat enim, exempli gratia, in seriem infinitam convertere fractionem $x^2 : (p + x)$. Jam fractio ista oritur, multiplicando x^2 per $1 : (p + x)$. Unde, quia $1 : (p + x)$ tantundem valet *, **art. 761.*
 ac $(p + x)^{-1}$; satis erit, denominatorem propositæ fractionis $(p + x)$ attollere ad potestatem, cujus exponens sit $\rightarrow 1$, & multiplicare omnes ejus terminos per numeratorem x^2 . Quum ergo ea potestas radice binomiæ $p + x$ sit * $1 : p \rightarrow x$: **art. 357.*
 $p^2 + x^2 : p^3 \rightarrow x^3 : p^4 + x^4 : p^5 \rightarrow$ &c. ; erit
 $x^2 : p \rightarrow x^3 : p^2 + x^4 : p^3 \rightarrow x^5 : p^4 + x^6 : p^5 \rightarrow$
 &c. series infinita, in quam convertitur proposita fractio.

862. Similiter convertenda sit in seriem infinitam fractio $x^3 : (p \rightarrow x)^2$, quæ oritur, multiplicando x^3 per $1 : (p \rightarrow x)^2$. Quoniam $1 : (p \rightarrow x)^2$ perinde valet *, ac $(p \rightarrow x)^{-2}$; erit $x^3 : *$ *art. 761.*
 $(p \rightarrow x)^2$ idem, ac $x^3 (p \rightarrow x)^{-2}$. Quum autem ea potestas radice binomiæ $p \rightarrow x$, quam
Thm. I. A a de.

Art. 859. designat $\rightarrow 2$, sit $\rightarrow 1 : p^2 + 2x : p^3 + 3x^2 : p^4 + 4x^3 : p^5 + 5x^4 : p^6 + \&c.$; fiet $x^3 : p^2 + 2x^4 : p^3 + 3x^5 : p^4 + 4x^6 : p^5 + 5x^7 : p^6 + \&c.$ valor ipsius $x^3 (p - x)^{-2}$. Quare series infinita, ad quam reducitur fractio $x^3 : (p - x)^2$, erit $x^3 : p^2 + 2x^4 : p^3 + 3x^5 : p^4 + 4x^6 : p^5 + 5x^7 : p^6 + \&c.$

863. Quod si denominator fractionis, quæ in seriem converti debet, contineat plures numero partes, quam duas : ponendo unam ex eis loco a , & reliquas omnes, per illam divisas, loco c ; adhuc, mediante formula illa generali, quæ sita series obtinebitur. Ut, si convertenda sit in seriem fractio $x^2 : (p - x + q)$, sive etiam $x^2 (p - x + q)^{-1}$, scribendo p pro a , $(x - q) : p$ pro c , & $\rightarrow 1$ pro m , fiet $(p - x + q)^{-1}$ æqualis huic seriei $1 : p + (x - q) : p^2 + (x - q)^2 : p^3 + (x - q)^3 : p^4 + \&c.$; adeoque erit $x^2 : p + x^2 (x - q) : p^2 + x^2 (x - q)^2 : p^3 + x^2 (x - q)^3 : p^4 + \&c.$ series, in quam convertitur fractio $x^2 : (p - x + q)$.

864. Sed, pro convertenda in seriem eadem fractione, scribi quoque potest q loco a , & $(x - p) : q$ loco c . Sic vero fiet $(p - x + q)^{-1}$ æqualis alteri huic seriei $1 : q + (x - p) : q^2 + (x - p)^2 : q^3 + (x - p)^3 : q^4 + \&c.$; proindeque fractio proposita $x^2 : (p - x + q)$ convertetur in hanc aliam seriem $x^2 : q + x^2 (x - p) : q^2 + x^2 (x - p)^2 : q^3 + x^2 (x - p)^3 : q^4 + \&c.$ Tentandus est autem uterque casus,isque eligendus, qui seriem, citius convergentem ad valorem ejus fractionis nobis suppeditat.

II. *Uſus*

II. *Ufus formulæ pro seriebus, quæ oriuntur ab
extractione radicum.*

865. **N**on dissimilis est usus formulæ generalis, si radix aliqua binomia elevanda sit ad potestatem quamvis imperfectam positivam. Neque enim aliud fieri debet, quam scribere in formula illa pro a primam partem radicis, pro c quotientem, qui oritur, dividendo secundam partem per primam, pro m exponen-tem quæsitæ potestatis, & pro $d, e, f, g,$ &c. va-
lores suos, signis probe observatis. Nam, hujus-
modi substitutionibus peractis, statim emerget
potestas, ad quam proposita radix est elevanda.

866. Oporteat, exempli gratia, radicem bi-
nomiam $p^2 + x^2$ evehere ad potestatem, cujus ex-
ponens sit $1 : 2$. Capiatur formula generalis $1a^m$
 $+ mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 + (m - 2)fc : 3$
 $+ (m - 3)gc : 4 + \&c.$, quæ refertur ad $a + ac$;
& in ea scribatur p^2 pro a , x^2 pro c , & $1 : 2$
pro m . Mutabitur ergo, substitutionibus hisce,
generalis illa formula in hanc aliam $1p + 1dx^2 :$
 $2p^2 - 1ex^2 : 4p^2 - 1fx^2 : 2p^2 - 5gx^2 : 8p^2 -$
&c. Unde, positis loco $d, e, f, g,$ &c. valoribus
suis, signis probe observatis, fiet potestas quæsitæ
 $1p + 1x^2 : 2p - 1x^4 : 8p^2 + 1x^6 : 16p^5 - 5x^8 :$
 $128p^7 + \&c.$

867. Esse vero $1p + 1x^2 : 2p - 1x^4 : 8p^2$
 $+ 1x^6 : 16p^5 - 5x^8 : 128p^7 + \&c.$ eam pote-
statem radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quam designat
exponens $1 : 2$; ostendi potest in hunc modum.
Per ea, quæ superius * ostensa sunt, ($p^2 +$ ^{*art. 77}
 x^2)^{1/2} tantundem valet, ac $\sqrt{(p^2 + x^2)}$. Ita-

A a 2 que

que idem erit, quantitatem $p^2 + x^2$ ad eam potestatem attollere, quam ex eadem quantitate quadratam radicem extrahere. Sed, extractione hujus radice, emergit quantitas $1p + 1x^2 : 2p \rightarrow 1x^4 : 8p^3 + 1x^6 : 16p^5 \rightarrow 5x^8 : 128p^7 + \&c.$ Quare hæc eadem quantitas erit ea potestas radice binomiæ $p^2 + x^2$, quæ habet pro suo exponente 1 : 2.

868. Oporteat similiter, radicem binomiam $p^3 \rightarrow x^3$ attollere ad potestatem, cujus exponentis sit 1 : 3. Assumatur formula generalis $1a^m \rightarrow mdc : 1 + (m \rightarrow 1) ec : 2 \rightarrow (m \rightarrow 2) fc : 3 + (m \rightarrow 3) gc : 4 \rightarrow \&c.$, quæ refertur ad $a \rightarrow ec$; & in ea scribatur p^3 pro a , x^3 : p^3 pro c , & 1 : 3 pro m . Per hæc ergo substitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p \rightarrow 1dx^3 : 3p^3 \rightarrow 1ex^3 : 3p^3 + 5fx^3 : 9p^3 \rightarrow 1gx^3 : 3p^3 + \&c.$ Quare, positis loco $d, e, f, g, \&c.$ valoribus suis, signis probe observatis, fiet quæsitæ potestas $1p \rightarrow 1x^3 : 3p^2 \rightarrow 1x^6 : 9p^5 \rightarrow 5x^9 : 81p^8 \rightarrow 10x^{12} : 243p^{11} \rightarrow \&c.$

869. Quod autem $1p \rightarrow 1x^3 : 3p^2 \rightarrow 1x^6 : 9p^5 \rightarrow 5x^9 : 81p^8 \rightarrow 10x^{12} : 243p^{11} \rightarrow \&c.$ est ea potestas radice binomiæ $p^3 \rightarrow x^3$, quam refert exponentis 1 : 3; demonstratur hac ratione.
 *art. 770. Ex superius ostensis ($p^3 \rightarrow x^3$) 1 : 3 perinde valet, ac $\sqrt[3]{p^3 \rightarrow x^3}$. Quare idem erit, quantitatem $p^3 \rightarrow x^3$ ad eam potestatem evehere, quam extrahere radicem cubicam ex eadem illa quantitate. Jam vero, per extractionem hujus cubicæ radice, oritur quantitas $1p \rightarrow 1x^3 : 3p^2 \rightarrow 1x^6 : 9p^5 \rightarrow 5x^9 : 81p^8 \rightarrow 10x^{12} : 243p^{11} \rightarrow \&c.$ Itaque hæc eadem quantitas erit ea potestas radice binomiæ $p^3 \rightarrow x^3$, quæ habet pro suo exponente 1 : 3. 870.

870. Ex quibus modo, liquet, beneficio ejusdem formulæ generalis, nullo item negotio fieri posse series illas infinitas, quæ ab extractione radicum suam trahunt originem; quandoquidem perinde est, ex quantitate aliqua radicem quamcumque extrahere, ac eandem illam quantitatem ad potestatem aliquam imperfectam positivam attollere. Nolim autem miremini, quod radicem binomiam assumpsimus $p^2 + x^2$, quum elevanda erat ad potestatem, designatam ab 1 : 2 ; & $p^2 - x^2$, quum oportebat eam attollere ad potestatem, expressam per 1 : 3 . Id enim unice factum, ne potestatum termini quantitates radicales involverent. Et cæteroquin poterat ad potestates illas attolli radix binomia $p + x$, vel $p - x$.

871. Quod si quantitas, convertenda in seriem per radicis alicujus extractionem, contineat plures numero partes, quam duas: ponendo unam ex eis loco a , & reliquas omnes, per illam divisas, loco c ; adhuc, mediante formula illa generali, quæ sita series obtinebitur. Ut, si converti debeat in seriem quantitas radicalis $\sqrt{(p^2 + q^2 - x^2)}$, sive etiam $(p^2 + q^2 - x^2)^{1:2}$, scribi poterit p^2 loco a , $(q^2 - x^2)$: p^2 loco c , & 1 : 2 loco m . Qua ratione fiet series quæ sita $1p + 1(q^2 - x^2) : 2p - 1(q^2 - x^2)^2 : 8p^3 + 1(q^2 - x^2)^3 : 16p^5 - 5(q^2 - x^2)^4 : 128p^7 + \&c.$

872. Sed, pro convertenda in seriem eadem quantitate radicali, scribi quoque potest q^2 loco a , & $(p^2 - x^2)$: q^2 loco c . Sic vero fiet $1q + 1(p^2 - x^2) : 2q - 1(p^2 - x^2)^2 : 8q^3 + 1(p^2 - x^2)^3 : 16q^5 - 5(p^2 - x^2)^4 : 128q^7 + \&c.$

A a 3

&c.

&c. series quæ sita. Tentandus est autem uterque casus, isque eligendus, qui seriem citius convergentem nobis suppeditat. Nam ex series semper præferri debent, quæ ad valorem quæsitæ quantitatis, non modo propius semper, ac propius accedunt, sed citius ad eum convergunt.

III. Usus formulæ pro seriebus, quæ ex utroque fonte oriuntur.

873. **O**pe ejusdem formulæ generalis, poterit radix aliqua binomia evehi quoque ad potestatem quamvis imperfectam negativam. Et habebitur potestas quæ sita, scribendo similiter in formula illa generali pro a primam partem propositæ radicis, pro c quotientem, qui oritur, dividendo secundam partem per primam, & pro d, e, f, g , &c. valores suos, signis probe observatis; adeo, ut usus formulæ ejus generalis erit semper idem, cujuscumque speciei sit potestas, ad quam radix binomia est elevanda.

874. Oporteat, exempli gratia, radicem binomiam $p^2 + x^2$ evehere ad potestatem, cujus exponens sit $-1 : 2$. Capiatur formula generalis $1a^m + mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 + (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 + \&c.$, quæ refertur ad $a + ac$; & in ea scribatur p^2 pro a , x^2 pro c , & $-1 : 2$ pro m . Mutabitur ergo, substitutionibus hisce, generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-1} - 1dx^2 : 2p^2 - 3ex^2 : 4p^2 - 5fx^2 : 6p^2 - 7gx^2 : 8p^2 - \&c.$, sive etiam $1 : p - 1dx^2 : 2p^2 - 3ex^2 : 4p^2 - 5fx^2 : 6p^2 - 7gx^2 : 8p^2 - \&c.$ Unde, positis loco d, e, f, g , &c. valoribus suis, signis probe observatis, fiet potestas quæ-

quæ sita $1 : p - 1x^2 : 2p^3 + 3x^4 : 8p^5 - 5x^6 : 16p^7 + 35x^8 : 128p^9 - \&c.$

875. Esse vero $1 : p - 1x^2 : 2p^3 + 3x^4 : 8p^5 - 5x^6 : 16p^7 + 35x^8 : 128p^9 - \&c.$ eam potestatem radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quam designat exponens $-1 : 2$; ostendi potest in hunc modum. Per ea, quæ superius * ostensa sunt, *art.775. $(p^2 + x^2)^{-1:2}$ tantundem valet, ac $1 : \sqrt{(p^2 + x^2)}$. Itaque idem erit, quantitatem $p^2 + x^2$ ad eam potestatem attollere, quam, extracta radice quadrata ex eadem quantitate, dividere unitatem per seriem, inde emergentem. Sed, per eam radicis extractionem, & per divisionem istam, oritur quantitas $1 : p - 1x^2 : 2p^3 + 3x^4 : 8p^5 - 5x^6 : 16p^7 + 35x^8 : 128p^9 - \&c.$ Quare hæc eadem quantitas erit ea potestas radicis binomiæ $p^2 + x^2$, quæ habet pro suo exponente $-1 : 2$.

