ANDREÆ TACQUET

Soc. Jesu Matheseos Prof.

ARITHMETICÆ THEORIA, ET PRAXIS

Editio novissima, præcedentibus nitidior, & emendatior, cui accessit

NICOLAI DE MARTINO DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS OPUSCULUM.

NEAPOLI MDCCXXXII.
Ex Typographia Felicis Mosca.
Superiorum permissu.

Expensis Bernardini Gessari.

AD LECTOREM.

TACQUETI *Arithmeticam, sæpius recusam, denuo tibi sisto, Benevole Lector; quum saltem in nostris hisce regionibus difficile esset eam comparare. Non hic te moror in operis Auctore laudibus prosequendo; quippe quem, & sua in inveniendo subtilitas, & ejusdem in exponendo solertia jam omni fecit laude majorem. Multò minus Editionem hanc meam tibi commendo; nam quantum præcedentibus sit nitidior, & emendatior, vel ex sola earum collatione liquebit. Id unum monitum te volo, Editioni huic operam dasse præclarissimum Juvenem Nicolaum de Martino, qui in illustri Lycæo Neapolitano magno applausu publice Mathesim profitetur. Quumque eum rogassem, ut non sineret, adeo præclarum opus sine aliquo comitatu iterum in lucem prodire, cogitabat ille brevi Algebræ specimine novam ejus Editionem ornare. Sed deinde opusculum de Permutationibus, & Combinationibus, in calce Operis jam appositum, composuit; quia doctrina ista, adeo utilis, visa est ei leviter ab Auctore pertractata. Interim loco speciminis integram, omnibusque numeris absolutam Algebram tibi parat, quæ propediem lucem adspiciet; quum primæ ejus paginæ jam sub prælo reperiantur. Vale.*

SYLLABUS
LIBRORUM, AC CAPITUM.

ARITHMETICÆ.

LIBER SECUNDUS.

Logistica fractorum numerorum.

LIBER TERTIUS.

De Radicum extractione.

CAP.

LIBER QUARTUS.

De Regulis.

LIBER QUINTUS.

De Progressionibus.

De Progressione Arithmetica.

CAP.

De Progressione Geometrica, cum finita, tum infinita.

APPENDIX.

Ad Bibliopegum.

Figuras omnes operis calci apponendas censeo, ita quidem, ut ad usum extra pagellas explicatæ promineant.

R. D. Thomas Faenza, Prælector S. Theol. in Seminario Neap. Archiep. revideat, & referat. Neap. 20. Julii 1724.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. G.
D. Petrus Marcus Giptius Can. Dep.

EMINENTISSIME DOMINE.

JUssu Emin. Tuæ legi librum, cui titulus *Andreæ Tacquet Arithmeticæ Theoria, & Praxis*, nihilque in eo deprehendi, quod Christianæ pietati, aut fidei adversaretur; quapropter, si ita Em. Tuæ videbitur, illum iterum typis edi posse censeo.

Em. Tuæ

Humillimus, & obsequentiss. Famulus
D. Thomas Faenza.

Attenta supradicta relatione, reimprimatur. Neap. 30. Julii 1724.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. G.
D. Petrus Marcus Giptius Can. Dep.

REIMPRIMATUR. *Neap. 26. Julii 1724. Verum in publicatione servetur Regia Pragmatica.*

ARGENTO REG. ET PRÆSES.
Pescarinus.

ARITH.

ARITHMETICÆ PROLEGOMENA.

ARithmetica est pars Mathematicæ, extructa ex principiis nobiscum natis, occultas numeri proprietates, & intricatas rationes rectè, & facilè explicare docens.

Adjuncta Arithmeticæ, alia sunt communia toti Mathematicæ, ea scilicet, quæ sequuntur; alia sunt ipsi propria, quæ ista subsequentur.

1. Arithmeticæ, sicut & Mathematicæ, thesaurus tantus est, ut nemo unquam illum totum exhaurire potuerit. Omnes enim artifices de seipsis fateri coguntur, quod Solon de seipso testatur, cum ait.

Assiduè discens plurima, fio senex.

2. Arithmetica, sicut & Mathesis, est maxima Sapientiæ humanæ pars, & certitudine artes omnes, ut Medicinam, Militarem, & alias; ordine vero Ethicam antecedit. Per demonstrationes enim ac-

quiritur, & una ex speculativis est: objecti verò ratione media est inter speculativas, Physicam superans, superata à Metaphysica.

3. Maxima beneficia maximâ ingratitudine compensantur, ait historicus. Idem & Arithmeticæ, sicut Mathematicæ, sæpè accidit, quam de omnibus optimè meritam multi non tantùm negligunt; sed & ut inutilem contemnunt.

4. Quælibet terra artem alit: aliæ verò regiones aliam imprimis. Sic Arithmeticam præcipuè Phænices: Geometriam Ægyptii: Astronomiam Chaldæi: Græci universam Mathematicam excoluisse traduntur; inter quos Plato, Vir sapientissimus, Græciæ extitit.

5. Arithmetica, ut Mathematica, una antiquissimarum scientiarum est. Nam & Veteres illam docebant, discebant, exercebant, priusquam vel Physica, vel Ethica, vel Logica esset: & inventis etiam his & aliis artibus, aut scientiis, ab hac initia studiorum ducebant: eruditionis verò absolutionem à Physicis, & Politicis petebant.*

1. Ar-

* *Plura alia videri possunt in narratione historica de ortu & progressu Matheseos, Elementis Geometriæ ejusdem Authoris præfatâ, Editione ultimâ Amstelodami* 1701. *apud* F. van-der Plaats.

1. Arithmetica omnium Mathematicarum prima est, & veluti parens, dux, & domina. Hac enim sublatâ, evanescunt & cæteræ: sed non contra, sublatis cæteris, etiam hæc ipsa evanescit.

2. Nullius artis tam frequens, quàm Arithmeticæ, actio est. Hæc agit, sive quis negotio, sive otio se dedat: hæc operam dat studioso, tum pecuniæ, tum artium liberalium: hæc privatam, & publicam vitam agenti fidelem ministram se præbet.

3. Floruisse apud Phænices propter mercaturam, referunt historici: floret eadem etiamnum in tabernis Mercatorum. Turpe igitur jacere spretam, atque neglectam in Scholis, quibus scientiarum, & artium defensionem, atque conservationem Respublica commendavit.

4. Hæc disciplina, ut mox incipiente mundo cœpit, ita nulli magis ætati, quàm primæ convenit: eamdem ob caussam discenda inter ipsa studiorum initia, & non post principia.

Objectum illius est numerus.

Species duæ: Vulgaris, & Cossica. Hæc alterius temporis opus erit: Illa vero, de quâ nunc agitur, in duas partes dividetur, scilicet in Theoricam & Practicam, ad quarum intelligentiam necessaria sunt aliqua principia, sive definitiones, & axiomata, nec non quædam adnotationes, quæ sequuntur, & quæ sparsim in hoc opere dispergentur.

DEFINITIONES.

1. UNitas est, secundùm quam unumquodque eorum, quæ sunt, unum dicitur.

Omnis numeri principium unitas est.

2. Numerus est composita ex unitatibus multitudo.

3. Numerus numerum metiri dicitur, cum minor aliquoties sumptus majori æqualis fit.

4. *metitur* 12., *quia ter* 4. *facit* 12. *Unitas metitur omnes numeros.*

4. Numerus numeri multiplex est, cum minor metitur majorem, sive cum major minorem aliquoties continet præcisè.

5. Pars aliquota numeri est, quæ numerum metitur: pars aliquanta, quæ non metitur.

Numerus 2. *est pars aliquota* 10. *quia me-*

metitur 10.*acceptus nimirum quinquies.* 3.*verò est pars aliquanta* 10.*quia non metitur* 10. *nam ter acceptus facit* 9. *acceptus quater facit* 12.

6. Similes aliquotæ partes sunt, quæ sua tota æqualiter metiuntur; sive, quæ in suis totis æquè sæpe continentur.

2. & 3. *sunt similes aliquotæ* 10. 15. *numerorum* 10.& 15.*quia tam* 2 3
2.*in* 10.*quàm* 3.*in* 15.*continentur quinquies:sive tam* 2.*totum suum* 10. *quàm* 3. *suum totum* 15. *metiuntur per eumdem numerum* 5.

7. Similes partes aliquantæ sunt, quæ in suis totis æquè sæpe continentur, atque insuper æquè multæ ipsarum partes aliquotæ similes.

Vel partes aliquantæ similes sunt, quæ æquè multas suorum totorum continent aliquotas similes.

14 28 8 & 16. *sunt similes partes ali-*
8 16 *quantæ numerorum* 14 & 28. *quia sicuti* 8 *continetur semel in* 14, *atque insuper* 6 *seu ter* 2. *hoc est tres quartæ partes ipsius* 8.*ita* 16 *in* 28.*continetur semel, atque insuper* 12, *seu ter* 4.*hoc est etiam tres quartæ partes* 16.

Vel sic: 8 & 16. *sunt similes partes ali-*

quantæ totorum 14 *&* 28. *quia ſicuti* 8 *continet totius* 14 *quatuor ſeptimas partes, nempe quater* 2. *ita* 16 *continet totius* 28 *quatuor ſeptimas, nempe quater* 4.

8. In numeris ratio, ſive proportio eſt duorum numerorum mutua quædam habitudo ſecundùm exceſsum, vel defectum, vel æqualitatem.

In omni proportione duo ſunt termini; quorum is dicitur antecedens, qui primo loco ſive in recto nominatur; alter conſequens. Cum antecedens eſt major conſequente, dicitur proportio majoris inæqualitatis, ſeu majoris ad minus. Cum antecedens eſt minor conſequente, proportio minoris inæqualitatis, ſeu minoris ad majus appellatur. Cum antecedens conſequenti par eſt, dicitur æqualitatis proportio.

9. In numeris duæ proportiones ſunt æquales, eædem, ſimiles (idem iſta ſignificant) ſive quatuor numeri (A. B. C. D.) dicuntur proportionales, cùm minores utriuſque proportionis termini in majoribus eodem modo continentur. Continentur autem eodem modo, ſi minores (B, D) ſint majorum (A, C) ſimiles partes *a* aliquotæ, vel ſimiles partes *b* aliquantæ.

A	8	2	B
C	16	4	D

[a] vide def. 6.
[b] vide def. 7.

A	14	8	B	*Æquales proportiones sic*
C	28	16	D	*efferimus, 8. est ad 2.*

ut 16 est ad 4.

Vel 8 habet ad 2. eamdem rationem, quam 16 ad 4.

10. Cùm plures extiterint æquales rationes, & prioris consequens fuerit antecedens posterioris (sic ut medii termini bis sumantur,) proportio continua dicitur; & numeri ipsi dicuntur continuè proportionales.

Continuas rationes sic efferimus: 1. est ad 2. ut 2. ad 4. & 4. ad 8. & 8. ad 16. &c. 1.2.4.8. 16. 32.

11. Quod si unius æqualium proportionum consequens non sit antecedens alterius, ac proinde medii termini non accipiantur bis, discreta proportio erit; & numeri ipsi proportionales dicuntur, nullo alio addito.

Discretas proportiones sic efferimus. 9 est ad 3. ut 12. ad 4. 9. 3. 12. 4.

12. Cum numeri fuerint continuè proportionales (A, B, C, D, E,) ratio primi A ad tertium C duplicata dicitur rationis, quam habet primus A ad secundum B; & ratio primi A ad quartum D dicitur tri-

A,	B,	C,	D,	E,
1	3	9	27	81
81	27	9	3	1

plicata rationis primi A ad secundum B; & sic deinceps.

De rationum denominatoribus & compositione, vide Elementa nostra Geometrica l. 5. parte 3. *

*Pag. 265. Edit. ultimæ Amstelod.

13. Numerus A multiplicare dicitur numerum B, cum B multiplicandus toties accipitur, quot sunt unitates in A multiplicante.

Vel sic: numerus A multiplicat numerum B, cùm invenitur numerus C toties continens multiplicatum B, quoties A multiplicans continet unitatem.

Verùm universaliùs multiplicatio sic definitur. Numerus A multiplicat numerum B, cum numerus reperitur C, qui ita sit ad B multiplicatum, ut A multiplicans ad unitatem.

C8	B4
A2	1

Numerus C, qui invenitur, dicitur productus, seu genitus. Porro cum multiplicans A est numerus integer, semper productus C major est multiplicato B, ut patet ex def. 1. & 2. Cum vero multiplicans A est fractio minor unitate, productus C etiam erit minor multiplicato B, ut patet ex postrema definitione.

$$C\,\frac{4}{3}\text{--}B\,4 \qquad A\,\frac{1}{3}\text{--}1$$

Plu-

Plures numeri ut 2, 4, 3, per invicem multiplicari dicuntur, si 2 in 4, faciat 8, & productum 8 ducatur in 3; productum enim ultimum 24 est id, quod fit ex multiplicatione numerorum, 2, 4, 3.

Porro idem apud Arithmeticos est numerum in numerum ducere, quod numerũ per numerũ multiplicare. Frequens etiam ista locutio est, A per B, vel potius A in B: hoc est A ductus, seu multiplicatus per B.

14. Numerus A dicitur dividere numerum B, cum numerus invenitur C, indicans quoties A divisor in B contineatur.

Et sic divisor A est pars divisi seu dividendi B, ab invento (qui proinde quotiens dicitur) denominata.

B 12	3 C
A 4	1

Vel universaliter: numerus A dividit numerum B, cùm alius numerus invenitur C ita se habens ad unitatem, ut divisus B ad A divisorem.

15. Numerus A metiri dicitur numerum B per X numerum aliquem (qui quotiens appellatur) cùm metiens A toties sumptus, quot in X quotiente sunt unitates, mensum adæquat.

B 16	X 8
A 2	1

Hæc definitio differt à præcedenti, 1. quòd

I. *quòd divisio peragi possit, licèt divisor dividendum non metiatur.* II. *licèt divisor sit major dividendo, ut suo loco traditur. Latiùs igitur patet divisio, quàm mensio.*

16. Par numerus est, qui bifariam dividi potest. *Omnem ergo parem numerum aliquis numerus metitur per 2.*

17. Impar numerus est, qui bifariam dividi non potest, sive, qui unitate differt à pari.

18. Pariter par est, quem par per parem metitur. *Talis est 24, quem par numerus 6 metitur per parem 4.*

19. Pariter impar est, quem par metitur per imparem. *Talis est 12, quem 4 par metitur per 3 imparem.*

20. Impariter impar est, quem impar metitur per imparem. *Talis est 21, quem 7 impar metitur per imparem 3.*

21. Primus, seu incompositus numerus est, quem sola unitas metitur, *ac proinde nullas habet partes aliquotas præter unitates.*

Tales sunt, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, & alii infiniti. Porro omnis primus numerus necessariò impar est, aliàs eum metiretur binarius.

22. Compositus numerus est, quem præter unitatem, aliquis numerus ab ipso di-

diversus metitur; *ac proinde habet partes aliquotas ab unitatibus diversas.*

Tales sunt 4. 6. 8. 9. 10. 12. 14. 15. *& alii infiniti.*

23. Primi inter se numeri sunt, quos nulla alia mensura communis metitur, quàm unitas.

Duo inter se primi sunt 15. *&* 8. *quia licet singulos aliqui numeri metiantur, ac proinde neuter primus sit; tamen nullus numerus utrumque metitur. Pari modo* 8. 10. 15. *sunt tres primi inter se, quia nullus numerus illos tres metitur, & sic deinceps.*

24. Compositi inter se numeri sunt, quos præter unitatem aliquis numerus, communis mensura, metitur.

Potest autem mensura communis esse unus datorum numerorum.

Duo inter se compositi sunt 8. *&* 10. *quia utrumque metitur* 2. *Similiter* 5. *&* 15. *sunt duo compositi inter se, quia* 5. *metitur & seipsum, &* 15. *Tres inter se compositi sunt* 3. 9. 12. *quia* 3. *metitur* 9. *&* 12. *& se.* 6. 10. 12. 16. *sunt quatuor compositi inter se, quia* 2. *metitur omnes quatuor.*

25. Planus numerus est, qui ex duorum numerorum multiplicatione producitur. Numeri autem invicem multiplicantes plani latera dicuntur.

Omnis

Omnis ergo planus est compositus.

Sic planus est 12. quia fit ex 6. per 2. item 24. quia fit ex 4. in 6.

26. Solidus numerus est, qui ex trium numerorum multiplicatione producitur. Numeri verò se mutuò multiplicantes solidi latera dicuntur.

Omnis ergo solidus est compositus.

Solidus est 24, quia fit ex multiplicatione trium numerorum 2.3.4. nam 2. in 3. facit 6. 6 autem in 4. facit 24.

27. Similes plani & solidi sunt, qui proportionalia habent latera.

6. 24. sunt plani similes, quorum latera sunt, 2. 3. & 4. 6. est enim ut 2. ad 3. sic 4. ad 6. Solidi similes sunt 24. 192. quia latera unius 2. 4. 3. sunt proportionalia lateribus alterius 4. 8. 6.

2 3		2. 4. 3.
6		24
24		192
4 6		4. 8. 6.

28. Quadratus numerus est, qui fit ex multiplicatione duorum æqualium numerorum; sive ex multiplicatione alicujus numeri per seipsum, qui radix quadrata dicitur.

Primus quadratorum est 4. qui fit ex 2. in 2. sive ex 2. in se. Secundus est 9. qui fit ex 3. in se: & sic deinceps in infinitum.

29. Cubus est, qui fit ex multiplica-

tione

tione trium æqualium numerorum, ſive ejuſdem ter poſiti, qui radix cubica appellatur.

Primus cubus eſt 8. fit ex multiplicatione binarii ter poſiti (2.2.2.) nam 2. in 2. facit 4. & 4. in 2. facit 8. Secundus eſt 27. qui fit ex multiplicatione ternarii ter poſiti, (3.3.3.) nam 3. in 3. facit 9. & 9. in 3. facit 27.

30. Perfectus numerus eſt, qui omnibus ſuis partibus aliquotis æqualis eſt.

Primus perfectus eſt 6. illius enim omnes aliquotæ partes ſunt 1. 2. 3. quæ ſimul faciunt 6. Secundus eſt 28. nam illius omnes aliquotæ ſunt 1. 2. 4. 7. 14. quæ ſimul efficiunt 28. De his vide prop. ultimam lib. 9. & ſcholium.

AXIOMATA.

A B
Z

1. Numeri A, B, æquè multiplices ejuſdem numeri Z, ſunt æquales. Et numeri, æquè multiplices æqualium numerorum, æquales ſunt.

2. Æquales ſunt numeri A, B, quorum æquè multiplex eſt idem numerus Z.

Et æqua-

Et æquales ſunt illi numeri, quorum æquè multiplices ſunt æquales.

3. Æquales ſunt numeri, qui ſunt ejuſdem numeri eadem pars, ut dimidia, vel tertia, vel quarta, &c.

Et illi numeri ſunt æquales, qui æqualium numerorum eadem pars ſunt.

4. Æquales ſunt numeri, quorum unus numerus eadem pars eſt.

Et illi numeri ſunt æquales, quorum æquales numeri eadem pars ſunt.

5. Unitas omnem numerum per unitates, quæ in ipſo ſunt, (hoc eſt per ipſum numerum,) metitur.

6. Omnis numerus ſeipſum metitur per unitatem.

7. Si numerus A, multiplicans alium B, genuerit aliquem C; multiplicatus B genitum C metitur per multiplicantem A.

4 A	B 3
C	
12	

Patet ex defin. 13. & 15.

8. Si numerus A numerum C metiatur, ſeu dividat per quotientem B; etiam quotiens B, multiplicans metientem A, producet menſum C: ſive metiens A per quotientem B multiplicatus, reſtituit menſum C.

Patet ex defin. 13. 15. 14.

9. Quo-

9. Quolibet numero ſumi poteſt major.

10. Numerus A metiens quoſcumque numeros BC, CD, DE, etiam BE compoſitum ex ipſis metitur.

A---
B-----C---------D----E

11. Numerus (A) metiens quemcunque numerum (B) metitur quoque omnem numerum (C) quem ille (B) metitur.

A--2
B----4
C--------8

12. Numerus A metiens totum BC, & ablatum BD, metitur & reliquum DC.

A---
B------D---C

ADMONITIO AD LECTOREM.

Expoſitis Definitionibus, & Axiomatis, ex quibus tota numerorum ſcientia deducetur, ad propoſitiones ipſas progredior, ſi prius quiddam monuero lectores, quod intereſt ipſos ſcire. Euclides pro numeris ubique litteras alphabeti aſſumit optimo ſanè conſilio: ſic enim propoſitio-

num

num ac demonstrationum universalitas melius exprimitur. At cum numerum quempiam per alium multiplicat, A puta per B, productum tertiâ quâdam litterâ, puta C, designat. Ex quo id plerumque incommodi nascitur, ut cum plures instituì multiplicationes necesse est, memoriâ excidat, quæ producta ex quorum multiplicatione laterum genita sint, quod molestum esse solet lectoribus, & tenebras offundere. Sæpe igitur expediet productum multiplicationis eo modo exprimere, quo in logistica speciosa utimur, solâ videlicet numerorum, qui se invicem multiplicant, appositione; ut si cupiam multiplicare numerum A per numerum B, productum erit AB. Primus (quod sciam) logisticam speciosam vel invenit, vel certè adhibuit Franciscus Vieta: sed Renatus Cartesius ad commodiorem formam revocavit. Præcepta hujus methodi à Francisco à Schooten conscripta, jam in lucem sunt edita per Fr. Bartholinum.

Porro operationum speciosarum prima rudimenta hæc sunt. Si cupiam numerum A addere numero B, summa erit A+B. Signum enim (+) plus significat. Si summa quæritur plurium A, B, C, ea erit A+B+C.

Si

Si à numero A subtrahendus est numerus B, residuum erit A —— B. Signum enim (——) significat minus.

Si numerus A multiplicandus sit per numerum B, productum, ut jam dixi supra, erit AB, seu BA.

Si A per A, productum erit AA.

Si AB per BC, productum erit ABBC.

Si AA per A, productum erit AAA.

Si A + B + C per D, singulis particulis appone D, & productum erit AD + BD + CD.

Si A, B, C, D per invicem, productum erit ABCD.

Et sic in aliis. Ubi id notandum est; perinde esse, quo ordine in producto litteræ sibi mutuò apponantur. Ut si productum quæratur ex numeris A, B, C, D inter se multiplicatis, illud erit, vel ABCD, vel ACBD, vel ADBC &c. Cum enim appositio numerorum multiplicationem designet, ea verò inter plures numeros, quocunque ordine facta, idem semper productum exhibeat, (quod in scholio prop. 19. l. 8. demonstrabimus) perinde etiam erit, quo ordine sibi mutuò apponantur.

Denique si numerum A dividere oporteat

teat per numerum B, quotiens designabitur, si infra dividendum A, lineolâ interpositâ, scribatur divisor B. $\frac{A}{B}$ $\frac{A}{B}$

Si AB per A, quotiens erit B. A quippe ductum in B restituit AB.

Si AB + AC -- AD per A, quotiens erit B + C -- D. Nam B + C - D ductum in A, restituit AD + AB -- AC.

Hac methodo, quod quidem ad multiplicationem attinet, in demonstrandis horum trium librorum propositionibus non paucis utemur, tum videlicet cum facilitari inde demonstrationes poterunt: id quod sæpe accidet, cum plurimum referat in decursu demonstrationis producti latera ante oculos observari. Verùm hoc observandum erit, duas litteras conjunctas aliquando tantùm simplicem numerum designare, ut in tribus primis prop., & paucis aliis, quod satis ex textu ipso, & sensu verborum colligetur.

Cæterum non mihi propositum fuit hic tradere præcepta Logisticæ speciosæ, de qua, atque Algebrâ tum numerosâ, tum speciosâ, si Deo placuerit, alio loco acturus sum; sed ea solùm attingere, quorum in his elementis, ac deinde in Arithmetica practica usus erit.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ

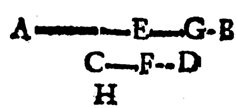
LIBER PRIMUS.

EUCLIDI SEPTIMUS.

In citationibus librorum Euclidis numeri retinentur.

PROPOSITIO PRIMA.

Si à duobus numeris inæqualibus detrahatur semper minor de majore alternâ quadam detractione, neque reliquus unquam metiatur præcedentem, quoad ventum sit ad unitatem; primi (a) inter se erunt dati numeri. a vide defin. 14.



Dati sint duo numeri AB, & CD; minor CD detractus ex AB, quoties potest, relinquat EB: EB verò detractus ex CD, quoties potest, relinquat FD: FD, quoties potest, detractus ex EB relinquat unitatem. Dico numeros AB, CD esse primos inter se.

Esto enim, si fieri potest, numerorum AB, CD communis mensura numerus aliquis H. Quoniam ergo H vis
b hyp. metiri CD, & CD metitur *b* AE, et-
c ax. 11. iam H *c* metietur AE. Sed H vis metiri
d ax. 12. quoque totum AB. Ergo H metitur *d* etiam reliquum EB. Metitur autem EB
e hyp. f ax. 11. ipsum *e* CF. Ergo & H *f* metitur CF. Quare cum H volueris metiri etiam totum CD; H quoque metietur reli-
g ax. 12. h hyp. i ax. 11. quum *g* FD: FD autem metitur *h* EG. Ergo H quoque metitur *i* EG. Ostendi verò supra H metiri etiam totum EB.
k ax. 12. Ergo H metitur *k* etiam reliquum GB, numerus unitatem, quod est absurdum.

PROPOSITIO II.

Duobus numeris datis AB, DF, non primis inter se, maximam eorum communem mensuram invenire.

A——————C———B
D————E——F
O————

Minor DF detractus ex majori AB, quoties potest, relinquat CB. CB de-

detractus, quoties potest, ex DF relinquat EF, & sic deinceps.

Hac alterna detractione relinquetur tandem aliquis numerus, qui præcedentem metiatur: nam si ad unitatem deveniretur, dati numeri *a* essent primi, contra hyp. Esto igitur reliquus EF, qui præcedentem CB metiatur. Dico EF esse maximam communem mensuram numerorum AB, & DF. Quod sic demonstrabitur. *a* præced.

EF metitur *b* CB, & CB metitur *c* DE. Ergo EF etiam *d* metitur DE. Metitur verò EF etiam se. Ergo EF metietur *e* totum DF. Sed DF metitur *f* AC. Ergo EF metitur etiam *g* AC. Metitur autem EF etiam *h* CB. Ergo EF metitur quoque *i* totum AB. EF igitur ipsorum AB, & DF communis mensura est. *b* const. *c* const. *d* ax. 11. *e* ax. 12. *f* const. *g* ax. 11. *h* constr. *i* ax. 10.

Quod verò sit maxima, sic ostenditur. Esto, si fieri potest, alia O major, quàm EF. Quoniam vis O metiri DF; DF verò metitur AC, etiam O metietur *k* AC. Vis autem O etiam metiri AB. Ergo O metietur quoque *l* CB. Sed CB *m* metitur DE. Ergo O etiam metitur *n* DE. Quare cum O metiri velis etiam totum DF, metitur O quoque *k* ax. 11. *l* ax. 12. *m* constr. *n* ax. 11.

 o re-o ax. 12. *o* reliquum EF, se minorem, quod est absurdum.

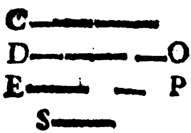
Corollarium.

NUmerus O, metiens duos numeros AB, DF, metitur quoque maximam eorum communem mensuram EF.

PROPOSITIO III.

TRibus numeris datis, non primis inter se, C, D, E, maximam eorum communem mensuram invenire.

a præced.



Inveniatur O maxima *a* communis mensura duorum C, D. Si O etiam metitur E, erit maxima communis mensura trium C, D, E: nam si esset aliqua S major, quam O, metiretur S etiam O per corol. præced., quod est absurdum, cum S ponatur major, quàm O.

Quod si O non metiatur E, saltem O & E inter se compositi erunt. Cum enim C, D, E, *b* sint tres inter se compositi, aliqua mensura communis eos *c* metietur, ac proinde etiam *d* ipsum O.

b hyp.
c def. 24.
d coroll. præc.

Duo-

Duorum igitur O, E inveni maximam communem mensuram P. Dico, P communem esse maximam trium C, D, E.

Cum enim P *e* metiatur O; O verò metiatur *f* C, D; etiam P *g* metietur C, D. Metitur autem *h* P etiam E. Ergo P est mensura trium C, D, E. Quod verò maxima sit, sic ostenditur. Sit alia S major, si fieri potest, quàm P. Quoniam ergo S metitur C, D, E, metietur *i* quoque ipsorum C, D maximam mensuram O. Quia ergo S metitur E, & O, metietur *k* rursum S eorum maximam mensuram *l* P, major minorem. Quod est absurdum. *e* confit. *f* confit. *g* ax. 11. *h* confit. *i* corol. praec. *k* idem corol. *l* confit.

D------C----E---
O----S---
P--

Corollarium.

1. EOdem artificio reperietur quatuor, imo quotvis, non primorum inter se numerorum, mensura communis maxima.

2. Numerus S, metiens quoscunque numeros E, D, C, metitur etiam eorum maximam communem mensuram (P). Patet ex ultima parte demonstrationis.

PROPOSITIO IV.

ET reliquæ usque ad 15. inclusivè continentur in propositionibus universalibus libri 5. Elem. Geom.

PROPOSITIO XVI.

DUo numeri A, B, se mutuò multiplicantes, æquales numeros producunt C, D.

Quoniam A multiplicans B facit D, erit *a* unitas ad A, ut B ad D. Igitur *b* permutando, ut unitas est ad B, sic A ad D. Rursus quia, B multiplicans A facit C, erit ut unitas *c* ad B, sic A ad C. Ergo A ad D, & C eamdem habet rationem. Ergo C & D *d* æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

unit. 1.	
A 6	B 4
C 24	D 24

a def. 13. l. 7.
b 16. l. 5.
c def. 13. l. 7.
d 9. l. 5.

Corollarium.

1. Si numerus A, multiplicans numerum B, fecerit C, multiplicans A metietur productum C per B multiplicatum. Nam quia A in B facit

A
B
C

cit C, etiam B in A facit C per hanc prop. Ergo cum A, qui prius erat multiplicans, jam ſit etiam multiplicatus, reſpectu ejuſdem producti C; patet ex axio. 7. A metiri B per C.

2. Si A metitur ſeu dividit C per B, etiam B quotiens per A metietur eumdem C.

A B
C

Nam quia A per B metitur C, ergo per ax. 8. B multiplicans A faciet C. Ergo per hanc XVI etiam A multiplicans B faciet C. Ergo per ax. 7. B per A metitur C. Quod erat propoſitum.

PROPOSITIO XVII.

SI numerus A, multiplicans quotcunque numeros B, C, totidem genuerit numeros AB, AC; erunt geniti AB, AC multiplicatis B, C proportionales.

unitas	
1	
A	
B.	C.
AB	AC.

Cum enim A, multiplicans B, fecerit AB, erit ut *a* unitas ad A, ſic B ad AB. Rurſus cum A, multiplicans C, fecerit AC, erit ut *b* unitas ad A, ſic C ad AC. Ergo B eſt ad AB, ut *c* C ad AC. Igitur permutando eſt B ad C, *d* ut AB ad AC. Quod erat demonſtrandum.

a def. 3. l. 7.
b ibid.
c 11. l. 5.
d 16. l. 5.

Scho-

Scholium.

COEpimus hic multiplicationis productum exprimere sola numerorum multiplicantium mutua appositione, de qua vide dicta ante principium hujus 7. libri. Hæc methodus cum adhibebitur, quod ingenti plerumque compendio fiet, commodius efferetur propositione 17. hunc in modum.

Numeri quotcunque AB, BC, commune latus habentes B, eam inter se proportionem habent, quam latera reliqua A, & C.

Latera numeri sunt, ex quorum multiplicatione producitur. Porro, ut huic methodo, quæ, ut dixi, commodi permultum, ac compendii habet, Tirones melius assuescant, præter exemplum in prop. adductũ, alia adhuc nonnulla visum est subjungere.

I. AA est ad AB ut A ad B.
II. AB est ad BB ut A ad B.
III. AAA est ad AAB ut A ad B.
IV. ABB est ad BBB, ut A ad B.

In I. commune latus est A, reliqua vero sunt A secundum, & B. In II. latus commune est B, reliqua verò sunt A, & B secundum. In III. latus commune est AA, reliqua verò sunt A tertium, & B. In IV. latus commune est BB, reliqua sunt A, & B tertium.

V. AA.

V. AA, AB, BB. sunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex I. & II.

VI. AAA, AAB, ABB, BBB sunt continuè proportionales in ratione A ad B. Patet ex III. & IV.

VII. AB, AC, AD, AE, AF eam inter se rationem habent, quam B, C, D, E, F. Patet ex ipsa propositione.

Quantus sit hujus scholii usus ad demonstrationes prolixas aliàs, & difficiles facillime expediendas, tum in his libris deinceps, tum in Arithmetica Practica, plurimis locis apparebit.

PROPOSITIO XVIII.

SI quotcunque numeri B, C, multiplicantes eumdem numerum A, totidem genuerint numeros D, F; erunt geniti D, F multiplicantibus B, C proportionales.

B 2	C 4		Nam cum B per A fecerit	
A 3			D.; etiam A *a* per B facit D:	*a* 16. l. 7.
D 6	F 12		& cum C per A faciat F; etiam *b* A per C faciet F. Ergo *c* B est ad C, ut D ad F. Quod erat demonstrandum.	*b* ibid. *c* praeced.

Co-

Corollarium.

Numerus A dividens, seu metiens quotcunque numeros I, P, gignit quotientes R,S, numeris divisis, seu mensis proportionales. (Vide Schema infr. posit.)

Nam quoniam A ipsos I, P metitur, seu dividit per quotientes R, S; manifestum est ex 8. axio. A in R, & S ductum producere I & P. Ergo per 17. ut I est ad P, sic R est ad S.

Aliter.

I	12	P	20
	A 4		
R	3	S	5
	unit.		
	S		

Cùm A metiens, seu dividens I fecerit R; erit ut *d* unitas ad R, sic A ad I. Igitur *e* permutando, ut unitas est ad A, sic R est ad I. Rursum cum A metiens P, fecerit S; erit *f* unitas ad S, ut A ad P. Ergo permutando ut unitas est ad A, sic S est ad P. Quare cum jam ostenderim, etiam R esse ad I, ut unitas est ad A, erit *g* R ad I, ut S ad P. Et permutando R ad S, ut I ad P. Quod erat demonstrandum.

d def. 14. *e* 16. l. 5. *f* def. 14. *g* 11. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XIX.

SI quatuor numeri A, B, C, D proportionales fuerint; genitus AD ex primo A & quarto D genito BC ex secundo B & tertio C aequalis erit. Et è converso.

A	3	B	2
C	6	D	4
BC	12	AD	12
	AC		

I. Pars. A multiplicans C faciat AC. AC est ad AD *a* ut C ad D: & AC est ad BC *b* ut A ad B. Quare cum *c* A sit ad B, ut C ad D, etiam AC *d* est ad AD, ut AC est ad BC. Ergo BC, AD *e* aequales sunt. Quod erat demonstrandum.

a 18. ant. 17. l. 7.
b per eand.
c hyp.
d 11. 5.
e 9. l. 5.

Pars II. Quoniam geniti AD, BC jam ponuntur aequales; erit *f* AC ad BC, ut AC ad AD. Sed ut AC est ad BC, sic *g* A est ad B: & ut AC est ad AD, sic C est ad D. Ergo *h* A est ad B, ut C ad D. Quod erat demonstrandum.

f 7. l. 5.
g 18. 7.
h 11. 5.

Corollarium I.

SI duo numeri B, C metiantur, seu dividant eumdem numerum A, per quotientes

A	
B.	C
O.	P
	O.

O, P; erit ut B ad C, ita reciprocè P ad O.

Nam quia B, C metiuntur, seu dividunt A per O, & P, ergo per ax. 8. tam B in O, quàm C in P, faciunt A. Ergo per hanc prop. B est ad C, ut P ad O.

Corollarium II.

SI A ad B majorem rationem habeat, quàm C ad D; AD genitus ex primo A in quartum D major erit,	A 4	2 B
	C 6	4 D
	AD 16.	12 BC
	A C	

quàm BC genitus ex secundo B in tertium C.

Et è converso.

I. Pars. A in C faciat AC. AC ad BC eamdem proportionem habet, quàm *a* A ad B; hoc est majorem *b*, quàm C ad D; hoc est majorem *c*, quàm rursus A C ad A D. Ergo BC minor *d* est, quàm AC.

a schol. p. 17. l. 7.
b hyp.
c schol. p. 17.
d 10. l. 5.

II. Pars. Quoniam AD jam ponitur major, quàm BC; erit ratio AC ad BC *e* major ratione AC ad AD. Sed ratio AC ad BC est ratio *f* A ad B; & ratio AC ad AD est ratio *g* C ad D. Ergo etiam ratio A ad B major est ratione C ad D.

e 8. l. 5.
f schol.
g idem.

PRO-

PROPOSITIO XX.

SI tres numeri A, B, C proportionales fuerint; AC genitus ab extremis æqualis est BB quadrato medii.

Et si genitus ab extremis quadrato medii æqualis est; tres numeri proportionales erunt.

A 4	B 8		
B 8	C 16		
BB 64	AC 64		

Pars I. Ponatur medius B bis. Igitur per hypoth. A est ad B, ut B ad C. Cum ergo quatuor jam habeantur proportionales; erit a genitus ab extremis AC par genito ex B secundo, & B tertio, hoc est quadrato ipsius B. a 1. par. præced.

Pars II. Eodem modo demonstrabitur ex II. parte præcedente.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri A & B, omnium sibi proportionalium minimi, numeros sibi proportionales C, & D æquè metiuntur.

Nam quia per hyp. A est ad B, ut C ad D; etiam permutando A est ad C, ut B ad D.

D. Ergo A, & B ipsorum C, & D sunt a partes similes, vel aliquotæ, vel aliquantæ. (Esse verò A, B minores ipsis C, D, patet ex hypothesi.) Sed non sunt similes aliquantæ; quod sic ostendo. Si A, B, ipsorum C, D sint similes aliquantæ, ergo b A continet O talem aliquotam ipsius C, qualem B continet ipsius D, puta P; ac proinde c O est ad C, ut P est ad D; & permutando d O est ad P, ut C est ad D; hoc est ut A ad B. Sed A, B continent ipsos O, P. Ergo A, B non sunt minimi suæ proportionis. Quod evertit hypothesim. Igitur A, B, non sunt ipsorum C, D similes aliquantæ. Reliquum est igitur, ut similes aliquotæ sint; ac proinde ipsos C, D æquè metiantur. Quod erat demonstrandum.

a def. 9.
b def. 7.
c def. 6.
d 16. l. 5.

A 2 B 3
O P
C 6 D 9

Corollarium.

A.B.C.D.E.
O. P. Q. R. S.
F.G.H.I.K.

Eodem prorsus modo demonstrabitur numeros A, B, C, D, E, omnium sibi proportionalium minimos, quocunque extiterint numero, totidem sibi proportionales F, G, H, I, K, æqualiter metiri.

PRO-

PROPOSITIO XXII.

C*Ontinetur in prop. XXII. l. 5.*

PROPOSITIO XXIII.

P*Rimi a inter se numeri A, B sunt omnium sibi proportionalium minimi.* a def. 23.

Sint enim alii, si fieri potest, C, D minimi, & proportionales ipsis A, B. Igitur C, D metiuntur b ipsos A, B æque, hoc est per eumdem numerum E. Quia ergo C metitur A per E; unitas est ad E, ut C ad A: & permutando, ut unitas est ad C, sic E est ad A. Sed unitas metitur C. Ergo etiam E metitur A. Eodem modo ostendam, E metiri B. Cum igitur E metiatur A, & B, non erunt A, B primi inter se: quod evertit hypothesim. b 21. l. 7. def. 15.

A 15	B 8
C	D
E	
unit.	

Corollarium.

E Odem prorsus modo demonstrabitur, si quotvis fuerint numeri A, B, C, D, primi inter se, eos

A	B	C	D
F	G	H	I
		E	
		unitas	

G fo-

fore quorumlibet sibi totidem proportionalium minimos.

PROPOSITIO XXIV.

Numeri, omnium sibi proportionalium minimi, A, B sunt inter se primi.

A4 B5
E
G D

Si non, communis mensura E metiatur A per C, & B per D. Ergo *a* ut A ad B, sic C ad D. Cum ergo C, D sint minores, quàm A, B, non erunt A, B minimi omnium sibi proportionalium; quod evertit hypothesim.

a cor.p.18. l.7.

Corollarium.

A B C D
E
F G H I

Eodem modo demonstrabitur, si quotcumque fuerint numeri (A, B, C, D) quorumlibet sibi totidem proportionalium minimi, eos fore inter se primos.

PROPOSITIO XXV.

Numerus N, qui ex duobus A, B inter se primis metitur unum A, ad reliquum B, primus est.

Nam

A B
N X

Nam si N, B non sint primi inter se, utrumque metiatur X. Quoniam ergo X metitur N, & N metitur *a* A; etiam X metietur *b* A. Volebas autem X etiam metiri B. Ergo A, B non sunt inter se primi: quod repugnat hypothesi.

a hyp.
b ax. 11.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo numeri A, B ad quemplam C primi fuerint, etiam AB, ex iis genitus, ad eumdem C primus erit.

A 7 B 3
C 8
A B 21
D——F——

Si enim AB, & C non sint inter se primi, utrumque metiatur D per F. Ergo D in *c* F facit AB. Atqui etiam *d* A in B facit AB. Ergo D est ad A, *e* ut B ad F. Jam verò, quia A & C sunt inter se primi, & D volebas metiri ipsum C, erit *f* D ad A primus. Ergo D, & A in sua proportione *g* sunt minimi. Ergo sibi proportionales *h* B, F æquè metiuntur; D nempe ipsum B; & A ipsum F. Quare cum D volueris etiam metiri ipsum C, metietur D utrumque C, ac B. Ergo C, B non sunt primi inter se: quod hypothesim evertit.

c ax. 8.
d hyp.
e 19. l. 7.
f præc.
g 23. l. 7.
h 21. l. 7.

primus ergo erit AB ad C. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXVII.

SI duo numeri A, B fuerint inter se primi; etiam A A, quadratus unius, ad reliquum B primus erit.

A 4	B 7	
AA	16	
A 4		

Ponatur A bis. Quia igitur A *a* prior primus est ad B, etiam A posterior ad B primus erit. Ergo factus ex A in A, hoc est AA ad B etiam *b* primus est.

a hyp.
b 26. l. 7.

PROPOSITIO XXVIII.

SI duo numeri A, B ad duos numeros C, D, uterque ad utrumque, primi fuerint; etiam ex iis geniti AB, CD inter se primi erunt.

A	B
AB	
C	D
CD	

Nam, quia *a* A, & B primi sunt ad C; etiam *b* AB primus erit ad C. Rursum, quia A, & B primi sunt *c* ad D, etiam AB ad D primus erit. Cum igitur C, & D ad AB primi sint, etiam CD, ex

a hyp.
b 26. l. 7.
c hyp.

ex iis genitus, ad AB *d* primus erit. Quod erat demonstrandum. *d* 26. l. 7.

PROPOSITIO XXIX.

SI duo numeri A, B inter se fuerint primi; etiam eorum quadrati AA, BB, cubi AAA, BBB, & sic deinceps, inter se primi erunt.

A	B
AA	BB
AAA	BBB
AAAA	BBBB

Quoniam A, B sunt primi inter se, etiam AA ad B *a* primus est. Et quoniam AA, ac B sunt primi inter se, etiam *b* BB ad AA primus erit. Quod erat primùm demonstrandum.

a 27. l. 7.
b per eamd.

Rursus, quoniam A, B inter se primi sunt, etiam BB ad A *c* primus erit. Ergo B, & BB ad A primi sunt. Ostensum quoque est A, & AA ad B esse primos. Ergo AAA, genitus ex A in AA, ad BBB, genitum ex B in BB, *d* primus est. Quod erat alterum.

c per eamd.
d 28. l. 7.

Denique, quia A, & AA ad B primi sunt, etiam AAA, ex iis factus, ad *e* B primus est. Eodem modo, quia B, & BB ad A primi sunt, etiam BBB ad A *f* primus erit. Quoniam igitur A, & AAA ad B,

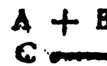
e 26. l. 7.
f ibid.

item B, ac BBB ad A primi sunt; etiam ex iis geniti AAAA, BBBB inter se *g* primi erunt. Et sic deinceps in infinitum. g 28.l.7.

PROPOSITIO XXX.

SI duo numeri A, B inter se primi fuerint; etiam A+B, uterque simul, ad quemlibet illorum primus erit.

Et si uterque simul A+B ad alterutrum primus fuerit; etiam qui in principio dabantur numeri A, B inter se primi erunt.



Pars I. Nam si A+B ad A, non sit primus, metietur eos numerus C, qui proinde etiam *a* metietur B. Ergo A, B non sunt inter se primi: quod repugnat hypothesi. a ax.12.

Pars II. Si primi non sint A, B, metietur eos C, qui proinde metietur *b* etiam A+B: quod hypothesim evertit. b ax.10.

Corollarium.

SI A+B ad A primus est, etiam A+B ad B primus erit. Nam, quia A+B ad A primus est, erunt A, B inter se primi per II. par. Tum quia jam primi inter se se sunt A, B, etiam per I. partem A+B ad B primus erit.

PROPOSITIO XXXI.

Omnis primus numerus A ad omnem numerum B, quem non metitur, primus est.

Nam si A, B non sint primi inter se, metietur eos aliquis numerus C, diversus ab A, cum A, per hypothesim, non metiatur B. Ergo C non est *a* primus.

A B

C

a def. 21.

PROPOSITIO XXXII.

Si planum a numerum AB aliquis primus C metiatur; is etiam è plani lateribus A, B alterutrum metietur.

a def. 25.

A B

AB

C D——

Planum AB metiatur primus C per D; si jam C non metiatur A, erunt C, A *b* primi inter se; ideoque in sua proportione *c* minimi. Quia autem C metitur AB per D, ergo C in D *d* facit AB. Sed etiam A in B facit AB. Ergo C est ad A, ut *e* B ad D.

b præc.
c 23. l. 7.
d ax 8.
e 19. l. 7.

f 23. l. 7. Quare f cùm C, A ſint in ſua proportione
g 2. l. 7. minimi, C metietur B. Eodem diſcurſu probabitur C metiri A, ſi non metiatur B. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XXXIII.

Omnem compoſitum numerum aliquis primus metitur.

a def. 22. Compoſitus quicunque eſto F. Eum igitur *a* metiuntur unus, vel plures numeri, quorum minimus ſit N. Dico N primum eſſe. Si enim primus non eſt, eum metietur aliquis P; qui proinde, licet minor ſit, quàm N, metietur *b*
b ax. 11. etiam F. Quod eſt abſurdum, cum N ponatur minimus omnium, qui F metiuntur.

PROPOSITIO XXXIV.

Omnis numerus, aut primus eſt, aut ab aliquo primo menſuratur.

Patet ex præcedenti.

PRO-

PROPOSITIO XXXV.

Numeris datis quotcumque A, B, C, minimos ipsis proportionales invenire.

A	B	C
	O —	
D	E	F
P	Q	R
	X —	

Inveniatur *a* O maxima mensura communis datorum A, B, C, quæ eos metiens, seu dividens, faciat D, E, F. Dico hos datis A, B, C esse proportionales minimos. Si mensura communi careant, erunt ipsi inter se primi per 1. Lib. VII. adeoq; minimi in sua proportione per XXIII. Esse proportionales D, E, F, patet ex Corol. p. XVIII. Minimos esse, sic ostendo. Sint, si fieri potest, alii P, Q, R minimi proportionales ipsis A, B, C. Ergo P, Q, R metiuntur *b* A, B, C per eumdem numerum, ut per X. Ergo P in X facit *c* A. Sed etiam D in O facit *d* A. Ergo *e* ut P est ad D, sic O est ad X. Sed P volebas esse minorem, quàm D. Ergo etiam O minor est, quàm X. Jam quia P, Q, R metiuntur A, B, C per X, patet X in P, Q, R *f* producere A, B, C; ac proinde X metiri *g* A, B, C, per P, Q, R. Ergo O non est ipsorum A, B, C

a 3. l. 7.
b 21. & coroll. l. 7.
c ax. 8.
d const. & ax. 8.
e 19. l. 7.
f ax. 8.
g ax. 7.

ma-

maxima communis mensura: quod evertit hypothesim.

Corollarium.

MAxima mensura quotlibet numerorum ipsos metitur per minimos omnium ipsis proportionalium.

PROPOSITIO XXXVI.

DUobus numeris datis A, B, reperire minimum numerum, quem metiuntur.

A	B
AB	
O	
N	P

Si dati A, B sunt inter se primi, ab iis genitus AB, est quæsitus. Nam, quia A in B facit AB,
a ax.7. A metietur *a* AB. Et quia B in
b 16.l.7. A facit etiam *b* AB, B metietur AB. Ambo igitur A & B metiuntur AB. Quod verò minimus sit AB, quem A, & B metiuntur, sic ostendo. Esto, si fieri potest, O minor, metianturque A,
c cor.p.19. l.7. & B ipsum O per N, & P. Quare *c* A est ad B, ut P ad N. Quia autem A, B
d hyp. sunt *d* primi, erunt minimi in sua *e* pro-
e 23.l.7. portione; ac proinde A metitur P, *f* &
f 21.l.7. B metitur N. Jam quia A in B facit AB, & idem A in N facit O, ut ostensum supra,

pra, erit ut g B ad N, sic AB ad O. Sed jam ostendi B metiri N. Ergo etiam AB metietur O se minorem: quod est absurdum. g 17. l. 7.

Si dati A, & B non sunt primi inter se, inveni C, D minimos b ipsis proportionales. Tum A in D faciat AD, & B in C gignat BC. Dico AD, seu BC (æquales i enim sunt) esse minimum, quem A, B metiuntur. Nam si velis A & B metiri O minorem aliquem, quàm AD; eodem discursu, quo supra, ostendam AD metiri O se minorem. b, praced. i 19. l. 7.

A B
C D
AD vel BC
O
N. P

PROPOSITIO XXXVII.

SI duo numeri A, & B metiantur aliquem numerum CO; etiam F minimus, quem illi A, & B metiuntur, eumdem CO metietur.

A B
C——D——O
F

Nam si F non metitur CO, O ablatus ex C, quoties potest, relinquat DO se minorem. Quoniam a verò, eam A, quàm a hyp.

quàm B metiuntur F, F verò metitur CD; etiam *b* A, & B metientur ipsum C D. Atqui A, B metiuntur *c* etiam totum CO. Ergo metientur, & reliquum *d* DO minorem, quàm F: quod evertit hypothesim.

b ax. 11.
c hyp.
d ax. 12.

PROPOSITIO XXXVIII.

D*Atis tribus numeris A, B, C; invenire minimum numerum, quem metiuntur.*

a 36. l. 7.

A B C
P
R
X

Inveni *a* minimum P, quem A, & B metiuntur. Si tertius C etiam metiatur P, erit P minimus, quem metiuntur A, B, C. Sit enim, si fieri potest, alius minor R, quem A, B, C metiantur. Ergo P non est minimus, quem metiuntur A, B. Quod est contra hypothesim.

Quod si C non metiatur P, inveni *b* R minimum, quem P, & C metiuntur, & erit R minimus, quem metiuntur A, B, C. Nam quia A, B metiuntur P, & P metitur R; etiam A, & B metientur *c* R. Metitur autem & C ipsum R. Tres igitur A, B, C metiuntur R. Quod

b per eand.
c præc.

Quod verò R etiam minimus sit, sic ostenditur. Esto, si fieri potest, X minor, quàm R, quem A, B, C metiantur. Ergo P, minimus, quem metiuntur A, B, metietur etiam d X. Ergo cum C, P metiantur X (C ex hyp. & P ex jam demonstratis) minorem quàm R, non erit R minimus, quem C, P metiuntur. Quod est absurdum contra constructionem.

d per eamd.

Corollarium.

I. EOdem artificio datis quotcunque numeris, invenietur minimus, quem illi metiuntur.

II. Si tres numeri A, B, C, imo quotlibet, aliquem numerum X metiantur, etiam R minimus, quem A, B, C metiuntur, metietur X.

Constructis enim iisdem, quæ supra, cum A, B e metiantur R, etiam P f metietur X. Et cum C, P metiantur X (C ex hypothesi, & R ex jam demonstratis) etiam R metietur X. Quod erat demonstrandum.

e hyp.
f 27. l. 7.

PRO-

PROPOSITIO XXXIX.

SI numerus A numerum B metiatur per quotientem C; quotiens erit pars mensi B, à metiente A denominata.

A 3	B 24	
	C 4	

Nam cum A metiatur B per C, etiam C metietur *a* B per A, hoc est C toties acceptus, quot sunt unitates in A, faciet B; ac proinde C est pars ipsius B, ab A denominata.

a ax. 9.

PROPOSITIO XL.

SI numerus A partem habuerit quamlibet B; metietur illum numerus E, partem denominans.

A 24	B 6	
	E 4	

Quoniam B est pars numeri A, denominata ab E; ergo B metitur A per E. Ergo vicissim E metitur *a* A per B.

a ax. 9.

PROPOSITIO XLI.

NUmerum reperire minimum, qui partes habeat, à datis numeris A, B, C denominatas.

In-

Inveniatur *b* minimus G, quem partium denominatores dati A, B, C metiantur. Ajo G eum esse, qui quæritur. *b* 38. 7.

A2 B3 C4
G 12
P6 Q4 R3
X

Metiantur enim A, B, C ipsum G per quotientes P, Q, R. Igitur P, Q, R erunt *c* partes ipsius G, ab A, B, C denominatæ. Quod autem G minimus sit, manifestum est. Si enim X minor, quàm G, haberet partes à numeris A, B, C denominatas; A, B, C *d* metirentur ipsum X: adeoque G non esset minimus, quem metirentur: contra hypothesim. *c* 39. 7. *d* præc.

Corollarium.

MInimus numerus, quem dati quotcunque numeri A, B, C, metiuntur, est etiam minimus omnium, habentium partes, à datis numeris denominatas.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ LIBER SECUNDUS.

EUCLIDI OCTAVUS.

PROPOSITIO PRIMA.