876. Oporteat similiter, radicem binomiam $p^3 - x^3$ attollere ad potestatem, cujus exponens sit $-1 : 3$. Assumatur formula generalis $1a^m - mdc : 1 + (m - 1)ec : 2 - (m - 2)fc : 3 + (m - 3)gc : 4 - \&c.$, quæ refertur ad $a - ac$, & in ea scribatur p^3 pro a , x^3 pro c , & $-1 : 3$ pro m . Per hæc ergo substitutiones vertetur generalis illa formula in hanc aliam $1p^{-1} + 1dx^3 : 3p^3 - 2ex^3 : 3p^3 + 7fx^3 : 9p^3 - 5gx^3 : 6p^3 + \&c.$ Quare, positis loco $d, e, f, g, \&c.$ valoribus suis, signis probe observatis, fiet quæ sita potestas $1 : p + 1x^3 : 3p^4 + 2x^6 : 9p^7 + 14x^9 : 81p^{10} + 35x^{12} : 243p^{13} + \&c.$

877. Quod autem $1 : p + 1x^3 : 3p^4 + 2x^6 : 9p^7 + 14x^9 : 81p^{10} + 35x^{12} : 243p^{13} + \&c.$ est ea potestas radicis binomiæ $p^3 - x^3$, quam re-

fert exponens $\rightarrow 1 : 3$; demonstratur hac ratione . Ex superius * ostensis ($p^3 \rightarrow x^3$), $\rightarrow 1 : 3$ perinde valet , ac $1 : \sqrt[3]{p^3 \rightarrow x^3}$. Quare idem erit , quantitatem $p^3 \rightarrow x^3$ ad eam potestatem evehere , quam extrahere radicem cubicam ex eadem quantitate , & per seriem , inde ortam , dividere unitatem . Jam vero , extracta radice illa , & divisione ista instituta , producit quantitas $1 : p + 1x^3 : 3p^2 + 2x^6 : 9p^2 + 14x^9 : 81p^3 + 35x^{12} : 243p^3 + \&c.$ Itaque hæc eadem quantitas erit ea potestas radices binomiæ $p^3 \rightarrow x^3$, quæ habet pro suo exponente $\rightarrow 1 : 3$.

878. Atque hinc modo patet , quod si quæ sit series , quæ oriatur , partim a divisione , partim ab extractione radicum ; hæc quoque , ope formulæ generalis , facillime potest haberi . Sit enim convertenda in seriem fractio $x^2 : \sqrt{(p^2 + x^2)}$. Plane series ista , non aliter haberi potest , quam primo extrahendo radicem quadratam ex $p^2 + x^2$, deinde vero dividendo x^2 per radicem istam . Interim , quia $x^2 : \sqrt{(p^2 + x^2)}$ idem est * , ac $x^2 (p^2 + x^2)^{-1/2}$; obtinebitur longe facilius eadem series , si radix binomia $p^2 + x^2$ attollatur ad potestatem , cujus exponens sit $\rightarrow 1 : 2$, & omnes ejus termini multiplicentur per x^2 .

879. Si fractio , convertenda in seriem , sit $\sqrt{(p^2 + x^2)} : (p \rightarrow x)$; hæc quoque , partim a divisione , partim ab extractione radicum suam trahet originem . Verum in hoc casu , primo quidem extrahenda est radix quadrata ex $p^2 + x^2$; tum deinde series , inde orta , dividenda est per $p \rightarrow x$. Effugies autem tædium utriusque operationis , si ope formulæ generalis elevata , tum quantitate $p^2 + x^2$ ad potestatem , cujus expo-

nens

nenis sit $1:2$, cum quantitate $p \rightarrow x$ ad potestatem, cujus exponens sit -1 , multiplicentur omnes termini unius potestatis per omnes terminos alterius. Nam per ea, quæ superius ^{art. 761.} ostensa sunt, $\sqrt{(p^2 + x^2)} : (p \rightarrow x)$ tantundem valet, ac $(p^2 + x^2)^{1:2} : (p \rightarrow x)^{-1}$. 770.

880. Quid vero, si convertenda esset in seriem fractio $\sqrt{(p^2 + x^2)} : \sqrt{(p^2 \rightarrow px)}$. Sane primo oporteret, extrahere radicem quadratam ex $p^2 + x^2$; deinde radix non dissimilis extrahenda foret ex $p^2 \rightarrow px$; denique series, inde ortæ, deberent per se mutuo dividi. Itaque immensus erit calculi labor: qui tamen non parum minuetur, si ope formulæ generalis attollatur, tum quantitas $p^2 + x^2$ ad potestatem, cujus exponens sit $1:2$, cum quantitas $p^2 \rightarrow px$ ad potestatem, cujus exponens sit $-1:2$, & multiplicentur omnes termini unius per omnes terminos alterius; quandoquidem $\sqrt{(p^2 + x^2)} : \sqrt{(p^2 \rightarrow px)}$ idem est, ac $(p^2 + x^2)^{1:2} : (p^2 \rightarrow px)^{-1:2}$. ^{art. 761.} 770 775.

IV. Series, figuratos numeros continentes, continuata, ac interpolata.

881. **O** Stendimus jam exemplis, quod potestatum vulgarium formula generalis ad alias quoque potestatum species se extendit, & usui nobis esse potest, pro conficiendis seriebus infinitis, absque divisione, & extractione radicum. Videamus modo, unde evenit, ut ea tam late pateat, nec contineatur intra limites earum potestatum, pro quibus proprie constructa, ac efformata videtur. Res autem

tem paulo altius est repetenda ; & ostendendum est prius, quomodo series, figuratos numeros continentes , continuari possint ad partes oppositas, & interpolari aliorum terminorum interjectione.

882. Quamquam vero id fieri possit , relate ad figuratos cujuscumque generis ; ostendetur hic tamen a nobis dumtaxat respectu figuratorum generis primi : idque , tum quia , pro re, de qua est quæstio , hisce tantum figuratis est opus ; tum etiam , quia facile est , ad figuratos aliorum generum eandem theoriam extendere. Unde, semper ac deinceps figuratos numeros simpliciter appellabimus , non alii erunt intelligendi , quam qui ad primum genus referuntur , & quorum genitores sunt numeri naturales , qui ex continua unitatum additione oriuntur.

883. Itaque primo , si quæstio sit de continuandis seriebus figuratorum ad partes oppositas, id factu facile erit . Jam enim series numerorum naturalium continuatur ad partem contrariam per continuam unitatis subductionem : quo fit , ut primo quidem per zero, deinde vero per eosdem numeros naturales , negative sumptos, excurrat . Quare eadem pariter ratione continuandæ erunt ad partes contrarias ipsæ figuratorum series: nimirum, subducendo ex terminis cujunque seriei ordine terminos, qui eis correspondent in serie præcedente.

884. Id autem agentes , conneriemus seriem figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15, &c. , continuatam ad partem oppositam ; primo quidem per duas cyphras , tum per eosdem figuratos , positive sumptos , excurrere ; vicissim vero seriem figuratorum secundi ordinis 1, 4, 10,

20, 35, &c., continuatam ad partem contrariam, primo quidem per tres cyphas, deinde per eisdem figuratos, negative sumptos, promoveri.

885. Comperiemus quoque, seriem figuratorum tertii ordinis 1, 5, 15, 35, 70, &c., retro promotam, primo quidem per quatuor cyphas, tum per eisdem figuratos, positive sumptos, progredi; per contrarium vero seriem figuratorum quarti ordinis 1, 6, 21, 56, 126, &c., protraham ad partem oppositam, primo quidem per quinque cyphas, deinde per eisdem figuratos, negative sumptos, in infinitum abire.

886. Generaliter autem comperiemus, unamquamque seriem figuratorum, continuatam ad partem contrariam, excurrere primum per tot cyphas, quot designat exponens ordinis figuratorum, auctus unitate una; deinde vero progredi per eisdem figuratos, sumptos positive, si exponens ordinis figuratorum sit numerus impar; sumptos negative, si idem exponens sit vicissim numerus par.

887. Quod si interpolandæ sint eadem series, interiectione aliorum terminorum, considerare prius oportet, terminos cujusque seriei ita quidem in infinitum promoveri, ut sint arithmetice proportionales, termini ipsi in serie numerorum naturalium, eorum differentiarum primæ in serie figuratorum primi ordinis, eorundem differentiarum secundæ, sive differentiarum differentiarum in serie figuratorum secundi ordinis, atque ita deinceps.

888. Ut igitur interpolatione lex seriei maneat eadem, necesse est interiectione aliorum terminorum ita quidem series illas interpolare, ut termini interjecti cum terminis jam extantibus

bus eadem pariter lege in infinitum progrediantur . Unde series numerorum naturalium facili quidem negotio interpolabitur ; quum facile sit, inter terminos cuiusque progressionis arithmeticæ alios interponere, qui una cum iis progressionem similiter arithmeticam constituent.

889. Ita, si inter duos quosque terminos seriei numerorum naturalium alius tantum interjici debeat; ea erit, ascendendo, 0, 1 : 2, 1, 3 : 2, 2, 5 : 2, 3, &c.; descendendo, 0, — 1 : 2, — 1, — 3 : 2, — 2, — 5 : 2, — 3, &c. Quod si vero interjiciendi sint duo alii; fiet eadem, ascendendo, 0, 1 : 3, 2 : 3, 1, 4 : 3, 5 : 3, 2, 7 : 3, 8 : 3, 3, &c.; descendendo, 0, — 1 : 3, — 2 : 3, — 1, — 4 : 3, — 5 : 3, — 2, — 7 : 3, — 8 : 3, — 3, &c. Atque ita quoque, interjectione quotcumque terminorum, semper eam seriem facillime interpolare licebit.

890. Sed non perinde res est de seriebus numerorum figuratorum. In iis enim sunt * arithmetice proportionales, non quidem ipsi termini; sed eæ illorum differentiæ, quos exponens ordinis designat. Unde non ita facile interjectione aliorum terminorum possunt interpolari. Interim pro unaquaque serie, si in generali expressione cuiusque termini ponatur loco m terminus interjectus in serie numerorum naturalium, habebitur terminus, ordine interjiciendus in serie figuratorum, de qua agitur.

891. Ita in serie figuratorum primi ordinis generalis expressio cuiusque termini est * ($m^2 + m$) : 2. Quare, si series numerorum naturalium interpolata sit 0, 1 : 2, 1, 3 : 2, 2, 5 : 2, 3, &c.; habebuntur figurati primi ordinis, corre-
spon-

spondentes terminis interjectis $1:2, 3:2, 5:2$, &c., ponendo successive loco m terminos istos in expressione generali. Qua ratione ipsa series figuratorum primi ordinis, interjectione unius tantum termini interpolata, erit $0, 3:8, 1, 15:8, 3, 35:8, 6$, &c., in qua liquido patet, terminorum differentias primas $3:8, 5:8, 7:8, 9:8, 11:8, 13:8$, &c. esse arithmetice proportionales.

892. Similiter in serie figuratorum secundi ordinis generalis expressio cujusque termini est * *art 577.*
 $(m^3 + 3m^2 + 2m) : 6$. Itaque, si series numerorum naturalium interpolata sit $0, 1:2, 1, 3:2, 2, 5:2, 3$, &c.; invenientur figurati secundi ordinis, correspondentes terminis interjectis $1:2, 3:2, 5:2$, &c., scribendo successive loco m terminos istos in expressione generali. Qua ratione ipsa series figuratorum secundi ordinis, interpolata interjectione unius tantummodo termini, erit $0, 5:16, 1, 35:16, 4, 105:16, 10$, &c., in qua, quum terminorum differentiarum primarum sint $5:16, 11:16, 19:16, 29:16, 41:16, 55:16$, &c., liquet, differentias secundas $6:16, 8:16, 10:16, 12:16, 14:16$, &c. esse arithmetice proportionales. *591.*

V. Demonstratio tradita interpolationis, & progressionum arithmeticarum proprietatis singularis.

893. **I**nterpolari ea, quam modo * in- * *art. 890.*
 nuimus, ratione series figuratorum primi generis; primus omnium docuit Johannes Wallisius in præclaro suo opere de Arithmetica
 In-

Infinitorum. Sed, unde fiat, ut series illæ, subinde interpolatæ, propriam naturam non amittant; id nec ipse, nec alius quisquam, quem sciam, docuit. Rationem ergo ejus interpolationis hic breviter aperire non gravabimur: quam eo lubentius hic afferemus, quod præbatur nobis occasio, ut novam quandam progressionum arithmeticarum proprietatem ostendamus.