SI fuerint quotcumque numeri proportionales A, B, C, D, quorum extremi A, D sint primi inter se; erunt A, B, C, D, omnium sibi proportionalium minimi.

A B C D
E F G H

Sint enim, si fieri potest, alii E, F, G, H, minores, & proportionales ipsis A, B, C, D. Igitur ex æquo *a* erit
a 22. 5. A ad D, ut E ad H. Et quia A, & D sunt inter se primi, erunt sibi propor-
b 23. 7. tionalium *b* minimi; ac proinde metien-
c 21. 7. tur *c* ipsos E, H, se minores: quod est absurdum.

Apud Euclidem numeri A, B, C, D ponuntur continuè proportionales; quod non requiri, patet ex demonstratione.

PRO

PROPOSITIO II.

NUmeros, quot placuerit, in ratione data A ad B, continuè proportionales minimos reperire.

	Un.			
	A 2	B 3		
	AA	AB	BB	
	4	6	9	
AAA	AAB	ABB	BBB	
8	12	18	27	

Sint A, B minimi termini rationis datæ. A in A faciat AA, A in B faciat AB, B in B, faciat BB. Erunt AA, AB, BB tres minimi in ratione A ad B.

Quod enim proportionales sint in ratione A ad B, patet ex XVII. lib. VII. ejusq; Scholio. Quod minimi, sic ostendo. Quia A, B sunt *a* minimi in sua proportione, erunt inter se *b* primi. Quare etiam eorum quadrati AA, & BB inter se *c* primi erunt. Ergo AA, AB, BB, sunt tres *d* minimi sibi proportionalium, hoc est in ratione A ad B.

a hyp.
b 24. l. 7.
c 29. l. 7.
d praeced.

Multiplicans deinde A tres jam inventos, faciat AAA, AAB, ABB; tum B multiplicans tertium BB, faciat BBB: erunt hi quatuor in ratione A ad B proportio-

 na-

nales minimi. Quod sint proportionales in ratione A ad B, patet ex XVII. lib. VII. ejusque Scholio. Quod minimi, patet ex XXIX. lib. VII., & ex præcedentibus.

29. l. 7. Nam AAA, BBB sunt *e* primi inter se; ac proinde AAA, AAB, ABB, BBB

f præced. sunt quatuor *f* minimi in sua proportione, quæ est A ad B.

Eodem artificio invenientur minimi quatuor, quinque, & deinceps plures in infinitum.

Corollaria.

I. Trium minimorum numerorum AA, AB, BB, continuè proportionalium, extremi sunt quadrati: si quatuor fuerint, extremi erunt cubi: & sic deinceps.

II. Numerorum minimorum continuè proportionalium, jam inventorum, extremi sunt primi inter se, patet ex eorum genesi, & ex XXIX. lib. VII.

III. Duo rationis datæ minimi A, B metiuntur omnes reliquos infinitos. Cum enim reliquos omnes gignant A, & B, eos quoque metientur, per ax. 7. & corol. prop. XVI. lib. VII.

IV. Unitas, A, AA, AAA, sunt contitinuè proportionales: similiter & unitas, B, BB, BBB. Nam cum A, multiplicans A, faciat AA; erit ut *g* unitas ad A, sic A ad AA. Et cum A, multiplicans AA, faciat AAA; erit *h* ut unitas ad A hoc est, ut A ad AA, sic AA ad AAA. Ergo &c.

g def. 13.

h per eamd.

5. Inter extremos AAA, & BBB cadunt æque multi medii, atque inter ipsos, & unitatem: patet ex demonstratis.

PROPOSITIO III.

Si fuerint quotcunque continuè proportionales A, B, C, D minimi eamdem cum ipsis rationem habentium; extremi A, D inter se primi erunt.

A	B	C	D
E	F		
O	P	Q	R

Inveniantur *a* duo E, F minimi in ratione A ad B. Tum per præced. inveniantur O, P, Q, R totidem minimi in ratione E ad F. Quoniam igitur tam O, P, Q, R, quam A, B, C, D, sunt minimi in ratione E ad F, & æque multi; eosdem utrinque numeros illos esse necesse est. Sed extremi O, R sunt inter se *b* primi. Ergo etiam

a 35. 7.

b coroll. 2. præc.

etiam A, D inter se primi erunt. Quod erat demonstrandum.

Porro seriem proportionalium continuè numerorum minimorum, quorum proinde extremi sunt inter se primi, non posse ulterius continuari, demonstrabitur. prop. XVII. lib. IX.

PROPOSITIO IV.

Datis quotcunque rationibus in numeris minimis; easdem in minimis etiam numeris continuare.

A ad B.		C ad D	
N	O	P	
Q	R	S	

1. Dentur in minimis terminis rationes duæ A ad B, & C ad D. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C. Tum quoties B metitur O, toties A metiatur numerum N; & quoties C metitur O, toties D metiatur P. Dico N, O, P esse minimos, qui continuant rationes datas A ad B, & C ad D. Quod enim continuent rationes datas, patet ex ipsa eorum genesi, vi cujus ut A, est ad N, sic B est ad O; & ut C, est ad O, sic D ad P. Quare permutando, ut A ad B, sic N ad O; & ut C ad D, sic O ad P. Quod minimi sint, sic ostendo. Mino-

f 36. 7.

nores enim, si fieri potest, Q, R, S, continuent rationes datas. Quoniam igitur, ut A est ad B, sic Q ad R, suntque A, B in ratione sua minimi; liquet *d* A, B metiri ipsos Q, R. Eandem ob causam C, D metientur R, S. Quoniam ergo ambo B, C metiuntur R; etiam O minimus, quem metiuntur B, C, ipsum R *e* metietur, major minorem. Quod est absurdum. *d* 21. 7. *e* 37. 7.

2. Dentur in minimis terminis rationes tres A ad B, C ad D, E ad F. Inveni O minimum, quem metiuntur B, & C; & quoties B, C metiuntur O, toties A, D metiantur numeros N, P. Tum si E metitur P, fiat ut toties F metiatur Q. Dico N, O, P, Q, esse minimos, qui tres rationes datas continuant.

A ad B.	C ad D.	E ad F.
N	O	P	Q
R	S	T	V

Quod enim N sit ad O, ut A ad B; & O ad P, ut C ad D; & P ad Q, ut E ad F, ex ipsa constructione patet. Quod minimi sint, sic ostendo. Continuent minores alii R, S, T, V, si fieri potest, rationes datas. Ostendam, ut supra, majorem O metiri minorem S. Quod est absurdum.

Si verò E	A ad B.	C ad D.	E ad F.	
non metiatur	N	O	P	
P, inveniatur	Q	R	S	T
S minimus,	V—	X—	Y—	Z—
quem P, & E				

metiuntur; & quoties P metitur S, toties O, N metiantur numeros R, Q; item quoties E metitur S, toties F metiatur T. Dico Q, R, S, T esse minimos, qui tres rationes datas continuant.

Nam ex constructione patet, S esse ad T, ut E ad F; item Q, R, S proportionales esse ipsis N, O, P. Sed N, O, P continuant, ut ostensum supra, rationes A ad B, & C ad D. Ergo etiam Q, R, S easdem continuant; ac proinde, cum etiam sit ut E ad F, sic S ad T; patet Q, R, S, T continuare tres rationes A ad B, C ad D, E ad F. Quod autem Q, R, S, T minimi sint, sic ostendo. Continuent, si fieri potest, tres rationes datas minores alii, V, X, Y, Z. Quoniam igitur A est ad B, ut V ad X, suntque A, B minimi *f* in ratione sua; B *g* metietur X. Eodem modo ostendam etiam, C metiri X. Ergo *h* etiam O minimus, quem metiuntur B ac C, metietur ipsum X. Jam quia ponitur, X es-

f hyp.
g 21. 7.
h 37. 7.

X esse ad Y, ut C est ad D, hoc est ut O ad P; etiam permutando X erit ad O, ut Y ad P. Cum ergo O metiatur X, etiam P metietur Y. Sed etiam E metietur Y, (cum E, F sint in ratione *i* sua minimi, & velis ut E ad F, sic Y esse ad Z.) Ergo etiam S minimus, quem E, & P metiuntur, metietur Y, minor majorem. Quod est absurdum. *i* hyp.

Eodem artificio in minimis terminis continuabuntur rationes quatuor, & plures deinceps in infinitum.

PROPOSITIO V.

P*Lani numeri AB, CD rationem inter se habent compositam ex laterum rationibus.*

Nimirum ex rationibus A ad C, & B ad D; vel rationibus A ad D, & B ad C.

B, multiplicans C, faciat BC. Ratio AB ad CD composita est ex rationibus AB ad BC, & BC ad CD, ut demonstravi in Elem. Geom. l. V. par. III. n. 12. Sed ratio AB ad BC est *a* eadem cum ratione A ad C, & ratio BC ad CD eadem *b* est cum ratione B ad D. Ergo etiam ratio AB *a* 17. 7. *b* ibid.

AB CD
BC

D 4 ad

ad CD composita est ex rationibus laterum A ad C, & B ad D. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO VI.

SI numerorum continuè proportionalium A, B, C, D, E primus A secundum B non metiatur; neque ullus ullum metietur.

A B C D E

N O P

Quod nullus metiatur proximè insequentem, patet ex ipsa hypothesi. Quod vero nec ullus ullum metiatur, sic ostendo. Tribus A, B, C inveniantur *a* proportionales minimi N, O, P. Erunt ergo N, P primi inter se, eritque ex *b* æquo, ut A ad C, sic N ad P. Quia vero A est ad B, ut N ad O, & A non metitur B, neque N metietur O; ac proinde N non est unitas. Quare cum N, P sint primi inter se, N non *c* metietur P. Atqui A est ad C, ut N ad P. Ergo neque A metitur C. Eodem modo ostendam, neque B metiri tertium à se numerum D, neque C à se tertium E. Et si quatuor sumantur minimi proportionales

a 35. 7.

b 22. 5.

c def. 22.

les datis A, B, C, D, simili via demonstrabitur, neque A metiri quartum D, neque B à se quartum E, & sic deinceps.

PROPOSITIO VII.

SI numerorum continuè proportionalium A,B,C,D,E, aliquis quempiam aliam à secundo B metiatur; etiam primus A secundum B metietur.

Nam si A non metiatur B; neque ullus ullum ex sequentibus *c* metietur: quod evertit hypothesim. *c* prae.

PROPOSITIO VIII.

SI quatuor numeri in eadem fuerint proportione, ut A ad B, sic C ad D; quot inter duos primos A, & B, existunt proportionales medii, totidem inter posteriores duos C & D existent.

A P Q B
N O R S
C V X D

Inter A, B cadant medii P, Q. Numeris A, P, Q, B inveni *a* proportionales minimos N, O, R, S. Igitur ex æquo *b* erit ut N ad S, sic A ad B, hoc est C ad D. Sunt *a* 35.7. *b* 22. 5.

autem

c 3. 8. autem N, S c primi inter se, ac proinde
d 23. 7. in sua d proportione minimi. Ergo N,
e 21. 7. S æque metiuntur e sibi proportionales
C, D. Toties O, & R metiantur alios
V, X. Quoniam igitur N, O, R, S æque
metiuntur ipsos C, V, X, D; patet C, V,
X, D, esse proportionales ipsis N, O, R,
f hyp. S, hoc est datis f A, P, Q, B. Quare cum
g hyp. A, P, Q, B sint g continuè proportionales, etiam C, V, X, D totidem continue
proportionales erunt: ac proinde inter
A, B, & inter C, D æque multi existunt
medii proportionales: quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO IX.

Si duo numeri C, & D primi inter se fuerint, quot inter ipsos existunt medii proportionales, totidem & inter eorum singulos, ac unitatem existent.

C	O	P	D
	1. Unitas		
A			B
AA	AB		BB
AAA	AAB	ABB	BBB

a 2. 8.

Inter C, ac D existant medii proportionales O, P. Inveni a duos A, B, minimos in ratione C ad D; dein-

deinde tres AA, AB, BB; demum quatuor AAA, AAB, ABB, BBB, donec inventorum multitudo par sit multitudini datorum C, O, P, D. Quoniam ergo extremi C, D sunt *b* primi inter se, erunt C, O, P, D *c* minimi sibi proportionalium, hoc est minimi in *d* ratione A ad B. Quare cum AAA, AAB, ABB, BBB sint

b hyp.
c 23.7.
d hyp.

C. O. P. D
1.
Unitas
A B
AA AB BB
AAA AAB ABB BBB.

etiam *e* minimi in ratione A ad B, erunt hi illis æquales, singuli singulis. Deinde ex prop. II. hujus, & definit. 13. patet unitatem A, AA, AAA, itemque unitatem, B, BB, BBB esse continuè proportionales. Quare cum tam multitudo AAA, AA, A, quàm BBB, BB, B cum unitate par sit multitudini AAA, AAB, ABB, BBB hoc est C, O, P, D; quot medii cadent inter C, & D, totidem cadent inter unitatem, & AAA, sive C; itemque inter unitatem, & BBB, sive D. Quod erat demonstrandum.

e ex const.

PRO-

PROPOSITIO X.

SI inter unitatem, & duos numeros AAA, ac BBB æquè multi medii proportionales existant; etiam inter ipsos AAA, & BBB æquè multi existent medii.

Instituatur tota constructio propositionis II. hujus, eritque manifesta demonstratio ex corollario 4. & 5. propositionis ejusdem.

Corollaria.

I. Si fuerint duo ordines ab unitate continuè proportionalium 1, A, AA, AAA, &c.	Unit.			
	1.			
	A			B
	AA	AB		BB
	AAA	AAB	ABB	BBB

B, BB, BBB, &c. erit ratio AA ad BB duplicata rationis A ad B, & ratio AAA ad BBB triplicata rationis A ad B, & sic deinceps.

Nam AA, AB, BB sunt continuè *a* proportionales in ratione A ad B. Ergo ratio AA ad BB est duplicata *b* rationis AA ad AB, hoc est A ad B. Similiter cum

a scol. p. 7. 7.
b def. 12.

cum AAA, AAB, ABB, BBB sint continuè *c* proportionales in ratione A ad B; *c* schol. 177.
erit ratio AAA ad BBB triplicata *d* rationis AAA ad AAB, hoc est rationis A ad B. Et sic deinceps. Quod erat demonstrandum. *d* def. 22.

II. Verum est corollarium primum, a quocunque communi numero C inchoentur series.

	A		
	B	E	
C	O	F	
D	P	Q	G

Cum enim sint in proportione continua A, B, C, item A, E, F; erit CA *a* par BB, & FA par EE. *a* 20. 7.
Sed ratio BB ad EE est duplicata rationis B ad E, per XI. quæ ab hac non dependet. Ergo etiam ratio CA ad FA, hoc est ratio *b* C ad F, duplicata est rationis B ad E: quod erat primum. *b* schol. p. 177.
Pari modo ostendam, quod ratio DB ad GE sit duplicata rationis C ad F, ac proinde quadruplicata rationis B ad E: Sed ratio DB ad GE, componitur ex rationibus D ad G, & B ad E. Ergo ratio D ad G cum ratione B ad E est quadruplicata rationis B ad E. Ergo sola ratio D ad G est triplicata rationis B ad E: quod erat alterum.

III. Si inter numerum A, & duos D, G æquè multi cadant medii proportionales

B,

B, C, E, F; etiam inter ipsos D, C, licet alteruter sit unitas, æquè multi medii cadent.

Patet ex corollario II. Cum enim ratio D ad G sit triplicata rationis B ad E; inter D, & G cadent duo *c* medii proportionales in ratione B ad E.

c def. 12.

PROPOSITIO XI.

Inter duos quadratos numeros AA, BB unus cadit medius proportionalis AB; & proportio quadrati numeri AA ad quadratum numerum BB duplicata est proportionis laterum A, B.

AA	AB	BB
A		B

Pars I. AA est ad AB *a*, ut A ad B; & AB est ad BB, ut A ad B. Ergo *b* AA est ad AB, ut AB ad BB. Quod erat primum.

a schol. 17. 7.
b 11. 5.

Pars II. Patet ex 1. parte, rationem AA ad BB esse duplicatam *c* rationis AA ad AB, hoc est *d* rationis A ad B.

c def. 12.
d schol. 17. 7.

Scholium.

Ex hac, & VIII. præcedente demonstrari potest theorema illud celeberrimum, quod Eucli-

di

di est libri X. postremum: In quadrato diameter lateri incommensurabilis est.

Si enim id negatur, erit diameter ad latus, ut numerus ad numerum, puta ut a *ad* b, *ut patet ex definitione commensurabilium. Ergo etiam, ut patet ex* 22. *l.VI., quadratum diametri est quadratum lateris, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb; *quod fieri non potest. Cum enim, ut patet ex* 47. *l.I., quadratum diametri sit ad quadratum lateris, ut* 2. *ad* 1, *si illud ad hoc esset, ut quadratus numerus* aa *ad quadratum numerum* bb, *etiam* aa *esset ad* bb, *ut* 2 *ad* 1: *ac proinde cum inter* aa, *&* bb *per hanc propositionem cadat unus medius integer, etiam inter* 2, *&* 1 *caderet medius integer unus, per VIII. Quod est absurdum.* a. b. aa. bb.

PROPOSITIO XII.

INter duos cubos numeros AAA, & BBB, duo cadunt medii proportionales AAB, ABB; & cubi AAA ad cubum BBB proportio est triplicata proportionis laterum A, B.

AAA	AAB	ABB	BBB
	A	B	

Per scholium prop. XVII. lib. VII. AAA, AAB, ABB, BBB sunt continuè proportionales in ratione A ad B, quod erat primum: ex quo, & definitione 17. patet etiam secundum.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

Dentur numeri continuè proportionales quotcunque A,B,C, qui in seipsos ducti faciant AA,BB,CC; & in hos rursum ducti faciant AAA, BBB, CCC; atque ita deinceps in infinitum.

Erunt AA, BB, CC, item AAA, BBB, CCC, & sic deinceps continuè proportionales.

1.	1.	1.
A	B	C
AA	BB	CC
AAA	BBB	CCC

Per corol. 4. prop. II. hujus tres series, hìc ab unitate incipientes, sunt continuè proportionales. Ergo ratio AA ad BB *a* est duplicata rationis A ad B, hoc est *b* rationis B ad C. Sed etiam ratio BB ad CC duplicata *c* est rationis B ad C. Ergo *d* AA est ad BB, ut BB ad CC. Similiter, quia ratio AAA ad BBB est triplicata *e* rationis A ad B, hoc est *f* B ad C, cujus etiam triplicata *g* est ratio BBB ad CCC; erit quoque *h* AAA ad BBB, ut BBB ad CCC. Quod erat demonstrandum.

a coroll. p. 10. 8.
b hyp.
c coroll. p. 10. 8.
d 34. 5.
e coroll. p. 10. 7.
f hyp.
g coroll. p. 10. 7.
h 34. 5.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

SI quadratus numerus AA quadratum numerum BB metiatur, etiam A latus unius metietur B latus alterius.

Et si latus A metiatur latus B, etiam quadratus AA quadratum BB metietur.

AA AB BB
A B

Pars I. A in B faciat AB. Per schol. p. XVII. lib. VII. AA, AB, BB sunt proportionales in ratione A ad B. Quare cum *a* AA metiatur BB, etiam *b* AA metietur AB. Sed ut AA est ad AB, *c* sic A est ad B. Ergo etiam *d* A metitur B: quod erat primum.

a hyp.
b 7. 8.
c schol. p. 17. 7.
d ax. 13.

Pars II. Ut A est ad B, sic *e* AA est ad AB. Sed A jam ponitur metiri B. Ergo etiam AA metitur AB. Rursum, quia ut A ad B, *f* sic AB est ad BB, metiturque *g* A ipsum B, etiam AB metietur *h* BB. Ergo AA metietur quoque BB. Quod erat alterum.

e schol. p. 17. 7.
f ibid.
g hyp.
h ax. 11.

PROPOSITIO XV.

SI cubus numerus AAA cubum numerum BBB metiatur, etiam latus A metietur latus B, Et è converso.

Pars I. Inter utrumque cubum	AAA	AAB	ABB	BBB
		A	B	

interpone numeros AAB, ABB, quorum genesim litteræ satis indicant. Erunt
a schol. 17.7. omnes quatuor a continuè proportionales in ratione A ad B. Quare cum AAA
b hyp. metiatur BBB, b etiam AAA c metitur
c 7. 8. AAB. Sed AAA est ad AAB, d ut A ad
d schol. 17. 7. B. Ergo etiam A metitur B: quod erat primum.

e ibid. Pars II. Quia AAA est ad AAB, ut e A ad B, poniturque jam A metiri B; etiam AAA metietur AAB. Pari modo quia
f ibid. AAB, ABB, BBB sunt f inter se, ut A ad B; etiam AAB metietur ABB, & ABB
g ax. 1. ipsum BBB. Ergo etiam g AAA metitur BBB: quod erat alterum.

PROPOSITIO XVI.

SI quadratus AA quadratum BB non metiatur, neque latus A metietur latus B. Et è converso.

Pars I. Nam si latus A tunc metiatur latus B,	AA	BB
	A	B

a 2. par. p. 13. 8. etiam AA a metiretur BB, contra hypothesim.

Pars

Pars II. Si latere A non metiente B, metiatur AA ipsum BB, sequeretur etiam *b* A metiri B contra hypothesim. *b* 1. par. ejusd.

PROPOSITIO XVII.

SI cubus AAA cubum DDD non metiatur, neque latus A metietur latus D. Et è converso.

Demonstratur ab absurdo per XV.

PROPOSITIO XVIII.

INter duos planos similes AB, CD unus medius proportionalis est numerus: & plani ad planum ratio duplicata est rationis homologorum laterum A, C.

AB	BC	CD	
A	B	C	D

Pars I. Quoniam AB, CD similes plani sunt, erit latus *a* A ad latus B, ut latus C ad latus D; & permutando A ad C *b*, ut B ad D. Cum igitur AB sit ad BC, *c* ut A ad C, hoc est, quod jam ostendi, ut B ad D, hoc est, *d* ut BC ad CD; erit BC medius proportionalis inter AB, CD: quod erat primum. *a* def. 21. *b* 16. 5. *c* schol. p. 17. 7. *d* ibid.

Pars II. Per I. partem ratio AB ad

E 2 CD,

e defin. CD, est duplicata e rationis AB ad BC, hoc est f rationis A ad C; quod erat alterum.

f schol. p. 17.

PROPOSITIO XIX.

Inter duos similes solidos ABC, DEF duo cadunt medii proportionales BCD, CDE: & ratio solidi ad solidum est triplicata rationis laterum homologorum A, & D.

ABC BCD CDE DEF

A B C D E F

Pars I. Quia similes solidi sunt ABC, & DEF, erunt unius latera A, B, C proportionalia alterius lateribus D, E, F. Quare permutando A est ad D, ut B ad E, & C ad F. Jam per scholium prop. XVI. lib. VII. est

ABC ad BCD ut A ad D	BCD ad CDE ut B ad E	CDE ad DEF ut C ad F

Sed jam ostendi A esse ad D, ut B est ad E, & ut C est ad F. Ergo etiam ABC est ad BCD, ut BCD ad CDE, & CDE ad DEF, ac proinde BCD, CDE sunt duo medii proportionales inter ABC, & DEF. Quod erat demonstrandum.

Pars II. Jam patet ex II. parte, & defini-tio-

tione XII. rationem ABC ad DEF esse triplicatam rationis ABC ad BCD, hoc est a rationis A ad D. Quod erat demonstrandum.

a Schol. 19. 5.

Scholium.

Videtur hic locus exigere, quando solidus numerus ex trium numerorum multiplicatione producitur, ut demonstremus ex tribus, imo quotlibet numeris, quocumque inter se ordine multiplicatis, eumdem semper numerum produci. Insigne theorema est, & usus permagni, quod alia quadam via, longeque expeditiori, quam alii passim soleant, demonstrabimus. Sed quoniam ea pendet a permutationibus, quas datus rerum numerus subire potest, sit

Theorema I.

Datæ sint res, seu litteræ quotcumque A, B, C, D, E, & ponantur totidem numeri ab unitate 1, 2, 3, 4, 5. Hi inter se ordinatim multiplicati producent numerum permutationum, quas res datæ A, B, C, D, E subire possunt.

Theorematis hujus demonstrationem me audisse memini R. P. Ignatium Derkennis pulcherrimè deducentem, ex simplici duarum unitatum permutatione. Illius, dum hæc scribo, in lucem prodit opus Theologicum de Deo uno, trino, creatore, conscriptum methodo plane eximia, longissimeque diversa ab ea, quam de simili scribentes argumento hactenus tenuerunt. In quo istud etiam lector clarè perspiciet, non

 se-

solum Theologiæ Philosophiam ubique ancillari, sed, quod non perinde fortassis sibi homines persuaserint, etiam e Mathematicis ratiociniis, quantum subinde ad sublimes de Deo, divinisque rebus quæstiones enodandas possit lucis affundi. Ita porro, quod supra reposui, deducebat.

Duæ litteræ (has enim pro rebus assumemus) a, b *possunt bis permutari qualibet semel ultimum locum, vel primum occupante. Hinc*

Tres litteræ a, b, c *permutari possunt sexies: nam qualibet trium semel occupante ultimum locum, possunt duæ reliquæ bis permutari. Cum enim* c *tenet ultimum locum, possunt duæ reliquæ* a, b *bis permutari, ac proinde duo habentur diversi ordines* abc, bac. *Rursus* b *occupante ultimum locum, bis permutari possunt reliquæ* a, c, *& sic duo novi exsurgunt ordines* acb, cab. *Denique* a *ultimum tenente locum, reliquæ* b, c *bis permutari possunt: unde rursus duo alii existunt ordines* bca, cba. *En simul omnes.*

abc	acb	bca
bac	cab	cba.

Quatuor litteræ a, b, c, d, *permutationes admittunt* 24. *Nam quælibet ex* 4 *datis litteris semel occupare potest locum ultimum, ac tum reliquæ tres sexies permutari. Unde* 24 *diversi ordines quatuor litterarum existunt.*

Quinque a, b, c, d, e *permutationes subire possunt* 120. *Qualibet enim ex* 5 *datis ultimum tenente locum, reliquæ* 4 *vicibus* 24 *permutantur: unde litterarum* 5 *quinquies existunt* 24 *diversi*

versi ordines; hoc est 120. Atque ita in infinitum. Hoc præmisso sit

Theorema II.

Pars I. Tres numeri A, B, C, quocumque inter se ordine multiplicati, semper æquales gignunt numeros.

a	B	c
b	a	c
a	C	b
c	a	b
b	C	a
c	b	a

Sex diversos multiplicationum ordines exhibet tabella apposita. Quod producta sint æqualia, cum eadem littera ultimum locum tenet, ut in a b c, & b a c *&c. patet ex XVI. l. VII. Restat igitur, ut ostendam producta* a B c, a C b, b C a, *æqualia esse.*

a B c
a C b

Comparemus primum a B c, *&* a C b. a B *est ad*(a) a C, *ut* B *ad* C. *Sed* B, *&* C *sunt iidem numeri, qui* b, & c. *Ergo* a B *est ad* a C, *ut* b *ad* c. *Ergo b productum ex primo* a B *in quartum* c, *hoc est* a B c, *æquatur producto ex secundo* a C *in* b *tertium, hoc est ipsi* a C b. *Comparemus jam* a B c, *&* b C a. a B *est ad* b C, *ut* a *ad* C, *hoc est, ut* A *ad* c. *Ergo productum* a B c *æquatur producto* b C A.

a B c
b C A

Liquet igitur omnia sex producta inter se æqualia esse.

a schol. 17. 7.
b 19. 7.
schol. p. 17 7.
19. 7.

Pars II. Etiam 4 *numeri* a, b, c, d, *quocumque inter se ordine multiplicati, æquales gignent numeros.*

Ex Theor. patet a, b, c, d *admittere* 4 *senarios diversorum ordinum, hoc est ordines diver-*

 sos

sos 24. Senarius primus exhibetur in tabella apposita. Quoniam a, b, c *quocumque inter se ordine multiplicati semper eumdem gignunt numerum per I. partem, & ultimus in toto senario est idem, patet omnia primi senarii producta esse unum idemque. Eodem modo ostendam sex producta secundi senarii inter se convenire. Atque id ipsum de senario tertio, quartoque demonstrabimus. Hoc igitur solum restat, ut productum unius senarii conveniat cum producto cujuslibet senariorum trium reliquorum. Quod sic ostendo.*

a	b	c	d
b	a	c	d
a	c	b	d
c	a	b	d
b	c	a	d
c	b	a	d

Comparemus senarium primum, in quo d *tenet locum ultimum, cum senario quarto, in quo* a *locum postremum occupat. Scribe* a *infra* d. *Tum ante* d *pone* A, & D, *ante* a, *& reliqua præfige utrique litteras* b c. *Igitur* b c A *est ad* b c D, *e ut* A *ad* D, *hoc est* a *ad* d. *Ergo producta* e b c A d, & b c D a *senarii primi, & quarti æqualia sunt. Pari modo ostendam omnium 4 senariorum convenire producta. Liquet ergo propositum.*

b c A d
b c D a

e schol. 17.7.
e 19.7.

Pars III Eodem discursu ex parte II. ostendam producta ex multiplicatione 5 numerorum, quæ sunt 120, esse eadem: atque ita in infinitum, in numeris 6, 7, 8, &c.

PRO-

PROPOSITIO XX.

SI inter duos planos A, & B cadat unus medius proportionalis C, similes plani erunt.

Sumantur F, K, *a* minimi in ratione A ad C, & C ad B. Ergo *b* F, K æque metiuntur tam ipsos A, C puta per X, quàm ipsos C, B, puta per Z. Igitur K in X, & Z *c* facit C, B: ac proinde ut X est ad Z, *d* sic C est ad B, hoc est F ad K: & permutando F ad X, ut K ad Z. Quare cum *e* F in X faciat A, & K in Z faciat B, ac proinde F, X, & K, Z sint latera planorum A, & B; similes *f* plani erunt A, B. Quod erat demonstrandum.

a 35.7. *b* 21.7. *c* ax. 8. *d* 17.7. *e* hyp. & ax. 8. *f* def. 27.

A	C	B
	F	K
	X	Z

PAULLO ALITER.

SI inter duos numeros A, B unus cadat medius proportionalis C, similes plani erunt.

Sumantur *a* D, E minimi in ratione A ad C, & C ad B. Igitur D, E æque *b* metiuntur tam A, C,

A	C	B
D	E	
M	N	
DM	EM	EN

a 35.7. *b* 21.7.

pu-

puta per M, quàm C, B, puta per N. Quare DM, productum nempe ex D in
c ax. 8. M, est *c* A, & EM *d* est C, & *e* EN est B.
d idem. Jam in DM, & EM latus D est ad latus E,
e idem. f schol. p. 17. 7. ut *f* DM ad EM, hoc est, ut A ad C, hoc
g hyp. est, ut *g* C ad B, hoc est, ut EM ad EN,
h schol. p. 17. 7. hoc est, ut *h* latus M ad latus N. Ergo
i def. 27. DM, EN, hoc est A, B sunt plani *i* similes. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXI.

Si inter duos numeros A, B duo medii proportionales existant numeri C, D; similes solidi erunt A, B.

Sumantur
a 35. 7. *a* datis A, C, D tres minimi proportionales

A	C	D	B
EP	X	OQ	
	M	N	
EPM	XM	XN	OQN

b coroll. p. 21. 7. EP, X, OQ, qui æque *b* metientur ipsos A, C, D, puta per M; ac proinde EPM,
c ax. 8. productum nempe ex EP in M, *c* est A,
d idem. & XM *d* est C. Quia autem C, D, B sunt in eadem ratione, in qua A, C, D; erunt EP, X, OQ etiam minimi proportio-
e coroll. p. 21. 7. nales ipsis C, D, B, eosque proinde *e* metien-

tientur æquè, puta per N. Quare XN, productum nempe ex X in N, est *f* D, & OQN est B.

A	C	D	B
EP	X	OQ	
	M	N	
EPM	XM	XN	OQN

Cum igitur EPM sit A, & OQN sit B, reliquum est, ut ostendatur latera E, P, M esse proportionalia lateribus, O, Q, N. *f* ax. 8.

Quoniam inter EP, & OQ *g* est medius proportionalis X, erunt EP, OQ *h* plani similes; ideoq; *i* E est ad O, ut P ad Q. Deinde M est ad N, ut *k* XM ad XN, hoc est, ut jam ostendi sup., ut C ad D; hoc est, ut *l* EP ad X. Sed EP est ad X, ut latus P ad latus Q: quia tam *m* EP ad X, quam *n* P ad Q est in ratione dimidiata EP ad OQ. Ergo *o* ut P ad Q, hoc est ut E ad O, sic M ad N. Similes igitur *p* solidi sunt EPM, OQN, hoc est A, B. Quod erat demonstrandum.

g const. *h* praeced. *i* def. 17. *k* schol. p. 17.7. *l* const. *m* def. 12. *n* 18.8. *o* 11.12. *p* def. 17.

PROPOSITIO XXII.

SI trium proportionalium numerorum A, B, C primus A sit quadratus, tertius C etiam quadratus erit.

Radix, sive latus quadrati A esto O. Quo-

A B C
O P
1

Quoniam igitur O multiplicans se facit A, erit ut unitas (1) ad O, sic *a* O ad A: ac proinde tam inter A, & 1, quam inter A, & C unus est medius proportionalis. Ergo etiam *b* inter 1, & C unus cadet medius P; qui proinde ductus in se *c* facit C. Ergo etiam C quadratus *d* est. Quod erat demonstrandum.

a def. 13.
b coroll. 3. 20. 8.
c patet ex def. 13
d def. 28.

Corollarium.

Quadratus, radix, unitas sunt continuè proportionales. Patet ex demonstratis.

PROPOSITIO XXIII.

SI quatuor continuè proportionalium numerorum A, B, C, D primus A sit cubus, quartus etiam cubus erit.

A B C D
P R
O Q
1

Cubi A latus esto O. O in se faciat P. Igitur O in P *a* facit cubum A. Jam per coroll. præc. 1. est ad O, ut O ad P. Et quia O in P facit A, erit ut 1, ad O, hoc est ut O ad P, sic *b* P ad

a def. 29.
b def. 13.

ad A. Ergo tam inter A, & 1, quam inter A, & D cadunt duo medii proportionales. Ergo etiam inter 1, & D duo medii *c* cadent Q, R. Cum ergo sit, ut 1 ad Q, sic Q ad R, patet *d* Q in se facere R. Et cum sit ut 1 ad Q, sic R ad D, patet *e* Q in R facere D. Ergo *f* etiam D cubus est.

c coroll. 2. 10. 8.
d def. 8.
e ex ead.
f def. 29.

Corollarium.

UNitas, radix, quadratum, cubus sunt continue proportionalia. Patet ex demonstratis.

PROPOSITIO XXIV.

SI duo numeri A, B eam inter se rationem habeant, quam quadratus aliquis C ad quadratum D: primus autem A sit quadratus; etiam secundus B quadratus erit.

A	O	B
C	P	D

Quoniam A est ad B, ut C ad D; & inter C, & D unus cadit medius *a* proportionalis P; etiam inter *b* A, & B unus cadet O. Quia igitur primus A quadratus est, etiam tertius *c* B quadratus erit. Quod erat demonstrandum.

a 11. 8.
b 8. 1. 8.
c 22. 8.

PRO-

PROPOSITIO XXV.

SI duo numeri A, B eam inter se rationem habeant, quam cubus C ad cubum D, primus autem A sit cubus; etiam secundus B cubus erit.

A	O	P	B
C	Q	R	D

Quia A est ad B, ut C ad D, atque inter cubos
a 12.8. *a* C, D duo cadunt medii proportionales Q, R; etiam inter A,
b 8.8. B duo *b* medii cadent. Quoniam ergo A
c 23.8. cubus est, etiam B cubus *c* erit. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

I. RAtio quadrati numeri ad non quadratum nequit exprimi in duobus quadratis. Patet ex XXV.

II. Ratio cubi ad non cubum nequit exhiberi in duobus cubis. Patet ex XXV.

PROPOSITIO XXVI.

SImiles plani A, B eam inter se rationem habent, quam quadratus aliquis ad quadratum.

In-

Inter A, & B cadit unus a medius proportionalis, qui esto C. In ratione A ad C, seu C ad B accipiantur tres minimi D, E, F. Extremi D, F erunt b quadrati. Quoniam ergo A est ad C, ut c D ad E, & C ad B, d ut E ad F; erit ex æquo e A ad B, ut quadratus C ad quadratum F. Quod erat demonstrandum.

A	C	B
D	E	F

a 18.8.
b corol. 1. p. 2. l. 8.
c constr.
d constr.
e 22.7.

PROPOSITIO XXVII.

Similes solidi A, B eam inter se rationem habent, quam aliquis cubus ad cubum.

Inter A, & B duo a cadunt medii proportionales, qui sint C, D. In ratione A ad C capiantur quatuor minimi E, G, H, F. Extremi E, & F erunt b cubi: eritque ex æquo A ad B, ut E cubus ad cubum F. Quod erat demonstrandum.

A	C	D	B
E	G	H	F

a 19.8.
b corol. 2. p. 2.

ELE-

ELEMENTORUM ARITHMETICÆ LIBER TERTIUS.

EUCLIDI VERO NONUS.

PROPOSITIO PRIMA.

DUo similes plani A, B, se mutuò multiplicantes, quadratum producant AB.

A O B

AA P AB

A in se faciat AA. Erit igitur AA ad AB, ut *a* A ad B. Sed inter *b* A, & B cadit unus medius proportionalis, cum sint A, & B plani similes. Ergo etiam inter *c* AA, & AB medius cadet P. Quare cum primus AA sit quadratus per constructionem, etiam tertius AB quadratus *d* erit. Quod erat demonstrandum.

a schol. p. 17. 7.
b 18. 8.
c 8. 8.
d 22. 8.

PROPOSITIO II.

SI duo numeri A, B se invicem multiplicantes quadratum gignant AB, similes plani erunt.

A	O	B
AA	P	AB.

A in se fit AA. Quoniam AA, AB ambo quadrati sunt, cadet inter *a* eos medius proportionalis. Sed AA est ad AB, ut *b* A ad B. Ergo etiam inter A, & B *c* cadet medius proportionalis. Ergo A, B sunt *d* plani similes. Quod erat demonstrandum.

a 11. 8.
b schol. 17. 7.
c 8. 8.
d 20. 8.

Corollaria.

I. DUo quadrati quadratum producunt. Sunt enim similes plani. Ergo per I. hujus inter se mutuò multiplicati quadratum generant.

II. Si duo numeri A, B quadratum producunt, & alter eorum, puta A, sit quadratus, etiam B quadratus erit.

Nam per II. A, & B sunt plani similes. Ergo inter *a* A, B cadit medius proportionalis. Cum ergo A primus sit quadratus, etiam tertius B *b* quadratus erit.

a 18. 8.

III. Si duo numeri A, & B producant *b* 22. 8.

 non

non quadratum, A verò sit quadratus; B quadratus non erit.

Nam, si etiam B quadratus esset, duo A, & B per corollarium I. producerent quadratum, contra hypothesim.

IV. Quadratus A, & non quadratus B producunt non quadratum. Aliàs per corollarium II. etiam B quadratus foret, contra hypothesim.

PROPOSITIO III.

Cubus numerus CCC, seipsum multiplicans, facit cubum D.

CCC		Cubi radix, seu latus esto
CC		C. Per corollariū p. XXIII.
C		lib. VIII, 1. C, CC, CCC,
D	1	sunt continuè proportionales;

adeoque inter 1, & CCC cadunt duo medii proportionales. Sed, quia CCC in seipsum fecit D, erit
a def. 13. *a* ut 1 ad CCC, ita CCC ad D. Ergo
b 8. 8. etiam *b* inter CCC, & D cadunt duo medii. Quare cum primus CCC sit cubus,
c 23. 8. etiam quartus D cubus *c* erit; quod fuit demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Ex cubo A in cubum B fit cubus AB.

A in se fit AA. Erit *a* AA cubus. Et quoniam A, & B cubi sunt, cadent inter eos duo medii *b* proportionales. Sed AA est ad AB, *c* ut A ad B. Ergo & inter AA, AB *d* cadent duo medii. Quare cum primus A sit cubus, etiam quartus *e* AB erit cubus. Quod erat demonstrandum.

A	B
AA	AB

[*a* praec. *b* 12. 8. *c* schol. p. 17. 7. *d* 8. l. 8. *e* 23. 8.]

PROPOSITIO V.

Si cubus A multiplicans aliquem numerum B gignat AB cubum, etiam multiplicatus B cubus erit.

Cubus A in se faciat AA. Erit *a* AA cubus. Quoniam igitur AA, & AB ambo cubi sunt, inter eos cadent duo *b* medii proportionales. Sed AA est ad AB, *c* ut A ad B. Ergo etiam inter A, & B *d* cadent duo medii. Quare

A	B
AA	AB

[*a* 3. 9. *b* 12. 8. *c* schol. p. 17. 7. *d* 8. 8.]

e 23. 8. cum primus A cubus sit, etiam *e* quartus B cubus erit. Quod erat demonstrandum.

Corollaria.

1. Ex cubo A in non cubum X fit non cubus. Aliàs enim per V. etiam X foret cubus, contra hypothesim.

2. Si cubus A in B faciat non cubum, neque B cubus erit. Aliàs per IV. etiam factus ex A in B foret cubus, contra hypothesim.

PROPOSITIO VI.

Si numerus A, in se ductus, facit cubum B, & ipse cubus est.

A in B producat E. Quoniam A in se fecit B, & rursum in B fecit E; patet

A

A B E

a def. 29. E *a* cubum esse. Et quia A in B cubum fecit E cubum; etiam B cubus in A fa-

b 17. 7. cit *b* cubum E. Ergo & A *c* cubus est.

c 5. 9. Quod erat demonstrandum.

PRO-

PROPOSITIO VII.

COmpositus numerus A, multiplicans quemvis numerum B, generat solidum E.

Compositum numerum A aliquis, præter unitatem, metiatur *a* numerus, qui sit C, per aliquem numerum, qui sit D. Ergo C in D est *b* A. Sed A in B *c* est E. Ergo E fit ex multiplicatione trium C, D, B. Ergo E solidus *d* est. Quod erat demonstrandum.

A B E
C D

a def. 22.
b ax. 8.
c hyp.
d def. 28.

Lemma.

In serie numerorum ab unitate continuè proportionalium 1. A, B, C, D, E, &c., numerus A primus ab unitate, multiplicans quemlibet D, producit sequentem E.

Erit enim *e* ut 1. ad A, ita D ad E: ex quo res patet.

e def. 13.

PROPOSITIO VIII.

SI numeri quotcunque fuerint ab unitate continuè proportionales; B se-

cundus, unitate seclusâ, quadratus erit, & uno intermisso, omnes D, F, H, &c.

Tertius autem C cubus est, & duobus intermissis, omnes F, K, &c.

Sextus vero F cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis, omnes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1.	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	K.	L.	M.	N.	O.
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	&c.					

Pars I. Quoniam, ut 1 est ad A, sic A est ad B; patet *a* A in se facere B, ac *b* proinde B quadratus est. Deinde quia B, C, D sunt continuè proportionales, & B quadratus est; etiam *c* D quadratus erit: et sic deinceps uno intermisso.

a def. 15.
b def. 28.
c 22. 8.

Pars II. Quoniam A in se fecit B, & A rursum *d* in B facit C; erit *e* C cubus. Deinde quia C, D, E, F sunt quatuor continuè proportionales, & C cubus est; etiam F cubus *f* erit: & sic deinceps duobus semper intermissis.

d lem.
e def. 29.
f 23. 8.

Pars III. Patet ex I. & II.

Scho-

Scholium.

QUoniam primus in serie numerus A multiplicans quemcunque alium ex serie producit sequentem; liquet continuè proportionalium seriem pulcherrimè exprimi solâ litteræ A, numerum quemlibet designantis, continuâ appositione, hunc in modum.

0	1	2	3	4	5	
1.	A.	AA.	AAA.	AAAA.	AAAAA.	A 6.
A 7.	A 8.	A 9.	A 10.	A 11.	A 12.	

A quippe in seipsum, facit AA quadratum: & A in AA, facit AAA cubum: & sic deinceps. Quin verò sic tota propositionis demonstratio uno intuitu perspicitur. Quoniam enim multiplicationis productum litterarum appositione exhibetur; liquet quadratum esse, cum litterarum multitudo par est, quam proinde binarius metiatur, ut fit loco secundo, quarto, & sequentibus, uno intermisso. Rursum liquet, tum esse cubum, cum numerum litterarum metitur ternarius, ac proinde trisecari potest, quod evenit loco tertio, sexto, & sequentibus, binis semper intermissis. Denique apparet, cum litterarum multitudo est numerus primus, ut 5, 7, 11, 13, &c. nec cubum haberi, nec quadratum; quia nimirum cum primos numeros nullus numerus metiatur, litterarum multitudo tum nequit aut bisecari, quod ad quadraticam, aut trisecari, quod ad cubicam multiplicationem requiritur. Solent ab Arithmeticis hi numeri surdesolidi, sive supersolidi appellari. Omnes autem reliqui progres-

F 4 sionis

sionis termini vel quadrati, vel cubi sunt, vel utrumque; quia cum numeri litterarum, seu dimensionum, quibus constant, sint compositi; eos vel binarius, vel ternarius, vel uterque metitur: ac proinde aut bisecari possunt, aut trisecari, aut utrumque.

Solent porro numeri progressionis jam dictæ vocari potestates, ac scribi supra eos numeri ordine naturali, qui locum, seu dimensiones singulorum indicent, dicunturque exponentes. Itaque in priori serie, quâ ante Scholium usi sumus, A est primus terminus, vocaturque radix; B secundus, seu duarum dimensionum, & quadratus dicitur; C tertius, seu trium dimensionum, & cubus appellatur, &c. In altera serie ipsa litterarum multitudo locum, latera, ac dimensiones potestatum singularum exprimit.

Ex dictis supra patet I. in quacumque serie continuè proportionalium terminum, cujus exponens est 6, esse simul cubum, & quadratum: numerus enim laterum ejus, cum mensuretur a 2, & 3, poterit bisecari, ac trisecari. II. intermissis semper 5, reliquos omnes fore cubos simul, & quadratos, terminum videlicet 12, 18, 24, & cæteros, quorum exponentes senarius metitur. Cum enim tam 2, quàm 3 metiantur 6; 6 autem metiatur 12, 18, 24, &c. etiam tam 2, quàm 3 eosdem omnes metientur, qui proinde, & bisecari poterunt, & trisecari. Ergo, &c.

PRO-

PROPOSITIO IX.

SI in serie continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A sit quadratus, reliqui omnes quadrati erunt.

Si primus est cubus, reliqui etiam omnes cubi erunt.

Pars I. Quoniam A per hypothesim, & B per præc. quadrati sunt, & A in B facit C; etiam *a* C quadratus erit. Rursum quia quadratus A in quadratum C *b* facit D; etiam D quadratus erit. Et sic deinceps.

1. A B C D E F

a coroll. 1. 2. 9.

b lem.

Pars II. Quoniam A per hypothesim cubus est, & A in se facit B; etiam B cubus *c* erit. Et quia A cubus in B cubum *d* facit C; etiam *e* C cubus erit. Et sic deinceps.

c 3. 9.
d lem.
e 4. 9.

PROPOSITIO X.

SI continuè proportionalium ab unitate numerorum primus A quadratus non sit, neque alius ullus quadratus erit, præter secundum B, & reliquos, uno semper intermisso, sequentes D, F, &c.

Et

Et si primus A non sit cubus, neque alius ullus cubus erit, præter tertium C, & reliquos, duobus intermissis, sequentes F, &c.

Pars I. Sit enim, si fieri potest, E quadratus. Quoniam igitur E est ad D, ut B ad A, suntque quadrati a E, b D, B, etiam c A quadratus erit, contra hypothesim.

1. A B C D E F G

a quia ponitur.
b 18. 9.
c 24. 5.

Pars II. Esto, si fieri potest, D cubus. Cum ergo etiam cubi sint d F, & C, sitque per hypothesim, & ex æquo, ut F ad G, sic D ad A; etiam A e cubus erit, contra hypothesim.

d 8. 9.
e 25. 8.

PROPOSITIO XI.

IN serie numerorum ab unitate continuè proportionalium minor quilibet C quemlibet majorem G metitur per aliquem numerum, qui est in serie.

1. A B C D E F G

Ex æquo enim C est ad G, ut 1 ad D.

f def. 15. Ergo C metitur f G per D.

Co-

Corollaria.

I. Quantum major G distat a metiente C, tantum D, is per quem minor majorem metitur, distat ab unitate.

II. Primus A metitur quemlibet D per præcedentem C.

III. Quivis in serie numerus C, seipsum multiplicans, producit numerum F, eodem a se intervallo distantem, quo ipse ab unitate.

IV. Si quivis in serie numerus B multiplicet quemvis D etiam in serie; quantum distat 1. a minore B, tantum distabit major D a producto F.

PROPOSITIO XII.

Si ab unitate fuerint numeri quotcumque continuè proportionales; primus numerus E, qui metitur ultimum D, metietur & unitati proximum A.

1. A	B	C	D
E	H	G	F

Ponatur enim, si fieri potest, E primum non metiri A. Ergo a E, & A sunt primi inter se. Quoniam a 31. 7.

ve-

vero E metitur D, metiatur eum per F. (b corol. 2. præc.) Metitur autem & A eumdem *b* D per C. (c corol. 19. 7.) Ergo E est ad A, ut *c* reciproce C ad F. Sed quia E, & A sunt primi inter se, erunt minimi (d 23. 7.) *d* in sua proportione. Ergo E metitur (e 21. 7.) C, *e* puta per G. Quare cum eumdem C metiatur (f coroll. 2. præced.) *f* A per B, rursum erit E ad A, (g corol. 19. 7.) *g* ut B ad G. Ergo quia E, A sunt in sua proportione minimi, iterum E metitur (h 21. 7.) *h* B, puta per H. Atqui etiam A metitur B per A; nam A in se facit B, ut patet ex VIII. Ergo rursum (i corol. 19. 7.) *i* E est ad A, ut A ad H.

A A
E H

Quare, cum E, A sint in proportione sua minimi, (k 21. 7.) E *k* metitur A. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Pulchra, & subtilis hæc demonstratio est, in qua ex contradictorio assertionis assertio ipsa directâ demonstratione infertur. De hoc genere demonstrationis vide, si lubet, quæ disseruimus in Appendice post Elementa Geometriæ.

PROPOSITIO XIII.

Si numerorum ab unitate continuè proportionalium proximus unitati A primus est; maximum D nullus alius metie-

titetur præter eos, qui sunt in numeris proportionalibus.

I. Metiatur enim, si fieri potest, E diversus ab ipsis A, B, C, maximum D. Non erit

1.	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

E primus, aliàs etiam E metiretur *a* A, ac proinde A non esset primus, contra hypothesim. Igitur E compositus est: ac proinde eum metitur *b* aliquis primus. *a* præc. *b* 34. 7.

II. Quem dico esse A. Si enim alius primus O metiretur E, quoniam E metitur D, etiam O *c* metiretur D, adeoque *d* & ipsum A: quod est absurdum, cum A primus sit. Metiatur jam E ipsum D per H. *c* ax. 11. *d* præc.

III. Erit H diversus ab A, B, C. Sit enim, si fieri potest, H idem cum aliquo ipsorum A, B, C, puta cum C. Ergo E metietur D

1.	A	B	C	D
	E	F	G	H
	O			

per C: ac proinde etiam C *e* metitur D per E. Ergo E est unus *f* ex serie A, B, C: quod est absurdum, cum E volueris esse non unum ex serie A, B, C. Ergo H diversus est ab ipsis A, B, C. *e* ax. 9. *f* 11. 9.

IV. Deinde H non erit primus, aliàs

cum

g præc. cum H metiatur D, metiretur g quoque A, primum ex hypothesi: quod est absurdum. H, igitur compositus est.

V. Quia autem H compositus est, metietur eum aliquis primus, quem dico esse A. Si enim alius primus O metiretur H, cum H metiatur D (nam quia E per H metitur D, etiam H h per E metietur D) metietur quoque i O ipsum D, ac proinde etiam k ipsum A primum: quod est absurdum.

h ax 9.
i ax. 11.
k præc.

VI. Jam quia A metitur l D per C, itemque E metitur D per H; erit, ut A ad E m, ita reciproce H ad C. Quare cum, ut ostendi num. I., A metiatur E, etiam H metietur C, puta per G. Quoniam igitur, sicut E diversus ab A, B, C metiebatur postremum D per H, ita nunc H (quem jam ostendi num. III. diversum esse ab A, B, C,) metitur ipsorum A, B, C postremum C per G. Ostendam eodem modo G distinctum esse ab A, B, & non esse primum, & mensurari ab A, quo hæc tria ostendi de numero H.

l coroll. 2. 11. 9.
m coroll. 19. 7.

Quia ergo A metitur C n per B, & H metitur C per G; erit ut o A ad H, ita reciproce G ad B. Sed ostendi num. V. A metiri H. Ergo etiam G metitur B, pu-

n corol. 2. 11. 9.
o coroll. 19. 9.

B, puta per F. Ostendam rursus F diversum esse ab A, plane, ut ostendi n. III. H esse diversum ab A, B, C, & G ab A, B.

Quoniam igitur A per A, hoc est per se, metitur B, & G per F metitur B; erit ut A ad G, p sic reciproce F ad A. Sed est ostensum num. VI. A metiri G. Ergo etiam F metitur A; quod est absurdum, cum A primus sit. Sed hoc absurdum inde deductum est, quod poneretur E, diversum ab A, B, C, metiri D. Liquet ergo, nullum ab A, B, C diversum metiri D. Quod erat demonstrandum. p coroll. 19. 7.

Scholium.

HÆc demonstratio, quæ ratiocinationis flexu mirabili tandem infert quæsitum, meritò e difficilioribus una videri potest. Breviorem aliam substituit Claudius Richardus noster, Euclidis Commentator præclarus; sed eâ non confici propositum, facilè intelliget, qui legerit.

PROPOSITIO XIV.

MInimum numerum A, quem primi numeri B, C, D metiuntur, nullus alius primus, præter datos, metitur.