894. Jam enim cunctis notum est, quod si termini unius progressionis geometricæ multiplicentur ordine per terminos alterius progressionis geometricæ, producta constituunt progressionem aliam, similiter geometricam. Notumque est etiam, quod, si hæc proprietas ad progressionem arithmeticas sit transferenda, termini unius progressionis addendi sunt ordine cum terminis alterius. Sed jucundum erit, inquirere, quæ quidem lege progrediuntur quantitates, quæ ex terminis unius progressionis arithmeticæ, ordine per terminos alterius multiplicatis, oriuntur.

895. Sint ergo duæ quævis progressionem arithmeticæ $a, a - b, a - 2b, a - 3b, a - 4b$, &c., $c, c - d, c - 2d, c - 3d, c - 4d$, &c.; & multiplicentur termini unius progressionis ordine per terminos alterius, ita, ut producantur quantitates $ac, ac - bc - ad + bd, ac - 2bc - 2ad + 4bd, ac - 3bc - 3ad + 9bd, ac - 4bc - 4ad + 16bd$, &c. Sane quantitates istæ exhiberent nobis progressionem aliam arithmeticam, si omnes eæ, quæ primam excipiunt, ultima parte minuerentur. Sic enim fierent $ac, ac - bc - ad, ac - 2bc - 2ad, ac - 3bc - 3ad, ac - 4bc - 4ad$, &c.; adeoque eodem semper intervallo in infinitum progredierentur.

896.

896. Jam ultimæ partes earum quantitatum, ordine sumptæ, sunt bd , $4bd$, $9bd$, $16bd$, &c. : proindeque habentur, multiplicando per bd quadrata numerorum naturalium 1, 4, 9, 16, &c. Unde, quia quadrata ista oriuntur ex continua collectione numerorum imparium 1, 3, 5, 7, &c. : erunt arithmetice proportionales eorum differentię primæ : & propterea arithmetica illa progressio, quam ex quantitates nequeunt exhibere, per primas earundem differentias exhibebitur.

897. Ubi ergo termini unius progressionis arithmeticæ ordine multiplicantur per terminos alterius, habebuntur tales quantitates, ut earum differentię primæ erunt arithmetice proportionales. Nec sane aliunde evenit, ut primæ differentię quadratorum, quæ fiunt ex numeris naturalibus, constituent progressionem arithmeticam, quam quia quadrata illa ex terminis unius progressionis arithmeticæ, ordine multiplicatis per terminos alterius, oriuntur. Nam 1, 4, 9, 16, &c. idem sunt, ac 1 . 1, 2 . 2, 3 . 3, 4 . 4, &c.

898. Sed proprietas ista progressionum arithmeticarum ulterius longe progreditur. Si enim trium hujusmodi progressionum termini ordine multiplicentur per se mutuo; orientur quantitates tales, ut earum differentię secundæ erunt arithmeticæ proportionales. Quod si vero ordine multiplicentur per se mutuo termini quatuor progressionum arithmeticarum; erunt arithmetice proportionales differentię tertiæ earum quantitatum, quæ multiplicationibus iis producuntur. Et generaliter, quotcumque fuerint progressionem arithmeticæ, quarum termini ordine multiplicantur per se invicem; erunt in arith.

arithmetica proportione eæ semper quantitatum productarum differentię, quas designat multitudo progressionum, unitate minuta.

899. Ostendetur id vero eadem fere ratione. Assumendo enim generaliter, ac indefinite tres progressionē arithmeticas, comperiemus, quantitates ortas ex terminis ipsarum, ordine multiplicatis per se mutuo, exhibere nobis seriem quantitatum, quarum differentię primæ forent arithmetice proportionales, si eæ, quæ primam excipiunt, ultimam partem non haberent. Unde, quia, ultimæ partes earum fiunt, multiplicando eandem quantitatem per cubos numerorum naturalium; omnino necesse est, ut sint arithmetice proportionales illarum quantitatum differentię secundæ.

900. Similiter, si assumantur generaliter, ac indefinite quatuor progressionē arithmeticæ, & multiplicentur termini ipsarum ordine per se mutuo; prodibunt quantitates tales, ut earum differentię secundæ forent arithmeticæ proportionales, si eæ, quæ primam excipiunt, ultima parte minuerentur. Quare, quum ultimæ partes talium quantitatum habeantur, multiplicando eandem quantitatem per quadrato-quadrata numerorum naturalium; plane opus est, ut sint arithmetice proportionales illarum differentię tertiæ.

901. Quippe sciendum, quod sicuti in quadratis numerorum naturalium 1, 4, 9, 16, 25, &c. sunt arithmetice proportionales differentię primæ; sic arithmeticam progressionem constituunt in cubis 1, 8, 27, 64, 125, &c. differentię secundæ; in quadrato-quadratis 1, 16, 81, 256, 625, &c. differentię tertiæ.

rentiæ tertiæ; atque ita deinceps. Quam sane proprietatem exinde etiam pendere, putandum est, quod, sicuti quadrata oriuntur ex terminis duarum progressionum arithmeticarum, per se mutuo multiplicatis; sic cubi producuntur ex multiplicatione terminorum trium hujusmodi progressionum, quadrato-quadrata ex multiplicatione terminorum quatuor talium progressionum, sicque in infinitum.

902. Hac progressionum arithmeticarum proprietate supposita, haud difficile modo erit, traditæ interpolationis rationem intelligere. Jam enim numeri naturales subinde interpolantur, ut per interjectionem terminorum adhuc maneant arithmetice proportionales. Quare, si quilibet terminus seriei numerorum naturalium interpolatæ designetur per m ; constituendo series alias, in quibus correspondentes termini sint $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, &c., etiam series istæ progressionēs erunt arithmeticæ; proindeque, vi ostensæ proprietatis, plane necesse est, ut sint arithmetice proportionales differentiæ primæ in serie, ubi quisque terminus designatur per $m \cdot m + 1$; differentiæ secundæ in serie, ubi designatur per $m \cdot m + 1 \cdot m + 2$; differentiæ tertiæ in serie, ubi designatur per $m \cdot m + 1 \cdot m + 2 \cdot m + 3$; atque ita deinceps. *art. 388.

903. Verum quidem est, quod, interpolatis seriebus figuratorum primi generis ea, quam supra tradidimus, ratione, designatur quisque terminus per $(m \cdot m + 1) : 2$ in serie figuratorum primi ordinis, per $(m \cdot m + 1 \cdot m + 2) : 6$ in serie figuratorum secundi ordinis, per $(m \cdot m + 1 \cdot m + 2 \cdot m + 3) : 24$ in serie figuratorum *art. 390.

Tom. I.

B b

rum

rum tertii ordinis, atque ita de aliis. Sed id vim allatæ demonstratiōis nequaquam evertit. Jam enim notum est, quantitates quocumque, per eandem sive divisas, sive multiplicatas, in eadem ratione manere. Unde, si sunt arithmetice proportionales differentiæ primæ earum quantitatum, quarum quælibet designatur per $m \cdot m + 1$; per divisionem, aut conversionem rationis tales etiam erunt differentiæ primæ quantitatum, quæ indefinite designantur per $(m \cdot m + 1) : 2$.

VI. Generalis vulgarium potestatum formulæ extensio demonstrata.

904. **H**is prælibatis, videamus modo, unde fiat, ut formula generalis potestatum vulgarium, superius * exhibita, ad potestates alias se extendat. Quia in re ordiemur a potestatibus perfectis negativis, quæ ex divisione unitatis per correspondentes positivas oriuntur *. Jamque, si $a + b$ sit quantitas bimenbris, ex qua ex fieri debent; comperiemus, quæsitam potestatem esse $1a^{-1} \rightarrow 1a^{-2}b + 1a^{-3}b^2 \rightarrow 1a^{-4}b^3 + 1a^{-5}b^4 \rightarrow \&c.$, quum ejus exponens est -1 ; esse $1a^{-2} \rightarrow 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 \rightarrow 4a^{-5}b^3 + 5a^{-6}b^4 \rightarrow \&c.$, quum exponens est -2 ; esse $1a^{-3} \rightarrow 3a^{-4}b + 6a^{-5}b^2 \rightarrow 10a^{-6}b^3 + 15a^{-7}b^4 \rightarrow \&c.$, quum exponens est -3 ; esse $1a^{-4} \rightarrow 4a^{-5}b + 10a^{-6}b^2 \rightarrow 20a^{-7}b^3 + 35a^{-8}b^4 \rightarrow \&c.$, quum exponens est -4 ; atque ita deinceps.

905. Quum ergo hac lege progrediantur in infinitum potestates perfectæ negativæ quantitatatis

tatis bimembris $a + b$, patet, earum terminos, perinde ac eos, ex quibus constant potestates perfectæ positivæ, exhibendos esse per a^m , $a^m - 1b$, $a^m - 2b^2$, $a^m - 3b^3$, $a^m - 4b^4$, &c., ubi earundem exponens generaliter, ac indefinite designatur per m . Sed perspicuum est quoque, coefficientes suorum terminorum, ut alternatim affici signis $+$, & $-$, sic esse unitates, quum exponens est -1 ; esse numeros naturales, quum exponens est -2 ; esse figuratos primi ordinis, quum exponens est -3 ; esse figuratos secundi ordinis, quum exponens est -4 ; atque ita in infinitum.

906. Hinc, si tabula coefficientium, quibus afficiuntur termini potestatum perfectarum positivarum, continuetur ad partem oppositam, ponendo primum coefficientes terminorum ejus potestatis, cujus exponens est zero, & deinde coefficientes terminorum potestatum perfectarum negativarum; omnino necesse est, ut in prima columna verticali reperiatur series unitatum, in secunda series numerorum naturalium utrinque continuata, in tertia series figuratorum primi ordinis utrinque promota, in quarta series figuratorum secundi ordinis utrinque protracta, atque ita deinceps. Nam, quum $(a + b)^0$ idem sit $*$, ac 1 ; coefficientes terminorum hujus potestatis erunt $1, 0, 0, 0, 0$, &c. art. 863

907. Id vero quum ita sit, necesse est pariter, ut, sicuti progressionem arithmeticam constituunt ipsi termini in secunda columna verticalis; ita $*$ sint arithmetice proportionales, terminorum art. 887. differentiarum primarum in tertia columna verticali, terminorum 850 differentiarum secundarum in quarta, termi-

norum differentia tertia in quinta, atque ita de aliis. Unde, quemadmodum, vocando m terminum quemcumque positivum secundæ columnæ

- Art. 821.* verticalis esse debet $\vdots (m \cdot m \rightarrow 1) : (1 \cdot 2)$, qui ei correspondet in tertia; $(m \cdot m \rightarrow 1 \cdot m \rightarrow 2) : (1 \cdot 2 \cdot 3)$, qui ei correspondet in quarta; $(m \cdot m \rightarrow 1 \cdot m \rightarrow 2 \cdot m \rightarrow 3) : (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)$, qui ei correspondet in quinta; atque ita deinceps, sic pariter, exhibente m terminum quemlibet negativum ejusdem secundæ columnæ verticalis,
- Art. 827.* exhibere debent eadem quantitates terminos,
902. ei correspondentes in aliis columnis.

908. Ex quibus modo jam liquido patet, quod, sicuti in potestatibus perfectis positivis, vocando m exponentem, fit $\vdots$ unitas coëfficiens primi termini, $m : 1$ coëfficiens secundi, $(m \cdot m \rightarrow 1) : (1 \cdot 2)$ coëfficiens tertii, $(m \cdot m \rightarrow 1 \cdot m \rightarrow 2) : (1 \cdot 2 \cdot 3)$ coëfficiens quarti, atque ita de aliis; sic quoque in potestatibus perfectis negativis, designato exponents similiter per m , eadem omnino esse debent expressiones coëfficientium suorum terminorum. Unde plane necesse est, ut eadem illa formula generalis, superius $\vdots$ exhibita, pro potestatibus perfectis positivis quantitatis bimembris, obtineat quoque, relate ad potestates perfectas negativas ejusdem quantitatis.
- Art. 831.*

909. Non dissimilis erit demonstratio, pro potestatibus imperfectis, quæ fiunt, sola radicum extractione, quum sunt positivæ; & partim extractione radicum, partim divisione, quum sunt negativæ. Si enim constituentur hujusmodi potestates, jam liquido patebit, terminos ipsarum exhibendos esse per $a^m, a^m - 1b, a^m - 2b^2, a^m - 3b^3,$
 $a^m - 4b^4$

6 = 484, &c., ubi exponens earundem generaliter, ac indefinite vocatur m . Et, si porro coefficientes suorum terminorum inserantur horizontaliter in eadem illa tabula, eodem plane ordine, quo inter potestates perfectas inseri debent imperfectæ; patebit quoque, per eos interpolari, tam series unitatum, & numerorum naturalium, quam series ipsorum figuratorum.