Me-

A Metiatur, si fieri potest,
B C D minimum A alius quispiam
E F primus E per F. Ergo E in
a 21. 8. F facit *a* A, ac proinde E, F sunt latera ipsius A. Quoniam ergo B, C, D metiuntur A, metientur quoque *b* alterutrum E, F. Non E primum. Ergo F. Sed F minor est, quàm A: nam F in E facit A. Ergo A non est minimus, quem metiuntur B, C, D, Quod hypothesim evertit.

b 32. 7.

PROPOSITIO XV.

SI fuerint tres proportionales in ratione sua minimi AA, AB, BB; duo quilibet compositi ad reliquum primi erunt.

A B Ex prop. II. lib. VIII.
AA AB BB manifestum est, si A, B duo minimi ponantur in ratione data; AA, AB, BB fore tres minimos in eadem ratione. Jam quia A, & B sunt *a* primi inter se, etiam *b* A+B ad B primus est. Sed etiam A ad B primus est. Ergo etiam *c* factus ex A+B in A, nempe AA + BB, ad B primus est. Quare AA + AB ad BB etiam *d* primus erit.

a 24. 7.
b 30. 7.
c 26. 7.
d 27. 7.

erit. Eodem plane modo ostendam, BB + AB ad AA esse primum.

Reliquum est, ut etiam AA + BB ad AB primus sit. Quoniam A, B sunt primi inter se, ac proinde *e* etiam tam A, quàm B ad A + B primus est; erit quoque AB, genitus ex A in B, ad A + B *f* primus. Ergo AB ad *g* ipsius A + B quadratum, hoc est ad *h* AA + BB + 2 AB, primus est. Ergo dividendo AB primus *i* est ad AA + BB + AB. Ergo rursum *k* dividendo AB primus est ad AA + BB. Quod erat demonstrandum.

e 30.7. *f* 26.7. *g* 4.2. *h* 27.7. *i* 30.7. *k* ibid.

PROPOSITIO XVI.

Duobus numeris inter se primis A, & B, nequit tertius proportionalis exhiberi.

A	B	b	C
5	7	7	

Sit enim, si fieri potest, ut A ad B, sic b ad alium C. Quia primi sunt inter se A, & B, erunt *a* minimi sibi proportionalium. Ergo A *b* metitur b. Sed etiam A metitur se. Ergo A, & b sunt inter *c* se compositi, contra hypothesim. Quod est absurdum.

a 23.7. *b* 21.7. *c* def. 14.

PROPOSITIO XVII.

SI in continuè proportionalium serie extremi A, D sunt primi inter se, ea non poterit ulterius continuari.

Sit enim, si fieri potest, ut A ad B, & B ad C, &c. sic D ad alium E. Igitur permutando, ut A ad D, sic B ad E. Sed A, & D sunt *a* inter se primi, ac proinde *b* minimi in sua ratione. Ergo *c* A metitur B. Sed B metitur *d* C, & C metitur D. Ergo A *e* metitur D. Sed & A metitur se. Ergo *f* A, & D sunt inter se compositi: contra hypothesim.

A B C D E

a hyp.
b 23. 7.
c 21. 7.
d 1. 9.
e ax 11.
f def. 24.

PROPOSITIO XVIII.

DVobus numeris datis A, B considerare, an possit ipsis tertius proportionalis exhiberi.

Si A, B sunt primi inter se, non posse reperiri tertium, patet ex XVI.

A B X
BB

Si A, B sunt inter se primi, B in se faciat BB. Si A metitur BB, puta per X; erit

erit X tertius proportionalis. Nam X in A *a* facit BB. Sed & B in se facit BB. *a ax. 8.* Ergo *b* A est ad B, ut B ad X. *b 20. 7.*

Si A non metitur BB, non poterit exhiberi tertius proportionalis. Detur enim, si fieri potest, Z. Ergo A in Z facit BB, eumdem *c*, quem B in se. Quia ergo A in Z est BB, A per Z metietur *d* BB: contra hypothesim. *c ibid.* *d ax. 7.*

A	B	Z
	BB	

PROPOSITIO XIX.

Tribus numeris datis A, B, C considerare, an quartus proportionalis possit exiberi.

A	B	C	X
	BC		

Secundus B, in tertium C ductus, faciat BC. Si primus A metitur BC, puta per X; erit X quartus proportionalis. Nam tunc A in X *a* faciet BC, æquè ac B in C. Ergo *b* ut A ad B; sic C ad X. *a ax. 8.* *b 19. 7.*

A	B	C	Z
	BC		

Si A non metitur BC, non poterit exhiberi quartus proportionalis. Detur enim Z, si fieri potest. Ergo A in Z *c* faciet BC, eumdem, quem B facit *c 19. 7.*

d 21.7. in C. Ergo A *d* metietur BG per Z: contra hypotesim.

Scholium.

Propositiones quatuor praecedentes intelligendae sunt de numeris integris. Quibusvis enim duobus numeris tertius, & quibusvis tribus quartus proportionalis exhiberi potest per fractiones, ut docebitur in Arithmetica practica.

e Arith. pract. l. 5. c. 7. *Hoc verò observatu dignum est, quod suo e loco demonstrabimus, quamvis duobus quibuslibet tertius proportionalis, & tribus quartus, saltem fractus, dari possit; tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi.*

Datis tribus numeris, A, B, C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum.

A B C Z
D

Primus A, dividens secundum B, faciat quotientem D. Tertius C, multiplicans D, gignat Z. Hic est quaesitus.

f 21.8. g 17.7. h 17.7. *Cum enim A dividat B per D, etiam* f *A in D faciet B. Sed & C in D* g *gignit Z. Ergo A est ad B,* h *ut C ad Z.*

Impossibilis erit quartus proportionalis integer, non si A non metitur B, sed si factus ex C in D non sit integer, aut ad integrum reducibilis.

PRO-

PROPOSITIO XX.

PRimi numeri sunt infiniti.

A	B	C
X+1.		
	Z	

Dentur primi tres A, B, C. Inveni X minimum, *a* quem A, B, C metiuntur, cui adde unitatem. Si X+1 primus est, jam quartus habebitur primus. Si X+1 non est primus, eum aliquis *b* primus metietur, puta Z. Hic erit primus, a datis A, B, C diversus. Sit enim, si fieri potest, idem cum datorum aliquo C. Ergo quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X+1. Ergo Z metietur *c* quoque 1: quod est absurdum. Ergo Z, novus primus est. Eodem modo invenientur plures sine termino.

a 38.7.

b 34.7.

c ax.12.

PROPOSITIO XXI.

NUmeri pares quotcumque A, B, C componunt parem.

A	B	C
N	O	P

Quoniam A, B, C pares sunt, eorum *a* semisses sint N, O, P. Quia

a def. 16.

igitur est, ut A ad N, sic B ad O, & C ad P; erit ut A ad N, *b* sic summa A, B, C ad summam N, O, P. Sed A est duplus ipsius N. Ergo summa A, B, C dupla est summæ N, O, P: adeoque summa N, O, P est semissis summæ A, B, C. Ergo summa A, B, C *c* par numerus est. Quod erat demonstrandum.

b 12.5.
c def. 16.

PROPOSITIO XXII.

IMpares A, B, C, D, multitudine pari, componunt parem.

A B C D

Aufer à singulis unitatem. Tum & *a* reliqui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præcedent. reliqua, & ablata simul, hoc est ipsi A, B, C, D, component parem.

a def. 17.
b hyp.

PROPOSITIO XIII.

IMpares A, B, C, multitudine impari, componunt imparem.

A B C
C—1

Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C—1 par. Sed & impares A, B

c def. 17.

A, B *d* componunt parem. Ergo A, B, C—1 componunt parem. Sed summa A, B, C—1 ab summa A, B, C differt unitate. Ergo summa A, B, C est numerus *e* impar. Quod erat demonstrandum.

d prae.

e def. 17.

Corollarium.

PAri ratione impar additus pari componit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

SI a pari numero D subtrahatur par E, reliquus F par erit.

Nam si reliquus F foret impar, cum pari E componeret *a* imparem. Sed F cum E componit D. Ergo D impar esset: contra hypotesim.

D
E
F

a coroll. prae.

PROPOSITIO XXV.

SI a pari numero A impar B subtrahatur, reliquus C erit impar.

Nam si reliquus C esset par, is cum impari B faceret *b* imparem. Sed C cum B facit A. Ergo A foret impar: contra hypothesim.

A
B
C

b coroll. 23.

PROPOSITIO XXVI.

SI ab impare E subtrahatur impar F, reliquus G erit par.

Nam si G foret impar, is cum | E
a 22. 9. impare F componeret E a parem. | F
Quod evertit hypothesim. | G

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare A subtrahatur par B, reliquus C erit impar.

A
B
C

Nam si C foret par, is cum pari
a 21. 9. B componeret a A parem: contra hypothesim.

PROPOSITIO XXVIII.

PAr, & impar A, B, invicem multiplicantes, producunt C parem.

b def. 24. A 2. B 3. Componitur b enim C
C 6. ex pari A, toties sumpto, quot sunt unitates in B.
a 21. 9. Ergo C par a est.

Co-

Corollaria.

I. PAr multiplicans parem gignit parem. Patet eodem modo ex XXI.

II. Omnis pariter impar est par. Patet ex defin. XIX., axioma. VII., & hac propositione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar D multiplicans imparem E, producit imparem F.

D 3. E 5. F 15

Componitur *a* enim F ex D impare toties sumpto, quot sunt unitates in impare E. Ergo F impar *b* est.

a def. 15.
b 23. 9.

Corollaria.

12 B
3 A { C 4.

I. IMpar A metiens parem B eum metitur per parem C. Nam si C foret impar, quia A in C *c* producit B, esset B *d* impar, ut pote genitus ex impare A in imparem C. Quod repugnat hypothesi.

c ax. 8.
d 29. 9.

II. Im-

15 E } F 5.
3 D }

II. Impar D, metiens imparem E, eum metitur per imparem F. Nam si F foret par, quoniam D impar in F parem gignit *a* E, esset E *b* par: contra hypothesim.

a ax. 8.
b 28.9.

Scholium.

Ex his demonstrari jam poterit, nullum numerum AB ita secari posse, ut genitus ex toto AB in unam partem CB sit æqualis quadrato partis alterius AC: ac proinde propositionem XI. lib.II. nullo modo posse numeris applicari, quamvis decem primæ ejusdem libri propositiones omnes etiam in numeris sint veræ.

A——C——B
D——E——

Sit enim, si fieri potest, genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par est, & CB impar.
Vel AC impar, & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Esto primum AC par, & CB impar. Ergo totus AB est a *impar. Ergo genitus ex AB impare in CB imparem, impar* b *est. Est* c *verò par quadratus, ex AC pari. Ergo impar, genitus ex AB in CB, æquatur pari, nempe quadrato ex AC. Quod est absurdum.*

a coroll. 23.9.
b 29.9.
c coroll. 28.9.

Sit deinde AC impar, & CB par. Ergo totus AB d *impar est. Ergo factus ex impare AB in CB parem par* e *est. Atqui quadratus imparis*

d coroll. 23.9.
e 28.9.

AC

AC impar f est. Ergo rursum hic impar illi pari æqualis est. Quod est absurdum. f 29. 9.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergo totus AB g par est. Ergo factus ex AB pari in imparem CB par h est. Imparis autem AC quadratus i impar est. Ergo rursum hic impar illi pari ex AB in CB æqualis est. Quod est absurdum. g 22. 9. h 28. 9. i 29. 9.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumantur duo minimi D, E, in ratione AC ad CB. Erunt D, E, primi k inter se: ac proinde nequeunt ambo esse pares, alias metiretur eos binarius; sed vel ambo sunt impares, vel D par, E impar, vel D impar, E par. Jam quia AB in CB æquatur quadrato AC, erit ut AB ad AC, ita AC ad CB. Et quia E est ad D, ut BC ad CA, erit componendo E cum D ad D, ut BA ad AC; hoc est ut l AC ad CB, hoc est ut m D ad E. Quoniam igitur D cum E est ad D, ut D ad E, erit genitus ex D cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fieri non posse, tribus primis partibus demonstratum est. k 24. 7. l ostendi ante. m hyp.

At quispiam suspicabitur ita secari fortassis numerum posse in duas partes, quibus fractiones adhæreant. Verùm si illæ partes reducantur ad duas fractiones ejusdem denominationis, ut docebitur in Arithm. Pract. lib. II. c. III. prob. II. facilè apparebit, ne id quidem esse possibile.

PROPOSITIO XXX.

SI impar B metiatur parem A, & illius dimidium metietur.

Im-

Impar B metiatur A parem per C. Erit *a* C par, & C metietur quoque A *b* per B. Ergo & dimidium ipsius C metietur dimidium ipsius A per B (est enim ut C ad A, sic dimidium C ad dimidium A.) Ergo etiam B per dimidium C metietur *c* dimidium A. Quod erat demonstrandum.

12 A { C 4
3 B

a corol. 1. 29. 9.
b ax. 9.
c idem.

PROPOSITIO XXXI.

SI impar A ad aliquem B primus est, etiam ad illius duplum C primus erit.

Nam si A, & C non sint primi inter se, metiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D necessariò impar, aliàs D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (est enim C par, cum duplus sit B,) etiam D metietur *b* B ejus dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non sunt primi inter se: contra hypothesim.

A 3. B 5.
C 10. D E

a 28. 9.
b praec.

Co-

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolum ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum, &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur in infinitum 1, 2, 4, 8, 16, *&c. habentur omnes pariter pares tantum.*

1.	A	B	C	D	E	F	
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	
			1.	R	P	O	

Quod ſinguli ſint pariter pares, patet ex XI. l. IX. Per hanc enim 2. metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem XVIII.

Quod ſint pariter pares tantum, patet ex XIII. lib. IX. Cum enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8, &c. præter eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem XVIII.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tan-

1, A B C D E F
1. 2. 4. 8. 16. 32, 64
1. R P O,

tantum, sic ostendo. Esto tantum pariter par quicumque O, cujus dimidium sit P, hic erit par; aliàs si P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O esset pariter impar: contra hypothesim. Semissis ergo ipsius P esto R. Hic rursum erit par; si enim R esset impar, cum sit quarta pars ipsius O, numerus 4. per imparem R metiretur D: rursus contra hypothesim. Atque ita semper semissis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo 1 semissis ipsius R. Erunt igitur R, P, O ab unitate dupli, ac proinde O unus ex serie. Liquet ergo propositum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantum 4.6.10.&c.

3. 5. 7. 9. 11.
6. 10. 14. 18. 22.
A B C D E
7 N 2.
P Q

Singuli pariter impares sunt, quia eorum semissis est *a* impar, adeoque metie-

a hyp.

tietur binarius singulos per semissem imparem.

Esse pariter impares tantum, sic ostendo. Sumatur quilibet ex illis, puta D, cujus semissis esto N, & apponatur binarius. Si ergo D est etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur N per 2 metitur eumdem D, erit *c* Q ad N, ut 2 ad P. Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: quod est absurdum contra XXI, lib. IX.

b def. 18.

c corol. 19. 7.

Quod nullus præter hos sit pariter impar tantum, sic ostendo. Si quis præter hos esset alius, is deberet *d* esse par. Pares autem numeri aut habent partes dimidias, ac proinde sunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem sunt pariter pares tantum; aut habent dimidios impares, & sic per sequentem sunt pariter pares, & pariter impares. Ergo, &c.

d corol. 28. 9.

PROPOSITIO XXXIV.

Pares numeri A. B. C. D. E, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidium habent imparem, sunt pariter pares, & pariter impares. Et præter hos alios nullos.

Sin-

Singuli pariter pares sunt;	12.	20.	24.	28.	36.	40.	44.	48.
	A	B	C	D	E	F	G	H

quia cum eorum dimidii pares sint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem XVIII.

Quod etiam pariter impares sint, sic ostendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem si dividas bifariam, & dimidium rursus bifariam, ac sic deinceps, tandem incides in aliquem imparem. Si enim incideremus semper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B esset ab unitate duplus: contra hypothesim. Impar autem ille metietur parem B per *a* parem. Ergo B pariter impar est.

a coroll. 1. 29. 9.

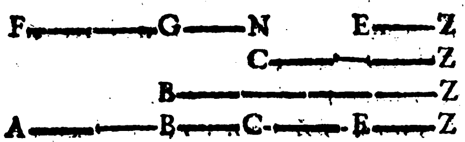
Atque ex his patet III. pars præcedentis.

Quod præter hos alii nulli sint pariter pares, & pariter impares, patet ex duabus præcedentibus propositionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcumque EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut CE excessus secundæ CZ supra primam, sive minimam EZ ad minimam EZ, ita excessus AE maximæ AZ

AZ supra minimum, ad omnes simul reliquas BZ; CZ, EZ.



Transferantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ. Quoniam AZ est ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ; erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BG ad CZ, & CE ad EZ. Quare *b* ut una AB ad unam BZ, sive ut CE ad EZ, ita simul omnes AB, BC, CE, hoc est AE, ad omnes simul BZ, CZ, EZ. Quod erat demonstrandum.

a 15. 5.
b 12. 5.

Ex hac propositione, cujus fœcunditatem non videntur priores Arithmetici observasse, sequentia deducemus.

Corollaria.

I. Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut denominator proportionis, unitate mulctatus, ad unitatem; ita minimi, & maximi termini differentia AE ad summam omnium, dempto maximo AZ.

d ax. 7. in C. Ergo A *d* metietur BG per Z: contra hypotesim.

Scholium.

PRopositiones quatuor praecedentes intelligendae sunt de numeris integris. Quibusvis enim duobus numeris tertius, & quibusvis tribus quartus proportionalis exhiberi potest per fractiones, ut docebitur in Arithmetica practica.

e Arith. pract. l. 5. c. 7. *Hoc verò observatu dignum est, quod suo e loco demonstrabimus, quamvis duobus quibuslibet tertius proportionalis, & tribus quartus, saltem fractus, dari possit; tamen inter quos medius integer dari nequit, inter eos neque fractus quidem ullus poterit exhiberi.*

Datis tribus numeris, A, B, C, quartus proportionalis invenitur etiam hunc in modum.

A B C Z
D

Primus A, dividens secundum B, faciat quotientem D. Tertius C, multiplicans D, gignat Z. Hic est quaesitus.

f ax. 8. *Cum enim A dividat B per D, etiam* f *A in*
g 17. 7. *D faciet B. Sed & C in D* g *gignit Z. Ergo A*
h 17. 7. *est ad B,* h *ut C ad Z.*

Impossibilis erit quartus proportionalis integer, non si A non metitur B, sed si factus ex C in D non sit integer, aut ad integrum reducibilis.

PRO-

PROPOSITIO XX.

P*Rimi numeri sunt infiniti.*

A B C
X + 1.
Z

Dentur primi tres A, B, C. Inveni X minimum, *a* quem A, B, C metiuntur, cui adde unitatem. Si X+1 primus est, jam quartus habebitur primus. Si X+1 non est primus, eum aliquis *b* primus metietur, puta Z. Hic erit primus, a datis A, B, C diversus. Sit enim, si fieri potest, idem cum datorum aliquo C. Ergo quia C metitur X, etiam Z metietur X. Sed Z etiam metitur X+1. Ergo Z metietur *c* quoque 1: quod est absurdum. Ergo Z, novus primus est. Eodem modo invenientur plures sine termino.

a 38.7. *b* 34.7. *c* ax.12.

PROPOSITIO XXI.

N*Umeri pares quotcumque A, B, C componunt parem.*

A B C
N O P

Quoniam A, B, C pares sunt, eorum *a* semisses sint N, O, P. Quia

a def. 16.

igitur est, ut A ad N, sic B ad O, & C
b 12.5. ad P; erit ut A ad N, *b* sic summa A, B, C ad summam N, O, P. Sed A est duplus ipsius N. Ergo summa A, B, C dupla est summæ N, O, P: adeoque summa N, O, P est semissis summæ A, B, C. Ergo sum-
c def. 16. ma A, B, C *c* par numerus est. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO XXII.

I *Mpares A, B, C, D, multitudine pari, componunt parem.*

A B C D

Aufer à singulis uni-
a def. 17. tatem. Tum & *a* reli-
b hyp. qui pares erunt, & unitates ablatæ *b* parem component. Quare per præcedent. reliqua, & ablata simul, hoc est ipsi A, B, C, D, component parem.

PROPOSITIO XIII.

I *Mpares A, B, C, multitudine impari, componunt imparem.*

A B C

C—1

c def. 17. Quoniam *c* impar à pari differt unitate, erit C—1 par. Sed & impares

A, B

A, B *d* componunt parem. Ergo A, B, C—1 componunt parem. Sed summa A, B, C—1 ab summa A, B, C differt unitate. Ergo summa A, B, C est numerus *e* impar. Quod erat demonstrandum.

d prae.

e def. 17.

Corollarium.

PAri ratione impar additus pari componit imparem.

PROPOSITIO XXIV.

SI a pari numero D subtrahatur par E, reliquus F par erit.

Nam si reliquus F foret impar, cum pari E componeret *a* imparem. Sed F cum E componit D. Ergo D impar esset: contra hypotesim.

D
E
F

a coroll. prae.

PROPOSITIO XXV.

SI a pari numero A impar B subtrahatur, reliquus C erit impar.

Nam si reliquus C esset par, is cum impari B faceret *b* imparem. Sed C cum B facit A. Ergo A foret impar: contra hypothesim.

A
B
C

b coroll. 23.

PROPOSITIO XXVI.

SI ab impare E subtrahatur impar F, reliquus G erit par.

Nam si G foret impar; is cum E
c 22. 9. impare F componeret E c parem. F
Quod evertit hypothesim. G

PROPOSITIO XXVII.

SI ab impare A subtrahatur par B, reliquus C erit impar.

A Nam si C foret par, is cum pari
a 22. 9. B B componeret a A parem: contra
C hypothesim.

PROPOSITIO XXVIII.

PAr, & impar A, B, invicem multiplicantes; producunt C parem.

b def. 24. A 2. B 3. Componitur b enim C
C 6. ex pari A toties sumpto,
quot sunt unitates in B.
c 21. 9. Ergo C par c est.

Co-

Corollaria.

I. PAr multiplicans parem gignit parem. Patet eodem modo ex XXI.

II. Omnis pariter impar est par. Patet ex defin. XIX., axioma. VII., & hac propositione.

PROPOSITIO XXIX.

IMpar D multiplicans imparem E, producit imparem F.

D 3. E 5.
F 15

Componitur *a* enim F ex D impare toties sumpto, quot sunt unitates in impare E. Ergo F impar *b* est.

a def. 15. *b* 23.9.

Corollaria.

12 B
3 A { C 4.

I. IMpar A metiens parem B eum metitur per parem C. Nam si C foret impar, quia A in C *c* producit B, esset B *d* impar, ut pote genitus ex impare A in imparem C. Quod repugnat hypothesi.

c ax. 8. *d* 29. 9.

II. Im-

II. Impar D, metiens imparem E, eum metitur per imparem F.

15 E { F 5.
3 D

Nam si F foret par, quo-
a ax. 8. niam D impar in F parem gignit *a* E,
b 28. 9. esset E *b* par: contra hypothesim.

Scholium.

Ex his demonstrari jam poterit, nullum numerum AB ita secari posse, ut genitus ex toto AB in unam partem CB sit æqualis quadrato partis alterius AC: ac proinde propositionem XI. lib. II. nullo modo posse numeris applicari, quamvis decem primæ ejusdem libri propositiones omnes etiam in numeris sint veræ.

A——C——B
D——E——

Sit enim, si fieri potest, genitus ex AB in CB par quadrato ex AC.

Vel AC par est, & CB impar.
Vel AC impar, & CB par.
Vel uterque AC, & CB impar.
Vel uterque par.

Esto primum AC par, & CB impar. Ergo
a coroll. 23. 9. *totus AB est* a *impar. Ergo genitus ex AB impare in CB imparem, impar* b *est. Est* c *verò par quadratus, ex AC pari. Ergo impar,*
b 29. 9.
c coroll. 28. 9. *genitus ex AB in CB, æquatur pari, nempe quadrato ex AC. Quod est absurdum.*

Sit deinde AC impar, & CB par. Ergo totus
d coroll. 23. 9. *AB* d *impar est. Ergo factus ex impare AB in*
e 28. 9. *CB parem par* e *est. Atqui quadratus imparis AC*

AC impar f est. Ergo rursum hic impar illi pari f 29. 9.
æqualis est. Quod est absurdum.

Sit tertiò uterque AC, CB impar. Ergò totus AB g par est. Ergò factus ex AB pari in imparem CB par h est. Imparis autem AC quadratus i impar est. Ergo rursum hic impar illi pari ex AB in CB æqualis est. Quod est absurdum.

g 22. 9.
h 28. 9.
i 29. 9.

Sit denique uterque AC, CB par. Sumantur duo minimi D, E, in ratione AC ad CB. Erunt D, E, primi k inter se: ac proinde nequeunt ambo esse pares, aliàs metiretur eos binarius; sed vel ambo sunt impares, vel D par, E impar, vel D impar, E par. Jam quia AB in CB æquatur quadrato AC, erit ut AB ad AC, ita AC ad CB. Et quia E est ad D, ut BC ad CA, erit componendo E cum D ad D, ut BA ad AC; hoc est ut l AC ad CB, hoc est ut m D ad E. Quoniam igitur D cum E est ad D, ut D ad E, erit genitus ex D cum E in E æqualis quadrato ex D. Quod fieri non posse, tribus primis partibus demonstratum est.

k 24. 9.
l ostendi ante.
m hyp.

At quispiam suspicabitur ita secari fortassis numerum posse in duas partes, quibus fractiones adhæreant. Verùm si illæ partes reducantur ad duas fractiones ejusdem denominationis, ut docebitur in Arithm. Pract. lib. II. c. III. prob. II. facilè apparebit, ne id quidem esse possibile.

PROPOSITIO XXX.

SI impar B metiatur parem A, & illius dimidium metietur.

Im-

Impar B metiatur A | 12 A | C 4
parem per C. Erit *a* C | 3 B
par, & C metietur quoque A *b* per B. Ergo & dimidium ipsius C metietur dimidium ipsius A per B (est enim ut C ad A, sic dimidium C ad dimidium A.) Ergo etiam B per dimidium C metietur *c* dimidium A. Quod erat demonstrandum.

a corol. 1. 29. 9.
b ax. 9.
c idem.

PROPOSITIO XXXI.

SI impar A ad aliquem B primus est, etiam ad illius duplam C primus erit.

Nam si A, & C non sint primi inter se, metiatur eos aliquis D, A quidem per E. Erit D necessariò impar, aliàs D par in E gigneret A *a* parem. Quoniam ergo D impar metitur C parem (est enim C par, cum duplus sit B,) etiam D metietur *b* B ejus dimidium. Ponebas autem etiam D metiri A. Ergo A, B non sunt primi inter se: contra hypothesim.

A 3. B 5.
C 10. D E

a 28. 9.
b præc.

Co-

Corollarium.

IMpar A, qui primus eſt ad aliquem B, etiam primus eſt non ſolum ad duplum B, ſed etiam ad quadruplum, octuplum, &c. Patet ex propoſitione.

PROPOSITIO XXXII.

SI proportio dupla ab unitate continuetur in infinitum 1, 2, 4, 8, 16, &c. habentur omnes pariter pares tantum.

1.	A	B	C	D	E	F	Quod ſinguli
1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	ſint pariter pares,
			1.	R	P	O	patet ex XI. l. IX.

Per hanc enim 2. metitur quemlibet in ſerie, per aliquem ex ſerie, hoc eſt per parem. Ergo per definitionem XVIII.

Quod ſint pariter pares tantum, patet ex XIII. lib. IX. Cum enim 2 proximus unitati ſit primus, nullus metietur ullum ipſorum 2, 4, 8, &c. præter eos, qui ſunt in ſerie, hoc eſt præter pares. Ergo per definitionem XVIII.

Quod nullus præter hos ſit pariter par tan-

1, A	B	C	D	E	F	
1. 2.	4.	8.	16.	32.	64	
			1.	R	P	O.

tantum, sic ostendo. Esto tantum pariter par quicumque O, cujus dimidium sit P, hic erit par; aliàs si P foret impar, binarius per imparem P metiretur O, adeoque O esset pariter impar: contra hypothesim. Semissis ergo ipsius P esto R. Hic rursum erit par; si enim R esset impar, cum sit quarta pars ipsius O, numerus 4. per imparem R metiretur D: rursus contra hypothesim. Atque ita semper semissis prioris erit par, donec veniatur ad 1. Sit ergo 1 semissis ipsius R. Erunt igitur R, P, O ab unitate dupli, ac proinde O unus ex serie. Liquet ergo propositum.

PROPOSITIO XXXIII.

SI omnes numeri impares duplentur, provenient omnes pariter impares tantum 4.6.10.&c.

3.	5.	7.	9.	11.
6.	10.	14.	18.	22.
A	B	C	D	E
			7 N	2.
			P	Q

Singuli pariter impares sunt, quia eorum semissis est *a* impar, adeoque metie-

a hyp.

cietur binarius singulos per semissem imparem.

Esse pariter impares tantum, sic ostendo. Sumatur quilibet ex illis, puta D, cujus semissis esto N, & apponatur binarius. Si ergo D est etiam pariter par, metiatur *b* eum P par per parem Q. Quoniam igitur N per 2 metitur eumdem D, erit *c* Q ad N, ut 2 ad P. Sed 2 metitur P parem. Ergo etiam Q par metitur imparem N: quod est absurdum contra XXI, lib. IX.

b def. 18.

c corol. 19. 7.

Quod nullus præter hos sit pariter impar tantum, sic ostendo. Si quis præter hos esset alius, is deberet *d* esse par. Pares autem numeri aut habent partes dimidias, ac proinde sunt ab unitate dupli, adeoque per præcedentem sunt pariter pares tantum; aut habent dimidios impares, & sic per sequentem sunt pariter pares, & pariter impares. Ergo, &c.

d corol. 28. 9.

PROPOSITIO XXXIV.

Pares numeri A. B. C. D. E, qui nec a binario dupli sunt, nec dimidium habent imparem, sunt pariter pares, & pariter impares. Et præter hos alios nullus.

Sin-

Singuli pariter pares sunt;

12.	20.	24.	28.	36.	40.	44.	48.
A	B	C	D	E	F	G	H

quia cum eorum dimidii pares sint, binarius eos per illos dimidios pares metitur. Ergo per definitionem XVIII.

Quod etiam pariter impares sint, sic ostendo. Sumatur quilibet ex illis B, quem si dividas bifariam, & dimidium rursus bifariam, ac sic deinceps, tandem incides in aliquem imparem. Si enim incideremus semper in pares, incideremus tandem in 2, ac proinde B esset ab unitate duplus: contra hypothesim. Impar autem ille metietur parem B per *a* parem. Ergo B pariter impar est.

a coroll. 1. 29. 9.

Atque ex his patet III. pars præcedentis.

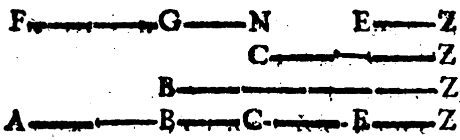
Quod præter hos alii nulli sint pariter pares, & pariter impares, patet ex duabus præcedentibus propositionibus.

PROPOSITIO XXXV.

SI fuerint quantitates continuè proportionales quotcumque EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut CE excessus secundæ CZ supra primam, sive minimam EZ ad minimam EZ, ita excessus AE maximæ

AZ

AZ supra minimum, ad omnes simul reliquas BZ; CZ, EZ.



Transferantur EZ, CZ, BZ in maximam AZ. Quoniam AZ est ad BZ, ut BZ ad CZ, & CZ ad EZ; erit *a* dividendo AB ad BZ, ut BG ad CZ, & CE ad EZ. Quare *b* ut una AB ad unam BZ, sive ut CE ad EZ, ita simul omnes AB, BC, CE, hoc est AE, ad omnes simul BZ, CZ, EZ. Quod erat demonstrandum.

a 17. 5.
b 12. 5.

Ex hac propositione, cujus fœcunditatem non videntur priores Arithmetici observasse, sequentia deducemus.

Corollaria.

I. Si fuerint quotcumque numeri continuè proportionales EZ, CZ, BZ, AZ; erit ut denominator proportionis, unitate mulctatus, ad unitatem; ita minimi, & maximi termini differentia AE ad summam omnium, dempto maximo AZ.

Denominatorem referat FN, unitatem verò GN. Igitur ut FN eſt ad GN, ita CZ eſt ad EZ: & dividendo, ut FG, denominator ſcilicet unitate mulctatus, eſt ad GN unitatem; ita CE eſt ad EZ, hoc eſt, per hanc propoſitionem, ita eſt AE ad omnes ſimul BZ, CZ, EZ.

II. Iiſdem poſitis, dato denominatore FN, & maximi, ac minimi termini differentia AE, habetur ſumma omnium, dempto maximo, ſi AE maximi, & minimi differentia dividatur per denominatorem unitate mulctatum FG.

c corol. 1. præc. Cum enim ſit c, ut FG ad GN unitatem, ita AE ad omnium ſummam, dempto AZ, ea exhibebitur, ſi quartus proportionalis inveniatur; is verò obtinetur, ſi d terminus ſecundus, nempe unitas, ducatur in AE tertium, & productus, qui manet ipſe AE, dividatur per primum FG.

d 19. 9.

III. Quod ſi termini proportionalis fuerint magnitudinis, habebitur ſumma omnium, dempta maxima, ſi fiat ut CE duarum collateralium differentia ad minorem EZ, ita AE maximæ, & minimæ differentia ad aliam. Patet ex ipſa propoſitione.

IV. Si data ſeries proportionalium, ſeu nume-

numerorum, seu magnitudinum sit proportionis duplæ, habetur omnium summa, dempta maxima, si minima auferatur a maxima.

Per hanc enim XXXV, ut CE est ad EZ; ita AE est ad omnes BZ, CZ, EZ. Atqui hic CE par est EZ. Ergo etiam AE par est omnibus BZ, CZ, EZ.

V. Iisdem positis, ut AB, differentia duorum maximorum terminorum AZ, BZ, est ad maximum; ita AE maximus, dempto minimo, est ad omnium summam, dempto minimo.

Ostensum est enim in propositione, ut AB est ad BZ, ita AE esse ad omnes BZ, CZ, EZ. Ergo ut AB est ad AZ, ita AE est ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc est ad omnes, dempta minima EZ.

Scholium.

Qui hanc propositionem, ejusque corollaria contulerit cum iis, quæ scripsi ad propositionem XI. l. VI, facilè intelliget hinc deduci posse totam contemplationem illam, qua seriei infinitarum proportionalium quantitatum una exhibetur omnibus æqualis. Nam cum finitus est proportionalium numerus, tum ut per hanc 35. *CE est ad EZ, seu ut AB ad BZ, ita AE, hoc est maxima, dempta minima, seu ultima, est ad*

 omnes

omnes BZ, CZ, EZ. Cum verò numerus proportionalium infinitus est, tunc ut AB est ad BZ, ita maxima tota AZ est ad omnes BZ, CZ, EZ, &c. Ubi hoc solum interest, quod tertio loco maxima jam accipiatur tota, quia nimirum minima, quæ prius a maxima auferebatur, jam nulla sit; ac proinde auferri nequeat.

Rursus cum finitus est numerus proportionalium, ut AB g *est ad AZ maximam, ita AE, hoc est maxima, dempta minima, est ad omnes AE, BZ, CZ, EZ, hoc est ad omnes, dempta minima. At verò cum infinitus est proportionalium numerus, tum ut AB est ad maximam AZ, ita maxima AZ est ad omnes AZ, BZ, CZ, EZ. Ubi rursum hæc una differentia est, quod minima jam evanescat, ac nulla sit; adeoque auferri nequeat.*

g cor. 5. præc.

PROPOSITIO XXXVI.

SI numerorum series in ratione dupla ab unitate continuè proportionalium A, B, C, D continuetur, donec eorum summa E sit primus numerus; summa E in maximum D multiplicata faciet numerum perfectum.

1.	A	B	C	D
E	O	N	P	F
		M	Q	

Quot sunt numeri A, B, C, D, tot sumantur ab E dupli, nimirum E, O, N, P.

Ex

Ex æquo *a* igitur est ut A ad D, sic E ad P. Quare ex A in P idem *b* fiet numerus, qui ex D in E, nempe F. Ergo P metitur F per A binarium, ac proinde E, O, N, P, F sunt continuè proportionales in ratione dupla. Ergo F minus E, æquatur *c* ipsis E, O, N, P. Sed E æqualis est *d* ipsis 1, A, B, C, D. Ergo F minus E ipsis 1, A, B, C, D, & O, N, P æqualis est. Adde utrisque E, erit F omnibus 1, A, B, C, D, E, O, N, P æqualis. Sunt autem dicti numeri partes aliquotæ ipsius F: nam cum E, O, N, P, F sint continuè proportionales, singuli metiuntur *e* F. Ob eamdem causam singuli 1, A, B, C metiuntur D. D autem metitur F, nam D *f* in E fecit F. Ergo & singuli 1, A, B, C, D *g* metiuntur F.

a 22. 5.
b 19. 7.
c coroll. 4. præc.
d hyp.
e 11. 9.
f hyp.
g 28. 1a.

Reliquum est, ut ostendatur, numeri F nullam esse aliam partem aliquotam. Esto M quævis aliquota ipsius F. Ostendam, eam esse eamdem cum aliqua ipsarum A, B, C, D, E, O, N, P eo ipso, quo id negatur. Ponatur enim, M non esse eamdem cum ulla ipsarum A, B, &c. Quoniam igitur M metitur F, metiatur per Q. Ergo M in Q *h* facit F. Sed etiam E in D fecit F. Ergo est, ut E ad Q, sic M ad D. Sed quia B unitati

h 22. 1.

1. A B C D proximus est primus,
i hyp. E O N P F *i* utpote 2, & M poni-
M Q tur esse diversus ab om-
nibus A, B, C, non me-
k 13.9. titur *k* M ipsum D. Ergo neque E metie-
l hyp. tur Q. Quare *l* cum B primus sit, erunt
m 31.7. E, Q *m* primi inter se; ideoque in *n* ra-
n 23.7. tione sua minimi. Ergo E metitur M,
o 21.7. & Q *o* metitur D. Ergo cum A primus
p 13.9. sit, Q est aliquis *p* ipsorum A, B, C.
Sit ergo Q idem cum B: & quot sunt B, C, D, tot sumantur ab E dupli E, O, N. Igitur ex æquo, ut B est ad D, sic E est ad N. Idem ergo fit ex B in N, qui fit ex D in E, nempe F. Sed quia M metitur F per Q, etiam Q in M facit F. Quare cum idem F fiat ex Q in M, & ex B in N, erit ut Q ad B, ita N ad M. Sed ostendi Q esse idem cum B. Ergo N est idem cum M.

Nullas igitur F partes aliquotas habet, præter 1, A, B, C, D, E, O, N, P, quibus omnibus cum F sit æqualis, perfectus est. Quod erat demonstrandum.

Quemadmodum in XII. propositione hujus libri, ita & in hac ex contradictoria sua directe assertio concluditur. Quod miror à Clavio, aliisque non fuisse observatum.

Scho-

Scholium.

EX hoc Theoremate invenientur omnes numeri perfecti. Quia summa ex 1, 2, est 3 numerus primus, 3 in ultimum 2 facit 6 primum perfectum, cujus partes aliquotæ sunt 1, 2, 3. Et quia summa ex 1, 2, 4 est 7 primus numerus, 7 in maximum 4 facit 28 secundum perfectum, cujus partes aliquotæ sunt 1, 2, 4, 7, 14. Rursum quia summa ex 1, 2, 4, 8. 16, est 31 primus, 31 in 16 facit 496 perfectum tertium, cujus aliquotæ partes sunt 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Summa habetur facillime, si numerus sequens mulctetur unitate, ut patet ex corollario IV. præcedente. Partes aliquotas cujusvis perfecti sic invenies. Quot numeri accepti sunt ab unitate dupli, seclusa unitate, totidem a primo, sive summa accipiantur dupli annumerato primo. Hi dupli cum duplis ab unitate, atque ipsa unitate, sunt partes aliquotæ perfecti dati.

Porro inventio perfectorum ex hac propositione, & corollario IV. præcedente brevissime exponitur hunc in modum. Ratio dupla ab unitate continuetur in infinitum. Vide qui numeri progressionis, abjecta unitate, fiant primi: hi namque ducti in præcedentes dabunt perfectos.

De multitudine perfectorum hactenus inventorum Marinus Mersennus in Præf. tom. IX. hæc scribit: hactenus inventos esse tantum 11: nimirum, 6. 28. 496. 8128. 23 (550, 336. 8, 589 (869, 056. 137, 438 (691, 328. 2 (385, 843 (008, 139 (952, 128, & tres alios, quorum postremus fit Tomo I. Physico-Mathem.

ex progressionis duplæ termino 257mo unitate mulctato in terminum 256um: ex illis 28, quos Petrus Bungus cap. XXVIII. de mysteriis num. recenset, tantum 8 primos esse perfectos, eos videlicet, quos supra dedimus, reliquos 20 imperfectos. Hæc ille.

Quod autem plures hactenus non sint reperti, inde fit, quod in serie progressionis duplæ intervalla numerorum, qui abjecta unitate primi fiant, valde magna sint: undecimus enim ejusmodi est terminus ab unitate, ut dictum supra, 257us exclusive; ac proinde numerus ingens, qui primus an sit, longissimi laboris est discernere. Sane, si 30 notis constet numerus, Mersennus asserit, huic examini ne integrum quidem sæculum sufficere, quocunque modo hactenus cognito utaris.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER PRIMUS.

Quid potissimum hoc in opere spectaverim, initio præfatus sum: nimirum, ut Arithmeticæ Praxim universam & clare, breviterque exponerem, & (quod nullus huc usque fecit) demonstrarem. Quia porro, quod in tribus elementorum libris compendio, ut opinor, non spernendo jam feci, Logisticæ Speciosæ rudimentis primis nō semel utar etiam hic, revocanda in memoriam erunt ea, quæ habentur ante elementorum librum, nobis primum, Euclidi septimum; quibus hoc jam accedet unum, quod fractiones etiam speciosas subinde adhibebimus. Nihil est tamen, quod difficultatem hic aliquam sibi quispiam imaginetur, cum operationes earum à communium fractionum operationibus in nullo differant.

In citandis elementorum Arithmeticorum libris Euclidis ordinem retinui.

Qua-

Quare cum citatur septimus, adeundus est primus noster hic, & sic de duobus reliquis. Primus numerus propositionem, secundus librum designat.

LOGISTICA

Integrorum Numerorum.

IN omni numero, pluribus notis constante, ea nota, quæ maximè dextra est, prima dicetur; ultima verò, quæ maximè sinistra.

CAPUT I.

Notarum Arithmeticarum Institutio.

DEcem notæ, seu characteres sunt; (alii digitos, alii figuras appellant,) quibus omnes numeri exprimuntur.

0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1.

Prima nota 1. unitatem significat; 2. significat unitates duas; 3, unitates

tes tres; 4, unitates quatuor, & sic deinceps.

Postrema o, quæ cifra dicitur, nihil significat: sed aliis notis præposita, earum auget valorem, ut mox dicemus.

Præter hunc valorem simplicem notæ jam dictum, alium insuper habent ratione loci, quem singulæ occupant. Porro locorum valor crescit secundum proportionem decuplam, in infinitum continuatam. Itaque nota quælibet, primo loco posita, significat, ut dictum est, unitates; posita secundo loco, significat tot decades, quot habet unitates; tertio loco, tot centenas; quarto loco, tot millia; quinto loco, tot dena millia; sexto, tot centena millia; septimo, tot mille millia, seu decies centena millia, seu milliones, quot unitates habet; atque ita deinceps sequentium locorum valor in proportione decupla in infinitum procedit.

Esto numerus A: prima hujus nota 6 significat sex unitates; secunda 9, valet novem decades unitatum, hoc est, 90, nonaginta; tertia 7 valet septem centenas, hoc est, 700, septingenta; quarta 5 valet quinque millia, 5000; quinta ta 3 valet tres decades millium, seu ter dena millia, hoc est, 30000, triginta millia; sexta 8 valet octo centenas millium, hoc est, 800000, octingenta millia; septima 1 valet unum millionem, seu mille millia, seu decies centena millia 1000000; octava 4 valet quadraginta milliones 40000000.

A. 4 1. 8 3 5 7 9 6.

9 0. Nonaginta.
7 0 0. Septingenta.
5 0 0 0. Quinque millia.
3 0 0 0 0. Triginta millia.
8 0 0 0 0 0. Octingenta millia.
1 0 0 0 0 0 0. Mille mill., seu millio.
4 0 0 0 0 0 0 0. Quadraginta million.

1 Unitas.
10 Decem.
100 Centum.
1000 Mille.
10000 Decem millia.
100000 Centum millia.

LOCUS	VALOR
Primus	Unitates
Secundus	Decades
Tertius	Centenæ
Quartus	Millia
Quintus	Decades millium
Sextus	Centenæ millium
Septimus	Milliones
Octavus	Decades millionum
Nonus	Centenæ millionum
Decimus	Millia millionum
Undecimus	Decades millium millionum
Duodecimus	Centenæ millium millionũ
13us	Milliones millionum, sive biliones
14us	Decades bilionum
15us	Centenæ bilionum
16us	Millia bilionum
17us	Decades millium bilionum
18us	Centenæ millium bilionum
19us	Milliones bilionum, sive triliones
20us	Decades trilionum
21us	Centenæ trilionum
22us	Millia trilionum
23us	Decades millium trilionum
24us	Centenæ millium trilionum
25us	Milliones trilionum, sive quatriliones
Etc.	Etc.

Por-

Porro singulorum locorum valor tabella hìc apposita exhibetur, quam visum est commodissimum ita partiri, ut singula quasi membra locorum senarii singuli constituerent. In secundo igitur senario, seu membro sunt milliones; in tertio biliones; in quarto triliones; in quinto quatriliones; atque ita in infinitum. *Valor enim cujusvis membri, seu senarii, a numero membrorum, seu senariorum præcedentium denominabitur.* Ut si quæris valorem senarii septimi, is erit sextilio, quia septimum senarium sex senarii præcedunt.

Si magis placet valorem membrorum per solos milliones exprimere, toties itera vocem *millio*, quot sunt membra præcedentia. Ut si quæratur, quis sit valor in quarto senario, oportet tertio dicere millio, quia quartum senarium tres senarii, seu membra antecedunt. Itaque valor quarti senarii est millio millionis millionis.

CA-

CAPUT II.

Numeratio.

DOcet Numeratio datum numerum scribere, & enunciare. Utrumque facili negotio perficiet is, qui notarum numeratum valorem, tum simplicem, cum loci potissimum, primo Capite explicatum, recte perceperit. Sed quia in magnis numeris proclive est, ut hæreant etiam Periti, variæ praxes huic rei facilitandæ sunt excogitatæ. Nos hìc eam dabimus, quæ visa est inter cæteras expeditior.

Ante omnia dabit operam Tiro Arithmeticus, ut expedite scribat, ac enunciet primi senarii locos, hoc est numeros constantes notis, vel sex, vel quinque, vel quatuor, &c.

In quo juvabitur hac praxi. Pronuntiandi dentur numeri A, B, C. Post tres primas notas comma interpone, ut duo quasi membra existant, sive secundum tribus constet notis, sive paucioribus. Pronuntia deinde secundum membrum, tanquam

370, 517.	A
49, 304.	B
7, 059.	C

quam si esset solum; sed adde semel hanc vocem *mille*, vel *millia*; primum verò membrum pronuntia, ut jacet. Datos igitur numeros A, B, C ita enunciabis.

A. Trecentia septuaginta millia, quingenta decem & septem.

B. Quadraginta novem millia, trecenta & quatuor.

C. Septem millia, quinquaginta novem.

Hoc præmisso; numerus enuntiandus esto quantumvis magnus.

D.

96, 638 (908, 003 (030, 460 (243, 709.

Post sex quasque notas, a dextris incipiendo, lunula aut virgula interposita, numerum partire in quædam quasi membra, quorum singula senis constabunt notis, dempto ultimo, quod constare potest paucioribus, imo unica. Tum singula membra, à sinistris incipiendo, pronuncia, ut jam docui, ac si essent sola, sed adjunge singulis valorem

lorem ipsis competentem, quem subjecta tabella indicat.

MEMB.	VALOR	MEMB.	VALOR
Primum		Septimum	Sextilio
Secundum	Millio	Octavum	Septilio
Tertium	Bilio	Nonum	Octilio
Quartum	Trilio	Etc.	Etc.
Quintum	Quatrilio		
Sextum	Quintilio		

Numerus igitur D sic pronuntiabitur.

Membr. IV.

Nonaginta sex millia, sexcenti triginta octo triliones.

Membr. III.

Nongenta octo millia, & tres biliones.

Membr. II.

Triginta millia, quadringenti, sexaginta milliones.

Membr. I.

Ducenta quadraginta tria millia, septingenta novem.

Cum numerus multas ad dextram, & non interruptas habet cifras, brevior est pronuntiatio. Ut si detur Numerus E.

E.

1 (000000(000000(000000(000000
(000000(000000.

(major is est numero arenarum, orbem Terræ componentium.) Quoniam is ultimum, hoc est septimum membrum constans unitate, solum habet significativum, eum totum pronuntiaveris, dicendo, *unus sextilio*.

Quod si missis bilionum, ac trilionum vocibus, malis per solos milliones enunciare; eadem partitione facta, quæ supra, pronuntia membra singula, ac si essent sola, toties adjuncta voce *millio*, quot membrum enunciandum alia membra antecedunt. Itaque numerus D per milliones sic pronuntiabitur.

Membr. IV.

96, 638 Milliones millionum millionum.

Mem-

Membr. III.

908, 003 Milliones millionum.

Membr. II.

030, 460. Milliones.

Membr. I.

243, 709.

Numerus vero E pronuntiabitur hunc in modum: unus millio millionum millionum millionum millionum. Prior modus brevior, & expeditior est; alter usitatior.

Omnium facillima, at cæteris longior est enuntiatio per sola millia. Post singulas ternas notas, initio facto a dextris, interpone comma: tum membra singula, incipiendo a sinistris, ita pronuntia, ac si essent sola; sed toties adjunge hanc vocem *mille*, vel *millies*, quot membrum enuntiandum alia membra antecedunt. Datus sit numerus F enuntiandus per millia. Membrum ultimum est 96*ies* millies millies millena millia: penultimum, 63*ies* millies millena millia.

F 96, 630, 000, 000, 000.

Ratio horum omnium ex Capite primo est manifesta.

Scriptio dati numeri nullo negotio perficitur, subsidio tabellæ Capitis præcedentis. Scribendus esto hic numerus, *quadraginta quinque milliones, septem millia*.

In tabella reperies, decades millionum obtinere locum octavum, milliones septimum, millia quartum. Scribe igitur 4 loco octavo; 5 septimo; 7 quarto; & loca vacua cifris reple.

45 : 007, 000.

CAPUT III.

Porismata quædam, ex quibus pendent rationes operationum logisticarum.

PORISMA I.

SI numero A, pluribus notis constanti, præponatur una nota; illius valor augetur		243	0
	A 243	243	00
		243	000

in decuplum; si duæ in centuplum; si tres in *in millecuplum, & sic deinceps, semper in proportione decupla.*

Demonstratio. Cùm enim toti numero A præponitur una nota, (cifras quaslibet hic notas repræsentant) singulæ ejus notæ ad unum locum promoventur: sic, ut 3 jam secundo consistat loco; 4 tertio, 2 quarto: ac proinde singularum valor augetur in decuplum, ut patet ex prima notarum Arithmeticarum institutione, Capite primo exposita. Ergo valor totius numeri A augetur in decuplum. Similiter cum numero A duæ notæ præponuntur, ascendunt singulæ ad duo loca. Ergo valor singularum, ac proinde etiam numeri totius A, augetur in centuplum. Et sic deinceps.

Corollarium. Hinc patet, si ante duos numeros *a*, & *b* ponantur æque multæ cifræ, ut fiant *c*, & *d*, fore *c*, & *d* ipsorum *a*, & *b* æque multiplices. Si enim præponatur singulis una cyfra, erunt pariter *c*, & *d* ipsorum *a*, & *b* decupli; si duæ cyfræ, ambo centupli; & sic deinceps.

a.	32.	3200.	*c*
b.	7.	700.	*d*

PORISMA II.

1000 A
999 B

Duorum numerorum ille major est, qui pluribus notis constat.

Patet ex prima institutione notarum: Sic A major est, quàm B.

PORISMA III.

C. 2000
D. 1999

Numerorum, æque multis notis constantium, ille major est, cujus postrema nota major est.

C 34399
D 34390

Sic C major est, quàm D. Patet ex institutione prima notarum numeralium.

PORISMA IV.

A 2999
B 2000
E 20000 1 0

Si duo inæquales numeri A, B æque multis notis constent; continebitur minor in majore minus, quàm decies.

A	2999
B	2000
E	20000

Demonstratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Porisma II. E major est, quàm A. Sed E præcisè decuplus est dati minoris B; per Porisma I. Ergo A non est decuplus dati B. Quod erat demonstrandum.

PORISMA V.

A	2999
B	300
E	3000

Dati sint numeri, A major, B minor, & major A superet minorem B una nota; sed minoris B nota ultima, 3, sit major nota ultima majoris A. Dico minorem B in majori A contineri minus, quàm decies.

Demonstratio. Adjiciatur enim minori B una cifra, & fiat E. Per Porisma III. E major erit, quàm A. Sed E præcisè decuplus est dati minoris B, per Porisma I. Ergo A minor est, quàm decuplus ipsius B. Quod erat demonstrandum.

PORISMA VI.

Dati sint duo numeri A, & B. Si prima unius nota, c, multiplicet ali-

quam numeri alterius notam d e primo altiorem, sed acceptam simpliciter, & productum e ad locum notæ d attollatur, tot videlicet notis ante ipsum positis, quot sunt ante d, ut fiat f. Dico f esse verum productum, quod fit ex nota c, multiplicante notam d, secundum loci valorem æstimatam.

	d	
	3,042.	A
	c	
	517	B
e.	21	
f.	21.000	

Demonstratio. Nota *d*, secundum loci valorem æstimata, esto *g*. Tum *c*, multiplicans *g*, faciat *z*. Ostendendum est *f* esse *z*. Quoniam *c* multiplicans numeros *d*, & *g* genuit numeros *e*, & *z*; per XVII. lib. VII, ut *d* est ad *g*, ita *e* est ad *z*. Atqui etiam, ut *d* ad *g*, ita *e* est ad *f*. Cum enim *g*, & *f* sint ipsi numeri *d*, & *e*, sed æqualiter sublimati, hoc est æque multas ante se notas per hypothesim habentes; patet ex Porismatis I. corollario *g*, & *f* ipsarum *d*, & *e* esse æque multiplices. Ergo *e* ad *z*, & ad *f* eamdem habet proportionem. Ergo per IX. lib. V. *z*, & *f* sunt æquales. Quod erat demonstrandum.

d 3	3,000,	*g*
c 7		
e 21	*z*	
	f 21,000	

PO-

PORISMA VII.

Dati rursum sint duo numeri A, & B. Si duæ quælibet utriusque numeri notæ k, & d *invicem multiplicentur, simpliciter acceptæ, & productum* c *attollatur ad locum, ex notarum multiplicantium locis compositum, tot videlicet notis ante* c *positis, quot utramque* k, & d *antecedunt. Dico haberi in* f *productum verum, quod fit ex notis* k, & d *juxta loci valorem æstimatis.*

d
3, 402. A
k
5, 15. B

c. 15   m, 15, 000
f, 15, 000, 00

k. 5   5, 00. h
i   g. 3, 000.
c   c
m. 15, 000.   15, 000, 00, f
z

Demonstratio. Notæ *k*, & *d* secundum loci valorem æstimatæ sint *h*, & *g*. Tum *h* in *g* fit *z*. Ostendendum est *f* esse *z*. Ante *c* productum ex *k* in *d* ponantur tot notæ, quot antecedunt notam *d*, & fiat

fiat *m*. Erit per Porisma præcedens *m* productum ex *k* in notam *d*, ex loco æstimatam, hoc est ex *k* in *g*. Deinde quoniam per constructionem *m* est *c* cum tot notis ante se, quot sunt in numero A ante *d*; *f* vero per hypothesim est idem *c*, sed cum tot notis ante se, quot in numeris A, & B antecedunt utramque *d*, & *k*; manifestum est notas, quæ in *f* ponuntur ante *c*, excedere eas, quæ in *m* sunt ante *c*, tot notis, quot sunt in B ante *k*, hoc est tot notis, quot sunt in *b* ante *k*, cum *b* sit ipsum *k*, ex loco æstimatum. Ergo per corollarium Porismatis I. *b*, & *f* sunt ipsorum *k*, & *m* æque multiplices, ac proinde ut *k* est ad *b*, sic *m* est ad *f*. Atqui etiam per XVIII.l.VII. ut *k* est ad *b*, ita *m* est ad *z*. Nam, ut ostendi supra, *k* multiplicans *g* produxit *m*, & per hypothesim *b* multiplicans *g* genuit *z*. Ergo *m* eodem modo se habet ad *f*, & ad *z*. Ergo per IX. lib.V. *f*, & *z* æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

Ex hoc porismate, & præcedenti multiplicatio demonstrabitur Capite VII.

PORISMA VIII.

Dati sint duo numeri AB, & C: si C dividat membrum A simpliciter acceptum, & quotiens d *attollatur ad locum membri A, hoc est ponantur ante* d *tot notæ, quot sunt ante membrum A, ut fiat* f. *Dico* f *esse quotientem verum, qui habetur ex membro A, æstimato secundum loci valorem, diviso per C.*

360,	5897	60.	C
A,	B	6.	d
		6, 0000.	f

Demonstratio. Membrum A, juxta loci valorem æstimatum, esto *g*. Tum C, dividens *g*, faciat quotientem *z*. Ostendendum est *f* esse *z*. Quoniam C, dividens numeros A, & *g*, genuit quotientes *d*, & *z*; erit per coroll. p. XVIII. lib. VII. ut A ad *g*, ita *d* ad *z*. Atqui etiam est, ut A ad *g*, ita *d* ad *f*. Cum enim *g*, & *f* sint ipsi numeri A, & *d* ad æqualem locum sublimati, hoc est, æque multas per hypothesim notas ante se habentes; patet ex corollario Porismatis

A	g
360	360, 0000
C	
60	
d. 6.	6, 0000. f
	z

tis l.g, & f ipsorum A, & d esse æque multiplices. Ergo d eodem modo se habet ad f, & ad z. Ergo per IX. lib. V. f est z. Quod erat demonstrandum.

Ex hoc porismate divisio demonstrabitur Capite IX.

PORISMA IX.

Operationum Logisticarum, hoc est additionis, subtractionis, multiplicationis, & divisionis artificium in eo positum est, quod tantisper, dum operamur, loci valore neglecto, notæ accipiantur juxta valorem simplicem; sic tamen, ut summæ in additione, residua in subtractione, producta in multiplicatione, quotientes in divisione suis quæque reponantur locis: quo fit, ut valor singulis ex loco debitus restituatur.

PORISMA X.

Nota simplex, quemcumque numerum multiplicans, aut dividens, non nisi unica nota, seu loco eum auget, minuitve.

A	365
	10
	3650

Detur numerus A quicumque. Hic mul-

multiplicatus per 10 non nisi uno gradu, seu loco attollitur, ut patet ex I. porismate. Ergo neque multiplicatus per notam simplicem attolletur altiùs gradu uno.

A 365 { 36 $\frac{5}{10}$
10

Rursum 10, dividens datum A, eum non deprimit infra gradum unum. Ergo neque nota simplex: quò enim divisor est minor, eò quotiens major est.

CAPUT IV.

Additio.

ADditio est plurium numerorum in unam summam collectio.

PRAXIS.

DAti sint numeri A, B, C in unam summam colligendi.

Ita scribantur, ut primæ notæ respondeant primis, hoc est unitates unitatibus; secundæ secundis, hoc est decades decadibus; tertiæ tertiis, hoc est con-

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

centenæ centenis; & sic deinceps.

Subducta deinde linea, notæ primi loci addantur, & si numerus ex his compositus unica nota constet, ea primo loco infra lineam scribatur. Si vero duabus constet, sola earum prima infra lineam scribetur, altera reservabitur, sequenti loco reponenda. Si tribus, quod rariùs accidit, secunda ad secundum, tertia ad tertium locum pertinebit.

Post hæc addantur notæ secundi loci, una cum illa, quæ fuerat reservata, numerusque ex his compositus scribatur infra lineam secundo loco, juxta cautionem jam traditam. Atque eumdem plane in modum locorum cæterorum additio peragetur.

Exemplo præcepta fient clariora.

Exemplum.

97063.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D

PRimi loci notæ 1, 2, 3 faciunt 6, quæ scribo infra lineam.

Notæ secundi loci 4, 0, 6 faciunt 10, qui numerus, quia duabus notis constat, primam 0 infra lineam scribo, bo, secundam 1 servo tertio loco reponendam.

Loco tertio nullam reperio notam significativam. Notam igitur servatam 1 infra lineam scribo in loco tertio.

In quarto loco reperio 5, 8, 7, quæ simul efficiunt 20, qui numerus quia binis constat notis, primam 0 scribo infra lineam quarto loco; secundam vero 2 servo sequenti loco.

In loco quinto reperio 9, cui addo notam servatam 2, & fiunt 11, quæ, ut jacent, quinto, & sexto loco subscribo. Atque ita operatione tota peracta provenit numerus D, summa datorum A, B, C.

* *Additio potest etiam fieri a sinistra in dextram; & hac operatio, sive a sinistra, sive a dextra incipiat, iisdem principiis a demonstratur, primaque operatio est proba secundæ, sicut secunda primæ. Quod forsan pluribus novum apparebit.*

97062.	A
8002.	B
5041.	C
110106.	D
9	
20	
0	
10	
6	
110106.	D

* *Des ſalguilliers Prof. Mathem. Amstelod. Tract. de Scientia numerorum.*

a ax. 2. 3. 4.

Si multi fuerit numerorum addendorum ordines, expediet lineis inter-

posi-

positis in tres, quatuorve eos classes dividere. & ex singulis classibus singulas summas colligere, quæ deinde ad unum redactæ, summam summarum exhibeant.

Demonstratio.

Colligitur ex Porismate IX. cap. III. Quamvis enim in operatione notarum valor localis neglectus tantisper fuerit, is tamen fuit restitutus, dum singulorum locorum summæ suis quæque locis fuere collocatæ, ut ex operatione ipsa manifestum est.

SPECIES DIVERSÆ.

Libr.	Flo.	Afs.
8	7	5
5	3	6
2	8	9
3	2	8
21.	3.	8.

Si addendæ sint species diversæ, ut libræ, floreni, asses, similia sub similibus scribe, & minimam speciem, nempe asses, primo loco, tum ordine reliquas. Deinde a minimæ speciei summa, quæ hic est assium 28, abjice speciem sequentem, nempe florenum, quoties potes, & residuum

ſiduum ſcribe infra lineam ſub aſſibus: quod vero abjectum fuit, hic nempe florenus 1, ſervetur addendum ſpeciei ſequenti, nempe florenis.

Proxima ſpecies in unum collecta facit florenos 20, quibus ſi addamus unum a priori ſpecie abjectum, fiunt floreni 21. Ab his abjici poſſunt tres libræ, quas addo ſpeciei ſequenti, libris videlicet, & reſiduos florenos 3 florenis ſubſcribo.

Tertiæ ſpeciei ſumma eſt librarum 18, quibus adde 3 ex priori ſpecie abjectas, & fiunt libræ 21, quas libris ſubſcribe. Ergo ſumma eſt lib. 21, flor. 3, aſs. 8.

Eadem methodo addi poſſunt gradus, minuta prima, ſecunda, tertia, &c.

CAPUT V.

Subtractio.

Docet minorem numerum a majori ſubtrahere, & reſiduum exhibere. Duplex vero eſt modus, quo minor numerus a majori ſubtrahitur.

PRAXIS MODI I.

MInor numerus ſcribatur ſub majore ſic, ut primæ notæ primis, ſecundæ ſecundis, & ſic deinceps reſpondeant.

Subducta deinde linea, primam inferiorem notam aufer a prima ſuperiore, & reſiduum ſcribe infra lineam primo loco; tum ſecundam aufer ex ſecunda, & reſiduum ſubſcribe ſecundo loco; & ſic deinceps.

Quod ſi in ſuperiori numero reſtent aliquæ notæ, quibus nullæ reſpondeant numeri inferioris, etiam illæ infra lineam ſcribantur.

Si autem nota aliqua inferior ſit major ſuperiore, ad ſuperiorem mente adjicies decem. Tum verò proxima ad ſiniſtram nota ſignificativa ſuperioris numeri æſtimanda eſt minor unitate, quàm revera ſit: & ſi intermediæ eſſent cifræ, una, vel plures, omnes illæ ad notam ſignificativam uſque æſtimandæ erunt tamquam 9.

Exem-

Exempla.

I. ESto B auferendus ab A. Aufer 5 ex 6, restat 1, quod scribe infra lineam. Tum 7 aufer ex 9, restant 2, quæ subscribe se-	496. A 75. B ——— 421. C

cundo loco. Supereſt in superiori numero nota 4, cui nulla respondet in numero inferiore. Subscribe igitur 4 loco tertio. Residuum quæsitum est C.

II. Detur E auferendus ex D. Quia 8 ex 4 auferri nequit; ad 4 mente adjicio decem, atque ita 8 aufero ex 14, restant 6, quæ sub-	3004. D 2578. E ——— 426. F

scribo. Quia vero ad 4 adjeci decem mutuata a numero sequente, proximam notam significantem 3 reputabimus ut 2, & cifras intermedias, ut totidem 9. Aufero igitur 7 ex 9, & residuum 2 subscribo. Tum 5 aufero similiter ex 9, & residuum 4 subscribo. Tandem 2 aufero non ex 3, sed ex 2, & nihil restat. Reliquum igitur quæsitum est F.

III. Oporteat H auferre ex G. Quia 9 ex 3 auferri nequit, adjectis mente 10 ad 3, subduco 9 ex 13, &	85003 G 69 H ——— 84934 I

 resi-

residuum subscribo. Quapropter 5 fit 4, & 00 vertuntur in 9. Ergo 6 aufero ex 9, & residuum 3 subscribo. Tum quia nullæ notæ inferioris numeri H supersunt auferendæ, reliquas superioris, quæ jam sunt, non 850, sed 849, subscribo. Erit I quæsitum residuum.

IV. Proponatur L auferendus ex K. Quia 3 nequit auferri ex 0, adjectis mente 10 ad 0, aufero 3 ex 10, & remanent 7. Tum vero, quia in majore numero K nota proxima significativa est 1, ea evanescit, & cifræ intermediæ vertuntur in 9, a quibus subtrahes, ut supra; & erit M residuum quæsitum.

100000.	K
51243.	L
48757.	M

Demonstratio Modi I.

Quod in residuorum scriptione locorum valor servatus sit, ex operatione ipsa patet. Solum restat, ut declaremus id, quod mirum videri solet Tironibus, quare nota significativa, ad sinistram proxima, minuatur unitate; & cifræ, si quæ fuerint mediæ, in totidem 9 commutentur, quando nota inferior demi nequit ex superiore. Inspiciatur secun-

3004. D
2578. E
426. F

cundum exemplum. Quia 8 demi nequit ex 4, ad 4 adjicio decem mutuata a sequente numero, qui est tria millia. Liquet autem, cum a tribus millibus subduco decem, remanere duo millia, nongenta, nonaginta, quæ quia Arithmeticè exprimuntur hisce notis 2990; patet, quare in superiori numero 3 vertantur in 2, & cifræ 00 in 99.

D.	3004	96
E.	2578	91
F.	426	55

At dicet quispiam, si ante numeri D primam notam 4 ponerentur aliæ duæ 9 & 6; & ante numeri E primam 8 duæ 9, 1; tunc 4 valeret 400, & 8 valeret 800; ac proinde ut 800 auferri possint ex 400, adjicienda essent non decem, sed mille, ut sic 800 ex 1400 subducantur. Verum respondeo eòdem recidere, sive 8 auferas ex 14, sive 800 ex 1400; quia residuum 6 scribitur infra lineam eo loco, qui debetur notis 4, & 8, nempe tertio: unde fit, ut residuum 6 eo loco positum valeat 600, quantum nempe superesset, si 800 ex 1400 subducerentur.

MODI II. PRAXIS.

HÆc in eo tantum a priore differt, quòd quando nota inferior auferri nequit a superiore, ac proinde illi decem adjiciuntur; nulla in superioribus notis sequentibus mutatione facta, sequens inferior nota unitate augeatur; aut certè, si nulla nota significativa sequatur, in loco sequenti unitas reponatur. Res exemplo declarabitur.

Exemplum.

8068.	K
576.	L
7492.	M

DEtur L, auferendus ex K. 6 ex 8 relinquit 2. 7 ex 6 subduci nequit. Adjicio ergo 10, & 7 demo ex 16, restant 9. Jam quia adjeci 10, sequens nota inferior 5 augenda est unitate, & sic 5 fit 6. Rursum 6 ex 0 auferri nequit. Aufero igitur 6 ex 10, & restant 4. Quia vero rursum adjeci 10, repono sequenti loco, qui vacat, unitatem, quæ ablata ex 8 relinquit 7. Residuum ergo quæsitum est M.

Hæc methodus expeditior plerumque est præcedenti; quæ tamen commodior

erit,

erit, cum in majore numero plures occurrunt cifræ continuæ.

Demonstratio Modi II.

DEntur binæ E——A——L——B
quantitates I——C——F
AB major, CF
minor, quæ ambo æqualibus quantitatibus EA, IC augeantur. Si IF auferas ex EB, idem erit residuum LB, quod fuisset, CF ablato ex AB. Hoc si numeris applicetur, operationis ratio continuò elucescet. Nam superiori notæ 6 adjicere decem sic, ut fiat 16, nihil est aliud, quàm sequenti post illam loco, qui hic tertius est, apponere unitatem. Quare cum etiam loco, notam inferiorem 7 sequenti, qui & ipse tertius hic est, apponatur unitas; manifestum est utrumque numerum æqualiter augeri, ac proinde residuum, hac ratione obtentum, illud ipsum esse, quod numero L a numero K subducto remanet.

Subtractio a sinistra in dextram etiam fieri potest, & iisdem principiis demonstrari, ut patet hoc exemplo.

59.	
8068.	K
576.	L
7492.	M

Detur L, auferendus ex K, 5 ex 80 relinquit 75, ex quibus 7 infra repono, & 5 retineo, vel potius supra scribo. Postea 7 ex 56 aufero, & restant 49. 5 si supra scriptum sit, deleo; 4 infra scribo, & 9 retineo, vel supra scribo. Denique 6 ex 98 relinquit 92, qui cum ultimus sit numerus, infra totaliter reponitur, & residuum quæsitum M ostendit, sicut in exemplo præcedenti. Plura alia videri possunt apud a supradictum Auctorem.

a Desaig. pag. 43. cit.

SPECIES DIVERSÆ.

UT libræ, floreni, asses subducantur, minor summa subscribatur majori, sic ut similia similibus respondeant: & si simile a simili subtrahi nequeat, a specie majori proxima unum mutuetur.

Lib.	Flor.	Asses.
25	12	13
10	14	18
14	4	15

Exemplum.

18 Asses, quia nequeunt auferri ex 13, a florenis 12 unum mutuo acceptum adjicio ad 13 asses, & fiunt 33. Jam 18 ex 33 ablati relinquunt 15. Rursum quia

14 flo-

14 floreni ex 11 (unum quippe sustulimus) demi nequeunt, ad florenos 12 adjicio 1 libram mutuatam a libris 25, & fiunt floreni 18; a quibus si subducantur 14, remanent 4. Postremo 10 libras subduco ex 24 (nam una mutuo data est) & restant 14 libræ.

Simili ratione subtrahentur gradus, minuta prima, secunda, &c.

CAPUT VI.

Tabula Pythagorica multiplicationi, divisionique inserviens.

ABacus, qui ab auctore Pythagoricus dicitur, in vertice seu supremo ordine AC habet novem primordiales notas Arithmeticas 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9: & sub singulis ponitur singulorum duplum, triplum, quadruplum, &c. usque ad nonuplum. Usus est eximius, tradeturque cap. VII. & IX.

Quod si hujus Abaci columnæ AB, DE, &c. ab invicem separentur, ut possint inter sese quovis ordine permisceri, multiplicationis, ac divisionis compendium admirabile exhibebitur. Hanc tabulæ Pythagoricæ dissectionem primus ex-

excogitavit, adhibuitque Johannes Neperus Baro Merchistonius, tum hoc invento suo, tum logarithmis a se itidem excogitatis, de Mathesi præclarè meritus.

Porro hujus Abaci dissecti, sive mobilis constructio est hujusmodi. Præparentur ex ære, charta solida, aut alia quavis materia idonea laminæ plures oblongæ, & tenues AB, quæ dividantur in novem quadrata æqualia, & quadrata singula ductis diametris in duo triangula secentur sic, ut inferius triangulum BNP ad dextram sit. Primæ laminæ inscribatur prima columna tabulæ Pithagoricæ, nempe 1, 2, 3, 4, &c.; & in altera ejus facie columna secunda 2, 4, 6, 8, &c. In secunda lamina describatur columna tertia tabulæ Pythagoricæ 3, 6, 9, 12, &c.; in altera verò ejusdem facie columna quarta 4, 8, 12, 16, &c. Et sic deinceps in reliquis laminis Abaci Pythagorici reliquæ columnæ describantur, ea semper lege, ut cum numerus unica nota constat, is reponatur in triangulo inferiori; cum verò duabus, exempli gra. 18, prima nota 8 inscribatur triangulo inferiori, secunda 1 triangulo superiori. Ex singulis autem hujusmodi lami-

laminis plures ejusdem formæ erunt construendæ. Sed uniuscujusque formæ ad maximas etiam divisiones, ac multiplitiones peragendas sufficient. Præter has autem alia insuper præparanda est lamina XZ, quam hìc expressam vides. Ea reliquis ad sinistram in omni multiplicatione, ac divisione apponitur, singulos numerorum ordines denominans, quam proinde ab officio exponentem nominabo.

Harum laminarum primum istud, atque præcipuum artificium est, ex quo usus reliqui omnes emanant, quod datum numerum per novem primordiales notas momento penè multiplicatum exhibeat. Datus esto numerus 597. Laminæ hunc numerum gerentes in vertice sibi mutuò apponantur, præfixa ad lævam virgula exponente XZ. Stabit igitur in primo, sive supremo ordine numerus datus 597, atque infra ipsum alii numerorum ordines octo multiplices primi 597, juxta numeros laminæ exponentis, ut cap. VIII. demonstrabitur.

Mo-

Modus legendi, & exſcribendi ordines numericos laminarum.

TRia obſerva. I. Primum inferius triangulum, quod nempe ad dextram eſt, conſtituere primum locum; rhombos intermedios ſingulos, loca ſingula intermedia; poſtremum ſuperius triangulum, locum ultimum. Ex quo ſtatim apparet, quot notis conſtet numerus, quem ordo quilibet laminarum continet. II. Notas in eodem rhombo exiſtentes, Exempl. gr. in NM, coaleſcere. Quod ſi coaleſcentes, hoc eſt in unum collectæ, numerum efficiant binis notis conſtantem, illius notam ſecundam ad ſequentem rhombum, aut triangulum rejici oportere.

Exemplum.

OPorteat ordinem nonum deſcribere. In primo triangulo inferiori reperio 3, quam ſcribo primo loco. In ſequenti rhombo notæ ſunt 6, & 1, quæ coaleſcentes faciunt 7: ſcribo ergo 7 ſecundo loco. In rhombo ſequenti notæ ſunt 8, & 5, quæ coaleſcentes faciunt 13: hu-

hujus summæ primam notam 3 scribo loco tertio; alteram 1 rejicio ad sequens ultimum triangulum, ac ad notam isthìc repertam 4 adjicio, & fiunt 5, quam scribo loco quarto. Ordo igitur nonus continet numerum 5373.

Ratio hujus exscriptionis dabitur in demonstratione cap. VIII.

CAPUT VII.

Multiplicatio.

Quid sit multiplicatio, expositum est defin. XIII. lib. VII., qui nobis est Arithmeticorum primus.

Ut expedite fiat multiplicatio numerorum pluribus notis constantium, prænoscenda est notarum simplicium multiplicatio, quæ præsidio tabulæ Pythagoricæ momento absolvitur. Oporteat multiplicare 7 per 8. In latere AB quære 7; in latere AC 8: in concursu offertur 56, productum ex 7 per 8

PRAXIS.

Dentur numeri A, B inter se multiplicandi. Si inæquali constant notarum tatum numero, eum alteri ſubſcribe, qui paucioribus conſtat notis. Tum prima nota inferioris B multiplicet notas ſingulas ſuperioris A, & producta ſcribe infra lineam a dextra in ſiniſtram, ea lege, ut ſi productum conſtet duabus notis, primam ſubſcribas, ſervata altera, quæ ſequenti producto addenda erit.

Pari modo reliquæ notæ inferioris B multiplicent ſingulas notas ſuperioris A; ſed producta ſic ſcribentur, ut producti ſecundi D prima nota eo loco reponatur, quem habet nota multiplicans 1, hoc eſt ſecundo; producti tertii E nota prima ſtatuatur eo loco, quem habet nota 5 multiplicans, hoc eſt tertio; & ſic deinceps.

Denique producta C, D, E collige in unam ſummam F. Hæc erit productum quæſitum ex multiplicatione numerorum A, B.

Exemplum.

3042	A
517	B
21294	C
3042--	D
15210---	E
1572614	F

DEntur multiplicandi inter ſe A, & B. Minoris B nota prima 7 multiplicet totum A. 7 in 2 facit 14: primam notam 4 ſcri-

ſcribo infra lineam; alteram, nempe 1, ſervo. 7 in 4 facit 28, quibus addo notam ſervatam 1, & fit 29: ſcribo 9 ſecundo loco infra lineam, & ſervo 2. 7 in 0 facit 0. Ergo notam ſervatam 2 ſubſcribo tertio loco ſolam. 7 in 3 facit 21; quæ ſubſcribo quarto, & quinto loco, ut jacent.

3042	A
517	B
21294	C
3042--	D
15210---	E
1572614	F

Eodem prorſus modo numeri B nota ſecunda 1, multiplicans totum A, gignet productum D, cujus prima nota 2 ſcribatur ſecundo loco, nimirum infra ipſam ſuam notam multiplicantem, quæ eſt 1. Neque aliter numeri B nota tertia 5 multiplicans totum A, gignet productum E, cujus prima nota 0, ſcribatur loco tertio, nempe infra notam ſuam multiplicantem 5: cæteræ verò locis ordine ſuo conſequentibus reponantur.

Demonſtratio.

MAnifeſta eſt ex Poriſm. VI. & VII. cap. III. Quod enim valorem ſibi

ex

ex loco debitum habeant notæ omnes producti primi C, itemque nota prima producti D, & nota prima producti E, patet ex Porism. VI. Quod vero reliquæ notæ productorum D, & E valorem quoque habeant ex loco sibi debitum, patet ex Porism. VII. Liquida sane res erit, si operandi ratio jam præscripta cum Porismatis jam dictis conferatur.

Multiplicationis Compendia.

I. Cum utriusque numeri dati G, H, vel unius tantum, primæ notæ sunt cifræ una, vel plures non interruptæ; multiplicatio peragetur inter notas significantes solas, & producto præponentur omnes cifræ utriusque numeri.

12000	G
400	H
4800000	K

23	G
5000	H
115000	K

II. Cum datorum unus M constat unitate, & cifris; habetur productum P, si alteri N adjiciantur omnes cifræ prioris M.

2340	N
1000	M
2340000	P

III. Si

III. Si in numero multiplicante R una, pluresve cifræ mediæ, & continuæ occurrant, illis omissis, per notam sequentem 5 multiplicabis totum Q, & producti T notam primam 5 scribes infra notam suam multiplicantem, quæ etiam hic est 5, nimirum quarto loco.

8013	Q
5006	R
48078	S
40065	T
40113078	

Horum compendiorum demonstratio ex iisdem VI., & VII. Porism. manifesta similiter est.

SPECIES DIVERSÆ.

UT Libræ, Floreni, Asses; prius ad minimam speciem, puta asses, reducendæ; reductæ per regulas jam traditas multiplicentur; productum verò ad majorem, quæ placuerit, speciem ope divisionis, cap. IX. tradendæ, reducetur: ut si productum sint 3400 asses, dividendo 3400 per 20, reduces ad florenos 170: hos dividendo per 6, reduxeris ad libras 28, cum una tertia, hoc est ad Lib. 28. Flor. 2.

Eodem methodo fiet multiplicatio Astro-

nomica, graduum videlicet, minutorum primorum, secundorum &c.

Scholium.

Multiplicatio a sinistra in dextram usum habet non levem in divisione. Fit hunc in modum. I. Nulla nota reservatur, id enim commodius. II. Si notæ ultimæ multiplicatione peracta, ex multiplicationibus reliquarum productum aliquod oriatur, duabus notis scribendum, ejus nota sinistra scribatur infra eam, quæ in priori producto est prima, seu dextra.	183 6 ——— 688 41 ——— 1098

Oporteat 183 ducere in 6. 6 in 1 est 6.: scribo ergo 6 infra lineam. 6 in 8 est 48, quia hoc productum constat duabus notis, sinistram 4 scribo infra 6, & 8 ante 6. 6 in 3 est 18, rursus 1. scribo infra 8, & 8 ante 8. Facta igitur additione, productum quæsitum est 1098. Demonstratio ex supra dictis colligitur.

CAPUT VIII.

Multiplicatio expeditissima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

Laminarum constructio tradita est cap. VI. jam usus earum plane eximius deinceps exponetur.

PRA-

PRAXIS.

A. 597	
B 48	
4776	C
2388	D
28656	E

DEntur numeri A, B inter se multiplicandi. I. quærantur laminæ, quæ dati majoris A notas habent in vertice, & sibi mutuò apponantur, adjecta ad lævam lamina exponente XZ, a sic ut in primo, ac supremo ordine stet numerus datus A.

a tabellam vide c. 6.

II. Minoris dati B notam primam 8 quære in lamina exponente XZ, ordinemque illi respondentem, octavum nempe, exscribe, infraque lineam repone, & sit C. Pari modo numeri B notam secundam 3 quære in lamina exponente, ordinemque illi respondentem, nempe quartum, describe, sitque D. Sed prima ejus nota 8 scribenda est infra secundam producti primi C. Quod si numerus B plures haberet notas, eæ similiter in exponente lamina repertæ exscribendos numerorum ordines reliquos indicarent.

III. Producta demum C, D, in unam

collecta summam E, multiplicationis A per B productum quæsitum exhibebunt.

Demonstratio.

FAcilis est, tùm ex ipsa laminarum constructione, tradita cap. VI., tum ex iis, quæ de multiplicatione communi demonstrata sunt. Numerus enim 56 repertus in laminæ primæ quadrato VIII, est octies 7, ac proinde fit ex 8 in 7. Sed, quia 56 duabus constat notis; primam 6, quæ in inferiori triangulo est scribo infra lineam; alteram verò 5, quæ est in triangulo superiori, servo. Pari modo numerus 72, in secundæ laminæ quadrato VIII repertus, est octies 9; ac proinde est is, qui fit ex 8 in 9. Sed, quia 72 duabus notis constat, ejus nota secunda 7 ad tertium, prima verò 2 sola ad secundum locum pertinet. Ad eumdem verò etiam pertinet nota 5 servata. Ergo hæ duæ notæ 5, & 2 in unam sunt colligendæ, 7, quæ secundo loco infra lineam scribetur. Atque hæc causa est, cur semper nota trianguli superioris cum nota sequentis trianguli inferioris coalescat; ac proinde cur no-

A.	597	
B	48	
	4776	C
	2388	D
	28656	E

notæ, in eodem rhombo existentes; ad locum eumdem pertineant, saltem quoad primam aggregati notam. Nam si notæ alicujus rhombi collectæ numerum faciant binis notis constantem; secunda nota ad sequentem rhombum rejicitur. Postremò numerus 40; repertus in VIII quadrato laminæ tertiæ, est is, qui fit ex 8 in 5: cujus sola prima nota 0 pertinet ad locum tertium; ad quem quia etiam pertinet nota servata 7; in eodem cum, 0, rhombo existens, eæ rursum debent coalescere. Sed quia 0 addito ad 7 manet 7; infra lineam scribe 7 loco tertio; alteram verò 4; quæ in ultimo est superiori triangulo, quarto loco. Octavus igitur ordo in laminis, hoc est numerus ipse C, est is, qui fit ex A 597 ducto in 8 primam notam ipsius B. Pari ratione ostendam ordinem IV, hoc est numerum D, eum esse qui fit ex A 597 in 4 secundam notam ipsius B. Ergo eorum summa E est is, qui fit ex A in totum B. Quod erat demonstrandum.

Laminarum igitur artificium in his duobus consistit. Primò, quòd laminæ

 quæ-

qualibet componi inter se possint, ac proinde quivis numerus statui in supremo ordine. Secundò, quod numeri, duabus notis constantes, in laminis ita descripti sint, ut prima nota in triangulo inferiori, altera in superiori sit reposita. Unde fit, ut quia triangulum quodlibet superius cum laminæ sequentis triangulo inferiori unum rhombum constituit, nota superior laminæ præcedentis, quæ semper est ea ipsa, quæ mente reservanda esset, reperiatur in eodem rhombo cum laminæ subsequentis nota inferiori, seu prima, cum qua debet coalescere, ut eodem, quo ipsa, loco scribatur.

Cæterum quàm expedita, facilis, secura hæc methodus sit, usu ipso docebitur, quisquis voluerit experiri.

CAPUT IX.

Divisio.

QUid sit divisio, expositum est defin. XIV. lib. VII., qui nobis primus est. Duos proponam modos, quorum primus minus usitatus est, sed melior; alter usitatior quidem, sed implicatior.

PRA-

PRAXIS MODI I.

Numerum detur AC dividendus per numerum Z.

I. Ex dividendo accipe tot notas postremas, quot constat notis divisor; vel, si hæ numerum efficiant divisore minorem, ut in exemplo nostro accidit, cum 459 minor sit, quàm Z 597, illis unam adhuc appone o. Atque ita constituitur primum divisionis membrum AB, quod puncto secerne.

```
                Z
 A   B   C     597 Divis.
 4590.9.3.
 4179         { 769
              { X
 ---------
D 411.9
 358 2
 ---------
E    537. 3
     537  3
 ---------
        0
```

II. Vide, quoties divisor Z in membro AB contineatur. Id si non appareat, quære ultima divisoris nota 5 quoties contineatur in ultimis duabus notis membri AB. Quod si divisor & membrum æquè multis constarent notis, quæren-

Z
A B C 597 *Divis.*
4590.9.3.
4179 | 769
X
D 411.9
3582
E 537.3
537 3
0

rendum esset; quoties divisoris nota ultima 5 continetur in membri ultima. Reperies contineri septies; scribe igitur 7 post lunulam. Non licebit autem post lunulam scribere unquã simul plus, quàm 9; quia, ut demonstrabo infra, divisor in membro nunquam continetur sæpius, quàm novies.

III. Per notam 7, jam in quotiente scriptam, multiplica totum divisorem Z, a sinistra in dextram. Productum 4179, quod membro esse debet minus, vel æquale, ipsi membro subscribe, ab eoque aufer, & residuum D 411, quod minus sit oportet divisore Z, scribe infra lineam, ante primam ejus notam, puncto adjecto. Hæc omnia si succedant, legitima erit nota 7 post lunulam in quotiente scripta, & primi membri divisio peracta.

IV. Quod si nota in quotiente scripta, di-

divisorem multiplicans, exhibeat productum membro majus, rejicietur, minori substituta: si verò productum exhibeat nimis parvum, quod nimirum, ubi a membro subtraxeris, residuum det divisore majus, vel æquale, illa similiter rejecta, major substituetur. Examen porro illud notæ post lunulam scribendæ expeditius redditur multiplicatione a sinistra in dextram, ut supra præceptum est, instituta.

Itaque divisionis difficultas in hoc potissimum consistit, ut talis in quotiente nota scribatur, per quam divisor multiplicatus a membro subduci possit, & cum subductus fuerit, residuum existat, vel nullum, vel divisore minus: talis enim nota indicabit, quoties divisor continetur in membro.

V. Membrorum reliquorum similis est divisio. Ad residuum 411 D membri prioris A B dextrorsum adscribe notam 9, quæ membrum A B jam divisum antecedit. Atque ita secundum membrum constituitur 411.9, circa quod eadem operatio instituetur, quæ circa primum.

Quæres nimirum, quoties divisor Z in eo contineatur. Reperies senies: scribe ergo *go 6 post lunulam ante 7. Divisorem multiplica per 6, & productum 3582 membro 412.9 subscribe, ab eoque subtrahe; residuo E 537 infra lineam reposito, punctoque ante ipsum notato.*

Denique notam 3, quæ dextrorsum sequitur in dividendo AC, residuo E 537 adscribe, ut habeatur membrum tertium 537.3. Rursum quære quoties divisor in tertio membro contineatur: reperies novies. Igitur 9 quotienti adscribe. Divisorem deinde multiplica per 9, & productum 5373 a membro 5373 subtrahe, & nihil restat.

His peractis absoluta est divisio tota numeri dati AC per datum Z.

VI. Si divisione peracta supersit aliquid, ut in exemplo hic apposito supersunt 5, residuum 5 scribe supra divisorem 13, lineola interposita, ut fiat fractio N. Quotiens erit integer numerus, post lunulam scriptus, una cum dicta fractione N.

51.2	13 *Divis.*	
39		
12.2		
117	39	$\frac{5}{13}$ N
5		

VII. Si operatione prima absoluta, contingat in sequentium membrorum aliquo o. 4 divisorem 5 ne semel quidem

dem contineri, quotienti post lunulam adscribetur cifra, & membro apponetur adhuc una dividendi nota 5, lineola interposita, ut appareat 0.45 membrum esse geminatum, atque ita membrorum numerus appareat.

10.4.5	5 *Divis.*	
10		
———		
0.45		209.
45		
———		
0		

VIII. Ut minor numerus per majorem dividatur, ut 3 per 7, scribendus minor supra majorem, lineola interposita, ut fiat fractio R. Demonstrabitur lib. II. cap. II. Theor. I. coroll. II.

$$\frac{3}{7}\ \mathrm{R}$$

Demonstratio.

A B C	Z	
	597 *Divis.*	
4590.9.3.		
4179	769	
———	X	
D 411.9		
358 2		
———		
E 537.3		
537 3		
———		
0		

Tot scribuntur notæ post lunulam, ac proinde tot notis constat quotiens X, quot sunt membra divisionis, ut ex operatione ne præscripta patet. Tot verò sunt membra, quot notæ in dividendo AC primum membrum AB antecedunt; quod quidem per se manifestum est. Ergo tot notis constat quotiens X, quot notæ primum membrum dividendi antecedunt. Liquet igitur ex Porism. VIII. cap. III. numeri X, post lunulam scripti; notam ultimam 7 verum esse primi membri AB quotientem, qui nimirum indicet, quoties divisor Z in primo membro AB contineatur. Pari modo idipsum ostendam de reliquis notis numeri X, post lunulam scripti, respectu membrorum cæterorum. Ergo numerus X verus est quotiens, proveniens ex divisione numeri AC per Z. Quod erat demonstrandum.

Quod verò, cùm divisor nõ metitur dividendum, verus quotiens nihilominus sit numerus integer 39, una cum fracto N, cujus numerator est is,	512 13 *Divis.* 39 ——— 122 { 5/13 N 117 { 39 13 ——— 5

qui peracta divisione restat, nominator verò divisor ipse; sic demonstro. Ut unitas est ad *a* quotientem integrum 39, ita divisor 13 est ad dividendum 512,

a patet ex def. 14. l. 7. & ex jam ostensis.

dem-

dempto residuo 5. Rursum, ut unitas est ad fractum N, sic *b* nominator 13 ad numeratorem 5, hoc est divisor ad residuum. Ergo, ut unitas ad *c* integrum cum fracto; ita est divisor 13 ad totum dividendum. Ergo integer ille cum fracto verus *d* quotiens est. Quod erat demonstrandum.

b patebit ex theor. 1. cap. 2. l. 2.
c 14. si
d defin. 14. 7.

Cur autem nunquam simul ad quotientem liceat adscribere plus, quàm novem; ita fiet manifestum. Vel membrum A, & divisor B æquè multis constant notis; vel membrum excedit una, (*e* neque enim potest unquam pluribus excedere.) Si æquè multis notis constant, liquet ex Porismate IV. cap. III., B in A contineri minus, quàm decies. Si membrum A una nota excedat divisorem B, tunc ultima nota divisoris major est ultima nota membri, ut patet ex num. I.; ac proinde per Porisma V. cap. III. rursum continetur B in A minus, quàm decies. Quare cum divisor in membro quolibet contineatur semper minus, quàm decies, caussa jam manifesta est, cur non liceat unquam ad quotientem plus simul adscribere, quàm 9.

A	2996
B	1000

A	2999
B	3000

e patet ex nu. 1.

PRAXIS MODI II.

OPorteat numerum A dividere per numerum B.

I. Diviſorem ſubſcribe dividendo ad ſiniſtram, ſic ut nota ultima ultimæ reſpondeat, penultima penultimæ, & ſic deinceps. Quod ſi numerus ſupra diviſorem poſitus 370 k tunc minor eſſet diviſore, oportebit diviſorem ad unum locum promovere dextrorſum, ut in exemplo cernitur.

k Sche. 1.

Cenſetur autem ſupra diviſorem eſſe poſitum, quidquid illi ad lævam eſt. Unde ſupra 821 eſt 3702; ſupra 8 eſt 37; ſupra 2 eſt 370.

Nota. Charactæres, quibus ad dextram hic virgula eſt, cenſentur deleti.

Schema 1.	Sche. 2.
A 37029 (4 B 821	5 ~~37~~029 ~~8~~21 (
Sche. 3.	**Sche. 4.**
4 ~~8~~2 ~~370~~29 ~~82~~1 (4	41 ~~82~~8 ~~3702~~ ~~821~~ (4

II. Quære quoties diviſor in notis ſupra

pra ipſum poſitis contineatur. Sed quia plerumque hoc judicatu difficile eſt, quære quoties ultima diviſoris nota 8 in numero ſupra ipſam ſcripto 37 contineatur. Reperies contineri quater.; ſcribe ergo 4 poſt lunulam.

III. Per notam 4, in quotiente ſcriptam, multiplica totum diviſorem, & productum ſubtrahe a notis 3702, ſupra diviſorem ſcriptis: & reſiduo ſupra eaſdem ſcripto, dele tam diviſorem, quàm notas ſupra ipſum poſitas. Malunt autem plerique ſingulas ſeorſim notas diviſoris, per quotientem 4 multiplicatas, a numeris ſupra ipſas poſitis ſubducere, ſubtractione videlicet multiplicationi alternatim interpoſita.

Exemplum.

a 8 in 4 facit 32, quæ ſubtracta ex 37 relinquunt 5: dele *b* 37, & 8; 5 vero ſcribe ſupra 7. Rurſum 2 in 4 faciunt 8, quæ ſubtracta ex 50 relinquunt 42: dele *c* igitur 50, & in diviſore 2; reſiduum vero 42 ſcribe ſupra 50. Denique 1 in 4 facit 4, quæ ſubtracta a 422 relinquunt 418: dele *d* igitur 422, & 1; reſiduum autem 418 ſcribe ſupra 422. Atque

a Sche. 1.
b Sche. 2.
c Sche. 3.
d Sche. 4.

Atque ita divisoris applicatio una peracta est.

II. Verum *e*, quia ultima divisoris nota 8, per quotientem 4 multiplicata, & subtracta ex 37, etiam nota penultima 2, per eumdem quotientem 4 multiplicata, subtrahi debet a residuo 50 supra ipsam posito; itemque & prima 1 multiplicata *f* per quotientem eumdem 4 similiter a residuo supra ipsum scripto 422 subducenda est: hinc fit, ut dum quæritur, quoties divisoris nota ultima 8 in notis supra ipsam existentibus 37 contineatur, talis post lunulam nota in quotiente sit reponenda, per quam singulæ notæ divisoris multiplicatæ possint subtrahi a numeris supra ipsas scriptis, & ea quidem adhuc lege, ut ultima subtractione peracta, residuum 418 *g* sit vel nullum, vel divisore minus, quemadmodum num. IV, modi I. est traditum. Quare si prima subtractione facta, nequeat peragi secunda, aut his peractis, tertia; nota post lunulam scripta minuenda est unitate eò usque, donec subtractiones singulæ possint absolvi. Prius igitur, quàm opereris, seriò, tota operatio, num. III. præscripta, erit mentaliter peragenda, ut no-

e Sche. 2.

f Sche. 3.

g Sche. 4.

nota in quotiente adſcripta examinetur. Quod ſane non Tironibus modo, ſed etiam non rarò exercitatis ſubmoleſtum eſt. Unde ſatius erit, hoc examen notando ſeorſim inſtituere.

Exemplo jam dicta declaremus. Detur M dividendus per N. Quæro, quoties N in notis ſupra ipſum poſitis 738 contineatur. Reperio ter. Scribo ergo 3 poſt lunulam. 2 in 3 facit 6, quæ ablata a 7, relinquunt 1. 4 in 3 facit 12, quæ ablata a 13, relinquunt 1. 9 in 3 eſt 27, quæ ex 18 auferri nequeunt. Nota igitur 3, ad quotientem ſcripta,

Sche. 5.

11
M.7382 } 32
N.249

nimis magna eſt. Quare hac rejecta, ſubſtituo 2, & examen repeto, 2 in 2 ſunt 4, quæ ſubtracta ex 7, relinquūt 3. 4 in 2 ſunt 8, quæ ſubtracta ex 33, relinquunt 25. 9 in 2 ſunt 18, quæ ſubtracta a 258, relinquunt 240. Nota igitur 2 legitima eſt.

Sche. 6.

24
350
7382
248

Quamvis autem plerique, ut dixi ſupra, ſubtractionem multiplicationi permisceant, modo jam explicato; mihi tamen videtur consultius, ut multiplicatio tota simul absolvatur, & quidem a sinistra in dextram, adhibita cautione numero IV. modi I. præscripta.

V. Applicatione prima divisoris absoluta, quæ Schem. I, II, III, IV. exhibetur, promovebitur divisor B una nota versus dextram, uti factum vides in Schem. VII. & operatio instituetur per omnia similis hactenus traditæ. Atque ita deinceps applicationes reliquæ, si plures essent faciendæ, absolventur.

Schem. 7.

```
     41
     838
A. 37029  { 4
B.   821
```

VI. Si facta aliqua promotione divisoris, is ne semel quidem in notis, supra se positis, contineatur; ad quotientem scribatur cifra, & divisor uno adhuc loco promoveatur, nulla in dividendo nota deleta.

VII. Si quid supersit divisione peracta, fiet quod præscriptum num. VI. modi I.

Schem. VIII. exhibetur numeri A per numerum B divisio tota, quæ supra tantum de-

declarandi gratia pluribus schematis fuit exhibita.

Demonstratio

Hujus modi similis est demonstrationi præcedentis.

Schem. VIII.

	$\cancel{4}\cancel{1}$	
	$\cancel{1}\cancel{2}84$	84
A.	$\cancel{3}\cancel{7}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{9}$	45—
B.	$\cancel{8}\cancel{2}\cancel{1}\cancel{1}$	821
	$\cancel{8}\cancel{7}$	

Quamvis autem hæc ratio dividendi passim sit usitata, priorem tamen illam longe meliorem sentio: usitata siquidem, dum notas expungit, vestigia divisionis, ac membra confundit, ut si quid erratum sit, correctio adhiberi plerumque vix possit, ut ex schem. VIII. satis apparet. Prior verò illa & singula divisionis membra, & singularum producta multiplicationum, & quæ subtractione facta ex membris singulis manent residua, distincte exhibet. Quo fit, ut facilis sit correctio, si error irrepserit.

Plures alii modi divisionis, qui non minus ingenii, quàm utilitatis habent, apud præfatum Auctorem a videri possunt.

a Desalg. pag. 143.

USUS TABULÆ PYTHAGORICÆ

Communis in Divisione.

DAtus sit numerus quicumque, duabus notis constans, E, & nota quævis simplex F. Quæritur quoties F in E continetur.

62	E
8	F

Quæratur *o* in latere A B nota F, & in linea numerica illi respondente numerus E, aut eo proxime minori 56. Ab hoc numero sursum ascendendo ad latus A C, incides in quotientem quæsitum 7.

o vide tabel, c. 6.

Ratio patet ex constructione tabulæ, cap. VI. tradita.

DIVISIONIS COMPENDIA.

$$\begin{array}{lll} & & D \\ C\ 2889 \mid 829 & & 1000 \\ & \left\{\begin{array}{l} 829 \\ 2889 -- G \end{array}\right. & \\ & & 1000 \end{array}$$

I. CUm ultima nota divisoris D est unitas, & reliquæ omnes cifræ; a dividendo C aufer tot ad dextram notas 829, quot cifras habet divisor; reliquas 2889 scribe post lunulam, quibus ap-

appone notas abjectas 829 supra divisorem 1000 scriptas, lineolâ interpositâ: quotiens erit 2889 numerus integer, post lunulam scriptus, una cum fractione G. Quod si notæ abjectæ etiam cifræ sunt, ut in exemplo, quotiens erunt ipsæ notæ ad sinistram residuæ 342.

Demonstratio.

Divis.	
342 | 000 . 1000	
342 *Quotiens.*	

Facilè colligitur ex Porism. VIII. c. III. Quin etiam patet ex secundo compendio multiplicationis c. VII. Nam 1000 multiplicans 342, producet 342000. Ergo 1000 dividens 342000 facit quotientem 342: ut patet ex definitione XIII, & XIV. L. VII. Per defin. quippe XIII. L. VII., ut unitas est ad 1000, ita 342 est ad productum 342000. Ergo à permutando, ut unitas est ad 342, ita 1000 est ad 342000. Ergo per defin. XIV. 1000, dividens 342000, dat quotientem 342. a 16. 5.

II. Cum divisor B constat aliis notis significativis unâ, vel pluribus diversis ab unitate, ad dextram verò habet cifras;

A. 2. 4. 9 | 46 B 2 | 00

2 { 146
— 124—m
0.4 { 200
—
0.9
9
—
1

a dividendo A rursum aufer ad dextram tot notas 46, quot habet cifras divisor, & notæ reliquæ 249 dividantur per solas divisoris notas significativas. Divisione peracta, siquid supersit, quemadmodum hic superest 1, id cum notis abjectis 46 quotienti integro 124 appone, divisore scripto inferius, & lineola interposita. Quotiens erit integer 124 cum fracto *m*.

Demonstratio.

EX Porism. VIII. c. III, vel etiam ex compendio I. multiplicationis c. VII. discursu simili, ut paullo ante, elicitur.

C. 27. 2. 000 } D 4
24
—
3 2. { 68000
3. 2.
—
0

III. Cum

III. Cum dividendus habet cifras ad dextram, & nihil ex notis significativis supereſt; tot quotienti adſcribentur cifræ, quot poſt ultimum membrum ſignificativum cifræ reſtant in dividendo.

Eſto C dividendus per D: 4 in primo membro 27 continetur ſexies. Scribo ergo 6 poſt lunulam. 4 in 6 eſt 24, quæ ſubſcribo membro 27, ab eoque ſubtraho, & reſiduum 3 repono infra lineam, eique adſcribo notam dividendi proximam 2, ut habeam ſecundum membrum 32. 4 in 32 continetur octies: ſcribo 8 in quotiente. 4 in 8 facit 32, quæ ſubtracta ex membro 32, nihil relinquūt. Quia vero in dividendo jam nihil reſtat, præter cifras, adſcribo quotienti cifras totidem, & peracta eſt diviſio.

Demonſtratio ex Poriſm. VIII. cap. III.

SPECIES DIVERSÆ.

Eumdem ad modum tractandæ, qui traditur in multiplicatione cap. VII.

CAPUT X.

Divisio facillima per laminas tabulæ Pythagoricæ.

IN opere divisionis præcipuum facessit negotium inventio quoti, seu quotientis, per quem multiplicandus est divisor. Hunc quotum, quin etiam productum ipsum ex divisore, in quotum multiplicato, admirabili compendio laminæ exhibent. Cætera omnia peraguntur, ut in modo primo cap. præcedentis, qui aptior est huic methodo, quàm secundus.

```
                Z
a  b  c        597   Divis.
4590.9.3.
4179          { 769
———————————   { X
d  411.9
   358 2
———————————
e    537..  3
     537    3
———————————
            0
```

Datus Sit numerus AC dividendus per numerum Z.

I. Appone sibi mutuò laminas, quæ in primo, eoq; supremo ordine exhibeant di divisorem Z. Præter schema hìc apposi-tum, inspice tabellam AX cap. VI.

II. Determina membrum primum AB; ut num. I. modi primi cap. X.

III. Vide, quis ordo in laminis numerum contineat membro æqualem, vel proxime minorem. Is autem ordo est proxime minor membro, quem immediate sequitur ordo, membro major. Numerus laminæ exponentis XZ, ordinem denominans, est quotus, post lunulam scribendus.

In exemplo nostro reperis, ordinem, proxime minorem membro, esse septimum. Scribe ergo 7 post lunulam.

IV. Ordinem inventum, qui est ipsum productum ex divisore in quotum 7, exscribe infra membrum AB, ab eoque subtrahe, & infra lineam scribe residuum 411; cui adjice, puncto interposito, notam 9, quæ in dividendo membrum primum AB antecedit, ut habeatur membrum secundum 411.9.

V. Divisio secundi membri, & sequentium eodem modo peragetur, quo primi.

VI. Si membrum est minus ipso divisore, ac proinde & primo laminarum ordine, qui nimirum continet divisorem;

rem ; quotienti cifra adscribetur , & membro adhuc una adjicietur nota ex dividendo , ut membrum habeatur novum.

VII. Si nonus ordo est membro minor , in quotiente scribatur 9.

Porro, exercitatione vel minima accedente, momento cernitur, quis ordo proxime minor, aut major membro sit . Revocanda sunt in memoriam Porismata II, ac III. cap. III: item quæ monui cap.VI de modo exscribendi, ac legendi ordines. Deinde reflectendum est maxime ad ultima loculamenta ordinum , quanta nimirum sit nota in postremo ad lævam triangulo;& an summa notarum Rhombi proximi excedat novem , adeoque num aliqua inde nota in triangulum postremum sit rejicienda , &c.

Demonstratio.

FAcilè colligitur ex demonstratis cap. IX. & ex ipsa divisionis definitione, quam vide ante lib. VII. def.XIV.

Quàm verò præstans sit hæc dividendi ratio, nemo certiùs intelliget , quàm qui fuerit expertus . Plures sane divisiones una, alterave hora sic expediet ,quàm die in-

integro via communi. Ad hoc temporis, atque operæ ingens compendium accedit operationis securitas, quæ errori, ex incuria & hallucinatione orto, vix locum ullum relinquit.

CAP. XI.

Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Divisionis examina.

Tutissimum est, ut per invicem hæ species examinentur, cum reliquæ Praxes sint errori obnoxiæ.

ADDITIONIS EXAMEN.

123	A
25	B
148	X
25	
123	C

Fit per subtractionem. Esto summa X, facta ex additione duorum numerorum A, & B. Alterutrum additorum, puta B, subtrahe à summa X. Si residuus C sit idem cum altero A, recte peracta fuit additio. Erratum est, si non est idem.

Quod si existat summa Z ex additione trium numerorum D, E, F, aut plurium; examen instituetur hunc in modum

297	D	dum. Incipe à sinistra, & dic 2, 8, 4 sunt 14; hæc subtracta ex 16 relinquunt 2, quæ cum 0 faciunt 20. Dein 9, 3, 7 faciunt 19; hæc ablata ex 20 relinquunt 1, quod cum 8 facit 28. 7, 5, 6 faciunt 18, quæ ablata ex 18
835	E	
476	F	
1608	Z	
210		

nihil relinquunt. Proba igitur fuit additio, cum summa Z æqualis reperiatur omnibus suis partibus simul sumptis.

SUBTRACTIONIS EXAMEN.

234	G	FIt per additionem residui X ad numerum subtractum H: si enim summa K, inde facta, conveniat cum numero G, a quo facta est subtractio, proba est subtractio; mala, si non conveniat.
52	H	
182	X	
52		
234	K	

Licebit etiam subtractionem examinare per subtractionem. Residuum X subtrahe ab G, & novum residuum sit L. Si hoc conveniat cum numero H, prius

234	G
52	H
182	X
52	L

sub-

subtracto, bona fuit prior subtractio. Ratio utriusque examinis manifesta est.