910. Hac ratione inter potestates perfectas, quæ habent pro suis exponentibus 0, 1, 2, 3, &c., ordine inseri possunt potestates imperfectæ, quarum exponentes sunt 1:2, 3:2, 5:2, &c. Unde, inter illarum coefficientes insertis horizontaliter coefficientibus istarum, qui relatæ ad 1:2 sunt 1, 1:2, — 1:8, 1:16, &c., relatæ ad 3:2 sunt 1, 3:2, 3:8, — 1:16, &c., & relatæ ad 5:2 sunt 1, 5:2, 15:8, 5:16, &c.; comperientur in prima columna verticali termini 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, &c., in secunda termini 0, 1:2, 1, 3:2, 2, 5:2, 3, &c., in tertia termini 0, — 1:8, 0, 3:8, 1, 15:8, 3, &c., in quarta termini 0, 1:16, 0, — 1:16, 0, 5:16, 1, &c., atque ita deinceps.

911. Oriri vero in hunc modum interpolatas, non modo series unitatum, & numerorum naturalium, verum etiam ipsas figuratorum series; perspicuum quidem est. Jam enim terminorum, qui reperiuntur in tertia columna verticali, primæ differentiæ sunt — 1:8, 1:8, 3:8, 5:8, 7:8, 9:8, &c.; has vero arithmeticam progressionem constituere, nemo non videt. Quumque primæ differentiæ terminorum, qui extant in quarta columna verticali, sint 1:16, — 1:16, — 1:16, 1:16, 5:16, 11:16, &c.;

B b 3

erunt

erunt differentię secundę eorundem terminorū
 $2 : 16, 6, 2 : 16, 4 : 16, 6 : 16$, &c.,
 quas arithmetice proportionales esse, patet etiam
 abunde.

912. Ut ergo rem contrahamus, en ejus, de
 quō agitur, veritas ostensa. Si in tabula illa in-
 ferti concipiantur horizontaliter coefficientes
 terminorū potestatum imperfectarum, eodem
 plane ordine, quō ipsę potestates imperfectę in-
 *art. 909. feri debent inter perfectas; habebuntur * inter-
 polatę, tam series unitatum, & numerorum na-
 turalium, quam series ipsorum figurarum. Qua-
 re, sicuti in secunda columna verticali ipsi ter-
 mini progressionem exhibent arithmeticam; sic
 *art. 937. exhibebunt * progressionem non dissimilem termi-
 norum differentię primę in tertia columna verti-
 cali, terminorū differentię secundę in quarta,
 terminorū differentię tertię in quinta, atque
 ita deinceps.

913. Atque hinc porro, sicuti, vocando m
 terminum quemcumque integrum secundę co-
 *art. 321. lumnę verticalis, esse debet * $(m . m \leftarrow 1)$:
 907. $(1 . 2)$, qui ei correspondet in tertia; $(m . m$
 $\leftarrow 1 . m \leftarrow 2)$: $(1 . 2 . 3)$, qui ei correspondet
 in quarta; $(m . m \leftarrow 1 . m \leftarrow 2 . m \leftarrow 3)$:
 $(1 . 2 . 3 . 4)$, qui ei correspondet in quinta;
 atque ita de aliis; sic etiam, exhibente m termi-
 num quemlibet fractum ejusdem secundę colu-
 mnę verticalis, necesse est, ut eadem quantita-
 tes exhibeant * terminos, ei correspondentes in
 aliis columnis: proindeque, si idem numerus m
 referat exponentem cujusque potestatis, omnino
 opus est, ut pro unaquaque potestate sit 1 coef-
 ficiens primi termini, $m : 1$ coefficientes secundi,
 (m .

$(m \cdot m - 1) : (1 \cdot 2)$ coefficienti tertii, $(m \cdot m - 1 \cdot m - 2) : (1 \cdot 2 \cdot 3)$ coefficienti quarti, atque ita deinceps.

CAPUT IV.

Alia potestatum species enodata.

914. **E** St & alia species potestatum, omnino diversa ab iis, quas superius recessuimus. Potestates enim, de quibus, ^{art. 714.} supra locuti sumus, id commune habent, quod ^{715.} singularum exponentes sunt numeri rationales. Sed concipere licet potestates alias, quarum exponentes sint numeri radicales; vel generalius, quæ habeant pro suis exponentibus, aut easdem quantitates, ad quas eæ potestates referuntur. ut a^a , b^b , c^c ; aut etiam quantitates alias, ab iis plane diversas, ut a^b , b^a , c^b .

915. Hujusmodi potestates dicuntur passim quantitates exponentiales; & earum ortus quantitatibus logarithmicis ferri debet acceptus. Unde, ut melius natura, ac genesis quantitatum exponentialium intelligi possint; rem oportet paulo altius repetere, & quæ sint quantitates logarithmicæ, quæve earundem affectiones, paucis prius exponere. Neque vero vitio nobis vertendum est, quod de hujusmodi quantitatibus in Algebræ Elementis differimus. Nam earum doctrina ad generalem potestatum theoriam pertinere videtur.

1. Natura , & proprietates quantitatum logarithmicarum.

916. **Q**uantitates logarithmicæ dicuntur ex , quæ constituentes progressionem arithmeticam , aliis correspondent, geometricam progressionem componentibus. Ita, si quantitates a, b, c, d, e , &c. constituent progressionem arithmeticam , eæque ordine adscribantur quantitatibus aliis f, g, h, i, k , &c. quæ componant progressionem geometricam ; illæ relate ad istas quantitates dicentur logarithmicæ: nimirum a relate ad f , b relate ad g , c relate ad h , atque ita deinceps.

917. Hinc quantitates logarithmicæ non sunt quantitates absolutæ , sed relativæ ; nec sane intelligi possunt, nisi præsentibus habeantur aliæ illæ quantitates , ad quas ipsæ ut tales referuntur . Unde , sicuti vocari quoque solent simpliciter logarithmi , sic in iis enunciandis adjiciuntur semper quantitates aliæ , quibus ipsæ velut logarithmi correspondent . Ut in allato exemplo a dicitur logarithmus quantitatis f , b logarithmus quantitatis g , c logarithmus quantitatis h , atque ita de aliis.

918. Progressio porro arithmetica , quæ sit sedes , seu locus logarithmorum , sumi potest ad libitum . Unde , sicuti infinitæ esse queunt hujusmodi progressionibus ; sic & earundem quantitatum infinitæ dari poterunt logarithmorum species . Interim , ea progressionibus semel statutis non licebit amplius eandem variare . Et, quemadmodum ad assumptam progressionem geometricam

cam advocandæ sunt quantitates omnes, quarum quærentur logarithmi; ita in eadem illa progressionem arithmetica, quæ semel posita est, quærendi sunt logarithmi, quos oportet invenire.

919. Fieri autem potest, ut assumpta progressio geometrica, utrinque continuata, non includat eas quantitates, de quarum logarithmis est quæstio. Unde pari ratione nec etiam progressio arithmetica, utrinque promota, quæsitos logarithmos exhibebit. Id vero quum accidit, ad interpolationes confugere opus est. Nimirum in progressionem geometricam tot alii termini inter binos quosque erunt interjiciendi, quot necessarii judicabuntur, ut quantitates, de quibus agitur, in ea reperiantur. Et, interpolitis aliis totidem inter binos quosque progressionis arithmeticæ, habebuntur logarithmi earum quantitatum.

920. Et sane vulgaris canon logarithmicus, qui numerorum omnium naturalium logarithmos exhibet, hoc fere artificio compositus est. Primo enim assumpta est progressio geometrica 1, 10, 100, 1000, &c., quæ ab unitate pergit in ratione decupla; eique adscripta progressio arithmetica 0, 1, 2, 3, &c., in qua quisque terminus pluribus cyphris intelligi debet adauctus. Deinde utraque progressio, per interjectionem aliorum terminorum, subinde est interpolata, ut in priore caderent omnes alii numeri naturales, vel etiam numeri tales, quibus ii quamproxime accederent; in secunda vero correspondentes eorundem logarithmi haberentur.

921. Sed, ut ad quantitates logarithmicas, generationem consideratas, revertamur; jam vidimus

Art. 917. mus supra * , eas non esse quantitates absolutas , sed relativas ; nec satis intelligi posse , nisi simul obversentur nostro animo aliæ illæ quantitates , quibus ipsæ velut logarithmi correspondent . Id vero quum ita sit ; liquet ; easdem quantitates non melius designari posse , quam præfigendo litteram / quantitatibus ipsis , ad quas eæ referuntur . Qua ratione designabimus eam per $l. a$, si referatur ad a ; per $l. ax$; si referatur ad ax ; per $l. (ax + bx)$, si referatur ad $ax + bx$; atque ita de aliis :

922. Hæc autem quantitates logarithmicas designandi ratio commendanda est , non modo , quia sistit nobis ipsas illas quantitates , quibus correspondent , sed alio etiam ex capite . Jam *Art. 918.* enim notavimus supra * , progressionem arithmeticam , quæ sedes sit quantitaturn logarithmicarum , ad libitum accipi posse ; & inde fieri , ut earundem quantitaturn infinitæ esse queant logarithmorum species . Itaque optandum esset , ut sub una eademque expressione omnes continerentur . Planè vero , quum designantur logarithmi , præfigendo litteram / quantitatibus , ad quas referuntur , id obtinetur . Nam littera / exhibet eos quidem , sed nullum iis largitur valorem certum , ac definitum .

923. Cæterum , quos hic vocamus quantitaturn logarithmos , alibi * exponentes quantitaturn appellavimus . Unde , quum nullum sit discrimen inter exponentes , & logarithmos , quæcumque de exponentibus superius ostensa sunt , ea omnia ad logarithmos pariter pertinebunt . Quocirca , si fuerint quatuor quantitates *Art. 937.* geometricæ proportionales , erit * summa ex
lo-

logarithmis extremarum æqualis summæ ex logarithmis mediarum. Quod si vero tres fuerint quantitates in geometrica proportionione, erit * *art. 739* summa ex logarithmis extremarum æqualis duplo logarithmi quantitatis intermediæ.

924. Præterea, si pro logarithmo unitatis capiatur zero, hæc etiam de logarithmis statui debent. Primo, ut summa logarithmorum, multiplicandi, & multiplicatoris adæquet * *art. 742* logarithmum producti. Secundo, ut logarithmus divisoris, subductus a logarithmo dividendi, relinquat * *art. 744* logarithmum quotientis. Tertio, ut *art. 746* duplum logarithmi lateris adæquet * *art. 746* logarithmum quadrati, triplum logarithmum cubi, quadruplum logarithmum quadrato-quadrati, atque ita deinceps. Et quarto demum, ut semissis logarithmi alicujus quantitatis adæquet * *art. 750* logarithmum suæ quadratæ radices, triens logarithmum suæ radices cubicæ, quadrans logarithmum suæ radices quadrato-quadratæ, atque ita in infinitum.

925. Hinc, etsi logarithmus cujusque quantitatis designari * *art. 925* queat, præfigendo quantitati litteram *l*; attamen hæc ejus expressio, opæ proprietatum, quæ logarithmis competunt, poterit in aliam transmutari, adhibita adhuc littera *l*. Ut, si quantitas sit $ab : c$; logarithmus ejus designari poterit, non modo per $l. (ab : c)$; verum etiam per $l. a + l. b - l. c$. Nam, quum sint geometricæ proportionales quatuor quantitates $c, a, b, ab : c$; erit * *art. 923* summa ex logarithmis extremarum $l. (ab : c) + l. c$ æqualis summæ ex logarithmis mediarum $l. a + l. b$; adeoque, dempto utrinque $l. c$, fiet $l. (ab : c)$ æqualis $l. a$.

$l. a + l. b \rightarrow l. c$. Et pari ratione, si quantitas sit $a^2 : c$, quæ est tertia geometricè proportionalis post duas c , & a ; licebit; logarithmum ejus exprimere, non modo per $l. (a^2 : c)$, verum etiam per $2l. a \rightarrow l. c$.

11. Transformationes expressionum logarithmicarum ad suas regulas revocate.

926. **T**Ransformationes expressionum logarithmicarum, quarum mo-

do • meminimus, sunt magno usui in resolutione eorum problematum, quæ pendent ex logarithmis. Unde non abs re fore putamus, nonnihil copiosius de iis differere, & ad regulas quasdam generales easdem revocare. Distinguemus autem tres casus. Primo, quum quantitas, ad quam refertur logarithmus, oritur ex multiplicatione, vel aliarum plurium, vel unius per se ipsam sæpius facta. Secundo, quum eadem quantitas est fractio, hoc est quotiens, ortus ex divisione aliarum quantitarum. Et tertio demum, quum est quantitas radicalis, hoc est radix, extrahenda ex alia data quantitate.

927. Quantum ergo ad priorem casum, sit primum quantitas duarum dimensionum ab . Dico, logarithmum ejus designari posse, non modo per $l. ab$, verum etiam per $l. a + l. b \rightarrow l. 1$. Est enim enim ab productum, quod oritur, multiplicando a per b . Quare, ex definitione multiplicationis, erunt geometricè proportionales quatuor quantitates $1, a, b, ab$. Unde summa ex logarithmis extremarum $l. ab + l. 1 =$
 928. qualis erit summa ex logarithmis mediarum $l. a + l. b$.