EXAMEN MULTIPLICATIONIS.

FIt per divisionem. Numeri se mutuò multiplicantes sint N, P. Per multiplicantem P divide productum Q. Si quotiens R conveniat cum multiplicato N, rectè instituta fuit mulriplicatio; male verò, si non conveniat.

523 N		
6 P	(523 R	
3138 Q		

Ratio patet ex notione prima *a* multiplicationis, ac divisionis, & XVI. L. VII. *a* def. 13, & 147.

Si per laminas facta est multiplicatio, vix opus ullo examine: adeo secura est ab errore ista methodus. Si tamen volueris examinare; nullum erit examen facilius, quàm ipsa multiplicationis iteratio.

EXAMEN DIVISIONIS.

FIt per multiplicationem. Divisor B multiplicetur per quotientem C: si producatur numerus divisus A, proba ba est divisio, ut patet ex definitione f divisionis, ac multiplicationis, & XVI. L.VII.

A	B
2.4.8.	2 Divis.
2	
0.4	{ 124 G
4	
0.8	
8	
0	

f def.13. & 14.7.

Si post divisionem aliquid supersit, divisorem E multiplica per quotientem F: producto G adde residuum 2. Si summa H sit æqualis dividendo A, proba est divisio.

A	E
24.1.1.	3. Divis.
24	803 F
0.1.1.	G
9	2409
2	2
	H. 2411

Quod si per laminas peracta divisio est, vix opus erit examine ullo. Si tamen examinare placuerit, multiplicatio ad examen requisita, iisdem manentibus laminis, quæ divisioni inservierunt, perficietur.

Scholium.

Modi examinandi per abjectionem novenarii, quoniam fallaces sunt, hic non

Ju-

Lubuit adscribere. Nituntur tamen insigni proprietate ejusdem numeri.

I. *Metitur enim novenarius omnem numerum, cujus notæ acceptæ, tanquam simplices, conficiunt 9. Tales numeri sunt 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99, 108, 117, 126, & alii infiniti.*

II. *Imo cujuscunque numeri, a novenario numerati, notæ simpliciter acceptæ conficiunt 9, illis tantum numeris exceptis, quorum omnes notæ sunt 9, cujusmodi sunt 99, 999, &c.*

III. *Si numerus quicumque, duobus notis constans, quem 9 non metitur, dividatur per 9, idem erit residuum cum eo, quod remanet, si notæ simpliciter acceptæ dividantur per 9. Ut si 64 dividantur per 9, remanet 1. Accipiantur jam notæ secundum valorem simplicem, 6, & 4 faciunt 10, quæ divisa per 9, etiam relinquunt 1. Patet ex I. & II.*

IV. *Quod si notæ, numerum datum componentes, simpliciter acceptæ, conficiunt minus, quàm 9; hoc, quod conficiunt, erit ipsum residuum, quod relinquetur, numero dato per 9 diviso. Dentur 33: hæc divisa per 9 relinquunt 6, quantum videlicet conficiunt ipsæ notæ simplices 3, & 3.*

V. *Atque ex his demum consequens est, ex quovis numero, diviso per 9, idem relinqui, quod relinquitur ex notis ejusdem numeri simpliciter acceptis, si per 9 dividantur.*

Neminem legi, qui horum causam aperiit. Indicabo fontem verbo. Novenarius est unitate minor denario. Hoc rite si expendas, & applices, proprietates inde jam recensitas non difficulter deduces.

Porro quamvis hæc proprietas & pulchra

sit,

sit, & verissima, examina tamen per illam instituta fallunt. A notis siquidem omnium numerorum addendorum simpliciter acceptis 9 abjiciuntur, quoties possunt, hoc est dividuntur illæ per 9, & residuum servatur. Similiter a notis summæ simpliciter acceptis abjiciuntur 9, quoties possunt. Quod si residuum idem sit cum priori residuo, concluditur, rite fuisse peractam additionem. Sed fallit conclusio, quia licet plerumque tum erratum non sit, infiniti tamen casus dari possunt, in quibus hoc examen indicet additionem esse bonam, quæ mala est. Ratio est, quia potest novenarius, imo & quivis numerus, dividendo duos numeros inæquales, idem exhibere residuum: quod quidem per se est manifestum.

En Exemplum.

358	A
234	B
835	C

In numeris A, B, C. 3, & 5 sunt 8, & 8 sunt 16. Abjectis 9 restant 7, quæ cum 2 faciunt 9: quibus abjectis 3, & 4 faciunt 7. Numeris igitur A, B divisis per 9, restant 7. Jam in numero C 8, & 3 faciunt 11: abjectis 9 restant 2, quæ cum 5 faciunt 7. Utrobique igitur tam ex addendis A, B, quàm ex summa prætensa C supersunt 7: neque tamen C vera summa est A, B; conficiunt enim illi 592. Pari modo in subtractione, multiplicatione, divisione, radicum extractione hujus examinis fides suspecta est.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER II.

LOGISTICA FRACTORUM NUMERORUM.

CAPUT I.

Fractorum Numerorum Definitio, Scriptio, Enunciatio.

NUmerus fractus, qui etiam fractio, & minutia dicitur, est pars, vel partes unitatis, aliquod totum divisibile repræsentantis. Ut si totum aliquod sectum sit in quinque partes æquales, & quispiam ex illis sumpserit tres; dicentur illæ tres quintæ partes numerus fractus.

 Quo-

Quoniam igitur fractus numerus est pars, partesve alicujus totius, duobus numeris scribi debet, quorum unus indicet quot partes ex toto accipiantur, alter quales. Scribuntur porro duo illi numeri supra invicem, lineola interposita. Ut vides in his exemplis.

A $\frac{1}{2}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{4}{7}$ D $\frac{11}{13}$

Superior numerus indicat, quot ex toto partes accipiantur: inferior designat, in quot partes totum ponatur divisum, ac proinde quales sint partes illæ, quæ ex toto sunt acceptæ.

Superior igitur, quia partium ex toto acceptarum indicat numerum, numerator dicitur: inferior autem, quia partium acceptarum designat speciem, nominator, seu denominator appellatur.

Fracti A, B, C, D sic enuntiantur. A, una secunda, seu una dimidia. B, duæ tertiæ. C, quatuor septimæ. D, undecim decimæ tertiæ.

Quamvis autem pro toto divisibili plerumque unitas supponatur, numerus tamen quicunque supponi potest. Quare

$\frac{5}{8}$ E re E fractus, si totum sint 64 aurei, significat quinque octavas partes 64 aureorum.

Denique ad fractorum naturam penitus intelligendam, id erit studiose observandum, fractos ab integris numeris quoad rem non differre. Ea sola differentia est, quod fracti designent res, quæ sint partes rerum ab integris numeris designatarum, ac proinde quod unitates fracti numeri sint relativæ; integri vero nnmeri unitates sint absolutæ. Dentur exempli gratia floreni 125, & fractio *a*, hoc est 4 vigesimæ unius floreni. Numerus integer 125 continet centum viginti quinque unitates, quarum singulæ florenum designant. Fractus similiter *a*, hoc est quatuor vigesimæ partes floreni, continet quatuor unitates, quarum singulæ designant unam partem vigesimam floreni, hoc est assem unum: ac proinde quatuor vigesimæ floreni significant 4 asses, qui tam est numerus integer, quàm 125 floreni. Imo quilibet numerus integer, res quantas designans, fractus est, si cum ma-

$\frac{4}{20}$ a

$\frac{1}{3}$ b

$\frac{3}{5}$ c

$\frac{2}{5}$ d

majori toto comparetur. Nam 2 floreni ſunt una tertia unius libræ, ſive *b*; & 3 pedes ſunt tres quintæ unius paſſus, ſive *c*; & 2000 paſſus ſunt duæ quintæ unius milliarii Italici, ſive *d*. Ad hæc Tirones advertere, multum intereſt. Cauſa namque præcipua, ob quam illis fractorum numerorum tractatio difficilis, & obſcura videri ſoleat, ea eſt, quod prius ad operationes fractorum, ac regulas addiſcendas proſiliant, quàm illorum naturam perſpexerint.

Monitum Generale.

CUm duæ fractiones, aut plures inter ſe comparantur, ſemper intelligendæ ſunt eſſe partes ejuſdem totius, niſi contrarium indicetur.

CAPUT II.

Fractorum Theoria Prima.

THEOREMA I.

FRactus omnis eſt ad totum, ſeu unitatem, ut numerator ad denominatorem.

De-

Demonstratio.

PAtet ex definitione numeri fracti, capite præcedenti explicata. Denominator enim designat ipsum totum sectum in tot partes æquales, quot in denominatore unitates sunt. Numerator vero indicat, quot partes ex toto ita secto accipiantur. Quare cum fractus nihil aliud sit, quàm ille ipse partium numerus, quas acceptas esse ex toto, numerator indicat; manifestum est, fractum esse ad totum, ut numerator est ad nominatorem. Ex hoc rite intellecto existunt

Corollaria.

I.

$\frac{30}{20}$ a CUm numerator est minor denominatore, fractus suo toto minor est.

$\frac{20}{20}$ b Cum numerator nominatore major est, fractus est major toto. Sic fractus *a*; id est triginta vigesimæ, exemp. gr., floreni, hoc est 30 asses, sunt majores toto, nempe floreno, seu 20 assibus.

$\frac{3}{3}$ c

$\frac{4}{4}$ d

Cum numerator numeratori æqualis est, fractus toti æquivalet. Sic *b*, id est 20 vigesimæ floreni, hoc est 20 asses, conficiunt florenum. Sic *c*, *d* æquivalent unitati, seu toti, quod unitas repræsentat.

II.

$\frac{2}{3}$ *f*

Ex theoremate colligitur veritas illius, quod num. VIII. cap. IX. in modo primo divisionis traditur: nimirum cum numerus 2 minor per majorem 3 dividendus est, quotientem haberi, si major minori subscribatur, ut fiat fractio *f*. In omni siquidem divisione quotiens est ad unitatem, ut dividendus, qui hìc est 2, ad divisorem, qui hìc est 3. Sed etiam fractio *f* est ad unitatem, ut 2 ad 3. Ergo *f* hìc est quotiens.

THEOREMA II.

	E	F	
a	2	3	c
b	4	6	d

SI fracti unius numerator a *est ad nomiaatorem* b, *ut fracti alterius numerator* c *est ad suum numeratorem* d; *fracti æquales erunt.*

De-

Demonstratio.

FRactus E est ad totum, ut numerator a ad nominatorem b per theor. I. hoc est per hyp. ut numerator c ad nominatorem d; hoc est per theor. I. ut fractus F ad idem totum. Quare cum ambo fracti E, & F ad totum, quod in utroque idem esse supponitur, eamdem habeant proportionem, per IX. lib. V. æquales erunt. Quod erat demonstrandũ.

Itaque valor fractorum non ex magnitudine numerorum, quibus exprimuntur, sed ex proportione eorumdem æstimandus est: quod ulterius ex theor. III. IV. V. innotescet.

THEOREMA III.

FRactus ille A major est altero B, cujus numerator e *ad nominatorem* f *majorem habet proportionem, quàm alterius numerator* g *ad nominatorem suum* h.

	A	B	
e	8	2	g
f	16	6	h

Demonstratio.

NAm per theor. I. fractus A ad totum eamdem proportionem habet,

 quam

quam *e* ad *f*; hoc est ex hyp. majorem, quam g ad *h*; hoc est per theor. I. majorem, quam fractus B ad totum idem. Ergo per X. lib. V. fractus A fracto B major est. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA IV.

Fracti, quorum numeratores, in mutuos denominatores ducti, eumdem gignunt numerum, æquales sunt.

Dentur fracti E, F; & tam *a* in *d*, quam *c* in *b* producant eumdem numerum *k*. Dico fractos E, F æquales esse.

E	F
a 2	3 c
b 4	6 d
k 12	

Demonstratio.

Per XIX. l. VII. erit *a* ad *b*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. II. fracti E, F æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA V.

Fractus ille A altero B major est, cujus numerator, multiplicans alterius nominatorem, majorem gignit numerum.

Pro-

Producat *g* in *n* majorem numerum *c*, quàm *m* in *b*. Dico A fractum majorem esse fracto B.	A	B
	g 2	3 m
	h 4	9 n
	c 18	12 d

Demonstratio.

Quia *c*, genitus ex g in *n*, major est *d*, genito ex *m* in *b*; habebit per corol. II. prop. XX. l. VII. *g* ad *b* majorem rationem, quam *m* ad *n*. Ergo per theor. III. fractus A major est fracto B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex IV. & V. theoremate modus habetur facillimus examinandi, fractine æquales sint, an inæquales, & uter major sit.

THEOREMA VI.

Fracti D, G, idem nomen habentes p, eam inter se proportionem habent, quàm numeratores m, n.

De-

Demonstratio.

PEr theor. I. fractus D est ad totum, ut *m* ad *p*. Idem vero totum est ad fractum G, ut idem *p* est ad *n*: Ergo ex æquo per XXII. V. fractus D est ad fractum G, ut *m* ad *n*. Quod erat demonstrandum.

D	G
$\frac{m\ 7}{p\ 8}$	$\frac{5\ n}{8\ p}$

THEOREMA VII.

Dentur fracti P, R: primi numerator a, *multiplicans alterius nominatorem* o, *faciat* a o; *alterius vero numerator* c, *multiplicans nominatorem primi* n, *producat* c n. *Erit fractus P ad fractum R, ut* a o *ad* c n.

Demonstratio.

NOminatores *n*, & *o*, invicem multiplicantes, producant *n o*. Fractus P est ad totum, ut *a* ad *n*, per theor. I. Sed etiam per schol. prop. XVII. l. VII. *a o* est ad *n o*,

no

ao	cn
P $\frac{a}{n}$	$\frac{c}{o}$ R

Totum:

ut

ut *a* ad *n*. Ergo fractus P est ad totum, ut *a o* est ad *n o*. Atqui per schol. prop. XVII. *n o* est ad *c n*, ut *o* ad *c*; hoc est per theor. I., ut totum est ad fractum A. Igitur ex æquo per XXII. V. fractus P est ad fractum R, ut *a o* est ad *c n*. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VIII.

Si duo fracti C, D eumdem numeratorem habuerint a; *erit prior C ad posteriorem D, ut reciproce posterioris nominator* o *ad prioris nominatorem* n.

Demonstratio.

Ex *a* in *o* fiat *a o*, & *a n* ex *a* in *n*. Per præced. fractus C est ad fractum D, ut *a o* ad *a n*; hoc est per schol. prop. XVII. lib. VII. ut *o* ad *n*. Quod erat demonstrandum.

a	a
C—	—D
n	o
ao	an

CAP.

CAPUT III.

Reductiones Fractorum.

PROBLEMA I.

Reductio fractorum ad minimos terminos.

Dicitur fractio ad minimos terminos reduci, cum reperitur ei æquivalens alia, minimis numeris expressa.

Datus sit fractus A, ad minimos terminos reducendus. Per prop. XXXV. lib. VII. inveniantur numeratori n, ac nominatori p proportionales minimi r, & t, ex quibus fractus constituatur B. Hic est quæsitus.

A	B
n 27	3 r
p 36	4 t

Demonstratio.

Nam quia per constr. r est ad t, ut n ad p, æquales erunt fracti A, & B, per theor. II. cap. præced. Neque potest alius fractus, qui minoribus terminis constet, fracto A æqualis exhiberi: ad hoc enim, ut patet ex II. theor., requirerentur duo numeri ipsis n, p proportionales,

& minores minimis jam repertis *r*, *t*: quod fieri non potest.

Quod si *n*, *p* termini fractionis datæ A sint in proportione sua minimi, non poterit fractio data in terminis minoribus exhiberi. Utrum verò *n*, *p* sint in ratione sua minimi, innotescet ex ipsa constructione prop. XXXV. l. VII. Et universim per XXIII. l. VII. omnes numeri inter se primi sunt in sua proportione minimi.

PROBLEMA II.

Reductio fractorum ad nomen idem.

PARS I.

N	P
$\frac{a\,3}{b\,4}$	$\frac{5\,c}{6\,d}$

Dati sint duo quilibet fracti N, P, ad commune nomen reducendi.

$\frac{ad}{bd}$	$\frac{cb}{bd}$	$\frac{18}{24}$	$\frac{20}{24}$
R	T	R	T

N	P
$\frac{a\,1}{b\,4}$	$\frac{3\,c}{6\,d}$

Demominatores, invicem se multiplicantes, dabunt nominatorem communem *b d*. Tum numerator *a* ductus in nominatorem *d* producat *a d*; erit fractus R æqualis dato N. Rursum numerator *c* du-

ductus in nominatorem *b* gignat *e b*: erit fractus T par dato P.

Demonstratio.

$$R\ \frac{6}{24}\quad\frac{12}{24}\ T \qquad R\ \frac{ad}{bd}\quad\frac{cb}{bd}\ T$$

PEr schol. p. XVII. l. VII. *a d* est ad *b d*, ut *a* ad *b*. Ergo per theor. II. cap. præc. fracti N, & R æquales sunt. Similiter, quia per idem schol. *c b* est ad *bd*, ut *c* ad *d*, rursum per theor. II. fracti P, & T æquales erunt. Datos igitur N, P ad idem nomen reduximus. Quod erat faciendum.

PARS II.

DAti sint tres fracti G, H, I, aut plures ad nomen idem reducendi.

$$\begin{array}{ccc} G & H & I \\ \frac{a\,3}{b\,4} & \frac{c\,5}{d\,6} & \frac{e\,1}{f\,8} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} R & T & V \\ \frac{144}{192} & \frac{160}{192} & \frac{24}{192} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} R & T & V \\ \frac{adf}{bdf} & \frac{cbf}{bdf} & \frac{ebd}{bdf} \end{array}$$

Denominatores *b*, *d*, *f* inter se multi-

pli-

plicati dabunt denominatorem communem *bdf*. Numeratores singuli provenient, si numerator uniuscujusque fractionis datæ multiplicet productum ex nominatoribus reliquarum.

Sic ut fractus G reducatur ad nomen *bdf*, ejus numerator *a* ductus in *df*, genitum ex nominatoribus reliquorum H, I, producat *adf*, erit fractus R fracto G æqualis. Ut reducatur H, ejus numerator ductus in *bf*, genitum ex denominatoribus reliquorum G, I, producet *cbf*; proveniet fractus T par dato H. Pari modo V æqualis proveniet dato I.

Demonstratio.

adf est ad *bdf*, ut *a* ad *b* per schol. p. XVII. l. VII. Ergo per theor. II. cap. præc. R, G æquales sunt. Pari ratione *cbf* est ad *bdf*, seu per schol. p. XIX. l. VIII. *dbf*, ut *c* ad *d*. Ergo per theor. II. etiam fracti T, H æquales sunt. Denique quia *ebd*, est ad *bdf*, seu *fbd*, ut *e* ad *f*; æquales erunt fracti V, I. Reducti sunt igitur fracti G, H, I, ad nomen idem. Quod erat faciendum.

Operationem totam utriusque partis ipse litterarum conspectus exhibet: qui fa-

ne

ut Logiſtices ſpecioſæ fractus eſt proprius, & longe nobiliſsimus.

PARS III.

Dentur fracti quotcunque A, B, C, quos oporteat ad idem nomen reducere, & in minimis terminis.

Inveni per XXXVI. & XXXVIII. lib. VII. minimum numerum 24, quem nominatores dati 4, 6, 8 metiuntur. Is erit communis nominator. Hunc nominatores dati 4, 6, 8 dividant per quotientes 6, 4, 3, qui ſi multiplicentur per numeratores datos 3, 5, 1, provenient 18, 20, 3 numeratores novi, eruntque fracti D, E, F ejuſdem nominis datis A, B, C æquales, in terminis minimis.

A	B	C
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{8}$
		24
6	4	3
$\frac{18.}{24}$	$\frac{20}{24}$	$\frac{3}{24}$
D	E	F

Demonſtratio.

Quod ſint æquales, ſic oſtendo. Ex conſtr. & ex ſcholio p. XIX. l. IX. patet, tribus hiſce numeris 4, 24, 3 quartum eſſe proportionalem 18. Unde permumutando 4 est ad 3, ut 24 ad 18. Ergo per Theor. II. fracti A, D æquales sunt. Pari argumento B, & E; C, & F æquales erunt.

Quod etiam sint in minimis terminis, sic demonstro. Ut habeantur fracti ejusdem nominis, & æquales datis A, B, C, necesse est, ut denominatores dati 4, 6, 8 adæquate dividant nominatorem communem futurum: sic enim proveniunt quotientes, qui ducti in numeratores datos 3, 5, 1 exhibent novos numeratores quæsitos. Atqui per constr. nominator ille communis 24 jam inventus est minimus, quem nominatores dati 4, 6, 8 adæquate dividunt. Ergo non possunt alii fracti, nominis ejusdem, datis A, B, C æquales inveniri, in terminis minoribus, quàm reperti jam D, E, F.

PROBLEMA III.

Fractionis reductio ad nomen datum.

Data sit fractio F reducenda ad fractionem, cujus nominator sit d.

$$F\ \frac{a\,2}{b\,3} \qquad \frac{}{12\,d} \qquad G\ \frac{8\,c}{12\,d}$$

Per XIX. l. IX., ut *b* ad *a*, sic fiat *d* ad

24 e

O alium

alium c; quod fit ducendo a in d, & productum e dividendo per b. Quotiens enim c erit numerator quæsitus, qui cum nominatore dato d, dabit fractum G æqualem dato F, ut patet ex Theor. II. cap. præc.

$$\begin{array}{cccccc} & & & & m.p & \\ a\,4 & 8\,d & & 6\,n & 2 & 1 \\ - & & & - & - & \\ b\,5 & & & 8\,d & 5 & 8 \\ & 32\,e & \left\{ \begin{array}{l} n\,2 \\ 6-m \end{array} \right. & & & \\ & & & 5 & & \end{array}$$

Quod si b non metiatur e, ut contingit in hoc exemplo, ubi b dividens e dat quotientem n, m; quotientem integrum n scribe supra denominatorem d, erit fractus n, d + m, p, (hoc est sex octavæ, cum duabus quintis ex una octava) æqualis fracto a, b.

Demonstratio.

Quoniam, ut b est ad a, ita d est ad n, m; manifestum est, hunc numerum n,m designare quot partes a d denominatas, nempe quot octavas partes, ex toto oporteat accipere, ut fracto a,b æqualis fractus habeatur nominis d. Cum igitur unitates singulæ integri numeri n desi-

designent ex toto accipi singulas octavas partes; liquet id, quod in numeratore n, m est minus unitate, nempe m, designare ex toto accipi insuper aliquid minus una octava parte, videlicet m, p, id est duas quintas ex una octava, quæ est fractio fractionis. Sed de his cap. VIII. plura.

```
        1 7
          —
          8
  p       1
 17 + 1q      1
 —    —
 20   2x   20
```

Hujus reductionis usus præcipuus est, ut valor fractionis datæ cognoscatur in partibus ejusdem totius notioribus. Ut si offerantur 1, *id est septem octavæ unius perticæ* 20 *pedum: reducantur* 1 *ad vigesimas, provenient* p + q, x; *hoc est pedes* 17 *cum dimidio, quibus æquivalent* 1, *id est septem octavæ unius perticæ.*

PROBLEMA IV.

Reductio fracti toto majoris ad integrum.

Esto fractus A toto major. Numerator b per denominatorem c dividatur. Quotiens d æquivalet fracto A. Def. 14. l. 7.

Demonstratio.

A	
b 12	
— (3 d	
c 4	

Fractus A est ad totum, seu unitatem pro toto suppositam, ut numerator *b* ad nominatorem *c* per th.I.cap.præc. Atqui etiam quotiens *d* est ad unitatem, ut numerator *b*, divisus ad nominatorem *c*, qui divisor est. Ergo fractus A, & quotiens integer *d* eamdem rationem habent ad unitatem. Ergo per IX.V. æquales sunt. Quod erat demonstrandum.

Quod si numeratore per nominatorem diviso, quotiens sit integer cum fracto, ut contingit in fractione B; tunc non poterit fractio data reduci tota ad integrum, sed æquivelebit integro, & fracto simul sumptis. Demonstratio eadem est.

B

c 14 { e 2
— { 3 —
d 4 4

Eadem ratione reducuntur asses ad solidos, florenos, pattacones; floreni ad aureos, libras &c.; pedes ad passus; pedes, & passus ad milliaria, &c. Ut si velim 40000 pedum reducere ad milliaria 5000 pedum continentia, divido 40000 per 5000, proveniunt 8 milliaria.

PRO-

PROBLEMA V.

Integri numeri reductio ad fractum nominis dati.

DAtus sit numerus integer *a*, reducendus ad fractum, cujus nominator sit *b*.

		E	
		28	c
		—	
a 7	b 4	4	b

Integer *a* datus multiplicet *b* nomen datum, & producto *c* subscribatur nomen datum *b*: fractio E inde nata æquivalet integro *a*.

Demonstratio.

PEr definit. multiplicationis, ut productum *c* est ad multiplicatum *b*, ita multiplicans *a* est ad unitatem. Sed etiam, ut *c* est ad *b*, ita fractus E est ad unitatem. Ergo integer *a*, & fractus E eamdem rationem habent ad unitatem; ac proinde æquales sunt. Quod erat demonstrandum. Def. 13. l. 7.

Si cuivis integro, ut 8 supponatur unitas, fit fractio, vel potius quasi fractio, æquivalens integro 8.

Hunc in modum solidi, floreni, pattacones, aurei reducuntur ad asses; aurei, & floreni ad libras, &c.; milliaria ad passus, & pedes, &c.; gradus ad minuta prima, & hæc ad secunda, & sic deinceps.

CAP. IV.

Additio Fractorum.

Addendus sit

I.

FRACTUS FRACTO.

$$A\ \frac{2}{5} \qquad \frac{6}{5}\ B$$

$$C\ \frac{8}{5}$$

SI ejusdem sint nominis, ut A, B, adde numeratores 2, 6. Tum summæ 8 subscribe nominatorem communem 5. Fractus inde natus C erit summa datorum A, & B.

$$D\ \frac{2}{5} \qquad \frac{3}{7}\ E$$

$$F\ \frac{14}{35} \qquad \frac{15}{35}\ G$$

$$H\ \frac{29}{35}$$

Si diversi sint nominis, ut D, E, per Prob. II. C. III. reducantur ad alios ejusdem nominis F, G: horum summa H æquivalet datis D, E.

II.

II.

INTEGER FRACTO.

$$A \quad 3 \quad \frac{4}{5}\ B$$

$$C\ \frac{15}{5} \quad \frac{4}{5}$$

$$D\ \frac{19}{5}$$

Integer A reducatur ad fractum C, dato fracto B cognominem, per Probl. v. Cap. III. Tum additio peragatur, ut numer. I.

III.

PLURES INTEGRI, ET FRACTI.

Colligantur seorsim integri in unam summam, & seorsim fracti in summam suam, ut num. I. Tum hæ duæ summæ addantur, ut num. II.

Demonstratio horum omnium per se est manifesta.

CAP. V.

Subtractio Fractorum.

Subtrahendus sit

I.

FRACTUS A FRACTO.

$$I\ \frac{2}{5}\qquad \frac{3}{5}\ K$$

$$L\ \frac{1}{5}$$

SI ejusdem sunt nominis, ut I, & K, minor numerator 2 subducatur a majori 3, & residuo 1 subscribatur communis nominator 5: fractus inde natus L remanet, minore dato I subtracto ex dato majori K.

$$M\ \frac{2}{3}\qquad \frac{3}{5}\ N$$

$$O\ \frac{10}{15}\qquad \frac{9}{15}\ P$$

$$\frac{1}{15}\ Q$$

Si diversi sint nominis, ut M, & N; reducantur ad alios O, P nominis ejusdem, per Prob. II. Cap. III.: inter quos subtractio peragatur, ut supra.

II.

II.

FRACTUS UNITATE MINOR AB INTEGRO R.

Ex integro R accipiatur unitas, a qua subtrahatur fractio data S; quod fiet, si ejus numerator *a* subducatur ex nominatore *b*, & residuo *c* subscribatur idem nominator *b*.

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ R\ 25 & \dfrac{15\ a}{17\ b} & \dfrac{17\ b}{17\ b} \\ & & \\ 24 & \dfrac{2\ c}{17\ b} & \\ & T & \end{array}$$

Fractio T inde orta, cum integro unitate mulctato, nempe cum 24, est residuum quæsitum.

Demonstratio.

Unitas æquivalet fracto *b*,*b*, ut patet ex corol. 1. Theor. 1. Cap. 1. Ergo cũ S subtraho ex *b*,*b*, subtraho S ab unitate. Atqui, ut patet ex num. II. subtraho S ex *b*,*b*, si subtraham *a* ex *b*. Ergo subtraho S ab unitate, dum subtraho numeratorem *a* ex nominatore *b*. Reliqua sunt manifesta.

III.

III.

FRACTUS UNITATE MAJOR AB INTEGRO, VEL INTEGER A FRACTO.

$X\ 12\ \frac{18}{4}\ V$

$Y\ \frac{48}{4}\ \frac{18}{4}$

$Z\ \frac{30}{4}$

INteger X per Prob. v. C. III. reducatur ad fractum Y, dato fracto V cognominem. Tum fractus datus V subtrahatur ab integro sic reducto, nempe ab Y, ut numero 1.

Pari modo subtrahetur numerus integer a fracto, qui integro dato major sit.

IV.

INTEGER CUM FRACTO EX INTEGRO.

$A\ 6\frac{2}{3}\quad 16\ B$

$C\ \frac{20}{3}$

INteger cum fracto A per n. 11. C. IV. colligatur in unam summam C, quae deinde subtraha-

ha.

hatur ab integro dato B, ut numero præcedenti.

V.

INTEGER AB INTEGRO CUM FRACTO.

E F

$$D\ 8 \qquad 13\,\frac{4}{5}$$

$$5\,\frac{4}{5}$$

G F

SI integer D auferendus minor est integro E, cui fractus F adhæret; integrum ab integro aufer: residuum G, cum fracto dato F, erit residuum quæsitum.

I K

$$H\ 12 \qquad 10\,\frac{9}{2}$$

$$M\ \frac{24}{2} \qquad \frac{29}{2}\ L$$

$$\frac{5}{2}\ N$$

Si verò integer auferendus H major est integro I, cui adhæret fractus K; tunc redigantur fractus K, & cui adhæret integer I in unam summam L, per num. II. Cap. IV. Integer verò H reducatur ad fractum M, summæ L cognominem, per Probl. V. Cap. III. Tum fiat subtractio M ab L, ut num. I.

Vel

I K

$$H\ 12 \quad 10\frac{9}{2}$$

Vel sic: quoniam H auferendus est ab I cum K, erit H minor, quàm I cum K. Quia igitur ponitur H major, quàm I; fractus K necessariò superat excessum ipsius H supra I; ac proinde unitate major est. Itaque per Probl. IV. Cap. V. in fracto K, quidquid integrum est, eximatur, addaturque ipsi I, ut fiat O cum N æquale I cum K. Quia jam H necessariò est non major, quàm O, aufer H ab O. Residuum P una cum fracto N est residuum quæsitum.

P N

$$2\frac{1}{2} \quad 14\frac{1}{2}$$

O N

VI.

INTEGER CUM FRACTO AB INTEGRO CUM FRACTO.

$$A\ 5\frac{2}{3}\ B \qquad D\ 8\frac{3}{4}\ E$$

$$C\ \frac{17}{3} \qquad F\ \frac{35}{4}$$

INteger auferendus A, & fractus illi adhærens B, per n. II. Cap. IV. colligantur in unam sum-

ſummam C. Pari modo ex duobus aliis D, E fiat ſumma F. Hæ ſummæ ad nomen idem reducantur, per Prob. II.Cap.III., ac tum ſubtractio peragatur, ut num. 1.

Horum omnium ratio per ſe clara eſt.

CAPUT VI.

Multiplicatio Fractorum.

Eſto multiplicandus.

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A	B		C	C
$\frac{o\,2}{p\,3}$	$\frac{4\,m}{5\,n}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{om}{pn}$

VIdelicet A per B. Numeratores *o*, *m* invicem multiplicati faciant *om*; item nominatores *p*, *n* faciant *pn*. Erit *om* numerator, *pn* vero nominator fractionis C, productæ ex multiplicatione fractionum A, B.

II.

II.

FRACTUS PER INTEGRUM.

D	E
k 2	5
—	5 —
m 3	1
	F
	n 10
	—
	m 3

Nimirum D per E. Integer E multiplicet *k* numeratorem fracti D. Producto *n* subscribe *m* nominatorem fracti D. Erit fractio F inde orta productum quæsitum.

Vel sic. Integro E supponatur unitas, & multiplicatio fiat, ut num. 1.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM.

Integer, & adhærens fractus colligantur in unam summam, per num. 11. Cap. IV. Tum multiplicatio fiat, ut num. præcedenti.

Vel seorsim multiplica integrum per integrum, ac deinde fractum per integrum.

IV.

IV.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM CUM FRACTO.

PEr nu. II. Cap. IV. integrum unum, & adhærentem ei fractum collige in unam summam. Alterum deinde integrum, & fractum illi adhærentem similiter collige. Tum hæ summæ multiplicentur, ut num. I.

Demonstratio.

		pnm	omn
	o	m	om
uni.	A—	B—	C—
	p	n	pn

SOla numeri I. operatio demonstranda est, reliqua siquidem ex illa patent. Ostendendum est igitur fractum B esse ad fractum C, ut unitas est ad fractum A. Hoc enim est B multiplicatum per A producere C, ut patet ex defin. XIII. lib. VII.

Ducatur *m* in *pn*, productum erit *pnm*.

pnm. Pari modo *om* ducatur in *n* productum erit *omn*. Igitur per Theor. VII. Cap. III., B est ad C, ut *pnm* est ad *onm*: hoc est per schol. Prop. XVII. lib. VII., ut *p* est ad *o*; hoc est per Theor. I. Cap. II. ut unitas est ad fractum A. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Cum fracti multiplicandi singuli minores sunt unitate, productum utrolibet minus est; id quod mirari solent Tirones. Sed res ex definitione multiplicationis illico cernitur.

$$\text{un.}\overset{2}{\underset{3}{—}}A\overset{3}{\underset{4}{—}}B\overset{6}{\underset{12}{—}}C$$

Cum enim exem. gr. A multiplicans B producit C; unitas est ad A, ut B ad C. Sed unitas ponitur major, quàm A. Ergo etiam B major est, quàm productum C. Quod si A multiplicans B producat C; erit rursum, ut unitas ad B, ita A ad C. Atqui unitas ponitur major, quàm B: ergo etiam A major est, quàm productum C.

Si multiplicandorum unus est unitate major; tunc productum erit hoc minus, sed altero majus.

CAP.

CAP. VII.

Divisio Fractorum.

Dividendus sit

I.

FRACTUS PER FRACTUM.

A		B		C
$\frac{a\,6}{c\,8}$	per	$\frac{m\,2}{n\,4}$	{	$\frac{o\,3}{p\,2}$

NImirum A per B. Si divisoris B termini *m*, & *n* metiantur dividendi A terminos *a*, & *c*; numeri *o*, & *p*, per quos metiuntur, constituent fractum C quotientem quæsitum.

A		B	E
$\frac{a\,4}{c\,9}$	per	$\frac{m\,3}{n\,5}$	$\frac{n\,5}{m\,3}$

$$D \left\{ \frac{an\ 20}{cm\ 27} \right.$$

Si verò divisoris B termini non metiantur terminos dividendi A; divisorem B inverte, & fiat E, perque eum sic inversum multiplica dividendum A. Productum D erit quotiens quæsitus.

II.

FRACTUS PER INTEGRUM, SEU INTEGER PER FRACTUM.

$\frac{2}{3}$ per $\frac{6}{1}$ { $\frac{2}{18}$

INtegro ſupponatur unitas; & diviſio fiat, ut num. I.

III.

INTEGER CUM FRACTO PER INTEGRUM, VEL PER INTEGRUM CUM FRACTO.

REdigantur utrimque ad unam ſummam per num. II. Cap. IV. Tum inter utramque ſummam peragatur diviſio, ut num. I.

IV.

INTEGER MAGNUS CUM FRACTO PER INTEGRUM.

EXempli gratia 598 cum fracto A per 3. Commodiùs ſic operabere. In-

	A		
	$598\frac{2}{3}$ per 3		
			C
$\frac{5}{3}$	B	$\frac{5}{9}$	C ($199\frac{5}{9}$

Integer 598 per 3 dividatur, & quotiens fit 199. Si quid superſit, ut hìc 1, id addatur fracto A, per num. 11. Cap. IV., ut habeatur ſumma B, quam divide per 3, ut num. 11. Quotientem C appone quotienti integro priori; eritque 199 cum C quotiens quæſitus.

Demonſtratio.

A		B		
$\frac{a}{c}$	per	$\frac{m}{n}$	$\left\{\frac{o}{p}\right.$	C

Sola operatio num. 1. demonſtranda eſt, reliquæ enim ex hac ſunt manifeſtæ. Metiantur primò *m*, & *n* ipſos *a*, & *c* per *o*, & *p*. Quoniam ergo *m* metitur *a* ex ſuppoſitione per *o*; *m* in *o* producet *a* per axio. VIII. lib. VII. Rurſum quoniam *n* metitur *c* per *p*; *n* in *p* gignet *c*. Ergo per demonſtrationem Cap. præced. fractus B, multiplicans fractum C, producit fractum A. Ergo per defin. multip. unitas eſt ad B, ut C eſt ad A. def. 13. 7. Igitur permutando, unitas eſt ad C, ut diviſor B eſt ad dividendum def. 14. 7. A. Ergo per defin. divis. C est quotiens divisionis A per B.

$$F\ \frac{mna}{mnc} \qquad mn$$

$$A\ \frac{a}{c}\ \text{per}\ B\ \frac{m}{n} \qquad E\ \frac{n}{m}$$

$$D \left\{ \frac{an}{cm} \right.$$

At cum termini divisoris B non metiuntur terminos dividendi A, tum admirabilior operatio videri solet, quod divisio per multiplicationem peragatur. Demonstrandum est igitur, si A multiplicetur per divisorem B inversum, hoc est per E, productum D fore ipsum quotientem divisionis A per B.

Termini divisoris *m*, *n* in se mutuò ducti faciant *mn*. Tum *mn* in *a*, & *c* producat *mna*, & *mnc*, ex quibus fiat fractus F. Per schol. p. XVII. l. VII. *mna* est ad *mnc*, ut *a* est ad *c*. Ergo per theor. II. Cap. II. F, & A æquales sunt. Atqui numerator *m* divisoris B, dividens *mna*, dat quotientem *na*, (quemadmodum enim multiplicatio speciosa perficitur sola litterarum appositione, ita divisio sola earumdem subtractione absolvitur) & nominator *n* ejusdem B divisoris, dividens *mnc*, quotientem dat *cm*. Ergo per

I, par-

I. partem fractus B dividet fractum F, per quotientem D fractum. Quare cum ostenderim fractos F, & A æquales esse; etiam B dividet A per quotientem D, natum videlicet ex multiplicatione ipsius A per divisorem B inversum, hoc est per E. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Mirari solent etiam hic Arithmetices imperiti in fractorum divisione, quotientem reperiri plerumque majorem numero ipso, qui dividitur: quod semper accidit, cum divisor est unitate minor. Verum ex definitione ipsa divisionis ratio est manifesta. A divisum per B, quotientem exhibeat C. Ergo per defin. divis. unitas est ad quotientem C, ut divisor B est ad divisum A. Igitur permutando, ut unitas est ad divisorem B, ita quotiens C est ad divisum A. Atqui ponitur unitas major esse divisore B. Ergo etiam quotiens C major est diviso A.

$$A\,\frac{5}{4}\ \text{per}\ \frac{2}{3}\,B\ \Big\}\ \overset{C}{\frac{15}{8}}\quad 1$$

CAP. VIII.

De Fractis Fractorum.

Quemadmodum, integris in partes sectis, fracti numeri oriuntur; ita ex partibus integrorum in alias minores partes subdivisis habentur fracti fractorum: ut si sumam A ex B, hoc est 3 quartas ex 16 vigesimis unius floreni. Scribuntur, ut vides in exemplis hic appositis.

A	B		C	D		E	F	G
$\frac{3}{4}$	$\frac{16}{20}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{7}$

A, B sunt 3 quartæ ex 16 vigesimis. C, D sunt 2 quintæ ex una sexta. E, F, G sunt 2 quintæ unius sextæ ex 3 septimis.

Compendii gratia, fractio fractionis appellari poterit fractio secunda: fractio fractionis fractionis dicatur fractio tertia.

Ut verò circa fractiones fractionum Logisticæ operationes instituantur, reducendæ prius erunt ad simplices.

Reductio Fractionis secundæ ad simplicem.

B	D
2a	p3
3c	n4

Z

$$E \; \frac{ap\;6}{cn\;12}$$

DAta sit fractio secunda B, D. Numeratores *a*, & *p* in se invicem ducti faciant *ap*, & nominatores *c*, *n* faciant *cn*. Fractus E æquivalet fractioni secundæ B, D.

Demonstratio.

FIat ut *p* ad *n*, ita *c* ad *z*. Manifestum est fractionis secundæ B, D totum esse D, ac proinde fractionem secundam B, D esse ad suum totum D, ut est numerator *a* ad nominatorem *c*. Sed per theor. I. Cap. II. fractus simplex D est ad unitatem, ut *p* ad *n*: hoc est per const. ut *c* ad *z*. Ergo ex æquo fractio secunda B, D est ad unitatem, ut *a* ad *z*. Deinde, quia per constr. ut *p* est ad *n*, ita *c* est ad *z*, erit per XIX. l. VII. *pz*, factum ex *p* in *z*, æquale *cn*, facto ex *c* in *n*. Quoniam igitur *p* multiplicans *a* facit *ap*, & *p* multiplicans *z* facit *cn*, erit per XVII. l. VII. ut *a* ad *z*, ita *ap* ad *cn*. Sed ut *a* est ad *z*, ita, quod jam ostenostēdi, fractio secunda B, D est ad unitatē; & ut *ap* est ad *cn*, ita per the. I. Cap. III. fractus E est ad unitatem. Ergo per XI. l. v. fractio secunda B, D est ad unitatem, ut fractus E est ad unitatem. Ergo per IX. l. v. fractio secunda B, D, & simplex E æquales sunt. Quod erat propositum.

Reductio fractionis tertiæ, quartæ &c. ad simplicem.

	C	D	E	
	$\frac{3\,a}{5\,b}$	$\frac{n\,4}{p\,6}$	$\frac{x\,5}{z\,7}$	
G	$\frac{anx}{bpz}$		$\frac{nx}{pz}$	I

Data sit fractio tertia C, D, E reducenda ad simplicem. Fractio secunda D, E reducatur ad simplicem I. Igitur jam C est fractio fractionis I. Rursum igitur fractio secunda C, I reducatur ad simplicem G. Erit hæc æqualis datæ fractioni tertiæ C, D, E, ut ex constructione ipsa patet.

Operatio tota absolvitur hunc in modum: numeratores in se invicem ducti *a*, *n*, *x* faciant *anx*; nominatores verò *b*, *p*, *z* gignant *bpz*. Fractio G inde nata quæsitum exhibet.

CAP.

CAP. IX.

Fracti Decimales.

LOgistica fractorum numerorum, cujus tam praxim, quàm theoriam jam exposuimus, quamvis scitu & necessaria, nec injucunda sit; tamen in calculo longiori, & sæpius repetendo, quantum facessat negotii, sciunt omnes, qui numeros tractant. Verùm quemadmodum dividendi labor per Neperi laminas Rabdologicas, & Logarithmos prope omnis evanuit; ita molestiis fractorum Simonis Stevinii præclaro invento liberati sumus. Is enim docuit loco fractionum vulgarium decimales adhibere, quas insigni compendio ita prorsus tractare liceat, ac si integri essent numeri. Hoc verò inventum suum Auctor nec satis exacte, ac plane exposuit, nec demonstravit; neque enim cum demonstrare se dicit, aliud agit, quàm exemplum afferre. Utrumque supplere conabimur.

Quid

Quid sint, & quomodo scribantur.

$\frac{3}{10}$ a

$\frac{7}{100}$ b

FRactiones, seu numeri decimales sunt totius cujuspiam partes decimæ, centesimæ, millesimæ &c. denominatæ videlicet a numeris progressionis decuplæ, ab 1 incipientis, 10, 100, 1000 &c: quæ quidem more communi ita scriberentur, ut *a*, id est tres decimæ: ut *b*, id est septem centesimæ. Sed quia horum fractorum nominatores non aliis notis constant, quàm unitate, & cifris; expeditior calculus redditur, si non infra nominatores, sed supra ipsos, ut fit in scrupulis Astronomicis, exprimantur signis quibusdam, quæ hic vides expressa.

Decimæ. Centesimæ. Millesimæ. Decimillesimæ. Centimill. &c.

Signa.	I	II	III	IV	V	&c.
Valor.	10	100	1000	10000	10000	

Igi-

I	II	III	IV	V	VI
3	4	6	2	9	4
a	b	c	d	e	f

Igitur Decimalium *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* hic valor est: *a*, tres decimæ: *b*, quatuor centesimæ: *c*, sex millesimæ: *d*, duæ decimillesimæ: *e*, novem centimillesimæ: *f*, quatuor millionesimæ. Quod si notis signatis aliæ non signatæ ad sinistram adhæreant, ut *g*, *h*, integros illæ numeros designant.

		I	II
8	3	2	1
g	h	k	l

Cum igitur fractio decimalis exprimenda est, duo scribuntur, numerus, & signum. Numerus significat, quot partes decimales ex toto accipiantur; signum, quales.

Finis Decimalium.

Est, omnes operationes Arithmeticas, ad usum humanæ vitæ pertinentes, sine fractis absolvere.

Modus utendi exponetur infra Cap. XV.

CAP.

CAPUT X.

Requiſita quædam ad demonſtrationem Arithmeticæ decimalis.

SI methodice procedatur, facilis reddetur operationum decimalium demonſtratio.

Definitiones.

I	II	III
2	3	4
a	b	c

I. Notæ, ſignis affectæ, non æſtimantur ex loco, hoc eſt juxta loci valorem, ſed ut ſimplices, hoc eſt, ac ſi ſingulæ primo ſtarent loco. Itaque ſi dentur decimales notæ, *a*, *b*, *c*, licet *a* tertio loco conſiſtat, decimas ſignificat, non 200, ſed duas: ſimiliter 3, licet exiſtat loco ſecundo, centeſimas ſignificat, non 30, ſed tres.

		I	II
4	8	2	9
p	q	a	b

II. Integri verò numeri, qui decimalibus adhærent, eodem valore ſunt æſtimandi, quo, ſi decimales abeſſent, æſtimarentur. Sic notæ *p*, *q*, licet præcedant eas notæ decimales,

les a, b, valent quadraginta octo, non verò 4800.

ii 6 6 n e — 100 m	III. Cum nota decimalis scribitur modo consueto fractionum vulgarium, denominator præter unitatem habet tot cifras, quot indicuntur a

signo. Sic nota decimalis e, vulgari modo scripta, est fractio n, m, cujus nominator m habet duas cifras, tot nimirum, quot a signo designantur.

iii K 3 1000	IV. Valor signi decimalis est unitas cum tot cifris, quot indicantur a signo; ut si detur numerus decimalis k, valor

signi est 1000.

Patet ex defin. III.

Axioma.

B	ii	iii	iv	
23	0	0	0	
1	i	ii	iii	
57	0	0	0	
B		C		

SI numero cuicumq; B, sive is sit pure integer, sive ex integro, & particulis decimalibus compositus, adjiciantur cifræ C, signis decimalibus affectæ, ejus valorem illæ non immutatabunt. Nam neque cifræ ipsæ ullum ex se valorem habent, neque integro B præpositæ ejus locum attollunt, ut patet ex defin. II. Axioma illustrabitur infra.

	I			IV	
A	4	3		5	
	I	II	III	IV	
	4	3	0	0	5

Pari modo cum series decimalis A interrupta est, si ea per cifras interpositas continuetur, valor dati A non immutatur.

THEOREMA I.

P*Articulæ decimales* a, b, c, d *æquivalent fractioni* O, *cujus numerator sint ipsæ notæ datæ* a, b, c, d, *signis abjectis, & juxta loci valorem æstimatæ; nominator verò ipse maximi signi valor, hoc est unitas cum tot cifris, quot a signo maximo* IV *indicantur*.

Demonstratio.

DEcimales numeri *d*, *c*, *b*, *a* scribantur explicite, hoc est, fiant fracti E, F, G, H, quorum numeratores sint ipsæ notæ simpliciter acceptæ, nominatores

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$$\frac{7234}{10000}\ \mathrm{O}$$

$$\frac{4}{10000}\ \mathrm{E} \qquad \frac{4}{10000}\ \mathrm{I}$$

$$\frac{3}{1000}\ \mathrm{F} \qquad \frac{30}{10000}\ \mathrm{K}$$

$$\frac{2}{100}\ \mathrm{G} \qquad \frac{200}{10000}\ \mathrm{L}$$

$$\frac{7}{10}\ \mathrm{H} \qquad \frac{7000}{10000}\ \mathrm{M}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

res verò sint valores ipsi signorum. Fiant deinde alii fracti I, K, L, M, quorum numeratores sint eædem notæ, sed secundum loci valorem æstimatæ; nominator verò communis sit valor ipse signi maximi. Ostendam fractos I, K, L, M, æquales esse fractis E, F, G, H. Comparemus duos L, & G. Quoniam locorum valor secundum progressionem decuplam procedit a dextra in sinistram; valor autem signorum de-

I	II	III	IV
7	2	3	4
a	b	c	d

$\frac{7234}{10000}$ O

$\frac{4}{10000}$ E $\frac{4}{10000}$ I

$\frac{3}{1000}$ F $\frac{30}{10000}$ K

$\frac{2}{100}$ G $\frac{200}{10000}$ L

$\frac{7}{10}$ H $\frac{7000}{10000}$ M

$$\begin{array}{r} 4 \\ 30 \\ 200 \\ 7000 \\ \hline 7234 \end{array}$$

decimalium eadem progressione decupla procedit a sinistra in dextram: manifestum est, quod valor notæ *b* ex loco æstimatæ, numerator videlicet 200 fractionis L, ita excedat valorem simplicem ejusdem notæ *b*, hoc est numeratorem fractionis G, ut valor signi maximi IV, ipse videlicet fractionis L nominator, excedit valorem signi II, quo signata est nota *b*; hoc est ipsum nominatorem fracticti G. Ergo per Theor. II. Cap. II. fracti L, & G æquales sunt. Simili plane argumento I, & E; K, & F; M, & H æquales erunt. Atqui fractiones I, K, L, M conficiunt fractionem O, quia 10000 valor signi maximi IV est communis earum denominator; numeratores verò earum collecti faciunt 7234, ut per se patet. Ergo etiam fracti E, F, G, H, hoc est decimales dati *d*, *c*, *b*, *a*, conficiunt fractionem O. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA II.

SI integro numero m, n *adhæreant decimales particulæ* a, b, c; *integer cum decimalibus æqualis erit fracto* P, *cujus numerator sint omnes notæ datæ* m, n, a, b, c, *signis, ubi adsunt, abjectis, & juxta loci valorem acceptæ; nominator verò ipse maximi* III *signi valor* 1000.

Demonstratio.

	I II III	
	3 2 5 4 9	
	m n a b c	
f 32000		549 d
e 1000		1000 e
549		
32000		32549 h
		1000 e
		P

PEr Theor. I. decimales *a*, *b*, *c* sunt æquales fracto *d*, *e*. Quod si integro *m*, *n* ducto in *e* fiat *f*, & subscribatur *e*, ut fiat fractus *f*, *e*; erit is par integro *m*, *n* per Prob. V. Cap. III. Sed fracti *f*, *e*, & *d* *e* conficiunt fractum P. Cum enim nominator *e* sit communis, soli numeratores *f*, *d* sunt addendi, quorum summa necessariò semper constat notis datis *m*, *n*, *a*, *b*, *c*, ut patet vel leviter rem expendenti. Ergo etiam integer *m*, *n* cum decimalibus *a*, *b*, *c*, conficiunt fractum P. Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOREMA III.

	I IV		II V
a	2 3	a	5 2 7 5
	I II III IV		II III III IV V
c	2 0 0 3	c	5 2 0 7 0 0 5
	2 0 0 3 e		5 2 0 7 0 0 5 e
	1 0 0 0 d		1 0 0 0 0 0 0 d

Cum decimalis progressio a *interrupta est; tunc cifris interpositis interruptio progressionis tollatur, ut fiat* c; *& signis abjectis, infra* e *scribatur* d, *maximi* IV *signi valor. Fractio* e, d *erit æqualis* a.

Demonstratio eadem est, quæ in I. & II. Theoremate.

Corollarium.

Ex his amplius declarabitur axioma supra positum. Esto *d*, cui adjiciantur tres cifræ signis notatæ, ut fiat *f*: per Theor. II. æquatur fractio *g*, *b*: *f*

	I		I II III IV
d	35	f	3 5 0 0 0
g	35	k	35000
h	10	m	10000

verò fracto *k*, *m* per idem Theor. Quot verò cifris *k* excedit *g*, totidem quoque cifris necessariò *m* excedit *h*. Ergo per theor. I. Cap. III. lib. I. k est ad *g*, ut *m* ad *h*: & permutando *k* est ad *m*, ut g ad *h*. Ergo per Theor. II. Cap. II. lib. II. fracti *k*, *m*, & *g*, *h* æquales sunt. Quare cum *k*, *m* sit *f*; & *g*, *h* sit *d*; etiam *d*, & *f* æquales sunt.

Est quidem id per se manifestum: unde & tanquam axioma proposui. Visum est nihilominus, quia maximus hujus axiomatis usus erit, declaratiunculam istam apponere.

CAP. XI.

Additio Decimalis.

ADdendi offerantur A, B, C. Ubi signorum progressio vel interrumpitur, ut in C, vel deficit, ut in B, ea aut cifris interpositis, ut in F, aut cifris adjectis, ut in E, continuetur. Qua qui-

	I	II	III	IV					I	II	III	IV	
A	3	5	2	4	7	1	D.	3	5	2	4	7	1
B	8	6	1						I	II	III	IV	
							E	8	6	1	0	0	0	0

		II	IV				I	II	III	IV
C	7	4	9		F	. .	7	0 4	0	9
							I	II	III	IV
					G	9 0	3 2	8	8	0

I	K	L
$\frac{352471}{10000\,p}$	$\frac{8610000}{10000\,p}$	$\frac{70409}{10000\,p}$

$$N \; \frac{9032880\,g}{10000\quad p}$$

quidem supletione valor ipsius C, aut B non immutatur. Tunc similia scribantur sub similibus, eo ordine, quem vides in D, E, F. Peragatur deinde additio, ac si omnes essent numeri integri. Summæ G notas primas iisdem signis affice, eritque hæc summa quæsita.

Demonstratio.

PEr Theoremata superiori capite demonstrata D, E, F æquantur fractis I, K, L, quorum numeratores sunt ipsi D, E, F, abjectis signis, accepti ut integri; nominator verò communis p, maximi signi valor. Sed ut horum fractorum habeatur summa, tantum opus est addere numeratores, hoc est ipsos D, E, F, tanquam integros, & summæ subscribere nominatorem communem p. Ergo etiam, ut habeatur summa datorum D, E, F, tantum opus est ipsos D, E, F, acceptos velut integros, addere, & summæ g subscribere p, maximi signi valorem, ut summa habeatur fractio N: Sed fractio N per Theoremata Cap. præc. æqualis est summæ G: nam ejus numerator constat iisdem notis, quibus G; & nominator p est ipse maximi signi IV valor, per hyp. utrobique. Ergo G est summa quæsita datorum D, E, F, seu A, B, C. Quod erat propositum.

Quamvis interruptio signorum in praxi vix unquam, aut raro offeratur, nihilominus, ut plena habeatur cognitio Logisticæ

de-

decimalis, etiam hunc casum tum hic, tum deinceps proponere, ac demonstrare voluimus.

CAPUT XII.

Subtractio Decimalis.

	i ii			i ii iii iv v	
A	98 4 2		C	98 4 2 0 0 0	
	ii iii v			i ii iii iv v	
B	4 5 9 4		D	4 0 5 9 0 4	
				i ii iii iv v	
			Q	94 3 6 0 9 6	

$$E\ \frac{9842000}{100000\,p} \qquad F\ \frac{405904}{100000\,p}$$

$$T\ \frac{9436096\,q}{100000\,p}$$

OPorteat subtrahere B ex A. Integer minor subscribatur majori, ut solet. Tum decimales similes sub similibus collocentur, & loca signis vacantia, tam in principio, ut in A, quàm in medio, ut in B, cifris signatis suppleantur, ut fa-

	I II	I II III IV V
A	9 8 4 2	C 9 8 4 2 0 0 0
	II III V	I II III IV V
B	4 5 9 4	D 4 0 5 9 0 4
		I II III IV V
		Q 9 4 3 6 0 9 6

$$E\ \frac{9842000}{100000\,p} \qquad F\ \frac{405904}{100000\,p}$$

$$T\ \frac{9436096\,q}{100000\,p}$$

factum vides in C, & D. Qua quidem supletione datorum A, & B valor non immutatur, per axioma. Subducatur deinde D ex C, perinde ac si ambo toti essent numeri integri, seu absoluti. Residui verò Q primæ notæ iisdem signis afficiantur. Erit hoc residuum quæsitum.

Demonstratio.

PEr Theoremata Cap. X. C, & D æquantur fractis E, & F, quorum numeratores sunt ipsi C, & D, accepti ut in-

te-

tegri, nominator verò communis p, ipse valor signi communis maximi. Ut autem F subtrahatur ab E, tantum opus est numeratorem a numeratore subtrahere, hoc est D, tanquam integrum, a G tanquam integro, & residuo subscribere communem nominatorem p, maximi nempe signi valorem. Ergo ut D subtrahatur a C, hoc est, per axioma, B ex A, etiam tantum opus erit D, tanquam integrum, subducere a C, tanquam integro; & residuo Q subscribere p maximi signi valorem, ut habeatur residuum fractus T. Sed fractus T per Theorema II. æquatur Q: nam per hypothesim, & numerator q iisdem constat notis, quibus Q, & nominator p est valor signi maximi. Ergo etiam fractus T est residuum quæsitum. Quod erat propositum.

CAPUT XIII.

Multiplicatio Decimalis.

DEtur multiplicandus A per B. Nulla signorum habita ratione, ita multiplicatio instituatur, ac si A, & B essent integri numeri, sublata prius per cifras in-

```
1 iii
7 4        A       G        H
1 ii iii          704      52
7 0 4      A      ———      ——
    1             1000 e   10 p
  5 2      B
———————            36608 k
I II III IV        ———————
3 6 6 0 8  C       10000 f
                      N
```

interpositas, ut in A secundo, progressionis decimalis interruptione, si quæ esset. Maxima deinde datorum A, B numerorum signa sibi adde. Eorum quippe summa dabit IV signum maximum, quo producti C nota prima signari debeat, indicabitque pariter, quot notæ signis ordine decrescentibus sint afficiendæ.

Demonstratio.

PEr Theoremata Cap. X. A, & B æquantur fractis G, & H, quorum numeratores sunt ipsi A, & B, accepti tanquam integri, nominatores verò ipsi valores maximorum signorum A, & B. Atqui, ut hi fracti G, & H inter se multiplicentur, tantum opus est, ut numeratores eorum,

rum, hoc est A, & B, accepti tanquam integri, se invicem multiplicantes, novũ faciant numeratorem *k*, ipsum nempe C, signis abjectis, cui deinde subscribatur nominator *f*, constans unitate, & cifris *e*, *p* simul sumptis, valor scilicet utriusque signi maximi A, B. Ergo etiam, ut decimales A, & B invicem multiplicentur, tantum opus est, ut A, & B, accepti tanquam integri, se invicem multiplicantes faciant numeratorem *k*, cui subscribatur nominator *f*, ipse nimirum valor utriusq; simul maximi signi A, B, ut habeatur productum fractio N. Atqui per Theo. II. Cap. X. N æqualis est C: nam & numerator *k* iisdem constat notis, quibus C, & nominator *f* constat unitate, & cifris *e*, *p*, hoc est per hyp. tot cifris, quot designantur ab utrisque simul maximis signis A, B; hoc est per const. tot cifris, quot indicantur a signo maximo C. Ergo etiam C est productum quæsitum ex multiplicatione datorum A, & B. Quod erat demonstrandum.

Si datorum unus est numerus integer, cui nulli adhæreant decimales, producti nota prima signabitur signo maximo alterius dati, & reliquæ signis ordine decrescentibus.

CAPUT XIV.

Divisio Decimalis.

I IV V
A 2 5 8 7 9

I II III IV V — B 5 7 3 (I II)
A 2 5 8 0 0 7 9

III IV V — I II III

X 4 3 3 4 5 0 2 C

$D\ \frac{2580079}{100000}\ \frac{p}{f}$ $\quad E\ \frac{573}{100}\ \frac{q}{g}$

$Z\ \frac{433}{100000}$

$N\ \frac{4502}{1000}\ \frac{h}{k}$

OPorteat A dividere per B. Primò progressionis decimalis interruptio, si quæ sit, cifris interpositis, collatur, ut in A secundo. Divide deinde A per B, perinde ac si ambo essent integri. Si jam divisoris B signum maximum minus est signo maximo dividendi A, ab hoc illud aufer:

sia.

signo residuo III notabitur nota prima quotientis C, reliquæ verò signis ordine decrescentibus.

	I	II	III	IV			I	II		
k	2	3	0	0	0	m	5	6		
		I						I	II	
h	2	3				n	1	1	0	

Quod si *m* divisoris maximum signum majus sit signo maximo *h* dividendi, aliquot cifris dividendo adjectis, ut in *k*, signa, quæ desunt, suppleantur, donec subductio fieri possit.

		I	II
p	8	2	5
			I
q	9	4	2

Idem fiat, cum divisor *q* est absolute major dividendo *p*, quomodocumque signa se habeant.

Demonstratio.

Per Theor. II. Cap. X. dati A, & B æquantur fractis D, & E, quorum numeratores *p*, & *q* sunt ipsi A, & B, accepti tanquam integri; nominatores verò *f*, *g*, valores ipsi maximorum signorum V, & II. Atqui ut D dividatur per E, oportet solummodo *p* dividere per *q*, hoc

hoc est A tanquam integrum per B tamquam integrum, & f dividere per g, quod fit auferendo cifras g a cifris f, hoc est signum maximum dati B a signo maximo dati A. Ergo etiam ut A dividatur per B, oportet solum A, acceptum ut integrum, dividere per B, ut integrum, & quotienti b subscribere unitatem cum cifris, quæ restant cifris g ablatis a cifris f, ut sic habeatur pro quotiente fractio N. Sed per Theor. II. Cap. X. fractio N æqualis est C; nam & numerator b iisdem constat notis, quibus C, nati enim sunt ex eorumdem numerorum divisione, & nominator k, ut mox ostendam, est valor maximi signi ipsius C. Ergo C est quotiens ortus ex divisione A per B. Quod erat demonstrandum. Quod autem k sit valor maximi signi quotientis C, sic ostendo. Per constr. signum maximum C est id, quod remansit signo maximo ipsius B, ablato a signo maximo ipsius A. Atqui g, & f sunt valores maximorum signorum A, & B; ac proinde per defin. IV. totidem constant cifris, quot indicantur a signis maximis ipsorum A, & B. Manifestum est igitur, cifris g ablatis ex cifris f, remanere k valorem signi maximi quotientis C.

In altero casu, quo cifræ dividendo *b* sunt adjiciendæ, ut fiat *k*, sic demonstrabimus. Per I. partem jam demonstratam *m* dividat *k*, & producat quotientem *n*: *k* æquatur *b* per axioma. Atqui *m* dividens *k* fecit quotientem *n*. Ergo etiam *m* dividens *b* gignet quotientem *n*: quod erat demonstrandum.

Porro ex constructione jam tradita patet, cum divisor est integer, quotientem iisdem signis notari, quibus dividendus: item cum divisoris, & dividendi signa maxima æqualia sunt, quotientem esse integrum totum.

II. Si divisione peracta aliquid superfuit, ut in exemp. I. superfuit X; ejus notæ iisdem signis sunt notandæ, quibus totidem primæ notæ dividendi A.

Demonstratio.

NAm A est D, & B est E: E verò dividens D relinquit Z, hoc est X per Theor. I. Cap. X. Clara sunt ista, si prior demonstratio fuerit intellecta.

III. Si

	I	II	III	IV	V			I	II		
A	2	5	8	0	0	7	9	B 5	7	3	

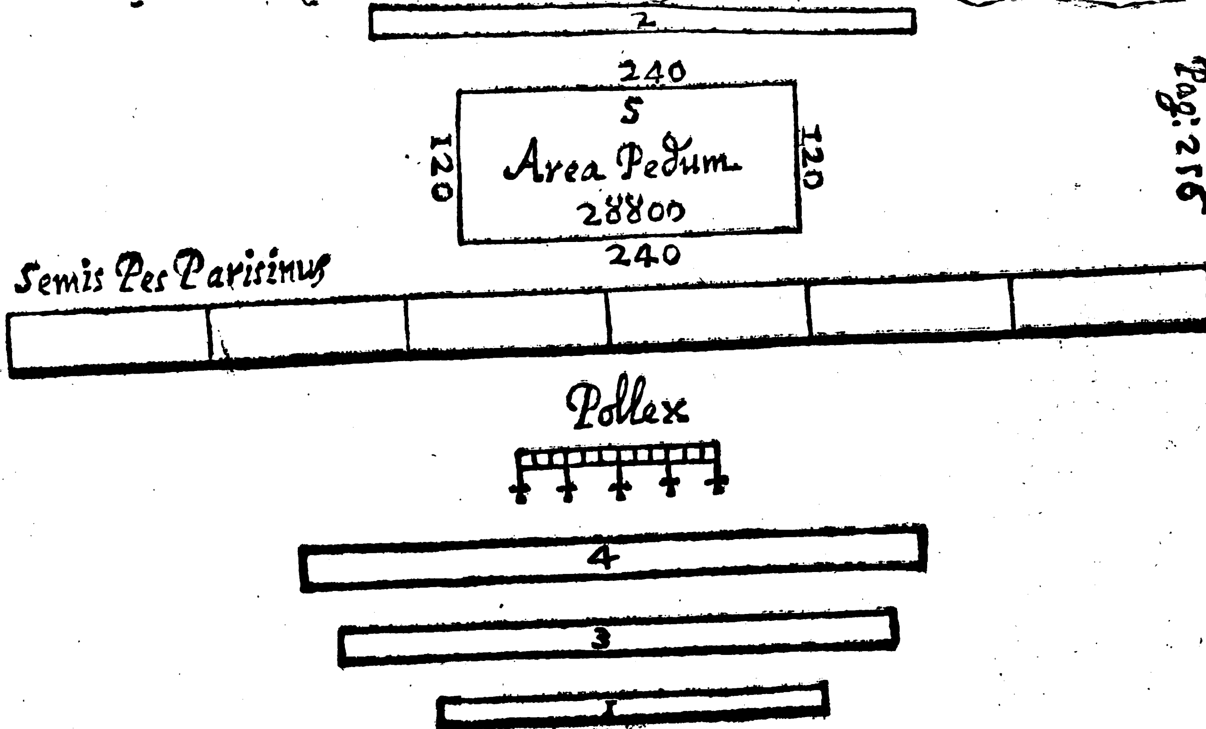
	II	IV	V	VI	VII	VIII		I	II	III	IV	V	VI
X	4	3	3	0	0	0		4	5	02	7	5	5
				t					C		r		

	VI	VII	VIII
V.	3	5	5

III. Si residuum divisionis adhuc alicujus momenti sit, adjiciantur ei aliquot cifræ decimales, & divisio continuetur, ut num.I. traditum est.

Ex divisione A per B superfuit X. Hoc si placuerit ulterius exhaurire, adjice aliquot cifras signatas, ut fiat X t: quod divide, ut num.I.& quotientem inde natum r adscribe quotienti C; erit C r quotiens ex divisione A per B. Tum V, quod supererit, jam multo erit minus priori residuo X, seu Z, ut patet ex num. præced., & hoc ipsum pluribus adjectis cifris, aut penitus evanescet, aut certe fiet quovis dato minus.

Pag: 256


2
240
5
Area Pedum
28800
120
120
240
Semis Pes Parisinus
Pollex
4
3
1

Demonstratio.

QUoniam valor residui X, adjectis cifris t, non immutatur; X t æquivalebit soli X. Atqui X t diviso per B, provenit quotiens r. Ergo etiam X diviso per B, proveniet quotiens r. Atqui ex A minus X, diviso per B, provenit quotiens C: nam A diviso per B superfuit X. Ergo ex A toto, diviso per B, provenit quotiens C r.

Praxim paucis sic complector.

AD residuum ex divisione decimali adjectis aliquot cifris, divisionem prosequere, & notas quotienti primo accedentes nota signis ordine crescentibus.

Corollaria.

I. EOdem plane artificio poterit evanescere residuum ex divisione integri per integrum; eademque erit demonstratio.

II. Quævis fractio eodem artificio reducetur ad partes decimas. Detur fractio *a*, *b*. Numeratori *a* aliquot cifras adjice, eumque sic auctum divide per nominatorem *b*, ut traditur num. I. Quotiens *d* æquivalat fractioni *a*, *b*.

$$\frac{3\,a}{7\,b} \qquad f\ 3\overset{\mathrm{I}}{0}\overset{\mathrm{II}}{0}\overset{\mathrm{III}}{0} \qquad d\ (\overset{\mathrm{I}}{4}\,\overset{\mathrm{II}}{2}\,\overset{\mathrm{III}}{8}$$

Nam quia per axioma *a*, & *f* æquales sunt; etiam *b*, illos dividens, quotientes æquales dabit. Atqui *b*, dividens *a*, dat in quotiente fractionem *a*, *b* per corollar. II. Theor. I. Cap. I.; dividens autem *f*, dat *d*. Æquatur ergo fractio *a*, *b* ipsi *d*.

Reductio fractionis datæ etiam continetur Probl. III. Cap. III.

CAP. XV.

Usus Decimalium numerorum.

I. MEnsuræ, & pondera dividantur in 10 partes æquales: & singulæ decimæ rursum in alias æquales 10, quæ jam erunt centesimæ totius: atque harum

rum singulæ iterum in 10, quæ proinde jam erunt millesimæ totius. Mensuris, hunc in modum divisis, si utamur in dimensione quacumque linearum, planorum, solidorum, liquidorum, ponderum, &c., nusquam calculo fractiones sese ingerent; sed earum loco integris numeris adhærebunt particulæ decimales, quas licebit tractare, ut integros numeros; quemadmodum per plura jam capita explicavimus.

B	C
I II III	14 | 560
7 2 8	⟶
	20

$$\frac{728}{1000}\ A \qquad \frac{14}{20}$$

Quod si sub finem totius operationis lubeat decimales particulas reducere ad fractionem denominationis datæ, exempli gr. si lubeat cognoscere, particulæ B, unius virgæ 20 pedum, quot pedes ejusdem virgæ conficiant, quæsitum facillime obtinebitur hunc in modum. Denominator datus 20 multiplicans 728 faciat 14560, a quo aufer tot primas notas 560, quot indicantur a signo maximo decimali, sive quot ſunt dati decimales. Reſiduum 14 eſt numerator quæſitus. Igitur particulæ B efficiunt unius virgæ 20 pedum partes C, nempe quatuordecim vigeſimas, hoc eſt, faciunt pedes 14.

Demonſtratio.

FRactio A, cujus numerator iiſdem notis conſtat, quibus B, denominator verò præter unitatem habet tot cifras, quot deſignantur a ſigno maximo ipſius B, per Theor. I. Cap. X. æquatur B. Sed per Prob. III. Cap. III. ut fractio A reducatur ad denominationem 20, numerator 728 ducendus eſt in 20, & productum 14560 dividendum per denominatorem 1000, quod fit auferendo tot primas notas, quot ſunt cifræ in 1000, hoc eſt quot indicantur a ſigno maximo ipſius A. Liquet ergo veritas operationis præſcriptæ.

II. Circumferentia circuli dividatur quidem in partes, ſeu gradus 360; at gradus ſinguli non in 60, ſed in 10 æquales partes ſecentur. Tum ſingulæ decimæ unius gradus in alias 10, quæ jam erunt unius gradus centeſimæ. Hæ rurſum ſingugulæ in 10, quæ jam erunt unius gradus millesimæ; & sic deinceps. Quod utinam Astronomis placuisset, aut certe deinceps placeret; profecto longe expeditior evaderet calculus, toties hoc in studio adhibendus.

III. Plerumque expediet, juxta I. Coroll. superius, cujuscumque divisionis residuum decimalibus cifris adjectis exhaurire, aut fractiones integris jam adhærentes in decimales convertere, ut Coroll. II. traditur, quando multæ cum fractis illis erunt operationes instituendæ: si una, alterave tantum, vix operæ pretium fuerit reductionem tentare.

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER III.

De Radicum Extractione.

PRæcipuum Arithmeticæ Practicæ problema est radicis ex potestate data Extractio. Potestas autem est numerus ex alicujus numeri sæpius positi, sive ex æqualium numerorum multiplicatione procreatus. Radix est ipse numerus, qui multiplicatus potestatem genuit. Unaquæque verò potestas tot dicitur habere dimensiones, quot habet latera, sive quot æquales numeri ad ejus genesim requiruntur. Quadratus numerus appellatur, qui producitur ex quovis numero in se ipsum ducto, sive ex multiplicatione duorum æqualium. Talis est 4, qui fit ex 2 per 2: & 9, qui fit ex 3 in 3: & 16, qui fit ex 4 in 4 &c.

Cu-

Cubus dicitur, qui fit ex trium numerorum æqualium multiplicatione, sive ex numero bis in se ducto. Talis est 8, qui fit ex 2, 2, 2; nam 2 in 2 facit 4; & 4 in 2 est 8.

Biquadratus, seu quadrato quadratus est, qui fit ex multiplicatione quatuor æqualium numerorum, sive ex numero in se ipsum ter ducto. Talis est 16, qui fit ex 2, 2, 2, 2; nam 2 in 2 est 4; & 4 in 2 est 8; & 8 in 2 est 16.

Supersolidus est, qui fit ex multiplicatione 5 æqualium numerorum, seu ex numero in se quater ducto. Atque hunc in modum reliquæ in infinitum potestates procreantur. Lege scholium nostrum P. VIII. l. IX., in quo cætera huc necessariò pertinentia reperies.

Potestatis verò cujusque radix ab ipsa potestate denominatur. Hinc radix quadrata, radix cubica, quadratoquadrata, supersolida, &c. Singularum characteres, seu signa hìc adjungo.

R. vel latus

R. 2) radix quadrata.

R. 3) radix cubica.

R. 4) radix biquadrata.

R. 5) radix superſolida.

Et ſic in infinitum.

Exempla nonnulla ſubjicio.

R. 12) vel R2) 12, eſt radix quadrata numeri 12.

R 3) 25, eſt radix cubica numeri 25; & ſic deinceps in aliis.

Porro expediet plurimum huic negotio radicum eliciendarum, geneſim poteſtatum etiam exprimere multiplicatione ſpecioſa, quæ ſola litterarum appoſitione peragitur. Conſule, quæ monui ante lib. VII. Eucl. *a* in *a* facit *aa* quadratum; & *aa* in *a* facit cubū *aaa*; & *aaa* in *a* facit quadrato-quadratum *aaaa*.

Radix	a
Quadrat.	aa
Cubus.	aaa
Quad: quadr.	aaaa
Surſolid.	aaaaa

Et ſic deinceps.

CAP.

CAPUT I.

Radicis Quadratæ Extractio.

Extrahenda ſit radix quadrata ex numero A.

A 56, 70, 09		(753
49		14
7, 70		
7 25		150
45, 09		
45 09		
	0	

I. POſt binas quaſque notas, a dextris ſumpto initio, comma, aut punctum interpone; eritq; numerus datus in membra ſectus, binis notis conſtantia, præter ultimum, quod unica conſtare poteſt. Quot verò erunt membra, tot notis conſtabit radix quæſita.

II. Præſidio tabellæ hìc appoſitæ, qua notarum ſimplicium quadrati continentur, quære poſtremi membri 56 radicem quadratam, aut ſi (quod hìc contingit) quadratus non ſit, radicem quadrati proxime minoris; ut quia ultitimum membrum 56 quadratus non est, quære quadratum proxime minorem 49, ejusque radicem 7 scribe post lunulam. Erit hæc nota ultima radicis quæsitæ. Quadratum verò 49 aufer ex membro 56, & residuum 7 scribe infra lineam. Hæc operatio singularis est, neque amplius repetitur.

Rad.	Quad.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

III. Residuo 7 adscribe membrum penultimum 70, ut habeatur novum membrum totale 7, 70. Tum radix hactenus acquisita 7 duplicetur. Ea sic duplicata 14 divisor appellabitur.

Quære quoties divisor 14 contineatur in membro novo 7, 70, dempta nota prima, nimirum in 77. Reperies contineri quinquies. Scribe ergo 5 post lunulam. Erit hæc nota radicalis altera.

Multiplicet deinde nota radicalis, jam reperta 5, divisorem 14, & fiat 70; eademque se ipsam multiplicans faciat quadratum 25. Hæc duo producta collige in unam summam, numeris ita col-

70
 25
———
725

lo-

locatis, ut vides in hac formula. Summam 725 aufer ex membro 7,70, & residuum 45 scribe infra lineam.

Poterit etiam multiplicatio institui hunc in modum. Divisori 14 appone notam radicalem 5, ut fiat 145, quæ per ipsam radicalem notam 5 multiplica. Idem oriri productum, quod prius, patet ex P. III. lib. II.

IV. Hæc operatio in omnibus membris sequentibus eodem prorsus modo repetitur.

Residuo 45 adscribe membrum antecedens 09, ut habeatur totale novum 45, 09. Tum radicem hactenus acquisitam 75 duplica, ut fiat divisor novus 150. Quære quoties hic contineatur in membro 45,09, dempta prima nota, nimirum in 450. Reperies ter. Scribe ergo notam 3 post lunulam. Hæc deinde divisorem 150 multiplicans, faciat 450; multiplicans verò seipsam, faciat 9. Hæc duo producta adde, numeris, ut in adjecta hic formula, collocatis. Summam 4509 aufer ex membro 4509, & quia nihil remanet, erit A numerus quadratus, ejusque radix 753.

450
9
4509

Quod si post ultimam subtractionem ali-

aliquid remanet, numerus, qui proponitur, quadratus non est: quadratus autem fit, si mulctetur residuo.

V. Quando facta multiplicatione nequit fieri subtractio radicalis; nota ultimò reperta, per quam nimirum facta est multiplicatio, minuenda est, donec subtractio fieri possit.

Esto radix elicienda ex 784. Quadratum proxime minus ultimo membro 7 est 4, & radix ejus 2, scribenda post lunulam. Ejus quadratum 4 aufer ex membro 7, & restant 3, quæ	7, 84 4 —— 3, 84 3 84 —— o	(298 4

subscribe, adjecto membro 84. Radicalis 2 duplicata dat divisorem 4, qui in novo membro 3, 84, dempta prima nota, hoc est in 38, continetur novies. Scribe ergo 9 post lunulam. 9 in 4 facit 36. 9 in 9 facit 81. Hæc producta adde numeris collocatis, ut in hac formula. Summa 441 auferri nequit ex membro 3, 84. Rejectis igitur 9, substitue 8, & denuo multiplica. 8 in 4 facit 32. 8 in 8 facit 64. Summa est 384, quæ auferri potest.

36
81
——
441

VI. Quan-

VI. Quando divisor in membro prima nota mulctato ne semel quidem continetur; scribatur cifra post lunulam, & membro illi nimis parvo membrum proximum adjiciatur.

Esto radix elicienda ex C. Ex membro primo 4 elicitur nota radicalis 2, cujus quadrato 4 ablato a membro 4 remanet	C 4, 15, 16 4 — 0, 15 15, 16	(20 4

o, cui adscripto proximo membro 15, fit membrum novum 015, seu 15. In hoc prima nota 5 mulctato, nempe in 1, nota radicalis 2 duplicata, nempe 4, ne semel quidem continetur. Scribe igitur o post lunulam, & membro 15 nimis parvo adjice 16 membrum antecedens. Tum per omnia, ut prius, operaberis, radicem videlicet hactenus acquisitam 20 duplicabis, &c.

VII. Quando membrum ultimum est 1, vel 2, vel 3, scribenda est unitas post lunulam, & subtrahenda ex membro.

CAP.

CAP. II.

Radicis Quadratæ Demonstratio.

NEminem hucusque legi, qui extractionis radicum quadratæ, ac cubicæ demonstrationem perspicuam, & integram exhiberet. Appellant quidem fere omnes Prop. IV. l. II. Elem. Sed difficultas tota in applicatione consistit, quam vel omittunt, vel tam imperfecte exequuntur, ut pleraque extractionis mysteria in tenebris relinquant. Res interim est scitu digna inprimis, quæque subtilitatis habeat non parum; ejusmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc, & IV. Capite allaturi sumus, clare intelligi posse existimem.

PORISMA I.

NUllus quadratus numerus in principio cifras habet impares.

Demonstratio.

RAdix quæcumque quadratum generans, vel cifras habet in principio,

vel

vel non habet. Si habet, quemadmodum A, manifestum est, ut A ducatur in A, solas notas significativas in se invicem duci, & producto præponi cifras duplo plures, quàm sint in A radice. Ergo productum, hoc est, ut patet ex def. XXVIII. lib. VII., ipse quadratus B pares habet in principio cifras.

A 230
A 230
———
52900 B

Si non habet cifras in principio, ut C; tum ut C ducatur in C, debet prima nota 9, quæ jam ponitur non cifra esse, sed nota significativa, duci in seipsam, ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota in primo loco producti D scribenda est. Atqui nullius notæ simplicis quadratum primam notam habet cifram, ut patet ex tabella Cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujusvis radicis compositæ quadrato supponitur, nota prima erit cifra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cifras, aut ejus prima nota omnino cifra non est. Quod erat demonstrandum.

C 439
C 439
———
192721 D

Co-

Corollarium.

SImili ratione ex ipso opere multiplicationis manifestum est, nullius quadrati numeri primam notam esse 2, vel 3, vel 7, vel 8, sed unam ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0. Nam prima cujusvis quadrati nota prima eadem est cum alicujus quadrati simplicis nota prima, quæ necessariò est una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA II.

P	a b c	
	56,30,09	
d		e
49		00,00
		k
7		0 0
7,		0 0
f,		k

*E*STO *numerus quicumque* P, *a dextra in sinistram in membra, seu partes* a, b, c *distinctus, commate post binas quasque notas interposito. Assumatur autem quodlibet membrum, exemp. gr. ultimum* a, *&* *quadratus in eo, simpliciter accepto, delitescens sit* d, *ejusque radix* f. *Dico, si ante* d *ponantur tot cifrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt; ante* f *radicem verò toties una cifra:* d, e *fore quadratum laten-*

tem

tem in membro a, juxta valorem loci accepto, & radicem ejus esse f, K.

Demonstratio.

CUm enim pro singulis membris ante *f* posita sit una cifra, ante *d* verò cifrarum binarius; manifestum est, cifras *e* esse duplo plures cifris *k*. Ergo *k*, *f* radix in se ducta faciet *d*, e; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus est *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypothesi, & cifras *k*, *k* sibi mutuo apponere, quæ conflabunt cifras *e*, cum duplæ sint ipsarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus est, ejusque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæsitum.

Corollaria.

HInc patet I. in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet II. cur numerus, ex quo quadrata radix elicienda est, secetur in membra binis notis constantia; & cur postremum membrum possit unica esse nota, quæ quidem ex sequentibus patebunt adhuc clariùs.

PORISMA III.

Quadratum binomii a + b, *sive numeri in duas partes secti, est* aa + 2ab + bb. *Hoc est quadratus ex* a, *&* *planus ex* a *in* b *bis sumptus, & quadratus ex* b.

Patet ex Prop. IV. l. II. Id ipsum cernitur ex opere ipso multiplicationis speciosæ, cujus paradigma appono.

	a	b	ab	
$a+b$	$20+3$		23	20.a
$a+b$	$20+3$			3.b
$aa+ab$	400	$+60$		
$+ab+bb$		$+60$	$+9$	
Sum. $aa+2ab+bb$ =	$400.$	$+120$	$+9$	

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficultatis; nã ut $a+b$ ducatur in $a+b$, prima a multiplicans totum $a+b$, producit $aa+ab$. Deinde $+b$ multiplicans idem totum $a+b$, producit $+ab+bb$. Hæc duo producta addita faciunt $aa+2ab+bb$. Quæ omnia per se manifesta sunt.

PO-

PORISMA IV.

Esto numerus Z, quotcumque constans partibus, ex. gr. tribus, a + b + c. *Ejus quadratum est* aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc; *hoc est quadratum ex* a; *planus bis ex* a *in* b; *quadratum ex b*; *planus bis ex* a *cum* b *in* c; *quadratum ex* c.

Demonstratio.

a b c	a. 100	a + b + c
1 2 5	b. 30	200 + 30 + 3
Z	c. 5	

Per Porisma præcedens quadratum ex *a* + *b* + *c* æquatur quadrato ex *a* + *b*, per modum unius partis accepti, & bis facto ex *a* + *b* in *c*, & quadrato ex *c*. Atqui quadratum ex *a* + *b*, per idem Porisma, est quadratum ex *a*, una cum bis facto ex *a* in *b*, una cum quadrato ex *b*. Ergo quadratum ex *a* + *b* + *c* æquatur quadrato ex *a*, bis facto ex *a* in *b*, quadrato ex *b*, bis facto ex *a* + *b* in *c*, quadrato ex *c*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

QUadratum igitur numeri, in suas partes dirempti, componunt partium quadrati, & dicti plani.

PORISMA V.

QVadratus esto quivis A, *ejusque radix* B. *Sit autem quadratus* A *sectus in membra, binis notis constantia, a dextra in sinistram. Dico radicem* B *tot constare notis, quot sunt membra in quadrato* A.

A	B
5,6,70,09	(353
A	B
1,82,25,00	(1350

Demonstratio.

PEr Porisma II., ejusque Coroll. quoniam in singulis membris dati A latet unus quadratus; patet tot esse membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia per Porisma III. & IV. ejusque Coroll. in quadrato toto A singularum notarum radicalium quadrati continentur; tot etiam notas continebit radix

dix B, quot in A sunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas, quot sunt membra in A. Quod erat demonstrandum.

PORISMA VI.

Esto numerus quadratus quicumque Z, eiusque radix quadrata X. Secetur autem Z in membra h, g, f, e, *a dextra in sinistram, post binas quasque notas commate interposito.*

Z	e f g h 55,33,87,21	{	abcd 7439 X
	e 55,00,00,00		a.700
	f 6,33,00,00.		b.400 c.30 d.9
	g 57,87,00		
	h 1338,21.		a ✳ b ✳ c ✳ d 7000 ✳ 400 ✳ 30 ✳ 9

Demonstratio.

In ultimo membro *e* latet quadratus solus ultimi radicis segmenti *a*. In penultimo membro *f*, una cum residuo 6 membro ultimi *e*, latet quadratus penultimi radicis segmenti *b*, una cum bis facto ex *a* in *b*. In antepenultimo membro g, una cum residuo 57 membri f, latet quadratus antepenultimi radicis segmenti c, una cum bis facto ex $a+b$, hoc est ex a, & b in c. In membro h, una cum residuo 1338 membri g, latet quadratus radicis segmenti d, una cum bis facto ex $a + b + c$, hoc est ex a cum b, & c, in d. Et sic deinceps, si plura sint membra.

Z	e f g h 55,33,87,21	{	abcd 7439 X
	e 55,00,00,00		a.700
	f 6,33,00,00.		b.400
	g 57,87,00		c.30 d 9
	h 1338 21.		a ✻ b ✻ c ✻ d 7000 ✻ 400 ✻ 30 ✻ 9

Demonstratio.

CUm enim per Poris. V. tot notis constet radix X, quot sunt membra in Z, in singulis autem membris, ut patet ex Poris. III. & IV. ejusque Corol. lateat quadratus unius segmenti radicis; manifestum est, segmenti radicis ultimi a, ac proinde maximi quadratum contineri in mem-

membro ultimo, adeoque & maximo *e*, & sic deinceps. Ex quo etiam per eadem III., & IV. Porism. patet de planis, sive bis factis ex &c. Constat ergo quæsitum.

HIS PRÆMISSIS.

EOrum omnium, quæ ad radicis quadratæ extractionem præcedenti Capite præscripta sunt, ratio dabitur. Resumatur exemplum Cap. præced., in quo ex numero A extracta est radix Z.

I. Quia per Porism. VI. in ultimo membro *e* latet quadratus segmenti radicis ultimi; idcirco elicitur ex membro *e* radix quadrata, quàm potest maxima, reponiturque post lunulam: quadratus verò illius a membro *e* subtrahitur, & residuum scribitur infra lineam. Et quia per VI. Porism. in membro ultimo continetur quadratus solus segmenti, seu partis ultimæ radicis, in reliquis verò membris, præter quadrata partium radicalium, continentur etiam numeri rectanguli, seu plani; idcirco hæc operatio prima soli postremo membro convenit. Insuper, quod ex membro *e* elicita sit radix *a*, neglecto loci valore, nimirum ac si esset tantum 56, cum revera sit 56, 00, 00, id, quemadmodum in aliis plerisque operationibus arithmeticis, compendii gratia factum est.

A e f g {abc Z
56, 70, 09 {753
49 . . . .
h 7, 70, . . a. 700 14. 00. m
7 25 . . b. 50
c. 3
K 45, 09
45, 09.

II. Quod verò interim nota radicalis *a*, sic inventa, sit legitima, sic ostendo. Cum per V. Porif. radix tota Z tot constet notis, quot totus A membris, patet ante membrum *e* tot esse membra, quot ante *a* sunt notæ. Quia igitur singula membra *f*, *g* duabus constant notis, tot ante *e* membrum præcedunt notarum, sive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ, seu loca. Quare cum nota *a* simpliciter accepta per constr. sit radix quadrati latentis in membro *e* 56 simpliciter accepto, erit quoque per Porisma II. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æstimato ex loci valore nempe in 56, 00, 00. Hoc ipsum eodem modo in reli-

quis

quis membris eodem prorſus modo demonſtrabitur.

III. Ex membris penultimo, cæteriſque, quotquot fuerint, notæ radicales reliquæ eliciuntur artificio a priori plane diverſo. Ad illius rationem penitus perſpiciendam juvabit non parum ob oculos ponere radicis binomiæ $a+b$ quadratum, quod per Poriſma IV. eſt

$$aa+2ab+bb.$$

Hujus poſtrema pars aa indicat, in ultimo membro e latere quadratum ultimi radicis ſegmenti, ſeu notæ a: reliquæ vero partes $2ab+bb$ indicant, quid contineatur in membro penultimo f cum prioris e reſiduo, aliiſque ſingulis. Quia igitur in membro f cum reſiduo prioris, hoc eſt in h (7, 70, ſeu 770, 00) continetur $2ab+bb$, hoc eſt planus bis genitus ex ultimo radicis ſegmento, ſeu nota a jam cognita, in b adhuc incognitam, una cum quadrato ipſius b, ut patet ex Lem. VI.; manifeſtum eſt, incognitam radicis notam b ex hoc membro h eſſe eliciendam; utique per diviſionem, quæ ſola reſolvit, quid multiplicatio compoſuit. Cum vero latera membrum h producentia ſint a,

& *b*, in diviſorem illud erit aſſumendum quod cognitum jam eſt, nempe *a*, & quidem duplicatum, eo quod in membro *b* contineatur planus bis factus ex *a* in *b*, hoc eſt planus ex *a* bis ſumpto in *b*. Atque hæc cauſa eſt, cur ad conſtituendum diviſorem radix eatenus acquiſita duplicetur.

```
A.  e  f  g   { a b c  Z.
   56,70,09  { 7 5 3
   49 . . . .
   ----
h   7, 70 . .          a. 700
    7  27 . .          b.  50
   ------              c.   3
 K 45, 09
   45, 09           a + b + c
                  700 + 50 + 3
```

IV. Per hunc autem diviſorem 2 *a* 14 dividitur non totum membrum *b* 7, 70 ſed dempta nota prima, nimirum 77 tantum, hac de cauſa. Ut innoteſcat nota incognita *b*, ſolus planus 2*ab*, factus nimirum ex *a* bis in *b*, dividendus eſt; cum ad hoc nihil faciat *bb*, utpote totus incognitus. Nihil autem plani 2 *a b* ad primum membri *b* locum pertinet, ut infra demonſtrabitur num. VI.

V.

V. Reperta jam porro per divisionem nota incognita *b* multiplicat & duplum notæ prioris *a*, ipsum nempe divisorem 2*a* 14, & seipsam, ut habeantur duo producta 2 *ab* + *bb* 70, & 25, quæ in membro *b* continentur, & ab eodem idcirco subtrahuntur. Quorsum verò fiat hæc subtractio, patebit ex clausula totius demonstrationis.

VI. Cur autem producta ex multiplicatione scribantur, ut in apposita formula, ratio est, quod 70, hoc est 1 *ab*, fiat ex divisore 2*a* in *b*; & 25, hoc est *bb*, fiat ex *b* in *b*. Unde cum *a* sit nota radicis uno loco altior, quàm *b*, etiã producti 2 *ab* 70 prima nota, ut patet ex Porisf. VI. C.III. l.I. uno loco altior erit, quàm prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque scribenda supra 2 secundam notam quadrati *bb* 25. Ex quo etiam manifestum fit, id quod supra assumptum fuit, videlicet nihil plani 2 *ab*, hoc est 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati *bb* 25 prima nota reponitur in primo loco summæ 725, plani verò 2 *ab* 70 prima nota pertinet ad locum summæ secundum. Et quia summa 725 tot constat

70...
25..,
725..

CAP. II.

Radicis Quadratæ Demonstratio.

NEminem hucusque legi, qui extractionis radicum quadratæ, ac cubicæ demonstrationem perspicuam, & integram exhiberet. Appellant quidem fere omnes Prop. IV. l. II. Elem. Sed difficultas tota in applicatione consistit, quam vel omittunt, vel tam imperfecte exequuntur, ut pleraque extractionis mysteria in tenebris relinquant. Res interim est scitu digna inprimis, quæque subtilitatis habeat non parum; ejusmodi tamen, ut ex iis, quæ hoc, & IV. Capite allaturi sumus, clare intelligi posse existimem.

PORISMA I.

NUllus quadratus numerus in principio cifras habet impares.

Demonstratio.

RAdix quæcumque quadratum generans, vel cifras habet in principio,

vel

vel non habet. Si habet, quemadmodum A, manifestum est, ut A ducatur in A, solas notas significativas in se invicem duci, & producto præponi cifras duplo plures, quàm sint in A radice. Ergo productum, hoc est, ut patet ex def. XXVIII. lib. VII., ipse quadratus B pares habet in principio cifras.

A 230
A 230
———
52900 B

Si non habet cifras in principio, ut C; tum ut C ducatur in C, debet prima nota 9, quæ jam ponitur non cifra esse, sed nota significativa, duci in seipsam, ut habeatur ejus quadratum, cujus prima nota in primo loco producti D scribenda est. Atqui nullius notæ simplicis quadratum primam notam habet cifram, ut patet ex tabella Cap. præced. Ergo neque quadrati D, qui pro cujusvis radicis compositæ quadrato supponitur, nota prima erit cifra. Omnis igitur quadratus numerus, aut pares habet in principio cifras, aut ejus prima nota omnino cifra non est. Quod erat demonstrandum.

C 439
C 439
———
192721 D

Co-

Corollarium.

Simili ratione ex ipso opere multiplicationis manifestum est, nullius quadrati numeri primam notam esse 2, vel 3, vel 7, vel 8, sed unam ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0. Nam prima cujusvis quadrati nota prima eadem est cum alicujus quadrati simplicis nota prima, quæ necessariò est una ex his 1, 4, 5, 6, 9, 0.

PORISMA II.

P	a b c	
	56,30,09	
d		e
49		00,00
		k
7		00
7,		00
f,		k

Esto numerus quicumque P, a dextra in sinistram in membra, seu partes a, b, c *distinctus, commate post binas quasque notas interposito. Assumatur autem quodlibet membrum, exemp. gr. ultimum* a, *& quadratus in eo, simpliciter accepto, delitescens sit* d, *ejusque radix* f. *Dico, si ante* d *ponantur tot cifrarum binarii, quot ante membrum* a *membra antecedunt; ante* f *radicem verò toties una cifra:* d, e *fore quadratum laten-*

tem

tem in membro a, juxta valorem loci accepto, & radicem ejus esse f, K.

Demonstratio.

CUm enim pro singulis membris ante *f* posita sit una cifra, ante *d* verò cifrarum binarius; manifestum est, cifras *e* esse duplo plures cifris *k*. Ergo *k*, *f* radix in se ducta faciet *d*, *e*; nam ut *f*, *k* ducatur in *f*, *k*, tantum opus est *f* ducere in *f*, unde fit *d* ex hypothesi, & cifras *k*, *k* sibi mutuo apponere, quæ conflabunt cifras *e*, cum duplæ sint ipsarum *k*. Ergo *d*, *e* quadratus est, ejusque radix *f*, *k*. Liquet ergo quæsitum.

Corollaria.

HInc patet I. in quolibet membro latere quadratum, & talem quidem, qualis in lemmate determinatur.

Patet II. cur numerus, ex quo quadrata radix elicienda est, secetur in membra binis notis constantia; & cur postremum membrum possit unica esse nota, quæ quidem ex sequentibus patebunt adhuc clarius.

PORISMA III.

Quadratum binomii a + b, *sive numeri in duas partes secti, est* aa + 2ab + bb. *Hoc est quadratus ex* a, *& planus ex* a *in* b *bis sumptus, & quadratus ex* b.

Patet ex Prop. IV. l. II. Id ipsum cernitur ex opere ipso multiplicationis speciosæ, cujus paradigma appono.

	a b ab		
a+b	20+3	23	20.a
a+b	20+3		3.b
aa + ab	400 +60		
+ ab+bb	+60 + 9		

Sum. aa+2 ab+bb = 400.+120 * 9.

Porro hæc multiplicatio nihil habet difficultatis; nã ut *a+b* ducatur in *a+b*, prima *a* multiplicans totum *a+b*, producit *aa+ab*. Deinde *+b* multiplicans idem totum *a + b*, producit *+ab +bb*. Hæc duo producta addita faciunt *aa* + 2 *ab* + *bb*. Quæ omnia per se manifesta sunt.

PO-

PORISMA IV.

Esto numerus Z, quotcumque constans partibus, ex. gr. tribus, a + b + c. *Ejus quadratum est* aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc; *hoc est quadratum ex* a; *planus bis ex* a *in* b; *quadratum ex b*; *planus bis ex* a *cum* b *in* c; *quadratum ex* c.

Demonstratio.

a b c	a.100	a + b + c
1 2 5	b.30	200+30+3
Z	c.5	

Per Porisma præcedens quadratum ex *a+b+c* æquatur quadrato ex *a+b*, per modum unius partis accepti, & bis facto ex *a+b* in *c*, & quadrato ex *c*. Atqui quadratum ex *a+b*, per idem Porisma, est quadratum ex *a*, una cum bis facto ex *a* in *b*, una cum quadrato ex *b*. Ergo quadratum ex *a+b+c* æquatur quadrato ex *a*, bis facto ex *a* in *b*, quadrato ex *b*, bis facto ex *a+b* in *c*, quadrato ex *c*. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

QUadratum igitur numeri, in suas partes dirempti, componunt partium quadrati, & dicti plani.

PORISMA V.

QVadratus esto quivis A, ejusque radix B. Sit autem quadratus A sectus in membra, binis notis constantia, a dextra in sinistram. Dico radicem B tot constare notis, quot sunt membra in quadrato A.

A	B
56,70,09	(353
A	B
1,82,25,00	(1350

Demonstratio.

PEr Porisma II., ejusque Coroll. quoniam in singulis membris dati A latet unus quadratus; patet tot esse membra in A, quot in A latent quadrati. Sed quia per Porisma III. & IV. ejusque Coroll. in quadrato toto A singularum notarum radicalium quadrati continentur; tot etiam notas continebit radix

dix B, quot in A sunt quadrati. Ergo radix B tot continebit notas, quot sunt membra in A. Quod erat demonstrandum.

PORISMA VI.

Esto numerus quadratus quicumque Z, ejusque radix quadrata X. Secetur autem Z in membra h, g, f, e, *a dextra in sinistram, post binas quasque notas commate interposito.*

Z	e f g h 55,33,87,21	{	abcd 7439 X
	e 55,00,00,00		a.700
	f 6,33,00,09.		b.400
			c.30
	g 57,87,00		d.9
	h 1338,21.		a ⁎ b ⁎ c ⁎ d 7000 ⁎ 400 ⁎ 30 ⁎ 9

Demonstratio.

In ultimo membro *e* latet quadratus solus ultimi radicis segmenti *a*. In penultimo membro *f*, una cum residuo 6 membro ultimi *e*, latet quadratus penultimi radicis segmenti *b*, una cum bis facto ex *a* in *b*. In antepenultimo membro *g*, una cum reſiduo 57 membri *f*, latet quadratus antepenultimi radicis ſegmenti *c*, una cum bis facto ex *a*+*b*, hoc eſt ex *a*, & *b* in *c*. In membro *h*, una cum reſiduo 1338 membri *g*, latet quadratus radicis ſegmenti *d*, una cum bis facto ex *a* + *b* + *c*, hoc eſt ex *a* cum *b*, & *c*, in *d*. Et ſic deinceps, ſi plura ſint membra.

Z	e f g h 55,33,87,21	{	abcd 7439	X
	e 55,00,00,00		a.700	
	f 6,33,00,00.		b.400	
	g 57,87,00		c.30 d 9	
	h 1338 21.		a ✳ b ✳ c ✳ d 7000 ✳ 400 ✳ 30 ✳ 9	

Demonſtratio.

CUm enim per Poriſ. V. tot notis conſtet radix X, quot ſunt membra in Z, in ſingulis autem membris, ut patet ex Poriſ. III. & IV. ejuſque Corol. lateat quadratus unius ſegmenti radicis; manifeſtum eſt, ſegmenti radicis ultimi *a*, ac proinde maximi quadratum contineri in mem-

membro ultimo, adeoque & maximo *e*, & sic deinceps. Ex quo etiam per eadem III., & IV. Poris. patet de planis, sive bis factis ex &c. Constat ergo quæsitum.

HIS PRÆMISSIS.

EOrum omnium, quæ ad radicis quadratæ extractionem præcedenti Capite præscripta sunt, ratio dabitur. Resumatur exemplum Cap. præced., in quo ex numero A extracta est radix Z.

I. Quia per Poris. VI. in ultimo membro *e* latet quadratus segmenti radicis ultimi; idcirco elicitur ex membro *e* radix quadrata, quàm potest maxima, reponiturque post lunulam: quadratus verò illius a membro *e* subtrahitur, & residuum scribitur infra lineam. Et quia per VI. Poris. in membro ultimo continetur quadratus solus segmenti, seu partis ultimæ radicis, in reliquis verò membris, præter quadrata partium radicalium, continentur etiam numeri rectanguli, seu plani; idcirco hæc operatio prima soli postremo membro convenit. Insuper, quod ex membro *e* elicita sit radix *a*, neglecto loci valore, nimirum ac si esset tantum 56, cum revera sit 56, 00, 00, id, quemadmodum in aliis plerisque operationibus arithmeticis, compendii gratia factum est.

A e f g {abc Z
56, 70, 09 {753
49 . . . .
h 7, 70, . . a. 700 14. 00. m
7 25 . . b. 50
c. 3
K 45, 09
45, 09.

II. Quod verò interim nota radicalis *a*, sic inventa, sit legitima, sic ostendo. Cum per V. Porism. radix tota Z tot constet notis, quot totus A membris, patet ante membrum *e* tot esse membra, quot ante *a* sunt notæ. Quia igitur singula membra *f*, *g* duabus constant notis, tot ante *e* membrum præcedunt notarum, sive locorum binarii, quot ante *a* præcedunt notæ, seu loca. Quare cum nota *a* simpliciter accepta per constr. sit radix quadrati latentis in membro *e* 56 simpliciter accepto, erit quoque per Porisma II. *a* accepta juxta loci valorem (nempe 700) radix quadrati latentis in membro æstimato ex loci valore nempe in 56, 00, 00. Hoc ipsum eodem modo in reliquis

quis membris eodem prorſus modo demonſtrabitur.

III. Ex membris penultimo, cæteriſque, quotquot fuerint, notæ radicales reliquæ eliciuntur artificio a priori plane diverſo. Ad illius rationem penitus perſpiciendam juvabit non parum ob oculos ponere radicis binomiæ $a+b$ quadratum, quod per Poriſma IV. eſt

$$aa+2ab+bb.$$

Hujus poſtrema pars aa indicat, in ultimo membro e latere quadratum ultimi radicis ſegmenti, ſeu notæ a: reliquæ vero partes $2ab+bb$ indicant, quid contineatur in membro penultimo f cum prioris e reſiduo, aliiſque ſingulis. Quia igitur in membro f cum reſiduo prioris, hoc eſt in b (7, 70, ſeu 770, 00) continetur $2ab+bb$, hoc eſt planus bis genitus ex ultimo radicis ſegmento, ſeu nota a jam cognita, in b adhuc incognitam, una cum quadrato ipſius b, ut patet ex Lem. VI.; manifeſtum eſt, incognitam radicis notam b ex hoc membro b eſſe eliciendam; utique per diviſionem, quæ ſola reſolvit, quid multiplicatio compoſuit. Cum vero latera membrum b producentia ſint a,

& *b*, in divisorem illud erit assumendum quod cognitum jam est, nempe *a*, & quidem duplicatum, eo quod in membro *b* contineatur planus bis factus ex *a* in *b*, hoc est planus ex *a* bis sumpto in *b*. Atque hæc causa est, cur ad constituendum divisorem radix eatenus acquisita duplicetur.

A.	e f g 56,70,09	{ a b c { 7 5 3 Z
	49	
	h 7,70 . .	a. 700
	7 27 . .	b. 50
		c. 3
	K 45,09	
	45,09	a + b + c
		700 + 50 + 3

IV. Per hunc autem divisorem 2 *a* 14 dividitur non totum membrum *b* 7,70 sed dempta nota prima, nimirum 77 tantum, hac de causa. Ut innotescat nota incognita *b*, solus planus 2*ab*, factus nimirum ex *a* bis in *b*, dividendus est; cum ad hoc nihil faciat *bb*, utpote totus incognitus. Nihil autem plani 2 *a b* ad primum membri *b* locum pertinet, ut infra demonstrabitur num. VI.

V.

V. Reperta jam porro per diviſionem nota incognita *b* multiplicat & duplum notæ prioris *a*, ipſum nempe diviſorem $2a$ 14, & ſeipſam, ut habeantur duo producta $2ab + bb$ 70, & 25, quæ in membro *b* continentur, & ab eodem idcirco ſubtrahuntur. Quorſum verò fiat hæc ſubtractio, patebit ex clauſula totius demonſtrationis.

VI. Cur autem producta ex multiplicatione ſcribantur, ut in appoſita formula, ratio eſt, quod 70, hoc eſt 1 *ab*, fiat ex diviſore $2a$ in *b*; & 25, hoc eſt *bb*, fiat ex *b* in *b*. Unde cum *a* ſit nota radicis uno loco altior, quàm *b*, etiã producti $2ab$ 70 prima nota, ut patet ex Poriſ. VI. C. III. l. I. uno loco altior erit, quàm prima nota producti 25 ex *b* in *b*, ideoque ſcribenda ſupra 2 ſecundam notam quadrati *bb* 25. Ex quo etiam manifeſtum fit, id quod ſupra aſſumptum fuit, videlicet nihil plani $2ab$, hoc eſt 70, pertinere ad locum primum membri *b*. Nam cum duo illa producta adduntur, quadrati *bb* 25 prima nota reponitur in primo loco ſummæ 725, plani verò $2ab$ 70 prima nota pertinet ad locum ſummæ ſecundum. Et quia ſumma 725 tot con-

70...
25..
———
725..

ſtat

ſtat notis, quot membrum *b*, utpote per Poriſma VI. in eo latens, adeoque ab illo ſubtrahenda; manifeſtum eſt, plani 2 *ab* 70 primam notam pertinere ad locum membri *b* ſecundum; ac proinde, cum ſolus planus 2 *ab* 70 dividendus ſit, membrum *b* dempta prima nota dividitur.