+ $l. b$: & propterea, dempto utrinque logarithmo unitatis, hoc est $l. 1$; fiet $l. ab$ æqualis $l. a + l. b = l. 1$.

928. Sit secundo quantitas trium dimensionum abc . Dico, logarithmum ejus exprimi posse, tam per $l. abc$, quam per $l. a + l. b + l. c = 2l. 1$. Si enim loco bc ponatur d , fiet abc æqualis ipsi ad . Unde $l. abc$, & $l. ad$ æquales erunt inter se. Jam $l. ad$ idem est *, ac $l. a + l. d = l. 1$. Quare similiter $l. abc$ æqualis erit $l. a + l. d = l. 1$. Quum autem d , & bc inter se sint æquales, erit $l. d$ æqualis $l. bc$, sive etiam $l. b + l. c = l. 1$. Unde, substitutione peracta, fiet $l. abc$ æqualis $l. a + l. b + l. c = l. 1$, sive $l. a + l. b + l. c = 2l. 1$. *art. 927.

929. Eodem prorsus argumento ostendemus, quod, si habeatur quantitas quatuor dimensionum $abcd$, logarithmus ejus designari potest, non modo per $l. abcd$, verum etiam per $l. a + l. b + l. c + l. d = 3l. 1$. Et generaliter, quotcumque fuerint dimensiones quantitatis, logarithmus ejus comperietur semper æqualis summae ex logarithmis quantitatum omnium, per quas ejus dimensiones constituuntur, minutæ logarithmo unitatis, toties sumpto, quot sunt quantitatis dimensiones, una dempta.

930. Id vero quum ita sit, liquet, logarithmum ipsius a^2 designari posse, tam per $l. a^2$, quam per $2l. a = l. 1$. Quum enim a^2 sit quantitas duarum dimensionum, quarum quælibet constituitur per a ; erit * $l. a^2$ æqualis $l. a + l. a = l. 1$. Unde, quia $l. a + l. a$ idem sunt, ac $2l. a$; erit $l. a^2$ æqualis $2l. a = l. 1$. Sed eodem argumento patebit, logarithmum ipsius a^3 de-

designari posse, non modo per $l. a^3$, verum etiam per $3l. a = 2l. 1$; pariterque logarithmum ipsius a^4 posse exprimi, tam per $l. a^4$, quam per $4l. a = 3l. 1$; atque ita deinceps; adeo, ut generaliter, si a^m referat quancumque potestatem perfectam positivam ipsius a , erit $l. a^m$ æqualis $m l. a = m l. 1 + l. 1$.

931. Quantum ad secundum casum, quum quantitas, ad quam refertur logarithmus est, fractio; sit x numerator fractionis, & y ejus denominator. Dico, fractionis hujus $x:y$ logarithmum exprimi posse, non modo per $l. (x:y)$, verum etiam per $l. x + l. 1 = l. y$. Quum enim fractio $x:y$ sit quotiens, qui oritur, dividendo x per y ; erunt, ex natura divisionis, geometricæ proportionales quatuor quantitates $y, x, 1, x:y$. Quare summa ex logarithmis extremarum $l. (x:y) + l. y$ æqualis erit * summæ ex logarithmis mediarum $l. x + l. 1$: proindeque, subducto utrinque $l. y$, fiet $l. (x:y)$ æqualis $l. x + l. 1 = l. y$.

932. Jam fractio $x:y$ omnes omnino fractiones potest nobis exhibere. Unde generaliter statui potest, logarithmum cujusque fractionis æqualem esse logarithmo numeratoris, aucto logarithmo unitatis, & diminuto logarithmo denominatoris. Quia autem fieri potest, ut tam numerator, quam denominator sit quantitas plurium dimensionum; licebit, utriusque logarithmum exprimere quoque * per logarithmos quantitatum, per quas dimensiones constituuntur. Qua ratione ipse fractionis logarithmus per logarithmos earundem quantitatum exprimi poterit.

933. Ut, si fractio sit $a^3:bc$, logarithmus ejus

ejus $l. (a^3 : bc)$ æqualis erit $\cdot l. a^3 \div l. 1 \rightarrow$ ^{*art. 932.}
 $l. bc$. Sed quoniam $l. a^3$ est idem $\cdot$, ac $3l. a \rightarrow$ ^{*art. 930.}
 $2l. 1$, & $l. bc$ perinde valet $\cdot$, ac $l. b + l. c$ ^{*art. 927.}
 $\rightarrow l. 1$; erit $l. (a^3 : bc)$ æqualis $3l. a \rightarrow 2l. 1$
 $+ l. 1 \rightarrow l. b + l. c + l. 1$, siue etiam $3l. a \rightarrow l. b$
 $\rightarrow l. c$. Atque ita quoque, si fractio sit $as : c^2$,
erit $l. (as : c^2)$ æqualis $\cdot l. as + l. 1 \rightarrow l. c^2$. Est
autem $\cdot l. as$ idem, ac $5l. a \rightarrow 4l. 1$; estque etiam
 $l. c^2$ idem, ac $2l. c \rightarrow l. 1$. Quare erit $l. (as :$
 $c^2)$ æqualis $5l. a \rightarrow 4l. 1 + l. 1 \rightarrow 2l. c +$
 $l. 1$, hoc est $5l. a \rightarrow 2l. 1 \rightarrow 2l. c$.

934. Quod si sedulo perpendatur regula, su-
perius tradita, pro quantitativis plurium dimen-
sionum, patebit, logarithmum cujusque fractio-
nis oriri, si ex logarithmis quantitatum, nume-
ratoris dimensiones constituentium, subducantur
logarithmi quantitatum, quæ constituunt
dimensiones denominatoris, & residuo addatur
logarithmus unitatis, toties sumptus, quot de-
signat multitudo dimensionum denominatoris,
aucta unitate una, & diminuta multitudo di-
mensionum numeratoris. Ut fractionis $as : c^2$
logarithmus erit $5l. a \rightarrow 2l. c + (2 + 1 - 5) l. 1$,
hoc est $5l. a \rightarrow 2l. c \rightarrow 2l. 1$, prorsus, ut supra $\cdot$. ^{*art. 933.}

935. Superest tertius casus, quum logarith-
mus refertur ad quantitatem aliquam radicalem.
Sit ergo primum $\sqrt{a}$ quantitas radicalis, cujus
queritur logarithmus. Dico, logarithmum ejus
exprimi posse, non modo per $l. \sqrt{a}$, verum etiam
per $(l. a + l. 1) : 2$. Ponatur enim $\sqrt{a}$ æqualis
 x . Et, utraque quantitate ad quadratum ele-
vata, fiet a æqualis x^2 ; & $l. a$ æqualis $l. x^2$. Est
autem $l. x^2$ idem $\cdot$, ac $2l. x \rightarrow l. 1$. Quare ^{*art. 930.}
erit quoque $l. a$ æqualis $2l. x \rightarrow l. 1$; & addi-

to

to utrinque $l. 1$, erit $l. a + l. 1$ æqualis $2l. x$. Unde fiet demum $l. x$, sive $l. \sqrt{a}$ æqualis $(l. a + l. 1) : 2$.

936. Sit secundo $\sqrt[3]{a}$ quantitas radicalis, cujus logarithmus quæritur. Dico, logarithmum ejus designari posse, tam per $l. \sqrt[3]{a}$, quam per $(l. a + 2l. 1) : 3$. Ponatur enim hic quoque $\sqrt[3]{a}$ æqualis x . Et, utraque quantitate ad cubum elevata, fiet a æqualis x^3 ; & $l. a$ æqualis $l. x^3$. Est autem $l. x^3$ idem *, ac $3l. x - 2l. 1$. Quare erit pariter $l. a$ æqualis $3l. x - 2l. 1$; & addito utrinque $2l. 1$, erit $l. a + 2l. 1$ æqualis $3l. x$. Unde fiet demum $l. x$, sive $l. \sqrt[3]{a}$ æqualis $(l. a + 2l. 1) : 3$.

937. Sed, ut rem sub generali exemplo generaliter comprehendamus, esto n exponens signi radicalis; & a quantitas, unde talis radix est extrahenda. Dico, logarithmum ipsius $\sqrt[n]{a}$ exhiberi posse, tam per $l. \sqrt[n]{a}$, quam per $(l. a + nl. 1 - l. 1) : n$. Ponatur namque $\sqrt[n]{a}$ æqualis x . Et, elevata utraque quantitate ad eam potestatem, cujus exponens sit n , fiet a æqualis x^n ; & $l. a$ æqualis $l. x^n$. Jam vero $l. x^n$ idem est *, ac $nl. x - nl. 1 + l. 1$. Itaque erit quoque $l. a$ æqualis $nl. x - nl. 1 + l. 1$; & addito utrinque $nl. 1 - l. 1$ erit $l. a + nl. 1 - l. 1$ æqualis $nl. x$. Quare fiet demum $l. x$, sive $l. \sqrt[n]{a}$ æqualis $(l. a + nl. 1 - l. 1) : n$.

938. Id vero quum ita sit, facile erit, ostendere, quod, considerando quantitates radicales, velut potestates imperfectas, obtinet relate ad eas eadem omnino regula, quæ locum habet in potestatibus perfectis. Si enim a^n referat quamcumque potestatem perfectam ipsius a ; jam vidimus supra *, logarithmum ejus $l. a^n$ æqualem esse

esse $ml. a \rightarrow ml. 1 + l. 1$. Itaque, quum $\sqrt[n]{a}$ idem sit $*$, ac $a^{1/n}$; eo res redit, ut videamus, ^{*art. 777.} num substituta fractione $1:n$ loco m , oriatur expressio logarithmica ipsius $\sqrt[n]{a}$. Quod quidem liquet abunde. Nam, illiusmodi substitutione peracta, emergit $(l. a) : n \rightarrow (l. 1) : n + l. 1$, quæ reducitur ad $(l. a + nl. 1 \rightarrow l. 1) : n$.

III. Reductio omnium regularum præcedentium ad unam solam.

939. **V** Idimus paulo ante $*$, regulam, ^{*art. 938.} superius $*$ traditam, pro trans^{*art. 930.}

formandis expressionibus logarithmicis potestatum perfectarum, obtinere etiam, relate ad potestates imperfectas, quarum ope tolluntur signa radicalia. Sed in utroque casu sermo erat de potestatibus positivis, hoc est de iis, quæ numeros positivos pro suis exponentibus habent. Unde, quia tam perfectæ, quam imperfectæ potestates possunt esse pariter negativæ; optandum esset, ut eadem regula etiam in aliis hisce potestatibus locum haberet. Nam hac ratione liceret, uno eodemque canone cujuscumque quantitatis expressionem logarithmicam transformare.

940. Et sane, rem ita se habere, haud arduum erit ostendere. Si enim a^m referat quamcumque potestatem perfectam positivam ipsius a ; erit $* l. a^m$ æqualis $ml. a \rightarrow ml. 1 + l. 1$. ^{*art. 930.} Plane vero, si in hac expressione loco m ponatur numerus quilibet integer negativus $\rightarrow n$; mutabitur ea in hanc aliam $\rightarrow nl. a + nl. 1 + l. 1$. Unde pro potestatibus perfectis negativis eo res redit, ut ostendamus, logarithmum ipsius a^{-n} esse

Tom. I.

C c

fe

se. $\rightarrow nl. a + nl. 1 + l. 1$. Quod quidem li.

*art. 761. quidō patet. Nam, quum a^{-n} idem sit *, ac 1 ;

*art. 932. a^n ; erit * $l. a^{-n}$ æqualis $l. 1 + l. 1 \rightarrow l. a^n$,

*art. 939. Est autem * $l. a^n$ idem, ac $nl. a \rightarrow nl. 1 + l. 1$.

Quare erit $l. a^{-n}$ æqualis $l. 1 + l. 1 \rightarrow nl. a + nl. 1 \rightarrow l. 1$, hoc est $\rightarrow nl. a + nl. 1 + l. 1$.

941. Similiter, si in expressiōe logarithmica $ml. a \rightarrow ml. 1 + l. 1$ ejusdem potestatis perfectæ positivæ a^n loco m scribatur quælibet fractio negativa $\rightarrow 1 : n$; vertetur ea in hanc aliam

$\rightarrow (l. a) : n + (l. 1) : n + l. 1$, siue etiam

$(\rightarrow l. a + l. 1 + nl. 1) : n$. Quare pro potestatibus imperfectis negativis eo res redit, ut

ostendamus, logarithmum ipsius $a^{-1:n}$ esse $(\rightarrow l. a + l. 1 + nl. 1) : n$. Quod quidem abunde li-

*art. 745. quet. Nam, quum $a^{-1:n}$ idem sit *, ac $1 : \sqrt[n]{a}$;

*art. 932. erit * $l. a^{-1:n}$ æqualis $l. 1 + l. 1 \rightarrow l. \sqrt[n]{a}$.