Porro valorem verum productorum exprimit hæc formula altera, quem inter operandum citra veritatis præjudicium diſſimulari, liquet ex demonſtratis ſupra.	70000 2500 ——— 72500

VII. At quare hæc operatio in aliis deinceps membris ſemper eadem repetitur? Ratio patet ex VI. Poriſmate. Quemadmodum enim in membro *b*, compoſito ex *f*, & reſiduo prioris, latet 2 *ab* ✝ *bb*, hoc eſt planus bis ex nota radicali *a* in radicalem *b*, una cum quadrato ipſius *b*; ita in membro *k*, compoſito ex *g*, & 45 prioris *f* reſiduo, latet 2*ac* ✝ 2*bc* ✝ *cc*, hoc eſt planus bis ex *a*✝*b* radice eatenus acquiſita ducta in *c*, & quadratum ipſius *c*: & ſic deinceps in reliquis membris, ſi quæ eſſent plura.

VIII. Poſtremo quæritur, quare, cum membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro

pro radicali nota
ſcribatur unitas.

	b	Z
Eſto quadratus A,	3, 96, 10	{197.
cujus membrum	A	{100.

ultimum eſt *b*, 3, oo, oo; radix autem ſit Z, cujus membrum ultimum ſit unitas. Quia radix Z tot habet notas, per Poriſm. V., quot A membra; habebit 1 ante ſe tot cifras, quot ante ultimum *b* ſunt membra. Sed quot ſunt membra ante *b*, tot ante notam 3 ſunt cifrarum binarii, ut habeatur ejus valor 3, oo, oo. Ergo, ut habeatur valor ultimæ notæ ipſius Z, quæ eſt 1, ante eam tot ponendæ ſunt cifræ, quot ante 3 cifrarum binarii; ac proinde ante 3 ſunt cifræ duplo plures, quam ante 1. Ergo quadratum ipſius unitatis, ex valore loci æſtimatæ, erit 1 cum tot cifris, quot ſunt ante 3. Ergo continetur in 3, oo, oo, ab eoque auferri debet. Ex quo patet quæſitum.

IX. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis ſingulis partibus extractionis quadraticæ, demonſtratio tota ſic concluditur.

Numerus datus A æqualis eſt quadrato ex *a*; plano ex *a* bis in *b*; quadrato ex *b*; plano ex *a*+*b* bis in *c*; quadradrato ex c, ut patet ex toto opere extractionis, cum dictæ quantitates subtractæ fuerint ex A, nec quidquam subtractione ultima peracta superfuerit, Atqui, per Porisma IV. etiam quadratus radicis Z iisdem æqualis est. Ergo A est ipse quadratus radicis Z. Quod erat demonstrandum.

	e	f	g		abc	
A	56,	70,	09	}	753	Z
					a 700	
					b 50	
					c 3	

Quod si ultima subtractione peracta superfuisset quidpiam, tunc numerus datus, illo residuo mulctatus, fuisset æqualis dictis quantitatibus; ac proinde & radicis inventæ quadratus.

CAP. III.

Radicis cubicæ extractio.

Extrahenda sit radix cubica ex numero A.

I. Post ternas quasque notas, initio facto a dextris, comma aut punctum interpone; eritque numerus datus A fe-

A	102, 503, 302 (4
	64
	38

ctus in partes, seu membra, ternis notis constantia, præter ultimum, quod constare potest notis, vel duabus, ut in C; vel etiam unica, ut in D. Tot verò notis constabit radix quæsita, quot erunt numeri dati membra, ut infra demonstrabitur.

39,820,439. C
7,900,341. D

II. Præsidio tabellæ hìc appositæ, qua notarum simplicium cubi continentur, quære postremi membri radicem cubicam, aut si id cubus non est, quære radicem cubi proxime minoris.

Rad.	Qua.	Cubi
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729

Ut, quia hìc postremum membrum 102 cubus non est, quære cubum proxime minorem 64. Hujus radicem 4 scribe post lunulam, quæ erit nota ultima radicis quæsitæ: cubum verò ipsum 64 aufer a postremo membro, & residuum 28 infra lineam repone. Hæc operatio soli postremo membro convenit, ac proinde in membris sequentibus non repetitur.

III.

III. Residuo 38 adscribe membrum penultimum 503, ut fiat membrum totale novum 36, 503: pro quo divisor sic parabitur.	A 102, 503, 232 64 — 38, 503 33, 336 ——— 5, 167,	46

Radicis hactenus acquisitæ 4 quadratum 16 triplica: fit 48. Tum ipsam quoque radicem 4 hactenus acquisitam triplica: fit 12. Producta adde, numeris collocatis, ut in hac formula. Summa 492 erit divisor.

Quære igitur, quoties divisor 492 contineatur in membro 38, 503, dempa prima nota, hoc est in 3850. Reperies contineri sexies. Scribe ergo 6 post lunulam, quæ erit nota penultima radicis quæsitæ.	48 12 — 492

Tum nota radicalis ultimò reperta 6, multiplicans primò radicis prioris 4 quadratum ter sumptum, nempe 48, faciat 288. Deinde radicis ultimo repertæ quadratum 36, multiplicans triplum radicis prioris 4, nempe 12, faciat 432. Denique 6, seipsam cubicè multiplicans, faciat 216.

Hæc

Hæc tria producta adde, numeris collocatis, ut in hac formula. Summam 33336 aufer a membro 38, 503, & residuum 5167 infra lineam repone.

288
432
216
33336

IV. Hæc operatio, toto jam numero tertio exposita, in omnibus membris sequentibus eodẽ modo, atque ordine repetitur.

Itaque residuo 5167 adscribe membrum proximum 232, ut habeatur membrum novum totale 5167, 232. Radicis 46, hactenus acquisitæ, quadratum 2116 triplica: fit 6348. Radicem quoque ipsam 46 triplica: fit 138. Hæc duo producta in unam summam collige, numeris, ut in hac formula, collocatis. Summa est novus divisor.

6348
138
63618

Quære igitur, quoties hic contineatur in novo membro 5167, 232, dempta prima nota, nempe in 5167, 223. Reperies contineri octies. Scribe ergo 8 post lunulam. Erit hæc nota prima radicis quæsitæ. 8 in

A
102, 503, 232 (468
64
—
38, 503,
33 336
—
5, 167. 232
5, 167, 232.
—
0

6348, triplum nempe quadrati radicis prius acquisitæ 46, facit 50784: quadratum ex 8, nimirum 64, in 138, triplum radicis prioris 46, facit 8832. 8 in 8 cubice est 512. Hæc tria producta adde, numeris, ut in apposita formula, ordinatis. Summam 5167232 aufer ex membro 5167232, & nihil restat.

50784
8832
512
5167232

Numerus ergo A cubus est, ejusque radix 468. Quod si post ultimam subtractionem aliquid supersit; numerus, qui proponitur, non erit cubus: fit autem cubus, si mulctetur residuo.

V. Quæ num. V. VI. VII. Cap. I. notantur pro quadratæ radicis extractione, etiam in extractione radicis cubicæ erunt observanda.

CAP. IV.

Cubicæ radicis demonstratio.

PRæmitto etiam hìc Porismata quædam, ex quibus Theoria tota extractionis cubicæ fiet manifesta.

PORISMA I.

Cubus numerus, aut nullas in principio habet cifras, aut si habeat, eas ternarius metitur.

Demonstratio.

Nam radix quæcumque, cubum generans, vel habet in principio cifras unam aut plures, vel non habet. Si non habet, tum ut A, (sic eam lubet vocare) multiplicetur cubice, debet prima ejus nota in se duci cubice, & cubi producti prima nota scribi infra lineam primo loco in producto quæsito, sive cubo totius radicis A: ac proinde cujuscumque cubi prima nota convenit cum prima nota alicujus cubi simplicis. Atqui nullius cubi simplicis prima nota est 0. Ergo &c.

	239
	A

Quod si radix in principio habeat cifras, quemadmodum B, ex ipso multiplicationis opere manifestum est, ut B ducatur in se cubice, tantum opus esse, ut cubo notarum significantium præponantur cifræ triplo plu-

B	580
C	512000

res, quàm sint in principio radicis B. Ergo, &c.

Corollarium.

Ex demonstratis patet, cuiusvis cubi primam notam convenire cum prima nota alicujus cubi simplicis.

PORISMA II.

Esto cubus quicumque a, *ejusque radix cubica* c. *Cubo autem tot præponantur cifrarum terniones* b, *quot cifræ* d *radici. Dico etiam totum* c, d *esse radicem cubicam totius* a, b.

a	b
64	000, 000
c	d
4	00

Demonstratio.

Ut habeatur cubus ex *c*, *d* tantum opus est *c* multiplicare cubice, & producto *a* præponere cifras triplo plures, quàm sint *d*. Atqui cifræ *b* sunt triplo plures per hypothesim. Ergo *a*, *b* est cubus ex c *d*.

Co-

Corollaria.

I. Hinc patet, si numerus quivis sit divisus in membra, tribus notis constantia, dempto ultimo *a*, quod paucioribus constare potest;

a	*e*	*k*
64,	230,	789
a	*b*	
64,	000,	000
c	*d*	
4	00	

& membri cujuspiam puta *a*, simpliciter accepti, radix cubica sit *c*: si ante radicem *c* ponantur tot cifræ *d*, quot ante *a* sunt membra *e*, *k*, seu locorum terniones *b*; etiam *c*, *d* fore radicem cubicam ipsius *a*, *b*, seu membri *a* juxta loci valorem accepti.

II. Ex his manifestum est, in quolibet membro latere cubum, & talem quidem, qualem jam determinavimus.

III. Atque ex his jam incipit apparere, cur ad extrahendam radicem cubicam, post ternas quasque notas comma interponatur, & cur non intersit, sive membrum ultimum unica constet nota, sive duabus.

PORISMA III.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline aa+ab+bb \\ \quad ab \\ \hline a+b \\ \hline aaa+aab+abb+bbb \\ \qquad aab \;\; abb \\ \qquad aab \;\; abb \end{array}$$

hoc est; $aaa+3aab+3abb+bbb$.

Cubus binomii $a+b$ *hoc est lineæ, seu numeri in duas partes secti, est* $aaa+3aab+3abb+bbb$.

Hoc est, cubus binomii $a+b$ *æquatur cubo ex* a; *solido ter sumpto, quod fit ex quadrato ipsius* a *ducto in* b; *solido ter sumpto, quod fit ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; *cubo ex* b.

De

Demonstratio.

Patet ex ipso actu multiplicationis cubicæ, cujus paradigma hic apponitur, & per se est manifeste.

Id ipsum demonstratur in schemate hìc adjuncto. Cubus enim *dl* rectæ *cd*, sectæ in duas partes *a*, & *b*, complectitur cubos segmentorum *a*, & *b*, cubos nimirum *c e u e f q r p*, & *o s z m 2 5 1 u*: item tria parallepipeda æqualia, quorum bases sunt quadrata *po*, *ro*, *eo* æqualia quadrato *rp* seu *aa*, altitudines verò *px*, *b*, seu *rd*, *ek*, quæ omnes sunt æquales ipsi *b*: item tria parallepipeda æqualia, quorum bases sunt quadrata o 1, o 2, o 3, æqualia quadrato 7 *y* seu *bb*, altitudines verò 5 7, 5 *g*, 3 *h* æqualia ipsi *a*.

Hæc quidem, utpote vel mediocriter Elementa Geometriæ callentibus satis nota, non est necesse pluribus demonstrare.

PORISMA IV.

Esto numerus Z diremptus in partes suas, quotcumque illæ fuerint, a + b + c. *Ejus cubus æquatur his quantitatibus:*

a b c		
a 6 5	a 900	a + b + c
Z	b 20	900 + 20 + 5
	c 5	

cubo ex a; *solido ter genito ex quadrato ipsius* a *in* b; *solido ter genito ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; *cubo ex* b; (*omnes has quantitates vocabo* M) *item solido ter genito ex quadrato ipsius* a + b *ducto in* c; *solido ter genito ex quadrato ipsius* c *ducto in* a + b; *cubo ex* c: *quas quantitates posteriores vocemus* N.

Demonstratio.

Sumendo enim $a+b$ per modum unius, erit per Porism. III. cubus ex $a+b+c$ æqualis cubo ex $a+b$, & quantitatibus N. Atqui per idem Porisma cubus ex $a+b$ æquatur quantitatibus M. Ergo cubus ex $a+b+c$ æquatur quantitatibus M, & quantitatibus N. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Cubum igitur numeri in suas partes secti componunt singularum partium cubi, & dicti solidi.

PO-

PORISMA V.

Cubus esto quivis X, ejusque radix Z. Sit autem cubus X sectus in membra, post ternas notas a dextra in sinistram commate interjecto.	102, 503, 232	(468 Z
	X	abc
		a. 400
		b. 60
		c. 8

Dico radicem Z tot constare notis, quot membra sunt cubi dati.

Demonstratio.

Quoniam per Coroll. II. Porism. II. in singulis membris latet unus cubus; tot erunt membra in X, quot cubi. Sed quia, per Porism. IV., ejusque Coroll., in cubo X continentur cubi singularum radicis partium *a*, *b*, *c*; tot etiam erunt radicis partes, ac proinde & notæ, quot in X sunt cubi. Ergo radicis Z tot sunt notæ, quot membra cubi dati X. Quod erat demonstrandum.

PORISMA VI.

f k m abc
X 102, 503, 232 (468 Z
f a+ b+ c
102, 000, 000 400+60+8
k a 400
38, 503, 000 b 60
m c 8
5, 167, 232

Iisdem positis, dico, in membro ultimo f latet cubus solus ultimi radicis segmenti a.

In penultimo membro k, *una cum* 38 *residuo membri* f, *latet solidus numerus ter genitus ex quadrato ipsius* a *ducto in* b; & *solidus ter genitus ex quadrato ipsius* b *ducto in* a; & *cubus ipsius* b.

In membro m, *una cum* 5167 *residuo membri* k, *continetur solidus ex quadrato ipsius* a+b, *id est* a *cum* b, *ter ducto in* c; & *solidus ex quadrato ipsius* c *ter ducto in* a+b; & *cubus ipsius* c.

Pe-

Demonstratio.

CUm enim per Porisma V. radix Z tot constet notis, adeoque & segmentis, quot sunt membra in X; in singulis autem membris, ut patet ex Porism. III. & IV. ejusque corollario, lateat cubus alicujus segmenti radicis: manifestum est, segmenti radicis ultimi *a*, adeoque & maximi, cubum latere in membro *f* ultimo, ac proinde maximo; & sic deinceps. Ex quibus etiam, & per III. ac IV. Porism. patet de solidis. Constat ergo quaesitum.

HIS PRAEMISSIS.

JAm ratio dabitur eorum omnium, quae superiori capite ad extrahendam radicem cubicam fuere praescripta.

I. Resumatur exemplum Cap. praeced. Quia per VI. Porisma in postremo *f* membro nihil continetur aliud, quàm cubus segmenti radicis ultimi, idcirco ex membro *f* elicitur radix cubica, quàm potest maxima *a*, eaque post lunulam

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	1458 Z
	64	...	...	
n	38,	503	...	a 400
	33	336	...	b 60
				c 8,
p	5,	167,	232	
	5,	167,	232	
			o	a+b+c
				400+60+8

reponitur, radicis quæsitæ futura postremum segmentum, seu nota ultima: cubus verò ejus subtrahitur a membro f, residuo 38, si quod sit, infra lineam notato. Quia autem in reliquis membris omnibus, præter cubos reliquorum segmentorum radicis, continentur in singulis præterea sex solidi; idcirco hæc operatio soli postremo membro convenit, & in sequentibus membris non repetitur.

II. Quod verò nota radicalis a sit legitima, licet extracta sit ex membro f simpliciter accepto, hoc est loci valore dissimulato; sic ostendo. Tota radix Z tot constat notis, quot X numerus datus mem-

membris, per Porism. V. Quare cum singula membra *k*, *m* tres contineant notas, ante *a* erunt tot notæ, seu loca, quot ante *f* locorum terniones. Ergo cum per construct. *a* nota simpliciter accepta, sit radix cubi, latentis in membro *f*, simpliciter accepto; *a* quoque, ex loco æstimata, erit per II. Porism. radix cubi latentis in membro *f*, ex loci valore æstimato. Hæc demonstratio etiam valet in reliquis membris, in quibus compendii gratia, quemadmodum in plerisque arithmeticis operationibus, loci valor dissimulatur, nullo, ut jam ostendi, præjudicio veritatis.

	f	k	m		abc
X	102,	503,	232		(468. Z
	64	...	...		
n	38,	503	...		a. 400
	33	336	...		b. 60
					c. 8
P	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			0		a + b + c
					400 + 60 + 8

III. Reliquæ radicis notæ artificio inter se uno quidem, sed a priori penitus diverso, reperiuntur. Illius rationi aperien-

	f	k	m		abc
X	102,	503,	232		(458 Z
	64	...	...		
n	38,	503	...		a 400
	33	336	....		b 60
					c 8
p	5,	167,	232		
	5,	167,	232		
			o		a + b + c
					400+60+8

riendæ plurimum conducet, cubum binomii $a+b$ ante oculos proponere, qui per Porism. III. est.

$$aaa + 3\,aab + 3\,abb + bbb.$$

Hujus postrema pars aaa ostendit, in ultimo membro f latere solum cubum notæ ultimæ radicis; reliquæ partes ostendunt, quid contineatur in membro penultimo n, constante ex 38, residuo membri f, & k, de quo jam agitur, ac in reliquis deinceps omnibus. Quia igitur, ut patet & ex formula hac, & ex VI. Porismate, in membro n continentur solidus ter genitus ex quadrato notæ radicalis jam repertæ a, ducto in b adhuc

huc incognita; item solidus ter factus ex quadrato ejusdem *b* in *a*; item cubus ejusdem *b*: manifestum est notam illam penultimam, seu segmentum *b* radicis adhuc incognitum, eliciendum esse ex membro *n* dati numeri penultimo, utique per divisionem, quæ sola resolvit, quod composuit multiplicatio.

Quia verò latera, membrum *n* producentia, partim cognita sunt, partim incognita; ad constitutionem divisoris assumenda erunt sola cognita, nimirum $3aa$, & $3a$, hoc est triplum quadrati notæ radicalis jam inventæ *a*, nempe 48, & triplum ejusdem *a* nempe 12 quæ in unam summam collecta dant divisorem 492.

48
12
492

IV. Per hunc autem, ut eruatur nota radicis latens *b*, dividitur non totum membrum *n* 38,503, sed dempta nota prima, nimirum 38,50 hac de causa. Quoniam divisor 492 constans ex $3aa + 3a$, nullo modo pertinet ad cubum *bbb*, utpote qui producatur ex sola nota incognita *b*; patet per hunc dividi oportere tantum solidos $3aab + 3abb$ supradictos. Nihil autem ex hisce solidis ad notam, seu locum membri *n* primum pertinet, ad quem

quem se extendit cubus genitus ex b, quemadmodum ex iis apparebit, quæ mox subjungam num. VII.

V. Reperta porro per divisionem nota radicalis b ducitur in triplum quadrati ex a, & quadratum ipsius b ducitur in triplum ipsius a, ac demum b in se ducitur cubice, ut habeantur tria producta $3aab+3abb+bbb$, quæ in membro n, per Por. VI. continentur, atque idcirco ab eodem auferuntur. Quorsum verò fiat hæc subtractio, liquebit ex clausula totius demonstrationis.

$3aa$	48
$3a$	12
	492

VI. Cur autem $3aa+3a$ hoc est triplum quadrati ipsius a, & triplum ipsius a, quæ divisorem constituunt, ordinari debeant juxta hanc formulam; item cur tria producta $3aab+3abb+bbb$, hoc est solidus ex triplo quadrati notæ radicalis a ducto in notam radicalem b, una cum solido ex triplo a in quadratum ipsius b, una cum cubo ipsius b, scribantur juxta formulam hanc alteram: restat nunc, ut breviter demonstremus. Et quidē quod attinet ad partes divisoris $3aa+3a$

288	$3aab$
432	$3abb$
216	bbb
33336	

ma-

manifestum est, quadratum ipsius *a* uno loco, seu gradu attolli altiùs, quàm *a*: ideoque 8, prima nota ipsius 3*aa*, 48, ponenda supra 1, secundam notam tripli ipsius *a*, id est 12. Quod attinet ad tria producta, quia 3*abb* fit ex 3*a* in *bb*, & cubus *bbb* fit ex *b* in *bb*, estque *a* nota radicis uno loco altior, quàm *b*; manifestum est ex Porism. VI. C. II. lib. I. solidi 3*abb*, hoc est 432, primam notam 2 etiam uno loco altiorem esse prima nota cubi *bbb*, 216; ideoque scribendam supra 1, notam secundam cubi *bbb*, 216. Rursum, quia solidus 3*aab* fit ex 3*a* in *ab*, solidus autem 3*abb* fit ex 3*a* in *bb* (gignitur enim tam 3*aab*, quàm 3*abb* ex lateribus quocumque inter se ordine multiplicatis, ut demonstravi in schol. XVIII. lib. VIII.) estque *a* nota radicis uno loco altior, quàm *b*; manifestum est solidi 3*aab*, hoc est 288, primam notam 8 uno quoque loco altiorem esse prima nota solidi 3*abb*, hoc est 432: ideoque scribendam supra solidi 432 notam secundam 3. Atque hæc dictæ collocationis est ratio adæquata.

VII. Ex qua etiam cernitur, quod supra n. IV. assumptum fuit, nihil ex solidis 3*aab*, & 3*abb* pertinere ad notam primam

	f	k	m	abc
X	102,	503,	232	(458 Z
	64	...	...	
n	38,	503	...	a 400
	33	336	...	b 60
				c 8
p	5,	167,	232	
	5,	167,	232	
			o	a + b + c
				400 + 60 + 8

membri *n*. Nam si tria illa producta sic collocata addantur, patet cubi 216 primam notam 6 reponi in primo loco summæ 33336, solidos verò 3*abb*, & 3*aab*, hoc est 432, & 288 totaliter pertinere ad loca summæ sequentia. Et quia trium productorum summa 33336 æque multis constat notis, ac membrum *n*, utpote per Porisma VI. in eo latens, adeoq; ab illo subtrahenda; manifestum est, nihil quoque ex solidis 3*aab*, & 3*abb* contineri in primo membri loco; ac proinde cum dicti solidi soli sint dividendi, ut ostendi num. III. dividitur membrum *n* dempta nota prima.

Porro trium productorum valorem ve-

verum exprimit hæc formula, quem in operando dissimulatum esse sine veritatis præjudicio, liquet ex supra demonstratis n. II.	28800,000 4320,000 216,000 ——— 33336,000

VIII. Reliquum est, ut dicamus, cur ex membris cæteris eodem prorsus modo eliciantur radicales notæ reliquæ, quo ex penultimo. Causa est manifesta ex Porism. VI. Quemadmodum enim in membro penultimo n, composito ex 38 residuo membri f, & ex k, continebatur $3aab + 3abb + bbb$; hoc est solidus ex quadrato radicalis notæ a ducto ter in radicalem b, & solidus ex radicali a ter ducta in quadratum radicalis b, & cubus ipsius b: ita in membro p, quod componitur ex 5167 residuo membri n, & ex m, continentur solidus ex quadrato radicis eousque acquisitæ $a+b$, hoc est a cum b, ter ducto in radicalem c, una cum solido ex $a + b$ ter ducto in quadratum ipsius c, una cum cubo ipsius c, quæ quantitates, si $a + b$ brevitatis causa interpretemur per d, exprimuntur hac formula, $3ddc + 3dcc + ccc$, quæ formula per omnia similis est priori $3aab + 3abb + bbb$.

IX. Postremo quæritur, quare cum

membrum ultimum eſt 1, vel 2, vel 3, pro radicali nota ſcribenda ſit unitas.

Eſto cubus G, ejuſque radix L. Quoniam per Poriſ. V. 1 in radice L tot ante ſe habet notas, ſeu loca, quot ante 3 ultimum membrum cubi dati antecedunt membra; manifeſtum eſt hujus valorem eſſe 3, 000, 000, illius verò 100, ſic, ut 1 ante ſe tot habeat cifras, quot 3 cifrarum terniones. Atqui cubus numeri 100, nempe 1000,000, tot etiam ante 1 habet cifrarum terniones, quot in radice 100 ſunt cifræ, ut patet ex actu ipſo multiplicationis. Ergo etiam cubus radicis 100 tot habet cifras, quot membrum 3, 000, 000. Ergo cubus ipſius 100, nempe 1,000,000, latet in membro 3,000, 000; ac proinde 1 eſt vera radicalis nota, quæ ex ultimo membro 3 erat elicienda.

G 3, 307: 949

(149 L

X. Explicatis hunc in modum, ac demonſtratis omnibus, quæ ad extrahendam e numero dato radicem cubicam ſuere præcepta, demonſtratio tota ſic concluditur.

Numerus datus X, ut patet ex toto opere extractionis, æqualis eſt cubo ex

a, ſo-

a, solido ter ex quadrato ipsius *a* in *b*, solido ter ex *a* in quadratũ ex *b*, cubo ex *b*; item solido ter ex quadrato ipsius *a*+*b* in *c*, solido ter ex *a*+*b* in quadratum ipsius *c*, cubo ex *c*. Quæ quantitates, *a*+*b* interpretando per *d*, speciose sic exprimuntur.

abc	
102,503,232 (468 Z	
X	
a	400
b	60
c	8

$$aaa + 3aab + 3abb + bbb$$
$$+ 3ddc + 3dcc + ccc$$

At iisdem quantitatibus per Poris. IV. æquatur cubus radicis Z, seu *a*+*b*+*c*. Ergo X est ipse cubus radicis Z, sive *a*+*b*+*c*. Quod erat demonstrandum.

Est autem numerus datus X æqualis quantitatibus supradictis, quia illæ omnes ab eo fuere subtractæ, nec quidquam ultima subtractione peracta superfuit. Quod si aliquid superfuisset, tunc numerus datus, illo residuo mulctatus, fuisset æqualis quantitatibus dictis; ac proinde & cubus radicis inventæ.

CAP. V.

Cujuscumque radicis extractio.

Quadratam, & cubicam cæteræ omnis generis radices quadam proportione imitantur. Quemadmodum enim, ut ex Cap. II. & IV. patuit, harum extractio ex generatione quadrati, ac cubi a radice binomia derivata est; ita & reliquarum quæque ex genesi potestatis suæ derivabitur. Itaque generale artificium radicis, e potestate data eliciendæ, exhibent formulæ potestatum a radice binomia genitarum.

	0. Unitas.
Radix.	1. $a + b$.
Quad.	2. $aa + 2ab + bb$.
Cubus.	3. $aaa + 3aab + 3abb + bbb$.
Quadquad.	4. $aaaa + 4aaab + 6aabb + 4abbb + bbbb$.
Supersol.	5. $aaaaa + 5aaaab + 10aaabb + 10aabbb + 5abbbb + bbbbb$.
Quad.cub.	6. $aaaaaa + 6aaaaab + 15aaaabb + 20aaabbb + 15aabbbb + 6abbbbb + bbbbbb$.
Supersol.II.	7. $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

Ra-

Radix $a+b$ in se ducta gignit quadratum: hoc in radicem facit cubum: cubus in tadicem facit quadratoquadratum: & sic deinceps, potestate quavis in radicem ducta gignitur proxime altior. Potestates porro, ut liquet ex propositione VIII. lib. IX. ejusque scholio, sunt termini progressionis geometricæ, ab unitate incipientis, in qua quorum unaquæque potestas locum occupet, & quot habeat unaquæque dimensiones, indicant numeri singulis appositi, qui ea de causa exponentes appellantur. In postrem a formula brevitatis causa a^7 significat *aaaaaaa*: &c.

Reliquum est, ut qua ratione, per formulas jam dictas, cujusvis generis radicum extractiones dirigantur, exponamus.

Numerus datus, ex quo radix extrahenda est, a dextra in sinistram dividatur in membra, tot notis constantia, quot indicantur ab exponente potestatis, radicem extrahendam denominantis, præter membrum ultimum, quod constare potest paucioribus. Quoniam igitur quadratus duas, cubus tres habet dimensiones; in hoc post ternas, in illo post binas quasque notas comma interponitur.

Quod si numerus datus minor sit, quàm ut sic in membra dividi possit, quid tum facto sit opus, & quî radix data ex eo elicienda, dicetur Cap. VII.

Tum formula potestatis, radicem quæsitam denominantis, inspicienda. Hujus postremum nomen, sive particula continet operationem, postremo membro debitam: per reliquas omnes, membri penultimi, ac cæterorum extractio dirigitur. Quoniam igitur in postrema particula continetur sola radicis quæsitæ potestas pura; elicienda erit ex membro ultimo numeri dati radix ejus generis, cujus petitur, quàm poterit maxima, præsidio tabellæ, continentis potestates simplicium numerorum 2,3,4,&c., quam eum in finem oportebit conficere. Reliquis deinde, ut Cap. I. & III. num. II. præscribitur, expletis, absoluta est operatio postremi membri.

In operatione membri penultimi, quæ & omnibus reliquis communis est, duæ sunt partes præcipuæ: prima inventio divisoris, per quem nova radicalis nota debet innotescere: secunda, quo modo nova nota radicalis, divisoris opera inventa, multiplicari debeat, ut habeantur producta, quæ a membro auferantur

tur

tur. Utrumque formulæ potestatum pulcherrime exhibent, litterarum *a*, & *b* varia conjunctione. Et *a* quidem significat quidquid ex radice eatenus acquisitum est, ac cognitum: *b* verò notam radicis designat adhuc incognitam, & proxime inveniendam. Inventionem divisoris indicant particulæ mediæ per litteras *a*, hoc est per id, quod in iis cognitum jam est: medias autem particulas voco omnes, dempta prima, & ultima. Multiplicationis modum præscribunt particulæ omnes, dempta ultima, quam supra jam dixi soli primo membro inservire.

Itaque, quoniam in particula media formulæ quadrati habetur $2a$; radix, eatenus inventa, duplicata dabit divisorem. Rursum, quoniam in eadem formula, dempta ultima particula, habentur $2ab + bb$; oportebit divisorem, hoc est $2a$ ducere in *b* notam radicalem proxime inventam, & ipsam *b* in se ipsam.

Pari modo quia in particulis mediis formulæ cubi habentur $3aa + 3a$; quadratum radicis eatenus inventæ triplicatum, & ipsa radix triplicata dabunt divisorem, sed ea ratione dispositæ, ut præscribitur num. III. Cap. III. Rursum, quoniam in

for-

formula cubi, dempta particula ultima, habentur $3aab + 3abb + bbb$; oportebit propter $3aab$, triplum quadrati radicis eatenus inventæ ducere in notam, jam proxime inventam b; & propter $3abb$, triplum ipsius radicis in quadratum ipsius b, & propter bbb, ducenda erit b cubice in se ipsam.

Sed placet hujus methodi generalis exemplum dare in radice supersolida prima, cujus nimirum potestas est dimensionum 5. Oporteat igitur radicem supersolidam primam extrahere ex numero X.

	d	c	a b
X	4591,	65024	(5 4
	3125		B
f	1466,	65024	
	1466	65024	
		0	

I. Quoniam hujus radicis potestas est 5 dimensionum; post quinque notas ponatur comma, eritque numerus X sectus in duo membra d, & c; ac totidem notis constabit radix.

II. Inspiciatur formula supersolidi. Quoniam ultima ejus particula est $aaaaa$, oportet ex ultimo membro d elicere radi-

$$\overset{6}{aaaaa} + \overset{5}{5aaaab} + \overset{4}{10aaabb} + \overset{3}{10aabbb} + \overset{2}{5abbbb} + \overset{1}{bbbbb}.$$

Formula supersolidi.

dicem supersolidam. Præsidio igitur tabellæ, ad eum finem construendæ, ut simplicium Supersolidi contineantur, quæratur supersolidus ipsi membro d par, aut proxime minor. Is est 3125, ejusque radix 5, quam scribe post lunulam: potestatem vero 3125 aufer a membro d, residuo 1466 infra lineam notato. Hæc operatio soli postremo membro convenit.

III. Residuo 1466 adscribe membrum c, ut ex utroque fiat membrum novum totale f. Jam dictum supra, medias particulas, (quæ hic sunt, secunda, tertia, quarta, quinta,) dirigere per litteras a divisoris inventionem. Quoniam igitur in quinta reperis $5aaaa$, radicis hactenus inventæ, quam designat a, biquadratus erit quintuplicandus, ut fiat g. Et quia in quarta habetur $10aaa$, oportebit cubum ipsius aa decuplare, ut fiat h. Rursus, quia in tertia particula reperio $10aa$, de-

3125.	g
1250.	h
250.	k
25.	m
325525.	n

3125. g	
1250. h	
250. k	
25. m	
3252525. n	

decuplandus erit quadratus ipsius a, ut fiat k. Tandem, quia in secunda habetur $5a$, quintiplicanda erit a, ut fiat m. Hi quatuor numeri, notis, ut hìc adjecta declarat formula, dispositis, in unam summam collecti, dabunt n divisorem, per quem tentanda est divisio membri f, ut innotescat proxima radicis nota 4 incognita, designata per b.

IV. Reliquum est, ut multiplicatio ad extractionem requisita instituatur. Eam verò dirigi a tota formula, dempta particula ultima, quæ hìc sexta, jam dìctum supra. Quoniam igitur particula quinta est $5aaaab$, g quintuplũ biquadrati radicis prius acquisitæ a 5 ducendum est in b 4 notam radicalẽ paullo ante incognitam, & jam proxime inventam, ut fiat p. Deinde, quia particula quarta est $10aabb$, oportebit b decuplum cubi ex a 5 ducere in quadratum ex b 4, ut fiat q. Rursum, quia particula tertia est $10aabb$,

12500.	p
20000.	q
16000.	r
6400.	s
1024.	t
14665024.	z

de-

decuplum quadrati ex *a* 5, nempe k, ducendum erit in cubum ex *b* 4, ut fiat *r*. Jam quia particula secunda est 5*a* *bbbb*, quintuplum ipsius *a* 5 ducendum erit in biquadratum ex *b* 4, ut fiat *s*. Denique quia prima particula est *bbbbb*, oportebit *b* 4 ad surdesolidum multiplicando evehere, ut fiat *t*.

Hæc 5 producta, numeris, ut in adjecta formula, collocatis, in unam colligantur summam *z*, quæ a membro *f* subducatur.

Eodem prorsus modo, si plura essent membra, ex illis, eadem formula dirigente, notæ radicales reliquæ elicerentur, littera *a* semper designante totam radicem eatenus acquisitam, (quæ hic jam esset 54) *b* verò signante notam radicis incognitam, proxime inveniendam. Atque ita educta est radix surdesolida prima B ex numero dato X, qui, quod post ultimam subtractionem nihil superfuerit, verè est supersolidus, sive surdesolidus primus.

Aliæ radices quæcunque per formulas unicuique potestati proprias simili plane artificio extrahentur.

De-

Demonstratio.

PОrro horum omnium facilis eſt ex iis, quæ cap. II. & IV. in radicis quadratæ, ac cubicæ demonſtrationibus dicta ſunt.

Cæterum, quamvis methodus jam tradita ad omnes omnino poteſtates ſe extendat, convenit tamen potiſſimum ſuperſolidis. In reliquis eſt alia quædam via facilior. Cum enim in qualibet ſerie numerorum continue proportionalium, omnes termini, hoc eſt omnes poteſtates, ſint vel ſuperſolidi, vel quadrati, vel cubi ſimul, & quadrati, ut demonſtravi in Sch.Prop.VIII.Lib..IX.; manifeſtum eſt, ex qualibet poteſtate non ſuperſolida radicem ipſi propriam elici poſſe extractione radicis quadratæ, aut cubicæ, aut utriuſque ſæpius repetita. Quod ita fiet.

Ex Scholio noſtro poſt Prop.VIII. Lib. IX. cognoſce, an poteſtas radicis extrahendæ ſit quadratus ſimul, & cubus; an quadratus, vel cubus tantum. Si eſt quadratus ſimul & cubus, toties extrahe radicem quadratam, quoties poteſtatis exponens, ejuſque dimidium, & dimidii dimidium, & ſic deinceps poteſt biſecari; & toties

ties cubicam, quoties residuum, & residui pars tertia, & sic deinceps poterit trisecari. Detur extrahenda ex A numero R. ^{18}, id est radix potestatis, cujus exponens 18. Quoniam 18 potest bisecari, extrahe ex A radicem quadratam B. Et quia residuum 9 non potest bisecari, sed trisecari; ex radice B extrahe radicem cubicam C. Rursum, quia residui tertia pars 3 potest trisecari, ex radice C extrahe rursus radicem cubicam D; erit D, R. ^{18}, ex dato numero A extracta. Oporteat deinde ex numero A extrahere R. ^{6} hoc est radicem, cujus potestas exponentem habet 6. Quoniam 6 potest bisecari, ex A elice radicem quadratam F: & quia residuum 3 non potest bisecari, sed trisecari; ex F elice radicem cubicam G: erit hæc R. ^{6}, ex dato numero extracta.

A (B
(C
(D

$A \begin{cases} F \\ G \end{cases}$

Si potestas radicis extrahendæ est cubus tantum, toties extrahenda est radix cubica, quoties exponens, & ejus tertia pars, & tertia tertiæ, & sic deinceps potest trisecari: ut si ex numero A extrahenda sit R. ^{27}, quia 27 potest

tri-

trisecari, ex A extrahe R.^{3} H: & quia ipsius 27 tertia pars 9 potest trisecari, ex H extrahe R.^{3} I: & quia ipsius 9 tertia pars 3 potest trisecari, ex I elice R.^{3} K: erit K, R.^{27}, ex dato numero A extracta.

A $\begin{cases} H \\ I \\ K \end{cases}$

Si potestas radicis quæsitæ sit quadratus tantum, toties extrahe radicem quadratam, quoties potestatis exponens, ejusque dimidium, & dimidii dimidium, & sic deinceps potest bisecari: ut si oporteat ex dato numero A extrahere R.^{8}, quia exponens 8 potest bisecari, ex A extrahe R.^{2} M: & quia dimidium 4 potest bisecari, ex M extrahe R.^{2} N: rursum quia dimidium 2 potest bisecari, ex N elice R.^{2} O: erit O, R.^{8}, quæ ex numero dato quærebatur.

A M N O

Horum omnium demonstratio patet ex Scholio Prop. VIII. Lib. IX.

CAP.

CAP. VI.

Extractio quarumlibet radicum e quibuscumque fractis.

FRactorum alii communes sunt, alii, quos decimales Libro II. Cap. IX., & seq. appellavimus, Radices ex utrisque hoc capite eliciemus.

Ex Fractis communibus radix quaecumque.

OPus totum unica praeceptione continetur. Ex numeratore, & denominatore fractionis datae radices extrahantur, quales expetuntur. Fractio ex his composita erit radix quaesita fractionis datae.

$$\begin{matrix} a & & c \\ \frac{9604}{39601} & \Big\{ & \frac{98}{199} \\ b & & d \end{matrix}$$

Ut si ex fractione data a, b petatur radix quadrata, vel alia quaevis; ex numeratore a eliciatur radix c speciei datae; item ex nominatore, quae sit d. Fractio c, d erit radix quaesita fractionis datae a, b.

Demonstratio est manifesta, quia ex vi constructionis fractio *c*, *d* juxta exigentiam radicis datæ multiplicata producet fractum *a*, *b*.

Ex Fractis decimalibus Radix quadrata.

SI decimalis dati maximum signum est par, ut fit in A; extrahe ex A, tamquam pure integro, radicem, cujus primam notam affice signi maximi dimidio. Erit hæc, nempe B, radix quæsita.

I II I
A 2401 (49 B

C 2401, 49 d
k 100. 10, f

Si signum maximum est impar, ut in C, adjecta cifra fiat par, ut in D. Tum ex D eliciatur radix E, ut supra. Erit hæc radix quadrati C.

I II III
C 2 0 2 5

I II III IV I II
D 2 0 2 5 0 (14·2 E

III IV
8 6

Ad

Ad demonstrationem esto Lemma: si a numero G, qui constet unitate, & cifris paribus, auferatur semissis cifrarum, ut in K; erit K radix quadrata numeri G. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio Lib. I. C. VII., habetur quadratus ex K, si cifræ ejus duplentur. Sed ex vi constructionis, tunc K fit G. Ergo G est quadratus ex K. Hoc posito.

G	10000
K	100

Demonstratur Pars I.

FRactus c, k, cujus numerator c iisdem constat notis, quibus A, nominator verò k tot cifris, quot indicantur a signo maximo ipsius A, æquatur ipsi A, per Theorema II. Cap. X. Lib. II. Atqui, ut ex fracto c, k extrahatur radix quadrata, tantum opus est, ex numeratore c, hoc est ex dato A, tamquam integro, elicere radicem quadratam d, & ex nominatore k radicem f: elicitur verò ex k radix quadrata, ut patet ex Lem., si dimidietur cifrarum numerus, hoc est si dentur ipsi f tot cifræ, quot indicantur a semisse maximi signi ipsius A. Ergo etiam, ut ex A extrahatur radix, solum opus est ex A, tamquam integro, elicere radicem d, eique ſubſcribere nominatorem f, qui conſtet unitate, & tot cifris, quot indicat ſemiſſis maximi ſigni ipſius A, ut habeatur fractus d, f. Atqui fractus d, f, per Theor. II. C. X. L. II., eſt æqualis B; cum d ex vi cõſtructionis iiſdem conſtet notis, quibus B; & f tot habeat cifras, quot indicantur a ſemiſſe maximi ſigni ipſius A; hoc eſt, per conſtruct., quot indicantur a ſigno maximo ipſius B. Ergo etiam B eſt radix quadrata dati A. Quod erat demonſtrandum.

Demonſtratur Pars II.

PEr axioma Cap. X. L. II. D eſt æqualis C. Atqui per I. partem E eſt radix quadrata ex D. Ergo E etiam eſt radix quadrata ex C. Quod erat demonſtrandum.

Ex fractis decimalibus radix cubica.

SI maximum ſignum decimalis dati triſecari poſſit, ut in A contingit; ex A, tamquam pure integro,

I II III I
A 973 3 6 (46 B.
97336 a 46 c
1000 b 10 d

rej

radicem extrahe cubicam, cujus primam notam affice signi maximi triente. Erit hæc, nempe B, radix cubica ex A.

	I	II	III	IV						I	II				
C	9 7	3	3	6											
	I	II	III	IV	V	VI				I	II				
D	9 7	3	3	6	0	0				(2 1	3	F			
										II	III	IV	V	VI	
										7	0	0	0	3	

Si maximum signum trisecari nequeat, ut accidit in C, adjice unam, vel duas cifras, ut possit, quemadmodum vides in D. Tum ex D elice radicem cubicam F, ut supra.

Ad demonstrationem esto Lemma; si detur numerus G constans unitate & cifris, quas metitur ternarius; K unitas, cum cifrarum triente, erit radix cubica ipsius G. Nam, ut patet ex multiplicationis compendio, habetur cubus ex K, si ipsius cifræ triplentur. Sed tunc ex vi constr. fit G. Ergo G est cubus ex K.

1000000 G
100
K

Hoc posito, demonstratio plane similis erit præcedenti.

Ex fractis decimalibus radix quæcumque.

EX numero dato, tamquam pure integro, extrahe radicem datam. Tum maximū signum dati numeri divide per exponentem radicis datæ. Quotiens dabit signum, quo afficienda est nota prima radicis inventæ. Si maximum signum per exponentem radicis datæ dividi non possit, adjice tot cifras decimales, ut possit; & operare, ut supra.

Exemplum.

I II III IV V I
F 4 5 9 1 6 5 0 2 4 (54 H

I II III IV V VI VII VIII IX X I II
F 1 0 9 9 5 1 1 6 2 7 7 7 6 (256 H

OPorteat, ex numero F extrahere R.5, hoc est supersolidam primam. Ex F, tamquam integro, elice R.5. Tum per 5, exponentem radicis datæ, divide maximum signum dati F, quod in primo exemplo est V. seu 5, in secundo est X. seu 10. Quotiens, qui est in primo 1; 2 in se-

secundo, dat signum, quo afficienda est prima nota radicis inventæ; eritque H radix supersolida dati F.

Demonstratio eadem prorsus, quæ supra, præmisso hoc Lemmate. Datus sit numerus C, constans unitate, & cifris, quas numerus D metiatur per numerum E. Erit numerus F, constans unitate, & cifris a quotiente E indicatis, radix dati numeri C, a divisore D denominata.

C 100000,00000	
R 5)	R 2)
D	E
	100
	F

Nam cum D metiatur cifras dati C per E; D in E ductus producet cifras dati C. Ergo per XVI. L. VII. etiam E in D producet C. Atqui per construct. E est numerus cifrarum ipsius F. Ergo cifræ F ductæ in D producunt cifras dati C. Ergo C est potestas, cujus exponens est D, & radix F.

CAP. VII.

Approximatio radicum.

SI in extractione radicis quadratæ, cubicæ, vel alterius cujuscumque post subtractionem ultimamaliquid supersit; certum erit ex iis, quæ II., & IV. Cap. sunt demonstrata, numerum, cujus radix quærebatur, non esse quadratum, aut cubum, aut aliam potestatem; ac proinde non habere radicem quadratam, aut cubicam, seu aliam pro quæsiti ratione. Poterunt nihilominus radices exhiberi, quæ ad verám impossibilem, quæ surda, seu irrationalis abArithmeticis appellari solet, accedant propius semper, ac propius in infinitum; hoc est quæ ab impossibili vera differant quantitate, minori quacumque data; ac proinde quæ per seipsas multiplicatæ quadratice, vel cubice, vel aliter pro gradu dato, producant quadratos, vel cubos, vel &c. differentes a dato numero, quantitate quacumque data minori. Artificium est ejusmodi.

I. Numero dato *a*, ex quo aliquid superfuit, adjiciantur aliquot cifrarum de-

a b c d m
I II III IV I II
2507 | 00,00 (50 | 06 2500
7 I II III IV I II III IV
k 9964 25060036
f n

decimalium binarii, si radix quadrata petitur; aliquot terniones, si cubica; aliquot quaterniones, si biquadrata; quinades, si supersolida; & sic deinceps, juxta exponentem uniuscujusque potestatis. Ex numero sic aucto *a*, *b* radicem talem elice, qualis petitur, ut Capite præcedente traditum est; hoc est extractionem radicis inchoatam prosequere. Novæ radicales notæ *d*, prioribus *c* adjunctæ, radicem dabunt, propinquiorem veræ impossibili.

m
I II III IV V VI I II III I II
2507 | 0 0,00 (50 | 06 2500
a b c d
II III IV V VI II III IV V VI
K 7 9964 25060036
f n

In exemplo extractionis quadraticæ, hic

III
I II III IV V VI I II III I II
1 5 0 7 | 0 0, 0 0 (5 0 | 0 6 7 5 0 0
a b c d
II III IV V VI III III IV V VI
k 7 9 9 6 4 1 5 0 6 0 0 3 6
f n

hìc apposito, quadratum prioris radicis *c* est *m*, quod a numero dato *a* deficit, numero *k*. Quadratum verò radicis *c d* est *n*, quod deficit ab dato *a*, per *f*. Est verò *f* minus, quàm *k*. Porro notæ residui *f* sunt semper homogeneæ totidem primis notis numeri *a*, *b*.

Quod si pluribus semper, ac pluribus cifrarum binariis, ternariis &c. adjectis continuetur extractio; appropinquabitur ad radicem veram propius in infinitum; sic ut differentia fiat, quacumque data minor; numquam tamen ad æqualitatem pervenietur.

II. Ex his patet, quid præstandum sit in fractis vulgaribus; adjiciendæ videlicet cifræ, ut supra, tam numeratori, quàm nominatori, si in utroque aliquid superfuit; aut alterutri tantum, si aliquid superfuit tantum in alterutro.

III.

III. Eodem artificio ex numero, quantumvis parvo, extrahetur radix, quantumvis alta. Exemp. gr. ex binario R. 9 hoc est radix cubo-cubica. Adjungentur enim binario aliquot cifrarum nonades, quia exponens radicis quæsitæ est 9, & ex binario sic aucto extrahetur radix quæsita, ut Capite præcedente traditur.

Quoniam verò mirum videri solet, methodo extractionis jam explicatâ per fractos numeros ad radicem veram appropinquari in infinitum, neque tamen ad eam posse unquam perveniri; ac proinde impossibilem esse; videtur hic locus exigere, ut ejus rei demonstrationem producamus. Esto igitur.

THEOREMA.

NUmerus non quadratus, aut non cubus sit a, hoc est, cujus integer numerus nullus sit radix quadrata, vel cubica. Demonstrandum est, ejus radicem etiam ne fractionibus quidem ullis posse exhiberi; hoc est, nullum posse dari, aut fractum numerum, aut mixtum ex integro, & fracto, qui in se ductus quadraticè, vel cubicè producat datum numerum a.

Demonstratio.

1.	x	a.6
1.	x	t.a.6
m		y
B—		—D
n		z

DEtur enim, si fieri potest, fractus B, qui sit radix numeri *a*: (si fingeretur radix esse integer cum fracto, integro ad fractum reducto, prior casus non mutabitur) hic fractus B, in se ductus quadratice, aut cubice, alium gignet fractum D: videlicet si tam numerator *m*, quàm nominator *n* in se ducantur quadratice, aut cubice. Quoniam igitur tam *a* per hyp., quàm D per const. sunt quadratus, vel cubus fracti B; erunt *a*, & D æquales. Quare, cum per Theor. II. Cap. II. L. II. unitas (1) sit ad fractum D, ut nominator *z* est ad numeratorem *y*; etiam 1 erit ad *a*, ut *z* ad *y*. Jam verò, quia numeri *z*, & *y* quadrati sunt, vel cubi, utpote geniti ex numeris *n*, & *m* in se ipsos ductis quadratice, vel cubice; inter eos cadent, vel unus medius proportionalis, per XI. L. VIII. si quadrati sint; vel duo medii, per XII. L. VIII. si sunt cubi. Quare, ut jam ostendi, cum 1 sit ad *a*, ut *z* ad *y*; etiam inter 1, & *a* cadet unus medius *x*, vel duo *x*, *t* per VIII. L. VIII. Er-

go

go per VIII. L. IX. *a* quadratus est, vel cubus, ejusque radix quadrata, vel cubica est numerus integer *x*. Quod est absurdum, cum hypothesim destruat. Non igitur &c.

Eodem modo Theorema non de quadrato solum, & cubo, sed etiam de potestate quacumque demonstrabitur.

Quamvis autem numerorum non quadratorum, & non cuborum &c. radices impossibile sit numeris explicare; possunt nihilominus exhiberi geometrice hunc in modum.

Datus sit numerus non quadratus 12, cujus duo latera, (hoc est, quæ per invicem multiplicata ipsum producunt) sint 3, & 4. Exhibeantur deinde duæ rectæ lineæ, una 3 partium æqualium, quarum altera sit 4; interque eas per XII. L. VI. recta inveniatur media proportionalis. Hæc erit radix quadrata. Ejus enim quadratum per XVII. L. VI. æquale est extremarum 3, & 4 rectangulo, quod est 12 ex hyp. Quare numeri surdi, seu irrationales meritò geometrici numeri appellari possunt.

Scho-

Scholium.

Tametsi radices surdæ nullis numeris, ut jam ostendimus, exprimi possint; ex his tamen, quod minùs exercitatis incredibile videri queat, quædam inter se commensurabiles sunt; ac proinde licet ipsæ nequeant exprimi numeris, potest tamen earum proportio. Rem omnem triplici Theoremate complexus exponam.

THEOREMA I.

Radices surdæ numeris absolutis incommensurabiles sunt.

Demonstratio.

Data sit R.8, hoc est radix quadrata numeri 8, & 5. Si 5, & R.8 commensurabiles sint, erunt inter se, ut aliquis numerus a *ad aliquem numerum* b. *Ergo etiam quadratum ex 5, nempe 25, est ad quadratum R. 8, nempe ad 8, ut* aa *quadratus numeri* a *est ad* bb *quadratum numeri* b. *Igitur, quia primus 25 quadratus est, etiam secundus 8, per XXIV. L. VIII, quadratus est: quod repugnat hypothesi.*

5	R. 8
a	b
aa	bb
25	8

Eo.

Eodē discursu, sed per XXV. L. VIII., ipsum de surda radice cubica demonstrabitur. Atque inde id non obscure concluditur de qualibet.

Corollarium.

I. *Hinc patet, diametrum in quadrato lateri incommensurabilem esse Cum enim per XLVII. Lib. I. quadratum diametri duplum sit quadrati ex latere; erit diameter R. 2, hoc est radix quadrata binarii; latus verò, hoc est 1, & R. 2 incommensurabiles sunt.*

II. *Hinc alia via colligitur veritas Theorematis superius demonstrati. Cum enim radices surdæ incommensurabiles sint numero absoluto cuicumque, etiam potestatibus suis incommensurabiles erunt, ut R. 7 quadrato suo 7; R. 3 5 cubo suo 5. Ex quo patet, eas nullis numeris seu integris, seu fractis exprimi posse. Si enim posset radix surda numero exprimi, cum ejus potestas etiam numerus sit, esset surda radix ad suam potestatem, ut numerus ad numerum, ac proinde eidem commensurabilis, contra quam ostensum jam est.*

THEO-

THEOREMA II.

Si una radix surda, dividens surdam alteram, quotientem gignat rationalem, hoc est numerum absolutum; surdæ radices illæ commensurabiles erunt.

Demonstratio.

Datæ sint R. 12, *& R.* 3. *R.* 3, *dividens R.* 12, *quotientem facit R.* 4, *hoc est* 2. *Similiter R.* 8, *dividens R.* 18, *facit R. A, hoc est R. B, hoc est fractum C. Dico igitur R.* 12, *& R.* 3; *item R.* 18, *& R.* 8 *commensurabiles esse. Nam per definitionem divisionis R.* 3 *dividens est ad R.* 12 *divisam, ut unitas ad quotientem* 2, *qui ex hyp. absolutus numerus est.* Ergo, &c.

R.12 (R.4 seu 2.
R. 3

A
R.18 (R. $\frac{18}{8}$
R. 8 (R. $\frac{9}{4}$ seu $\frac{3}{2}$ C
B

*Pari modo dividens R.*8 *est ad R.*18 *divi-*

visam, ut unitas est ad C, quotientem absolutum. Ergo, &c.