*art. 937. Est autem $l. \sqrt[n]{a}$ idem, ac $(l. a + nl. 1 \rightarrow$

$l. 1) : n$. Itaque erit $l. a^{-1:n}$ æqualis $l. 1 + l. 1 \rightarrow (l. a \rightarrow nl. 1 + l. 1) : n$, hoc est $(\rightarrow l. a + l. 1 + nl. 1) : n$.

*art. 930. 942. Regula ergo, superius * tradita, pro transformandis expressiōibus logarithmicis earum potestatum, quæ sunt perfectæ positivæ, obtinet, tam relate ad potestates imperfectas positivas, quam relate ad potestates negativas, cum perfectas, cum imperfectas. Unde, si ope pote-

*art. 776. statum imperfectarum tollantur * signa radicalia, & mediantibus potestatibus negativis quantita-

*art. 762. tes fractæ revocentur * ad integras; licebit, una eademque regula cujuscumque quantitatis expressiōem logarithmicam transformare.

943. Regula autem ita se habet. Capiantur logarithmi quantitatum componentium, quibus

ve-

velut coefficientes præfigantur ipsi earum quantitatum exponentes, suis propriis signis affecti. Deinde ex summa eorundem logarithmorum subducatur logarithmus unitatis, toties sumptus, quot sunt quantitatis dimensiones, una dempta, Et residuum erit expressio logarithmica quæsitæ. Ubi tamen notandum, quod numerus dimensionum propositæ quantitatis capi debet, colligendo simul exponentes, suis propriis signis. Nam ex quantitates componentes, quæ exponentes habent negativos, non augent, sed minuunt numerum dimensionum.

944. Oporteat itaque primum, exprimere logarithmum hujus quantitatis $a^3b^4 : c^2d$. Sane, quum quantitas ista sit fractio, revocabitur ad quantitatem integram, scribendo $a^3b^4c^{-2}d^{-1}$. Quare summa ex logarithmis quantitatum componentium, quibus ipsi earum quantitatum exponentes, signis suis propriis, sint adscripti, erit $3l.a + 4l.b - 2l.c - 1l.d$. Et quoniam numerus suarum dimensionum est $3 + 4 - 2 - 1$, sive etiam 4; idem, unitatē minutus, erit 3. Unde logarithmus unitatis, ex summa illa subducendus, ter sumi debet: proindeque erit $3l.a + 4l.b - 2l.c - 1l.d - 3l.1$, logarithmus propositæ quantitatis.

945. Oporteat etiam, designare logarithmum alterius hujus quantitatis $a^3\sqrt[3]{b^2c} : f\sqrt[3]{df}$. Plane, sublatis ex ea signis radicalibus, eademque, velut fractione, ad integram quantitatem revocata, habebitur loco ejus hæc alia $a^3b^{2/3}c^{1/3} : f^{2/3}d^{1/3}$. Itaque summa ex logarithmis quantitatum componentium, quibus, signis suis propriis, præfixi sint earum quantitatum exponentes, erit $3l.a +$

Cc 2

2 (1.

$2(l.b) : 3 + 1(l.c) : 3 - 3(l.f) : 2 - 1(l.d) : 2$, Et quoniam numerus suarum dimensionum est $3 + 2 : 3 + 1 : 3 - 3 : 2 - 1 : 2$, si-
ve etiam 2; idem, unitate minutus, erit 1. Qua-
re logarithmus unitatis, ex summa illa subdu-
cendus, semel tantum sumi debet : & propterea
fiet propositæ quantitatis logarithmus $3(l.a) + 2(l.b) : 3 + 1(l.c) : 3 - 3(l.f) : 2 - 1(l.d) : 2 - 1(l.i)$.

946. Oporteat demum, logarithmum exhi-
bere quantitatis hujus $a^2 \sqrt{ab} : c^2$. Sane, si ea
radicali signo primum liberetur, tum deinde,
velut fractio, ad integram quantitatem reduca-
tur; eadem vertetur in hanc aliam $a^2 b : c^2$.
Unde, si capiantur logarithmi quantitatum com-
ponentium, iisque, suis propriis signis, ea-
rundem quantitatum exponentes præfigantur;
fiet summa eorum logarithmorum $5(l.a) : 2 + 1(l.b) : 2 - 2(l.c)$. Quia vero nume-
rus suarum dimensionum est $5 : 2 + 1 : 2 - 2$,
sive etiam 1; idem, unitate minutus, omnino
evanescet. Quare logarithmus unitatis, ex sum-
ma illa subducendus, nullies sumi debet : proin-
deque eadem illa summa $5(l.a) : 3 + 1(l.b) : 2 - 2(l.c)$ erit logarithmus propositæ quantitatis.

947. Cæterum, si logarithmus unitatis sta-
tuatur zero; idem, quot libuerit sumptus, sem-
per zero comperietur. Unde exhibebitur in hac
hypothesi logarithmus cujusvis quantitatis, quæ
sit expers signorum radicalium, & ad formam
quantitatis integræ sit revocata, longe facilius:
nimirum, capiendo simpliciter summam ex loga-
rithmis quantitatum componentium, quibus
suis propriis signis ipsi earundem quantitates ex-
po-

ponentes sint adscripti. Qua ratione erit $3^l. a \rightarrow 2^l. c$ logarithmus quantitatis $a^3 c^{-2}$; & $5^l. a \rightarrow 5^l. b$; $2 \rightarrow 1^l. c$; 2 logarithmus, alterius hujus quantitatis $a^5 b^{-5} c^{-1}$.

IV. Logarithmorum sedes geometrica, ubi de curva logarithmica.

948. **D**iximus supra *, quod sicuti in *art. 918.

eadem progressionē geometrica includi debent omnes quantitates, quarum quæruntur logarithmi; sic eadem progressio arithmetica sedes sit oportet omnium quæditorum logarithmorum. Jam, ut in priore progressionē quælibet quantitas assignabilis comperiatur, plane necesse est, ita eam interpolare, ut ratio, quæ termini ejus in infinitum progrediuntur, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia. Unde etiam in secunda progressionē omnino opus est, ut intervallum, quo in infinitum abeunt termini ipsius, minus fiat quocumque intervallo assignabili.

949. Id vero quum ita sit, licebit, ex terminis utriusque progressionis figuram quandam geometricam componere, vel saltem compositam intelligere, & ad eam confugere, quum vel, data quantitate, inveniendus est ejus logarithmus; vel vicissim, dato logarithmo, reperiri debet quantitas, cui ille correspondet. Jam enim triangulum sedes est duarum progressionum arithmeticarum, quarum termini progrediuntur in infinitum intervallo, minore quovis dato. Ad eundem itaque modum concipi poterit figura talis, ubi maneat quidem una

earum progressionum, quæ cernuntur in triangulo; sed altera sit progressio geometrica, in qua ratio, qua abeunt in infinitum termini ejus, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia.

FIG. 7. 950. Ut res clarius intelligatur, esto triangulum rectangulum ABC . Jamque, si in latere ejus AB capiantur portiones quælibet Aa , Ab , Ac , Ad , &c., & ex punctis a , b , c , d , &c. erigantur perpendiculares aa , bb , cc , dd , &c.; fient ipsis Aa , Ab , Ac , Ad , &c. proportionales rectæ istæ aa , bb , cc , dd , &c. Unde, si portiones Aa , Ab , Ac , Ad , &c. constituent progressionem arithmeticam; etiam rectæ aa , bb , cc , dd , &c. progressionem aliam arithmeticam component. Et, si porro eadem illæ portiones concipiantur numero infinitæ, & differentes a se mutuo minus, quam pro quavis assignabili differentia; adhuc rectæ aa , bb , cc , dd , &c. multitudine evadent infinitæ, & abibunt in infinitum intervallo, quovis dato minore.

FIG. 9. 951. Est ergo triangulum rectangulum ABC sedes duarum progressionum arithmeticarum, in quarum utraque termini promoventur in infinitum per differentiam, quavis data minorem. Subsistat modo in portionibus Aa , Ab , Ac , Ad , &c. eadem progressio arithmetica; sed rectæ, iis perpendiculariter insistentes aa , bb , cc , dd , &c. constituent progressionem geometricam, in qua ratio, qua abeunt in infinitum termini ejus, minus differat a ratione æqualitatis, quam pro data quavis differentia. In hoc casu, loco trianguli, alia habebitur figura, curva quadam linea terminata. Et ex ipsa ejus constitutione per-

perspicuum est, eandem esse veluti sedem geometricam omnium quæditorum logarithmorum.

952. Hæc autem figura multiplici quidem ratione differt a triangulo. Primo enim ea, ut jam dictum est, non recta, sed curva quadam linea terminatur. Deinde, quia progressio geometrica, tam ascendendo, quam descendendo, promovetur in infinitum * per terminos positi-^{*art. 735.} vos; eadem figura, etiamsi utrinque continetur, jacebit semper ad eandem partem respectu ipsius AB. Denique, quia ejusdem progressionis geometricæ nequit * ullus terminus omnino eva-^{*art. 735.} nescere; nec etiam curva, per quam figura illa terminatur, poterit rectæ AB alicubi unquam occurrere: licet ea ex parte, versus quam progressio geometrica decrescit, continuo ad eam accedat.

953. Curva porro, terminans figuram istam, FIG. 10. communiter a Geometris vocatur logarithmica. Et inter alias ejus proprietates hæc quidem est præcipua, quod, si ad aliquod ipsius punctum M ducatur tangens MT, conveniens cum AB in T, & exinde demittatur etiam super AB perpendicularis MN; intercepta portio NT, quæ subtangens dicitur, est ejusdem ubique longitudinis: adeo nempe, ut si recta PR tangat eandem curvam in alio quovis puncto P, & ex puncto isto demittatur similiter super AB perpendicularis PQ; æquales esse debeant inter se subtangentes duæ NT, QR.

954. Neque vero difficile id erit ostendere. Sint enim *As*, *Aq* termini, qui in progressionem arithmetica proxime excipiunt ipsos AN, AQ; sintque etiam *ms*, *pq* termini, qui in progressio-

ne geometrica post ipsos MN , PQ statim subsequuntur. Ut ergo Nn , Qq sunt nascentia incrementa ipsarum AN , AQ ; sic erunt Mm , Pp incrementa nascentia arcuum DM , DQ . Unde, per *art. 443*. ea, quæ superius ostensa sunt, poterunt Mm , Pp considerari, velut exiguae rectæ, coincidentēs cum ipsis tangentibus MT , PR ; adeoque, ductis rectis MO , PS , ipsi AB parallelis, erit, ut NT ad MO , ita MN ad Om ; & ut QR ad PS , ita PQ ad Sp .

955. Et quoniam ex hypothesi mn , pq sunt termini, qui in progressionē geometrica post ipsos MN , PQ statim subsequuntur; erit, ut MN ad mn , ita PQ ad pq : proindeque, subducendo antecedentes ex consequentibus, erit etiam, ut MN ad Om , ita PQ ad Sp . Est autem MN ad Om , ut NT ad MO , five Nn ; estque etiam PQ ad Sp , ut QR ad PS , five Qq . Quare erit quoque, ut NT ad Nn , ita QR ad Qq . Jam vero exiguae rectæ Nn , Qq inter se sunt æquales; quum ex hypothesi An , Aq sint termini, qui in progressionē arithmetica proxime excipiunt ipsos AN , AQ . Itaque etiam subtangentes duæ NT , QR æquales erunt inter se.

956. Eleganter autem contrahi potest demonstratio in hunc modum. Ratio, quam habet MN ad mn , est illa eadem, qua progrediuntur in infinitum termini progressionis geometricæ. Quare erit ubique eadem; & consequenter eadem pariter erit ubique ratio, quam habet MN ad Om . Est igitur $MN : Om$ quantitas invariabilis. Sed hujusmodi est etiam Nn , five MO ; quum sit intervallum, quo abeunt in infinitum termini progressionis arithmeticæ. Itaque
fa-

factum MN . MO : Om erit pariter quantitas invariabilis; adeoque, quum factum istud sit valor subtangentis NT , etiam subtangens NT invariatae longitudinis erit.

957. Sed ostendamus modo, quomodo, ope hujus figuræ, data qualibet quantitate, exhiberi possit ejus logarithmus; & vicissim, dato logarithmo, invenienda sit quantitas, cui ille correspondet. Hunc in finem definienda est primum in ea perpendicularis, quæ velut unitas debet haberi. Et quoniam subtangens curvæ logarithmicæ est * ejusdem ubique longitudinis; *art. 953 æquum est, velut unitatem habere eam perpendicularem, quæ subtangentem adæquat. Quumque ad calculi facilitatem * non parum conducat, ut zero sit logarithmus unitatis; efficiendum est quoque, ut punctum, in quod cadit perpendicularis illa, sit commune principium terminorum progressionis arithmeticæ. *art. 947

958. Hinc punctum A in ea, quam habet, positione erit quidem commune principium terminorum progressionis arithmeticæ, si perpendicularis AD adæquet subtangentem NT : aliter enim eo usque promoveri, aut retrahi debet, donec AD ipsi NT æqualis evadat. Hac autem æqualitate supposita, & assumpta AD velut unitas; jam zero erit logarithmus ipsius unitatis. Unde, si alterius cujuscvis quantitatis logarithmus esset exhibendus, abscindatur ex AD producta, si opus, portio AE , quæ sit ad AD , ut est proposita quantitas ad unitatem; & ducta per punctum E recta EM , ipsi AB parallela, quæ logarithmicæ occurrat in M , fiet EM logarithmus quæsitus. Nam, demissa super AB perpendi-

cu.

culari MN , æquales erunt inter se, tam duæ AE , MN , quam duæ EM , AN .

959. Jam termini progressionis arithmetice, ut sunt positivi, quum ex A tendunt versus B ; ita per contrarium evadunt negativi, quum vicissim ex A tendunt ad plagam oppositam. Unde similiter logarithmus inventus EM erit positivus, si AE major fuerit, quam AD ; erit vero negativus, si per contrarium fuerit minor. Et, ob eandem rationem, quum, dato logarithmo, oportet invenire quantitatem, cui ille correspon- det, semper quidem datus logarithmus capi de- bet super AB , ut perpendicularis, ei correspon- dens, referat quantitatem quæsitam; verum lo- garithmus ille capiendus est ex A versus B , quum afficitur signo $+$; & vicissim ex A ad par- tem contrariam, quum signo $-$ affectus repe- ritur.

V. Genesis, & natura quantitatum, quæ dicun- tur exponentiales.

960. **N**atura, ac proprietatibus quan- titatum logarithmicarum expo- sitis, haud arduum modo erit intelligere, quo- modo ex iis trahant originem suam quantitates exponentiales, & quæ sit natura, ac indoles ipsa- rum. Ordinemur autem ab illis, quarum exponentes sunt numeri radicales. Jamque vidimus, quod, exi- stente zero logarithmo unitatis, & referente 1 . a logarithmum ipsius a , esse debet 1 . a logarith- mus ipsius a^2 , $= 2$. 1 . a logarithmus ipsius a^3 , 2 (1 . a): 3 logarithmus ipsius a^4 , & $= 3$ (1 . a); 4 logarithmus ipsius a^5 , $= 4$. 1 . a . Quare vicissim,
si a

si a sit quantitas, cui correspondet $l.a$; erunt $a^2, a^{-2}, a^{2:3}, a^{-2:4}$ quantitates, ad quas referuntur $2l.a, \rightarrow 3l.a, 2(l.a):3, \rightarrow 3(l.a):4$.

961. Generaliter ergo statui potest, quod si a sit quantitas, cui correspondet $l.a$; & habeatur logarithmus alter, qui sit ad $l.a$ in ea ratione, quam habet quilibet numerus m ad unitatem; alter iste logarithmus referri debet ad eandem quantitatem a , elevatam ad eam potestatem, quam designat numerus m , hoc est ad a^m . Sed nihil vetat, pro numero m sumere quemcumque numerum radicalem. Unde quantitas, cui talis logarithmus correspondet, esse debet quantitas a , elevata ad eam potestatem, cujus exponens sit numerus ille radicalis; adeoque erit una ex iis quantitatibus exponentialibus, de quibus est sermo.

962. Ut, quia $(l.a)\sqrt{3}$ est ad $l.a$, ut $\sqrt{3}$ ad 1; non alia erit quantitas, ad quam refertur $(l.a)\sqrt{3}$, quam ipsa quantitas a , elevata ad potestatem, cujus exponens sit $\sqrt{3}$. Similiter, quia $(l.a)\sqrt[3]{5}$ est ad $l.a$, ut $\sqrt[3]{5}$ ad 1; inveniatur quantitas, cui correspondet $(l.a)\sqrt[3]{5}$, elevando quantitatem a ad eam potestatem, cujus exponens sit $\sqrt[3]{5}$. Atque ita, si oporteat invenire quantitatem, cui velut logarithmus correspondeat $(l.a)\sqrt[3]{3:2}$, elevanda erit quantitas a ad potestatem talem, quæ habeat $\sqrt[3]{3:2}$ pro suo exponente; quandoquidem $(l.a)\sqrt[3]{3:2}$ est ad $l.a$, ut est $\sqrt[3]{3:2}$ ad 1.

963. Hæc itaq; est genesis earum quantitatuum exponentialium, quæ habent pro suis exponentibus

bus numeros radicales. Sed ostendamus modo naturam, ac indolem istarum quantitatum. Et
Art. 502. quidem jam vidimus supra *, oriri numeros radicales, quum rationes quantitatum incommensurabilium quærentur, non jam inter numeros inexprimibiles, in quibus habent suas proprias sedes; sed inter eos, qui exprimi, enunciarique possunt. Inde vero facile erit intelligere, eosdem numeros radicales non aliud esse, quam quotientes, qui ex mutua duorum numerorum inexprimibilium divisione oriuntur.

964. Ut si ratio, quam habet latus quadrati ad suam diagonalem, quærenda esset in sede sua propria; eam, velut quantitatum incommensurabilium, per duos numeros inexprimibiles oporteret exhibere. Quare, quum dicimus, eandem illam rationem æqualem esse ei, quam habet 1 ad $\sqrt{2}$; etiam ratio ista, ad naturales suos terminos revocata, per duos numeros ineffabiles esset exhibenda. Unde, si duo istiusmodi numeri vocentur n , & m ; fiet, ut n ad m , ita 1 ad $\sqrt{2}$: proindeque erit $\sqrt{2}$ æqualis quotienti, qui oritur, dividendo m per n .

965. Eodem argumento ostendemus, quemcumque alium numerum radicalem esse quotientem, ortum ex mutua divisione duorum numerorum inexprimibilium. Unde, quid sibi velint quantitates exponentiales, quæ habent pro suis exponentibus numeros radicales; liquet abunde. Plane enim $a^{2/3}$ est radix tertia ipsius a^2 ; & $a^{4/5}$ est radix quinta ipsius a^4 . Quare ad eundem modum, si n , & m referant adhuc numeros inexprimibiles, ex quorum mutua divisione oritur $\sqrt{2}$; quantitas a , elevata ad $\sqrt{2}$, erit ea radix ipsius
 ip-

n^m , quam designat numerus n .

966. Generaliter ergo quantitas quæcumque exponentialis, quæ habet pro suo exponente numerum aliquem radicalem positivum, velut potestas quædam imperfecta positiva debet haberi; quum, ad instar potestatum imperfectarum positivarum, non aliud significet, quam radicem aliquam extrahendam ex aliqua ejus quantitatis perfecta potestate positiva. Nec sane aliud in ea peculiaris occurrit, quam quod sit numerus inexpressibilis; tum exponens perfectæ potestatis positivæ, ad quam quantitas elevata reperitur; cum index radice, quæ ex istiusmodi ejus quantitatis perfecta potestate positiva erui debet.

967. Fieri autem potest, ut exponens quantitatis exponentialis, sit quidem numerus aliquis radicalis, sed affectus signo negativo. Et quum id contingit, ipsa quantitas exponentialis naturam induet potestatis imperfectæ negativæ; adeoque designabit quotientem, qui oritur dividendo unitatem per radicem aliquam, extrahendam ex aliqua ejus quantitatis potestate perfecta positiva. Nam, si $\sqrt{2}$ designetur, ut prius * *art. 964*, per $m : x$; quantitas a , elevata ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$, idem erit, ac $a^{-m : x}$; adeoque tantundem valebit *, ac * *art. 775*, $1 : a^m : x$ sive etiam $1 : \sqrt{x a^m}$.

968. Cæterum, hanc esse naturam earum quantitatum exponentialium, quæ habent numeros radicales pro suis exponentibus; sic etiam conjici potest. Per ea, quæ superius * ostensa * *art. 782*, sunt, oriuntur potestates imperfectæ, tum positivæ, cum negativæ, interpolando seriem geometricam potestatum perfectarum interjectione aliorum terminorum; & habentur exponentes alia-

aliarum illarum potestatum, interpolando per interjectionem terminorum totidem seriem arithmeticam exponentium, qui ad easdem perfectas potestates referuntur.

969. Jam nihil vetat, utramque seriem subinde interpolatam concipere, ut multitudo terminorum, inter binos quosque interjectorum, sit prorsus inexprimibilis; nec subinde adaucta multitudine talium terminorum, earum natura mutabitur. Erunt ergo adhuc potestates imperfectæ termini interjecti in serie geometrica; & erunt adhuc exponentes earum potestatum termini interpositi in serie arithmetica. Unde, si aliqui istorum terminorum esse possint numeri radicales, erunt aliquæ ex iis potestatibus quantitates exponentiales, de quibus est sermo.

970. Fieri vero posse, ut sint numeri radicales aliqui ex terminis interjectis in serie arithmetica; id liquet abunde. Jam enim multitudo terminorum, qui inter binos quosque ejus seriei concipi debent interjecti, inexprimibilis ponitur. Quare omnino necesse est, ut quisque ex terminis interjectis ex mutua duorum numerorum inexprimibilium divisione oriatur: proindeque, si contingat, ut in numeris hisce suam sedem habeat ratio duarum quantitatum incommensurabilium; plane fieri debet, ut sit radicalis numerus quotiens, qui ex mutua eorum divisione producitur.

971. Pergamus modo ad eas quantitates exponentiales, quarum exponentes sunt; vel ipsæ quantitates, ad quas referuntur, ut a^a , b^b , c^c ; vel quantitates aliæ, ab iis plane diversæ, ut a^b , b^a , c^b . Ac primo quidem genesis earum

rum est plane eadem. Si enim, existente zero logarithmo unitatis, referat $l.a$ logarithmum ipsius a ; nihil vetat, concipere logarithmum alium, ad quem $l.a$ sit, ut unitas ad a , aut c . Plane vero alter iste logarithmus erit $cl.a$, aut $cl.a$. Unde ex theoremate generali, superius ^{art. 966,} posito, fiet a^c , aut a^c , quantitas, cui talis logarithmus correspondet.

972. Quantum ad naturam talium quantitatum exponentialium, considerare prius oportet, quod etsi $l.a$ sit ad $cl.a$, ut est unitas ad c ; attamen unitas in isto casu non est abstracta, seu numerica, sed ejusdem plane generis cum ipsa quantitate c . Quum ergo in serie numerorum naturalium omnes omnino quantitatum rationes reperiantur; licebit, eandem illam rationem per duos ejus seriei numeros exhibere. Quare si n , & m sint duo isti numeri; erit, ut $l.a$ ad $cl.a$, ita n ad m : proindeque, quum fiat $cl.a$ æqualis $m(l.a)$; n , erit a^c idem, ac a^m .

973. Jam fractio numerica $m:n$, pro qualitate sui numeratoris, ac denominatoris, vel est exprimibilis, vel inexprimibilis. In primo casu erit valor ejus numerus aliquis rationalis, sive integer, sive fractus. In secundo autem casu fiet valor ejusdem numerus aliquis radicalis. Unde consequens est, ut quantitas exponentialis a^c , vel pertineat ad aliquam potestatem, quas superius ^{art. 714,} consideravimus, vel etiam, ut sit talis potestas ipsius a , quæ habeat pro suo exponente ^{715.} numerum aliquem radicalem.

974. Et sane, si quantitates exponentiales, de quibus est quæstio, quum vel ipsæ, vel ex quibus

bus proportionem correspondent, augentur, vel minuuntur, haberent pro suis exponentibus easdem semper, ac invariatas quantitates; eas, per substitutionem congruentium numerorum, omnino ex calculo eliminare liceret. Sed fieri potest, ut in earum incremento, vel decremento ipsi etiam talium quantitatuum exponentes mutationem patiantur. Quod sane quum evenit, non aliter, quam sub ea forma, illiusmodi quantitates ad calculum sunt revocandæ.

975. Ut, si fuerint x , & y duæ quantitates simul crescentes, aut decrescentes; & lex incrementi, aut decrementi talis sit, ut uni earum x maneat semper proportionalis altera y , elevata ad eam potestatem, quam designat x , vel y : omnino opus est, ad exprimendam proportionem istam generaliter, ac indefinite, exhibere hanc ipsius y potestatem per y^x , vel per y^y ; & non nisi in casibus specialibus, loco ejus exponentis variabilis, congruentes numeros subrogare licebit.

976. Ex eo autem, quod istæ quantitates exponentiales usui sunt nobis tantum, quum sui exponentes sunt variabiles, factum est, ut eædem quantitates dicerentur etiam percurrentes. Sed perspicuum est, earum contemplationem in infinitum abire, Ut enim datur quantitas exponentialis x^x ; sic etiam dari poterit ipsius x talis potestas, cujus exponens sit x^x ; & rursus alia, quæ habeat potestatem istam pro suo exponente; atque ita deinceps. Unde, pro qualitate exponentis, poterunt in varios ordines distingui.

FINIS LIBRI PRIMI.

IN.

INDEX⁴¹⁷

Sectionum , Capitum , & Paragraphorum , quæ in primo hoc Libro continentur.

SECT. I. De calculo quantitatum rationalium.

CAP. I. Calculus rationalium simplicium.

- I. Additio rationalium simplicium.
- II. Subtractio rationalium simplicium.
- III. Multiplicatio rationalium simplicium.
- IV. Divisio rationalium simplicium.

CAP. II. Calculus rationalium compositarum.

- I. Additio rationalium compositarum.
- II. Subtractio rationalium compositarum.
- III. Multiplicatio rationalium compositarum.
- IV. Divisio rationalium compositarum.

CAP. III. Calculus fractionum rationalium.

- I. Reductiones fractionum rationalium.
- II. Additio fractionum rationalium.
- III. Subtractio fractionum rationalium.
- IV. Multiplicatio fractionum rationalium.
- V. Divisio fractionum rationalium.

CAP. IV. Rationalium ad potestates elevatio.

- I. Definitio , ordo , ac genesis potestatum.
- II. Formatio quadrati , seu secundæ potestatis.
- III. Formatio cubi , seu tertiæ potestatis.
- IV. Formatio potestatum superiorum.
- V. Fractionum rationalium ad potestates elevatio.

Tom. I.

D d

CAP.

CAP.V. Extractio radicum ex rationalibus.

- I. Extractio radice quadrata.*
- II. Extractio radice cubica.*
- III. Extractio aliarum radicum.*
- IV. Extractio radicum ex fractionibus rationalibus.*
- V. Genesis quantitatum incommensurabilium.*
- VI. Ratio designandi quantitates incommensurabiles.*

SECT.II. De calculo quantitatum radicalium.**CAP.I. Calculus radicalium simplicium.**

- I. Reductiones radicalium simplicium.*
- II. Additio radicalium simplicium.*
- III. Subtractio radicalium simplicium.*
- IV. Multiplicatio radicalium simplicium.*
- V. Divisio radicalium simplicium.*
- VI. Radicalium simplicium ad potestates elevatio.*
- VII. Extractio radicum ex radicalibus simplicibus.*

CAP.II. Calculus radicalium compositarum.

- I. Additio radicalium compositarum.*
- II. Subtractio radicalium compositarum.*
- III. Multiplicatio radicalium compositarum.*
- IV. Radicalium compositarum ad potestates elevatio.*
- V. Preparatio ad divisionem radicalium compositarum.*
- VI. Divisio radicalium compositarum.*

CAP.III. Extractio radicum ex binomiis.

- I. Natura binomiorum, unde radices sunt extrahenda.*

II.

- II. Extractio radicis quadrata ex binomiis.
- III. Extractio radicis cubica ex binomiis.
- IV. Extractio aliarum radicum ex binomiis.
- V. Genesis, & calculus radicalium universalium.

CAP. IV. Natura quantitatum imaginariarum.

- I. Genesis quantitatum imaginariarum.
- II. Natura quantitatum positivarum, & negativarum.
- III. Existentiæ numerorum negativorum plenius vindicata.
- IV. Quid proprie sit radicem extractio, quodve criterium proportionis.
- V. Impossibilitas quantitatum imaginariarum ex proprio fonte deducta.
- VI. Quantitatum imaginariarum in ordines distributio.

CAP. V. Calculus quantitatum imaginariarum

- I. Additio, & subtractio quantitatum imaginariarum.
- II. Multiplicatio, & divisio quantitatum imaginariarum.
- III. Formatio potestatum, & extractio radicis ex quantitativis imaginariis.
- IV. Genesis, & calculus imaginariarum compositarum.
- V. Impossibilitas relativa quantitatum imaginariarum plenius vindicata.

SECT. III. De calculo serierum infinitarum.

CAP. I. Distinctio quantitatum in indefinite magnas, & parvas.

- I. Notio quantitatis, & per quid discreta

D d 2

II. Ge.

differat a continua.

II. Genesis quantitatis, ejusque augenda, vel minuenda ratio.

III. Quantitatum indefinite parvarum ortus, & natura.

IV. Quantitatum indefinite parvarum in ordines distinctio.

V. Theoria precedentis praeclara quaedam confectaria,

CAP. II. *Genesis, & natura serierum infinitarum.*

I. Series numerorum naturalium ad examen revocata.

II. Numerorum radicalium, tum item fractionum natura, ac genesis explicata.

III. Progressiones geometricae decrecentes ad examen revocata.

IV. Genesis serierum infinitarum ex divisione.

V. Genesis serierum infinitarum ex extractione radicum.

VI. Serierum infinitarum notio generalis.

CAP. III. *Series summabiles, quae figuratis primi generis fiunt.*

I. Numeri Veterum multanguli, tum item figurati Recentiorum.

II. Figuratarum primi generis praeclara proprietates demonstrata.

III. Ratio colligendi, tum figuratos, cum potestates numerorum naturalium.

IV. Theorematum precedentium ad figuras geometricas applicatio.

V. Prima classis serierum summabilium, quae figuratis primi generis fiunt.

VI. Secunda classis serierum summabilium, quae

qua figuratis primi generis fiunt.

CAP. IV. *Series summabilium , qua figuratis aliorum generum fiunt.*

- I. *Genitorum , & figuratorum omnium generum proprietas singularis.*
- II. *Ratio colligendi figuratos cujusque ordinis in singulis generibus.*
- III. *Quae sint series summabiles , qua figuratis aliorum generum fiunt.*
- IV. *Series , qua fiunt in versione potestatum , & radicum numerorum naturalium.*
- V. *Solutio propositi paradoxii , & examen theorematum , unde illud derivatur.*
- VI. *Enodatio aliorum paradoxorum , qua sunt affinia praecedenti.*

SECT. IV. *De generali potestatum theoria.*

CAP. I. *Variae potestatum species explicatae.*

- I. *Natura progressionis arithmetica , & geometrica.*
- II. *Analogia inter progressionem arithmetica , & geometricam .*
- III. *Natura potestatum , qua dicuntur perfecta negativa .*
- IV. *De potestatibus imperfectis , tam positivis , cum negativis.*
- V. *Genesis aliarum potestatum , & calculus omnium per exponentes.*

CAP. II. *Potestatum vulgarium formula generalis.*

- I. *Terminorum cujusque potestatis generalis expressio .*
- II. *Tabula , terminorum cujusque potestatis coefficientes exhibentis , constitutio .*
- III.

III. Coefficientium terminorum cujusque potestatis expressio generalis.

IV. Potestatum formula generalis exhibetur.

V. Formula usus in conficiendis potestatibus ostenditur.

CAP. III. Usus formulae praecedentis in conficiendis seriebus infinitis.

I. Usus formulae pro seriebus, quae oriuntur a divisione,

II. Usus formulae pro seriebus, quae oriuntur ab extractione radicum.

III. Usus formulae pro seriebus, quae ex utroque fonte oriuntur.

IV. Series, figuratos numeros continentes, continuatae, ac interpolatae.

V. Demonstratio tradita interpolationis, & progressionum arithmeticarum proprietates singularis.

VI. Generalis vulgarium potestatum formulae extensio demonstrata.

CAP. IV. Aliae potestatum species enodatae.

I. Natura, & proprietates quantitatum logarithmicarum.

II. Transformationes expressionum logarithmicarum ad suas regulas revocatae.

III. Reductio omnium regularum praecedentium ad unam solam.

IV. Logarithmorum sedes geometrica, ubi de curva logarithmica.

V. Genesis, & natura quantitatum, quae dicuntur exponentiales.

FINIS INDICIS.

ER.

E R R A T A:

Pag.	24. lin. 2.	$9b^4$	leg.	$6b^4$
35.	2.	denominatorem		numeratorem
	5.	$(bc - bd)$		$(bc - bd)$
50.	29.	n^6		n^5
54.	2.	$3a^4b^2d^2$		$3a^4b^2d^2$
67.	12.	a^3b^3		b^3c^3
	14.	a^3b^3		b^3c^3
71.	19.	$2a$		$5a$
74.	3.	$3\sqrt{3}$		$3\sqrt{3}$
88.	26.	$\sqrt{a^2cd}$		$\sqrt{ac^2d}$
92.	29.	cubica		quadrata
103.	9.	$\sqrt{a^2b^2cd}$		$\sqrt{3a^2b^2cd}$
114.	22.	radicali		rationali
138.	13.	imparis		paris
169.	2.	$— 3$		$— 2$
229.	17.	$— b^4 : 4a^3$		$— b^4 : 4a^3$
266.	14.	21. 1760		21 : 1690
288.	16.	10, 15		10, 13
	17.	1, 2, 3		1, 2, 3
338.	31.	$\sqrt{a^{12}}$		$\sqrt{3a^{12}}$
359.	13.	$(1. 2. 2)$		$(1. 2. 3)$
363.	9.	$2p^2$		$1p^2$

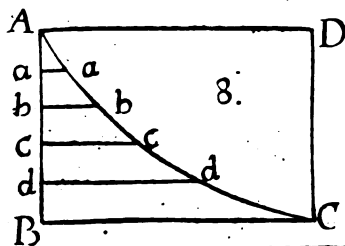
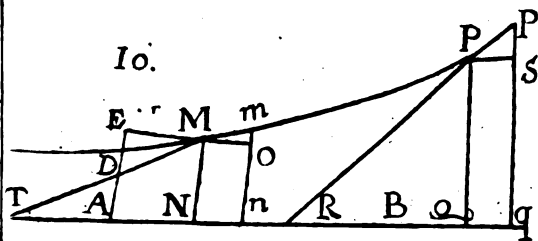
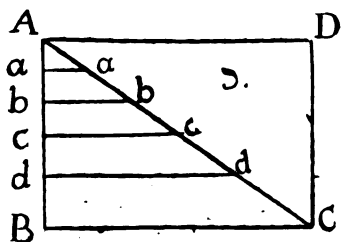
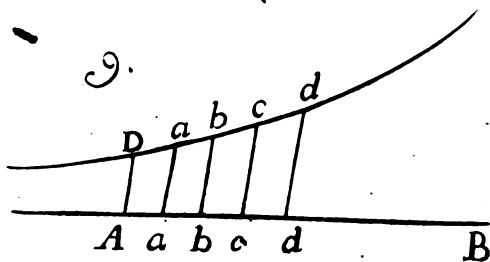
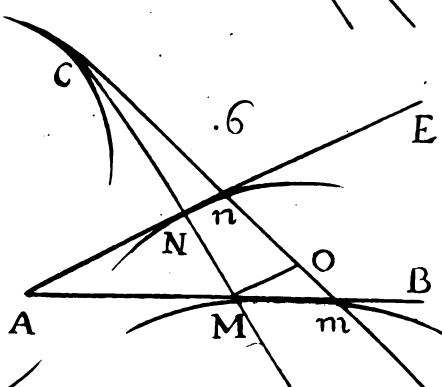
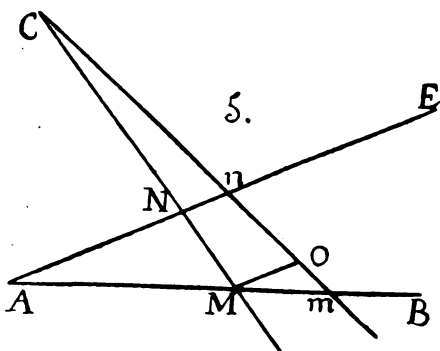
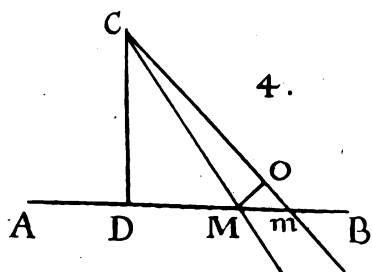
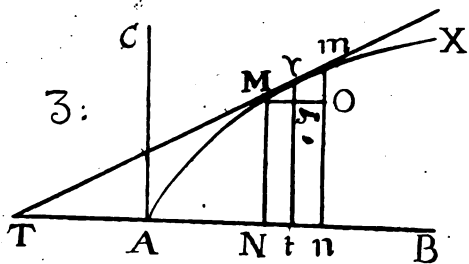
M O N I T U M.

HÆc sunt, BENEVOLE LECTOR, errata præcipua, quæ priorem hunc librum perlustrantibus sese nobis obtulerunt. Si alia occurrant, quæ oculos nostros effugerint, ea iudicio tuo corrigenda relinquimus. Vbi autem agitur de conficiendis seriebus infinitis ope potestatum
for-

formulæ generalis , novimus , substitutiones valorum $d, e, f, g, \&c.$, quas diximus fieri debere signis probe observatis , nonnullis difficultatem facere . Itaque , ne in eundem locum impingas , monitum te volumus , quod , sicuti formula illa refertur , vel ad $a + ac$, vel ad $a - ac$; ita partes ejus formulæ afficiuntur omnes signo $+$, quum refertur ad $a + ac$; & alternatim signis $+$, $ac -$, quum refertur ad $a - ac$. Hinc , quotiescumque in exemplis specialibus partes illæ non oriuntur subinde affectæ ; tunc mutationes signorum adscribendæ sunt ipsis quantitativibus $d, e, f, g, \&c.$: & propterea negative eas accipere oportebit.

D A C B

C D A² B



62011010

DEC 26 1939

UNIVERSITY OF
LIBRARY