Exempla adhibui radicum quadratarum; sed eadem est ratio quarumcumque.

THEOREMA III.

SI una radice surda, divisa per alteram surdam, quotiens existat irrationalis; incommensurabiles sunt.

Demonstratio.

DAta sit R. 48, & R 8. Hæc illam dividens, quotientem gignit R.6, quæ irrationalis, sive surda est; cum 6 non sit quadratus. Similiter R.36, dividens R.324, quotientem gignit R.34, irrationalem; cum 4 non sit cubus.

Dico igitur R. 48, & R. 8; item R.324, & R.36 incommensurabiles esse. Nam dividens est ad divisam, ut 1 ad quotientem irrationalem R.6, vel R.34. Unitas

R	48	R. 6.
R	8	
R.3	24	R 3) 4
R.3	6	

tas autem ad quamlibet irrationalem numerum, per Theor. I., incommensurabilis est. Ergo etiam data radix surda dividens, & data surda divisa incommensurabiles sunt. Quod erat demonstrandum.

Divisio simplex radicum, quæ in hoc scholio assumitur, per se est manifesta.

CAP. VIII.

De tabulis Quadratorum, & Cuborum.

SI semel tabulæ conficerentur, quibus singulorum ab unitate numerorum quadrati, & cubi continerentur, sublata esset magna ex parte radicum extrahendarum molestia. Præclare igitur de Arithmeticis Paulus Guldinus noster meritus est, qui omnium ab unitate numerorum, usque ad decimillenarium, quadratos, & cubos exhibuit in appendice libri I. de centro gravitatis.

Con-

Constructio tabularum.

TAbulas ejusmodi ut conficias, aut jam confectas extendas, singulas ab unitate radices per se ipsas multiplica: provenient quadrati omnes, qui rursum in radices ducti, dabunt omnes cubos. Verum quia multiplicatio, in magnis præsertim numeris, molesta est; vias alias breviores, quæ sola additione opus habeant, insignes horum numerorum proprietates suppeditant.

Generantur igitur quadrati ordinatim omnes.

I. Ex continua additione numerorum imparium ab unitate. 1, & 3 faciunt 4 primum quadratum: cui si addas imparem proximum 5, fit 9 quadratus secundus: huic adde imparem tertium 7, fit 16 quadratus tertius: atque ita deinceps. Domonstrat Maurolycus L. I. Arithm. p. 15.

II. Quadrati cujuscumque duplicata radix, unitate adjecta, cum quadrato ipso, dat quadrarum proxime majorem. Demonſtrat Maurolyc. Arithm. Lib. I. p. 15.

Cubi verò ſic.

I. Duo primi impares 3, & 5 dant primum cubum 8. Tres impares ſequentes 7, 9, 11 dant cubum ſecundum 27. Quatuor ſequentes impares 13, 15, 17, 19 dant cubum tertium 64. Et ſic deinceps. Demonſtratur a Maurolyco Arithm. Lib. I. p. 62.

II. Conſtituatur ſeries numerorum a 6 incipiens, & ſemper creſcens per 6. Unitas, adjecta ad 6, dat 7 differentiam primi cubi, & unitatis: quæ adjecta ad 12, dat differentiam cubi ſecundi, & tertii: & ſic deinceps omnes cuborum differentiæ reperiuntur. Inventis autem differentiis, habentur cubi: nam ſi unitati addas 7, fit 8 cubus primus; cui ſi addas ſequentem differentiam 12, fit 27 cubus ſecundus; & ſic deinceps. Vide Maurolycum Lib. citato.

	Differ.	cub.
6	1	1
12	7	8
18	19	27
24	37	94
30	61	125
36	91	216

Usus Tabularum.

TAbulis jam confectis, sic utere. Numerum datum, cujus radix petitur, quære inter quadratos, vel cubos; quem si reperis, etiam radicem illi adscriptam pariter invenies: si non reperies, quære illo proxime minorem, radix huic adscripta erit maxima, quæ citra fractiones elici ex dato numero potest.

Quoniam verò tabulæ Guldini continent quadratos, & cubos radicum omnium usque ad decimillesimā, cujus quadratus est 100000000, novem constans notis, cubus autem 1000000000000 notis constans 13; earum ope obtinebitur quadrata radix omnis numeri, qui notis constet non pluribus, quàm octo; & radix cubica omnis numeri, qui notis scribatur non pluribus, quàm 12.

Quod si radix petatur e numero, pluribus notis constante; semper nihilominus, per dictas tabulas, membra quatuor majora expedientur.

Oporteat ex numero *ac* elicere radicem quadratam, vel cubicam. Partire illū in membra. Tum quære in tabulis nu-

a b c
1, 48, 09, 56, 71, 92, (1557
d 2 48 06 25

k 3, 31

a b c
23, 089, 423, 791, 215 (2847
23 076 090 432,

k 13 424 368

merum *ab* ex quattuor postremis membris conflatum, aut illo proxime minorem, qui erit *d*, & radicem illi adscriptam *f* post lunulam repone. Ex reliquo deinde numero *k b c* extractionem prosequere methodo consueta.

CAP. IX.

Usus laminarum tabulæ Pythagoricæ in extrahenda radice quadrata, & cubica.

PArentur duæ laminæ, ut Cap. VI. L. I, quarum alteri inscribantur unitas, & 8 primi quadrati; alteri vero unitas cum 8 pri-

primis cubis: ea lege, ut cum qaudrati una constant nota, scribantur in triangulo inferiori; cum binis notis constant, prima scribatur in triangulo inferiori, secunda in superiori; cum verò cubi tribus constabunt notis, duæ primæ in inferiori triangulo reponantur, tertia in superiori; cum binis, ambæ in inferiori, & cifra in superiori; cum una, eam loca in inferiori; apposita ad lævam cifra, itemque alia cifra in triangulo superiori: Tunc tamen duæ primæ notæ, quamvis in eodem triangulo consistant, duo loca efficiunt; sic ut secunda ad decades pertineat. Harum lamellarum hæc cubica, illa quadratica appelletur.

Usus porro in extrahenda radice quadrata hic est. Ex ultimo membro radix extrahitur more consueto. Deinde duplum radicis eatenus acquisitæ; si unica nota constet, quære in capite unius laminæ; si pluribus, in capite plurium. His ad dextram applicetur lamina quadratica, ad sinistram lamina exponens. Tum adverte, quis ordo numerum contineat æqualem, aut proxime minorem membro. Numerus laminæ exponentis, denominans ordinem, apponatur radici antea acquisitæ; ipsum vero ordinem exscriptum aufer a membro. Eodem plane modo reliqua membra expedientur.

In cubica sic proceditur. Oporteat ex numero A educere radicem cubicam.

Ex ultimo membro extrahitur radix more consueto. Maxima radix cubica in 22 est 2; ejus cubus 8 subtractus a 22 relinquit 14, quibus adscribe membrum penultimum 022, ut fiat totum *p* 24,022,

Triplum quadrati ex radice hactenus acquisita, nempe 12, statue in capite duarum laminarum, quibus ad dex-

22,022,635,627 (2
8
p 14,022
n 13 952
70 q
819 k
11529 b
. . . 6 . c
. 48 . . d
16389 e
648 k
10112 f
. . 24 . g
. 36 . . h
13952 n

dexteram appone laminam cubicam, ad sinistram verò laminam exponentem. Tum adverte, quotus ordo sit æqualis, aut proximè minor membro *p*. Lamina exponens indicabit esse nonum. Hunc igitur exscribe, eritque *b*.

Supra primam notam 9 ordinis *b* jam exscripti scribe ejus denominatorem 9, eique versus lævam appone ejus quadratum 81.

Laminæ cubicæ ad dextram appone laminam, quæ habeat in vertice triplum radicis prioris 2, nempe 6: ex hac describe numerum, contentum in quadrato, designato per numeri *k* notam secundam quæ est 1; ea verò designat primum loculamentum, in quo reperis 6. Scribe ergo 6 infra 1, & 2. Ex eadem lamina exscribe numerum loculamenti, designati per numeri *k* notam tertiam 8, nempe 48, quem repone infra 8, & 5.

Hos tres numeros *b*, *c*, *d*, collige in unam summam *e*, quæ auferenda esset a membro *p*; sed quia non potest, pro *b* exscribe ordinem octavum, qui erit *f*; & supra numeri *f* notam primam 2 scribe 8, eique quadratum ejus 64 appone; perque hunc numerum loco numemerorum *c*, *d* reperi alios *g*, *h*; modo jam tradito. Deinde *f*, *g*, *h*, collectos in summam *n*, quæ jam minor est membro *p*; subtrahe a membro *p*. Et residuum *q* infra lineam repone.

In membris, quæ supersunt, eadem operatio repetitur.

Ratio horum omnium pendet a demonstrationibus radicum quadratæ, & cubicæ Cap. II. & IV. hujus libri, & a demonstratis Cap. VIII. Lib. I.

ARITH-

ARITHMETICÆ PRACTICÆ

LIBER IV.

DE REGULIS.

PRacticæ Arithmeticæ quatuor sunt regulæ. Prima est regula Proportionum, sive trium; secunda Societatum, sive consortii; tertia Alligationis; quarta Positionum simplex, ac duplex, quam alii regulam Falsi appellant. Inter has prima præcipua est, a qua reliquæ omnes dependent. Illius quatuor sunt partes: nimirum regula proportionum directa simplex, eversa simplex, directa composita, eversa composita. Singularum præcepta hoc quarto libro explicanda, ac demonstranda suscepi.

CAP.

CAPUT I.

Regula simplex proportionum directa, & eversa.

Methodus, qua ex tribus numeris datis eruitur quartus proportionalis incognitus, regula Proportionum dicitur. Ab aliis, ob tres numeros datos, regula trium. Ab aliis aurea, ob summam utilitatem, appellatur.

In quæstionibus practicis, quæ nimirum ad usus humanos pertinent, e tribus numeris datis, sive cognitis semper duo sunt homogenei, hoc est de eadem re inter se, quorum unus annexam habet quæstionem: ut cum dico, 60 aureos expendo 5 mensibus; quot ergo mensibus expendā aureos 254. Numeri homogenei, sive de eadē re, sūt 60, & 254 aurei, quorum postremo annexa est quæstio. Is igitur, qui annexam habet quæstionem, tertio loco ponatur; alter de eadem re, primo; reliquus, qui solitarius est, & homogeneus quarto incognito, in medio consistat. Si jam sit, ut primus ad tertium, ita secundus ad quartum incognitum; hoc est si quanto primus major, vel mi-

minor tertio, tantò secundus sit major, vel minor quarto incognito: quæ tum solvendæ quæstioni adhibebitur, regula Proportionum directa appellabitur.

Exemplum.

Duo gradus maximi terræ circuli continent milliaria unius horæ 48: igitur 360 gradus, hoc est tota circumferentia quot milliaria continebit?

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48.	360	.....

Hic quantò primus est minor tertio, tantò secundus est minor quarto incognito.

Quod si, ut primus ad tertium, ita reciproce quartus incognitus sit ad secundum; hoc est, si quantò primus est major, minorve tertio, tantò quartus incognitus debeat esse major, minorve secundo; regula Proportionum eversa dicitur.

Exem-

Exemplum I.

FOrtalitium absolvunt 1000 Fossores diebus 12; 325 Fossores quot diebus absolvent?

Foss.	Dies	Foss.	Dies.
1000	12	325	...

Hìc quantò primus est major tertio, tantò quartus incognitus esse debet major secundo.

Exemplum II.

IN Urbe obsessa 7 mensibus ali possunt Præsidiarii 1500; ergo mensibus 12 quot alentur?

Mens.	Præsid.	Mens.	Præsid.
7	1500	12	....

Hìc quantò primus est minor tertio, tantò quartus incognitus debet secundo esse minor.

Arithmetici passim ex ipsa quæstione dijudicandum relinquunt, utrum proporportio directa ſit, an everſa, ſive reciproca. Recte id quidem: verumtamen indicium hujus rei certum aſſignari hoc poteſt. Si duo termini homogenei, hoc eſt de eadem re, aliam rem quampiam unicam, & a quatuor terminis quæſtionis diverſam, communiter reſpiciant, circa quam lato ſaltem modo aliquid agant, ad quod duo reliqui termini ſe habeant per modum circumſtantiæ; everſa, ſive reciproca proportio erit. Ratio colligitur ex Prop. XIV. L. VI.

In primo exemplo res, circa quam primus, & tertius termini, nempe Foſſores, aliquid agunt, eſt Fortalitium: in ſecundo eſt annona, obſidionis tempore conſumenda a Præſidiariis, termino videlicet ſecundo, & quarto.

Solutio directa.

Multiplica ſecundum per tertium, & productum divide per primum. Quotiens, ſive integer ille ſit, ſive integer cum fracto, erit quartus proportionalis incognitus, qui quærebatur.

Exem-

Exemplum.

Grad.	Milliar.	Grad.	Milliar.
2	48	360. fiunt	8640.
a	b	c	z

DUo gradus maximi terræ circuli continent milliaria Belgica unius horæ 48: igitur gradus 360, hoc est circumferentia tota, quot continet milliaria?

Collocatione facta, ut supra, multiplica secundum 48 per tertium 360. Productum 17280 divide per primum 2. Quotiens 8640 est quartus, qui petebatur.

Demonstratio.

SI quartus proportionalis est integer, patet ex Pro. XXL. VII. Si est integer cum fracto, patet ex eadem Prop., & ex iis, quæ demonstravi lib. I. Cap. IX. Cum enim ex hyp. *a* sit ad *b*, ut *c* ad *z* quartum, qui petebatur; erit, per XIX. L. VII., factus ex *a* in *z* æqualis facto ex *b* in *c*. Atqui facto ex *a* in *z* diviso per *a*, proveniet *z*. Ergo etiam facto ex *b* in *c* diviso per *a*, proveniet *z*. Quod erat demonstrandum.

Si

Si contigat, numeros de eadem re non esse ejusdem nominis, & mensuræ; ante operationem erunt reducendi ad eamdem, ut si existat quæstio: pro 10 mensibus solvi florenos 250; pro 20 diebus ergo quot solvam? 10 menses, & 20 dies sunt quidem de eadem re, nimirum tempore, sed mensuræ diversæ. Oportebit igitur, 10 menses prius ad dies reducere, quàm operatio instituatur.

Examen instituitur, multiplicando primum per quartum, & secundum per tertium: si enim producta sint eadem, rite es operatus. Patet ex Pro. X. l. VII.

Solutio eversa, seu reciproca.

MUltiplica primum per secundum; productum divide per tertium. Quotiens, sive integer fuerit, sive fractus, erit quartus proportionalis, qui petebatur.

Exemplum:

FOssores 1000 munitionem aliquã absolvunt diebus 12. Fossores 325 eamdem quot diebus absolvent? Collocatio-

A	ne facta, ut supra; primum
$\frac{300}{36}$	1000 multiplica per secundum
325	12; productum 12000 divide per tertium 325. Quotiens A est quartus, qui petebatur.

Fossores.	Dies.	Fossores.	Dies.
1000	12	325	$36\frac{300}{325}$

Aliud.

Arcis Præfectus annona, quam habet, alere potest mensibus 7 Præsidiarios 1500. Igitur mensibus 12 quot alet?

Mens. 7.	Præsid. 1500.	Mens. 12.	Præsid. 875.
A	B	C	D

Primus A 7, ductus in secundum A 1500, facit 10500, qui divisus per tertium C 12, dat quartum D 875.

Demonstratio

Quoniam ex hyp. A est ad C, ut reciproce D est ad B, erit invertendo, ut C ad A, sic B ad D.

C.

C. A. B. D.

Atque ita collocatio eversa reducta est ad directam, incognito D quartum in utraque collocatione locum obtinente. Ergo D rite inventus est ex producto ipsius A in B, diviso per C.

Examen instítues, ducendo primum A in secundum B, & tertium C in quartum D. Si producta sint eadem, rite operatus es; ut patet ex XIX. L. VII. Est enim ex hyp. ut A ad C, ita D ad B.

CAP. II.

Regula proportionum Composita.

Cum termini dati, sive cogniti sunt plures, quàm tres, nimirum 5, aut 7 aut etiam plures; regula proportionum composita dicitur: estque duplex etiam ipsa, directa videlicet, & eversa. Inter terminos datos, tres semper præcipui sunt; & ex his duo de eadem re, quibus cæteri adhærent; unus solitarius, & homogeneus illi, qui quæritur. Utrum quæstio directe solvenda sit, an everſe, ex indicio mox dando dijudicabitur.

Compoſita directa

Mercatores	8
aureis	1000
Luc. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
Quot Lucr. aur.?....	

I. PRoponatur quæſtio terminorum ſex: 8 Mercatoers, 1000 aureis, lucrantur 700 aureos. Igitur 10 Mercatores, 4000 aureis, quot aureos lucrabuntur? Tres numeri principales ſunt 8 Mercatores, 700 aurei, qui ſolitarius eſt, & 10 Mercatores. Duobus de eadem re reliqui duo adhærent, nimirum aurei 1000, & aurei 4000, qui duorum principalium de eadem re, nempe Merc. 8. & Mercat. 10 quaſi comites ſunt.

Ordo terminorum is erit, qui in exemplo appoſito. Nimirum tertio loco collocabitur principalis ille, qui annexam habet quæſtionem Mercat. 10 cum ſuo comite aur. 4000. Primo loco principalis alter de eadem re Mercat. 8 cum comite ſuo aur. 1000. Is vero, qui

qui solitarius est, secundo loco collocabitur.

Terminis hanc in modum constitutis, dijudicandum erit, directam proportionem, an eversam contineant: quod quia multi, vel ignorarunt, vel neglexerunt; imperfecte, & confuse hanc regulam tradiderunt. Indicium porro erit hujusmodi. Si tam in loco, seu membro primo, quàm tertio unus terminus respectu alterius se habeat per modum circumstanciæ, medii &c.; scito quæstionem directe solvendam. Si vero in membro primo, & tertio unus terminus respectu altertius quidpiam agat, exerceatve; certus esto, proportionem eversam in quæstione contineri, ac proinde solvendam esse everse

Ex hoc indicio quæstio proposita reperietur esse directa; quæ generali artificio ita solvitur. Terminos primi loci 8, & 1000 inter se multiplicando, reducito ad unum 8000. Similiter termini tertio loco positi 10, & 4000 ad unum reducantur 40, 000. Atque ita termini 5 redacti sunt ad 3.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei.
8000	700	40,000.

Circa quos si regula trium simplex exerceatur, prodibit numerus incognitus, qui petebatur, 3500 aurei.

Demonstratio

Operationis manifesta est. Cum enim plures termini per multiplicationem reducuntur ad unum, quæstio non immutatur. Eadem sane quæstio erit, sive dicas: 8 Mercatores aureis 1000, lucrantur 700 aureos; igitur Mercatores 10, aureis 4000, quot lucrabuntur? sive dicas octies mille aureis, Mercator 1 lucratur 700; igitur 40, 000 aureorum, Mercator 1 quot lucrabitur? Tantum enim lucratur 1 Mercator 8000 aureorum, quantum 8 Mercatores aureis 1000; & tantum 1 Mercator 40, 000 aureorum quantum 10 Mercatores 4000 aureorum. Atqui in hac postrema duo termini evanescunt, quod primo, & tertio loco iidem recurrant, videlicet 1 Mercator, quorum proinde ratio habenbenda non est. Igitur salva quæstione 5 termini ad tres sunt reducti. Ex quo patet quæsitum.

II. Quæstio proponatur terminorũ octo. Mercatores 8; aureis 1000, mensibus 2, lucranrur aureos 700: igitur 10 Mercatores, 4000 aureorum, mensibus 4, quot lucrãtur aureos? Ordo terminorum hic erit.

Mercatores	8
aureis	1000
mensibus	2
Lucr. aureos	700
Mercatores	10
aureis	4000
mensibus	4
Quot Lucr. aur?	...

Deinde terminis primi membri per invicem multiplicatis, itemque membri tertii, quæstio ad terminos reducetur tres, hunc in modum. 8 in 1000 sunt 8000: quæ ducta in 2, faciunt 16,000: hic erit primus terminus. 10 in 4000 sunt 40,000: hæc ducta in 4, faciunt 160,000: hic erit terminus tertius. Sic ergo stabit exemplum.

Aurei.	Lucr. aur.	Aurei	aur.
16,000,	700.	160,000 fiunt . . .	

Demonstratio

Rursum manifesta est. Nam ad lucrum perinde est, sive dicas: 8 Mercatores, 1000 aureis; sive 1 Mercator, 8000 aureorum. Rursus perinde est, sive dicas: 1 Mercator, 8000 aureorum, 2 mensibus; sive 1 Mercator, 1 mense, aureis 16, 000. Similiter in membro tertio perinde ad lucrum erit, sive dicas; 10 Mercat., 4000 aur.; sive 1 Mercator, 40, 000 aur.; & rursum perinde est, sive dicas 1 Mercat., 40, 000 aur., 4 mens.; sive 1 Mercator, 1 mense, 160,000, aur. Igitur per multiplicationem terminorum inter se, quæstio ad hanc formulam reducta est.

Mercator	1
mense	1
aureis	16000
Lucr. aureos	700
Mercator	1
Mense	
aureis	160000
Quot Lucr. aur.?	

In qua, quia quatuor termini, qui in pri-

primo, & tertio loco iidem ſunt, evaneſcunt, tota quæſtio a 7 terminis reducta eſt ad 3.

Compoſita everſa, ſeu reciproca.

MIrum eſt, quàm confuſe, & imperfecte hæc regula paſſim tradatur, ea credo de cauſa, quod tam illius demonſtrationem, quàm diſcrimen a directa non ſatis obſervaverint.

I. Quæſtio propoſita eſto terminorum ſex: 10 Homines expendunt 4 aureos diebus 3; Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendent. Terminos eodem ordine, quo in directa, collocabis. Tum ex indicio ſuperius tradito deprehendes proportionem everſam, ſive reciprocam contineri in quæſtione; cum tam *a* circa *b*, quàm *d* circa *e* aliquid agat;

Homines	10,	a
aureos	4.	b
exp. dieb.	3.	c
Homines	100.	d
aureos	2000.	e
Quot dieb. exp?	....	

Homines nimirum expendunt aureos. Perſpecto jam genere quæſtionis, accucuratius adhuc terminorum singulorum locus erit determinandus.

Homines	10.	a
aureos	4.	b
exp.dieb.	3.	c
Homines	100.	d
aureos	2000.	e
Quot dieb.exp?		

Terminus agens *a*, qui non habet annexam sibi quæstionem, primus esto. Illius comes *b*, secundus. Tertius *c* ille sit, qui solitarius est, & homogeneus quæsito. Quartus sit agens, qui annexam habet quæstionem, & primo homogeneus est, nempe *d*. Illius comes *e*, secundo *b* homogeneus, quinto loco consistat. Ordine terminorum hunc in modum constituto, generali artificio quæstionem propositam, & alias similes quascumque solvemus.

Termini primus *a*, tertius *c*, quintus *e* mupltiplicentur per invicem, & gignant *ace*. Deinde secundus *b* ducatur in quartum *d*, & faciat *b d*: productum secundum *b a* dividat primum productum *ace*. Quotiens A dabit terminum incognitum, qui petebatur.

$$A\ \frac{ace}{b\,d}$$

De-

Demonstratio.

REponatur quinto loco idem terminus, qui secundo, ut sit quæstio. Si 10 Homines 4 aureos expendunt, diebus 3; Homines 100, etiam 4 aureos.

Homines	10. a	
		aureos 4. b
Exp. dieb.	3. c	
Homines	100 d	
		aureos 4. b
Quot dieb. exp.		

quot diebus expendunt? Quoniam hic duo termini identici sunt, ac proinde evanescunt; manifestum est quinque terminos redactos esse ad tres a, c, d.

Qui cum indicio tradito Cap. I. proportionem eversam contineant, quartus per regulam trium simplicem eversam reperiendus est. Primus igitur a in secundum c, faciat $a\,c$; quo diviso per tertium d, quotiens B est quartus: ac proinde 100 homines 4 aureos expendent, diebus B. Littera B porro designat

$$\frac{a\,c}{d} = B$$

signat fractionem speciosam, quæ typis commodè interseri non potest; quod etiam deinceps nota.

		Homines	100. d
Aureos	4. b		
Exp.dieb.	B $\frac{ac}{d}$		
		Homines	100. d
Aureos	2000. e		

Quot dieb.exp.? ....

Quoniam igitur 100 Homines 4 aureos expendunt, diebus B; iidem 100 Homines, 1000 aureos e, quot diebus expendent? Quoniam hic rursum duo termini identici sunt, constat terminos quinque redactos esse ad tres *b*, B, *e*: qui cum ex indiciis jam traditis proportionem directam contineant, incognitus per simplicem directam proportionum regulam inveniri debet. Itaque secundus, nempe fractio speciosa, per B designata, ducatur in tertium *e*, ut traditur L. II. cap. VI. num. II. & gignat D, hoc est fractionem, per D designatam: qua divisa per primum

$$D\frac{ace}{d}$$

mum *b*, ut traditur lib. II. Cap. VII. n. II, (multiplicantur enim fractiones speciosæ, ut vulgares) provenit quotiens E, indicans 100 Homines, 2000 aureos, quot diebus expendant: ac proinde E est terminus ille incognitus, qui in quæstione initio proposita quærebatur. Atqui est idem cum A, ex vi constructionis invento. Ergo A est terminus incognitus quæsitus. Quod erat demonstrandum.

$$E = \frac{ace}{bd} = 150$$

II. Proposita sit quæstio terminorum octo, vel plurium. Scriptores 4, paginas 250, linearum 20, scribunt diebus 8: igitur Scriptores 6, paginas 350, linearum 25, quot diebus scribent? Quoniam tam in primo, quàm tertio membro unus terminus aliquid agit circa alium, nimirum *a* circa *b*, & *d* circa *e*; liquet in quæstione proportionem reciprocam contineri. Ordo igitur terminorum idem erit

Scriptores.	4.	a
Scrib. pag.	250.	b
Versuum	20.	m
Diebus	8.	c
Scriptores	6.	d
Paginas	350.	e
Versuum	25.	n
Quot dieb. scr?	....	

erit, qui supra: nimirum terminus agens *a*, non habens annexam sibi quæstionem, primus erit: hunc comites ejus *b*, & *m* sequentur. Medium locum tenebit *c*, qui solitarius est, & termino incognito homogeneus.

Scriptores	4.	a
Scrib.pag.	250.	b
Vərsuum	20.	m
Diebus	8.	c
Scriptores	6.	d
Paginas	350.	e
Versuum	25.	n
Quot dieb. Scr.?		

Huic proximus erit *d* agens alter, qui annexam habet quæstionem; quem *e*, *n*, ejus comites, subsequentur. Ordine sic constituto. Primo *a* ductus in medium *c*, & proximo *d* prætermisso, in omnes illius comites *e*, *n*, producat *a c e n*. Tum *d* ille jam prætermissus ductus in omnes comites primi *a*, nempe in *b*, *m*, producat *d b m*.

acen	1
P——9—	
dbm	3

Deinde productum primum *a c e n* dividatur per secundum *d b n*. Quotiens P dabit numerum incognitum, qui quærebatur.

Pe-

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Versuum 20. m

$$\text{Diebus} \quad A\frac{ace}{bd}$$

Scriptores 6. d
Scrib. pag. 350. e

Versuum 25. n
Quot dieb. scr? ....

Demonstratio.

SI tertius terminus *m* ponatur etiam loco septimo pro *n*, quæstio redigetur ad terminos quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, cujus terminus incognitus, ut jam demonstratum est num. 1, erit A: ac proinde Scriptores 6, paginas 350, linearum *m* 20, scribent diebus A; $A\frac{ace}{db}$ igitur iidem 6 Scriprores, paginas etiam 350, sed linearum *n* 25, quot scribent diebus? hic quia utrimque *d*, *e* numeri Scriptorum, & paginarum iidem sunt; quæstio redacta est ad terminos tres, nimirum *m*, A, *n*

quæ

quæ quia directa est, duc A in n, ut traditur L.II. Cap.VI.num.II., & fiet Q. Quo diviso per m, ut traditur L.II.C.VII.nu.II. fiet quotiens R, indicans Scriptores 6 paginas 350, linearum 25, quot diebus absolvant; ac proinde est is, qui petebatur. Cum igitur R idem sit cum P, erit P numerus incognitus, in quæstione requisitus. Quod erat demonstrandum.

$$Q - \frac{acen}{db}$$

$$P - \frac{acen}{dbm}$$

$$R - \frac{acen}{dbm}$$

Scholium.

Quæstiones ad regulam compositam proportionum, tam eversam, quam directam pertinentes, per regulam simplicem proportionum bis institutam solvi posse, quamvis inutili circuitu, ex demonstrationibus jam allatis manifestum est: compositam videlicet directam, per directam simplicem duplicatam; eversam vero, per simplicem eversam unam, & simplicem directam alteram. Id porro, haud scio, an satis fuerit ab Arithmeticis observatum, posse eversam compositam solvi per simplices duas, eversa nulla interveniente: quod sic ostendo.

Resumatur quæstio supra numer. I. proposita.

Ex

Homines 10
Aureos 4
Exp. diebus. 3
Homines 100
Aureos 2000
Quot dieb. exp....

Ex qua desumatur prima quæstio simplex hujusmodi: Homines 10, diebus 3, expendunt aureos 4; homines ergo 100, diebus etiam 3, quot expendunt aureos? formulam hic apposui, quam patet esse directam. Solutione adhibita, quartus provenit aurei 40.

Homines 10
diebus 3
Exp. aureos 4.
Homines 100
diebus 3
Quot aur. exp....

Altera jam quæstio sit etiam simplex: Homines 100 expendunt aureos 40, diebus 3; ergo iidem Homines 100, aureos 2000, quot diebus expendunt? Formulam inspice hic appositam, quam iterum patet esse directam.

Homines 100
aureos 40
exp. dieb. 3
Homines 100
aureos 2000
Quot dieb. exp.?....

Solutione adhibitâ, perveniunt dies 150 pro numero incognito quæsito. Et poterunt quæstiones omnes eversæ compositæ in hunc modum solvi. Simili modo etiam demonstrari potest, compositas directas solvi posse per unam directam simplicem, & eversam alteram.

Hæc ad plenam regulæ trium compositæ intelligentiam dicta sint. Cæterum inutilis ad praxim ille per duplicatam solutionem simplicem *circuitus est, quando solutionem expeditiorem longe, ac breviorem jam tradidimus.*

CAP. III.

Regula Societatum.

DOcet numerum in partes dividere, datis numeris proportionales. Nomen sortita est a societatibus mercatoriis, in quibus usum habet permagnum. Sic verò instituitur.

Datorum summa primum locum teneat; secundum numerus distribuendus; tertium singuli datorum. Exerceatur deinde toties regula trium, quot sunt dati. Numeri inventi satisfacient quæstioni. Si numeris datis temporum diversitas sit adjuncta; prius in suum singuli tempus ducantur, quàm ad unam summam redigantur.

Quæstio I.

TRes Mercatores, inita societate, lucrati sunt aureos 4500. Primus exposuit aureos 100, alter 150, tertius 200. Quantum ex lucro communi cuique debetur?

Ma-

Manifestum est, lucra singulorum debere pecuniis, in sortem collatis, esse proportionalia; adeoque lucrum commune 4500 aur. dividendum in partes, pecuniis collatis singulorum proportionales.

Sic igitur quæstio ordinabitur.

		Dati quæsiti
Summa dat.	Lucr. com.	100. c 1000. f
450.	4500	150. d 1500. g
a	b	200. e 3000. h

Tum quære, si 450 aurei lucrantur aureos 4500; singuli dati, hoc est pecuniæ, a singulis in sortem datæ quot lucrantur aureos? Regula trium ter instituta, provenient quæsiti. Conferenti 100 debentur 1000, conferenti 150 debentur 1500, & 2000 ei, qui 200 contulit.

Demonstratio.

Ex vi constructionis, ut *a* est ad *b*, sic *c* est ad *f*, & sic *d* est ad *g*, & sic *e* est ad *h*. Ergo per XI. L. VI. *c* est ad *f*, ut *d* est ad *g*, & ut *e* est ad *h*. Igitur permutando per XVI. L. V., ut *c* est ad *d*, sic *f* est ad *g*; & ut *d* est ad *e*, sic *g* est ad *h*: & ex æquo per

 XXII.

XXII. Lib. V. c eſt ad a, ut f ad b. Conſtat ergo fides operationis.

Quæſtio II.

TRes Mercatores lucrati ſunt aureos 9000. Primus contulit aureos 100 per menſes 15; ſecundus 140 per menſes 19; tertius 300 per menſes 7. Quantum ſingulis debetur?

Aurei a ſingulis collati ducantur in tempora, & numeri producti 1600, 1400, 2100 in unam colligantur ſummam 5000. Quæſtio deinde ſic ordinabitur.

Sum. dat.	Luc. com.	Dati	Quæſiti
5000	9000	1600	3200
		1400	1600
		2100	4200

Demonſtratio eadem, quæ ſupra. Quod autem multiplicatio pecuniæ in tempus valorem datorum non immutet; patet ex demonſtratione regulæ trium compoſitæ directæ Capitis præcedentis.

CAP. IV.
Regula Alligationis.

DOcet hæc regula, res diversi pretii ita commiscere, ut mixtum habeatur pretii medii, pro arbitrio assignati. Sint duo genera argenti non puri, primi libra 1 valeat aureis 30, alterius 24. Scire cupio, quantum ex utroque sumere debeam, ut mixti una valeat aureis 28; vel ut habeam mixti libras 10, quarum una valeat aureis 28. Hic pretia data sunt 30, & 24; arbitrarium medium 28. Id numquam esse potest utroque dato majus, vel dato utroque minus; sed medium inter illa, aut alterutri æquale.

I. Si duo solum sint pretia data diversa 30, 24, ea scribe sub invicem, medium vero 28 ad sinistram. Tum pretia data alligentur inter se, hoc est comparentur ambo cum medio 28, ut duæ habeantur differentiæ, nimirum excessus 2 majoris dati 30 supra medium 28, quem ad dexteram minori dato 24 adscribes; & defectus 4 minoris dati 24 a medio, quem adscribes dato majori 30. Quæ omnia in formula hic apposita exhibentur.

	Pret.mix.	Differ.
	30	4
Pret.med, 28		
	24	2
		6
		Sum.differ.

His peractis ; regula proportionum inducitur toties ; quot sunt pretia data . In ea primum locum tenebit summa differentiarum 6 : secundum quantitas ; sive numerus mixti lib. 10: tertium singulæ differentiæ . Numeri inventi solvent quæstionem .

	Differ. 4.	lib. $6 \frac{2}{3}$ — A
Sum.differ. 6	Mixti lib. 10.	
	Differ. 2.	lib. $3 \frac{1}{3}$ — B

Igitur ex pretii majoris 30 aureorum argento accipiendæ sunt libræ A ; ex pretii minoris libræ B ; quæ simul efficiunt 10 libras argenti mixti ; cujus pretium sit medium , aureorum nempe 28.

II. Cum

II. Cum plura, quàm duo, pretia dantur; singula binatim inter se alligentur, his tamen legibus servatis. I. Quæ alligantur; neque simul majora sint pretio medio, neque simul minora. II. Excessus majoris pretii dati supra medium adscribatur minori pretio; defectus autem minoris a medio apponatur majori. III. His salvis, perinde est quocumque ordine inter se data pretia alligentur; & potest unum alligari sæpius, hoc est cum diversis, modo singula saltem aligentur semel. Unde fit, ut eadem quæstio multas solutiones admittat, ut infra demonstrabitur.

Alligationibus peractis, regula proportionum, ut supra, toties exercebitur, quot pretia sunt data. In ea primum locum teneat summa differentiarum; secundum quantitas, seu numerus mixti, tertium differentiæ singulæ; aut, si uni pretio plures sunt adscriptæ, summæ earum singulæ.

Exemplum.

Libra 1 Garyophilli valet juliis 3, Piperis 4, Cinnamomi 6, Zingiberis 8, Croci 10. Quantum ex singulis debeo accipere, ut mixti libra 1 valeat juliis 7? vel ut habeam mixti libras 12, quarum una valeat juliis 7.

		Pret. data	Differ.
Mixti Pret. med.	Garyoph.	a 3	1.3
7.	Piperis	b 4	3.1
	Cinnam.	c 6.	1.3
	Zingib.	d 8.	4.3.1
	Croci	e 10.	4.3.1

Sum. diff.	Mixti	Differ.	Quæsit.	
		4?	$\frac{4}{28}$	m
28.	lib. 1.	4?	$\frac{4}{28}$	m
		4?	$\frac{4}{28}$	m
		8?	$\frac{8}{28}$	n
		8?	$\frac{8}{28}$	n

In hoc exemplo factæ sunt omnes alligationes possibiles, quæ sunt *ad, ae, be, bd cd, ce*. Igitur Garyophilli, Piperis, Cinnamomi ex singulis partes *m* unius libræ, & Zingiberis, ac Croci etiam ex singulis partes *n* unius libræ, dabunt mixti libram 1, pretii 7 Juliorum.

Hoc

Hoc porro exemplum, præter ſolutionem jam datam, alias admittit, ut infra oſtendetur. Accipe unius adhuc ſolutionis formulam. Alligationes ſunt, *ad*, *bd*, *ce*

		Pret. data	Differ.
	Garyoph.	a 3.	1.
Mixti.	Piperis	b 4.	1.
Pret. Med.	Cinnam.	c 6.	3.
7	Zingib.	d 8.	4. 3.
	Croci.	e 10.	1.

		Differ.	Quæſit	
		1 ?	$\frac{1}{13}$	f
Sum. diff.	Mixti	1 ?	$\frac{1}{13}$	f
13.	lib. 1.	3 ?	$\frac{3}{13}$	p
		7 ?	$\frac{7}{13}$	q
		1 ?	$\frac{1}{13}$	f

Quæſiti *f*, *f*, *p*, *q*, *f* indicant, quot partes libræ ex ſingulis acceptæ conficiant mixti libram unam, pretii medii 7 Juliorum.

Examen ita fiet. Si Garyophilli una li-

libra valeat 3 Juliis, libræ pars f quantum valebit? Rursum si 1 libra piperis, &c. Pretia per regulam trium inventa collige in unam summam; hæc pretio medio æqualis erit, si bene fueris operatus.

Demonstratio, cum duo tantum pretia diversa sunt alliganda.

		Differ. croci
	Pip. 4. a	2. e
Mixti Pret. medium 7. c.		
		Diff. Pip.
	Croci. 9. b.	3. d
		5. f
		Sum. differ.

Quæstio sit: libra 1 piperis valet 4 Juliis, libra croci 9; quantum ex utroque sumere debeo, ut libra 1 mixta valeat Juliis 7? Cum ad solvendam quæstionem in regula trium primus locus debeatur summæ differentiarum, secundus numero mixti, sive ejus quantitati, tertius singulis differentiis reciproce collocatis; demonstrandum est, to-

totius mixti quantitatem; seu numerum, libram scilicet 1, ita esse ad croci, qui in mixto est, quantitatem, seu numerum incognitum; ut *f* summa differentiarum est reciproce ad *d* differentiam piperis a pretio medio. Quod fiet hunc in modum.

Excessus *e* pretii unius libræ croci supra pretium medium unius libræ mixti præcise oritur a pipere, quod est in mixto: & defectus *d* pretii unius libræ mixti præcise oritur a croco, qui est in mixto. Ergo excessus *e* pretii unius libræ croci est ad defectum *d* pretii unius libræ piperis, ut reciproce piper, quod est in mixto, ad crocum, qui est in mixto. Ergo componendo, ut *e* cum *d* est ad *d*, excessus nimirum croci cum defectu piperis ad piperis defectum; ita piper cum croco in mixto, hoc est tota mixti quantitas, libra nempe una est ad quantitatem croci in eodem mixto. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio universalis, sive duo tantum pretia, sive quotlibet sint alliganda.

HAnc rem non esse demonstratu facilem, apparebit, nisi fallor, ex iis, quæ

quæ hìc ſubjungam. Quæ attulere nonnulli, nullam demonſtrationis ſpeciem habent, ut ne ſciviſſe quidem videantur, in quo difficultas conſiſteret, aut quid demonſtrandũ ſibi eſſet. Utar porro, quod jam feci ſæpius, Logiſtica Specioſa, quæ huic rei demonſtrandæ conducet plurimum. Quare hæc iis ſcribo, qui jam in ea utcumque ſunt verſati.

I. Rerum quatuor miſcendarum pretia diverſa ſint b, c, d, e; pretium medium ſit a. Exceſſus

Schema I.

	4. b		e—a
7. a	6. c		d—a
	8. d		a—c
	9. e		a—b

e ſupra a eſt $e-a$; ex præcepto regulæ adſcribendus minori b. Defectus b ab a eſt $a-b$, apponendus majori e. Exceſſus d ſupra a eſt $d-a$, quem adſcribe minori c. Defectus c ab a eſt $a-c$, quem appone majori d. Valebit porro jam afferenda demonſtratio, quocumque tandem ordine, ſervatis tamen præſcriptis in regula conditionibus, inter ſe pretia diverſa alligentur.

II. Manifeſtum eſt, in qualibet differentia, per exceſſum, negari a pretium medium, affirmari verò pretia majora data *e*, *d*; quod ita exprimitur $e-a$, hoc eſt *e* minus *a*; $d-a$, hoc eſt *d* minus *a*. Rurſum patet, in omni differentia, per defectum, affirmari *a* pretium medium, negari vero pretia data minora *b*, *c*; quod ſic exprimitur $a-c$, $a-b$. Sed quia ex præſcripto regulæ pretiorum, quæ alligantur, ſemper unum majus eſt pretio medio, alterum minus, aut certe æquale; tot ſemper erunt differentiæ, quot pretia majora & minora medio: quæ ſi in unā

$$F$$

$$e-a+d-a+a-c+a-b$$

ſummam F colligantur, hæc duo infallibiliter evenient. Primò litteræ, pretia medio *a* majora deſignantes, ſemper reperientur affirmatæ: litteræ verò totidem, deſignantes pretia medio *a* minora, ſemper negatæ. Secundò *a*, medium pretium deſignans, toties negata reperietur, quoties affirmata; negata quidem in differentiis majorum pretiorum; affirmata verò in differentiis pretiorum minorum: ac proinde litteris *a* ſe mutuo tollentibus differentiarum ſumma erit G, conſtans ſemper litteris, data pretia deſignantibus, G

$e + d - c - b$

III. Ut vero ſciatur, quantum ex ſpeciebus ſingulis diverſorum pretiorum b, c, d, e ſumi debeat, ut ex iis permixtis una libra valeat pretio medio a; ex regulæ præſcripto, ponitur primo loco ſumma differentiarum, ſecundo 1 libra, tertio ſingulæ differentiæ; ac tum per

Sum. diff.	libra	Different.	Schema II.
		$e-a$	$\frac{e-a}{e+d-c-b}$ P ex b
		$d-a$	$\frac{d-a}{e+d-c-b}$ Q ex c
$e + d - c - b$	1	$a-c$	$\frac{a-c}{e+d-c-b}$ R ex d
		$a-b$	$\frac{a-b}{e+d-c-b}$ S ex e

regulam trium inveniuntur quarti proportionales P, Q, R, S. Qui quidem, quod ſecundus terminus ſit unus, exhihibentur, dividendo solum differentias singulas per differentiarum summam. Itaque quarti illi proportionales P, Q, R, S sunt fractiones, quarum communis denominator est differentiarum summa $e + d - c - b$, numeratores verò differentiæ singulæ, eo ipso ordine, quo num. I. fuere alternatim pretiis diversis b, c, d, e appositæ,

IV. Nunc, quia in regula asseritur, P, Q. R, S indicare, quantum ex speciebus singulis diversorum pretiorum b, c, d, e sumi debeat, ut una libra, ex iis mixta, valeat pretio medio a; utrumque ostendi debet, P, Q, R, S efficere unam libram, & P, Q, R, S simul valere pretio medio a. Primum patet ex XXIV. Lib. V. Nam ex constr. summa differentiarum est ad singulas differentias, ut 1 libra ad singulas P, Q, R, S. Ergo, ut summa differ. est ad omnes simul differentias, ita una libra est ad omnes simul P, Q, R, S. Atqui summa differ. æquatur differentiis simul omnibus. Ergo etiam 1 libra omnibus P, Q, R, S æqualis est.

V. Alterum verò, in quo præcipua difficultas est, cujus gratia superiora omnia num. I. II. III. præmisimus, sic ostendo. Ut inveniantur pretia, seu va-

lo-

lores singulorum P, Q, R, S, statuatur in regula trium pro loco I. libra 1; secundo *b*, *c*, *d*, *e* pretia diversa singularum specierum; tertio singula P, Q, R, S, & dic: si 1 libra speciei primæ valeat florenis *b*; unius libræ pars, a P designata, quantum valebit? & sic in aliis.

Schema III.

1. lib. $\left\{ \begin{array}{l} 4.b \\ 6.c \\ 8.d \\ 9.e \end{array} \right.$

$\frac{e-a}{e+d-c-b}$ P $\frac{be-ba}{e+d-c-b}$ V

$\frac{d-a}{e+d-c-b}$ Q $\frac{cd-ca}{e+d-c-b}$ T

$\frac{a-c}{e+d-c-b}$ R $\frac{da-dc}{e+d-c-b}$ X

$\frac{a-b}{e+d-c-b}$ S $\frac{ea-eb}{e+d-c-b}$ Z

$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b}$ N

Quoniam vero in primo loco habetur unitas, ut inveniantur quarti V, T, X, Z, oportebit solum singula *b*, *c*, *d*, *e*, pretia ducere in singulos fractionum P, Q, R, S, numeratores, qui, ut ostendi num. III., sunt

sunt ipsæ pretiorum differentiæ, iisque supponere communem denominatorem $e + d - c - b$, quem ostendi n.III.esse differentiarum summam. Nunc fractiones ipsas V, T, X, Z jam inventas expendamus. Si harum numeratores in unam summam colligamus, reperimus eas particulas, in quibus a pretium mediũ designans non reperitur, se mutuo tollere: quod sic ostendo. Ut habeatur numerator ipsius V, nempe $be - ba$, pretium b ducitur in numeratorem ipsius P, hoc est in differentiam, quæ in schemate primo ipsi b fuit apposita: ea autem erat differentia pretii majoris e, nempe $e - a$, in qua ut ostendi num. II. reperitur $+ e$ hoc est e pretium majus affirmatum. Ergo in numeratore ipsius V. necessariò reperitur $+ be$, hoc est be affirmatum. Rursum, ut habeatur numerator ipsius Z, ducitur pretium majus e in numeratorem ipsius S, hoc est in differentiam $a - b$, quæ ipsi e in I. schemate fuit apposita: ea autem est differentia pretii minoris b, in qua, ut num. II. ostensum est, reperitur $- b$, hoc est pretium minus b negatum. Ergo in numeratore ipsius Z necessario reperitur eadem particula be, quæ in V; sed jam negata, hoc est $- be$. Ergo in V, & Z duæ parti-

Schema III.

	4.b	$P = \frac{e-a}{e+d-c-b}$	$\frac{be-ba}{e+d-c-b}$	V
	6.c	$Q = \frac{d-a}{e+d-c-b}$	$\frac{cd-ca}{e+d-c-b}$	T
1.lib.				
	8.d	$R = \frac{a-c}{e+d-c-b}$	$\frac{da-dc}{e+d-c-b}$	X
	9.e	$S = \frac{a-b}{e+d-c-b.}$	$\frac{ea-eb}{e+d-c-b.}$	Z

$$\frac{ea+da-ca-ba}{e+d-c-b.} \; N$$

culæ $+be$ & $-be$, in quibus a non reperitur, se mutuo tollunt. Eodem modo ostendam, in numeratoribus fractionum T, & X particulas, in quibus non est a, (sunt eæ hìc $+cd$, & $-dc$,) se invicem similiter tollere.

Itaq; summa numeratorum in V, T, X, Z est $ea+da-ca-ba$, in cujus particulis singulis reperitur a; huic summæ si subscribatur communis denominator $e+d-c-b$, erit fractio N par omnibus V, T, X, Z. Deinde, quia genita est summa hæc

ea

$ea+da-ca-ba$, pretia majora e,d ducẽdo in sibi appositas pretiorum minorum differentias $a-c$, & $a-b$, in quibus ut ostensum num. II. a affirmatur; patet in particulis hujus summæ, signo $+$ affectis, necessario reperiri pretia majora e,d. Pari modo, quia in procreatione hujus summæ $ea+da-ca-ba$ pretia minora c, b ducta sunt in appositas sibi pretiorum majorum differenrias $e-a$, & $d-a$, in quibus ostendi supra num. II. a negari, manifestum est in particulis hujus summæ, quæ est numerator ipsius N, signo $-$ affectis, necessario reperiri pretia minora c, b. Ergo in numeratore ipsius N pretia majora e, d reperientur affirmata; minora vero c, b; negata. Atqui supra num. II. ostensum est, etiam differentiarum summã $e+d-c-b$, quæ est fractionis N denominator, constare pretiis majoribus e, d affirmatis; minoribus vero c, b negatis. Ergo in fractionis N numeratore reperiuntur eædem litteræ, & iisdem signis affectæ, quæ in denominatore. Ergo si numerator dividatur per denominatorem, quotiens erit a. Si enim denominator ducatur in a, restituetur idem numerator. Ergo fractio N æquivalet ipsi a pretio medio. Atqui jam ostendi N æquari omnibus V, T, X, Z, valoribus ipsorum P, Q, R, S. Ergo P, Q, R, S simul valent pretio medio *a*. Quod erat demonstrandum.

Quot solutiones diversas eadem quæstio admittat juxta praxim jam traditam.

ARithmetici Scriptores plerique asserunt, pretia data diversimode alligari posse, ac proinde eamdem quæstionem plures solutiones admittere. Sed quantus solutionum diversarum sit numerus, & quo artificio illæ omnes exhibeantur. altum apud illos silentium est. Nimirum, ut demonstrationem ipsam hujus regulæ, ita & determinationem ipsius pulcherrimam, aut ignorarunt, aut certe immerito neglexerunt.

Ejusdem igitur quæstionis solutiones omnes possibiles invenientur hunc in modum.

I. Vide quoties pretia data inter se binatim possint combinari diversimode; hoc est inveniantur omnes diversi biniones, qui ex datis pretiis haberi possunt, ut trademus L.V. C.VIII. In quæstione num. II. supra quinque dantur pre-

pretia *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, quorum biniones diversi sunt 10.

II. Vide, quot ex his binionibus sint apti ad alligandum: ad quod requiritur, ut binionis utrumque membrum, neque simul majus sit, neque simul minus pretio medio. Ex 10 binionibus quæstionis, supra datæ, tantum sex apti sunt; nimirum *ad*, *ae*, *be*, *bd*, *ce*, *cd*.

III. Vide, quis minimus sit alligationum numerus, ad quæstionem solvendam necessarius. Si multitudo pretiorum datorum par est, ejus semissis dabit minimum numerum alligationum. Si impar, ejus semissis, unitate aucta. Ratio est, quia singula pretia data saltem alligari debent semel. In exemplo nostro, quia 5 pretia dantur *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, minimus alligationum numerus, quo solvi quæstio potest, est 3.

IV. Inspice biniones aptos, num. II. inventos, & quære omnes eorum diversos terniones, & omnes eorum diversos quaterniones, & sic deinceps, incipiendo a minima specie, num. III. inventa, usque ad proxime minorem numero aptorum binionum, ut tradetur L. V. C. VIII. In exemplo nostro, quoniã biniones

nes apti ſunt ſex, num. II. reperti; oportebit, omnes eorum diverſos reperire terniones; qui ſunt 20; & quaterniones, qui ſunt 15; & quinterniones, qui ſunt 6.

V. Inquire, quot ex binionum aptorum ternionibus, & quaternionibus &c. ſint apti ſolvendæ quæſtioni. Illi porro erunt apti, in quibus ſingula pretia data *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, reperiuntur; inepti, in quibus aliquod eorum deeſt. Singuli horum inventorum ternionum, quaternionum; &c. ſingulas dabunt quæſtionis datæ ſolutiones, quibus eam adde, quam exhibet tota binionum aptorum ſumma. Præter has, nullæ erunt alligationes aliæ poſſibiles.

In exemplo noſtro pretia dantur quinque, quæ artificio, jam explicato, comperies alligari poſſe modis diverſis 25, ac totidem proinde exhiberi poſſe quæſtionis datæ ſolutiones.

Al-

Alligatio.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
ad	ad	ad	ae	ae	ae
bd	be	be	cd	bd	be
ce	cd	ce	bd	ce	cd

7.	8.	9.	10.	11.	12.
ad	ad	ad	ad	ad	ad
ae	ae	ae	ae	bd	bd
bd	bd	bd	be	be	be
cd	ce	cd	ce	cd	ce

13.	14.	15.	16.	17.	18.
ad	ad	ae	ae	ae	ae
bd	be	bd	bd	bd	be
cd	cd	be	be	cd	cd
ce	ce	cd	ce	ce	ce

19.	20.	21.	22.	23.	24.	
ad	ae	bd	be	cd	ce	ad
ae	bd	be	cd	ce	ad	ac
bd	be	cd	ce	ad	ae	bd
be	cd	ce	ad	ae	bd	be
cd	ce	ad	ae	bd	be	cd
						ce

Dixi supra in titulo hujus discursus à

juxta praxim hactenus traditam. Itaque, cum dicitur præter solutiones, dicto modo inventas, non plures esse possibiles, intellige si utamur modo alligationis consueto, qui supra num. II. traditus est. Aliàs quæcumque quæstio ad regulam alligationis pertinens, in qua plura duobus pretia dantur, solutiones admittit infinitas. Quod sic demonstro. Resumatur quæstio superior, in qua ex pretiis datis seligatur pro arbitrio unum pretio medio minus, puta *a*, cum quo reliqua *b*, *c*, *d*, *e*, tanquam unum, comparentur.

		Differ.
	a. 3	2
Mixti	b. 4	
Pret.med.	c. 6	f
7	d. 8	9 4
	e. 10	

Accipiatur quivis numerus *f* major, tum minimo ipsorum *b*, *c*, *d*, *e*, tum etiam medio 7; minor verò *e* maximo ipsorum. Ex regula alligationis, jam tradita, liquet res pretiorum *b*, *c*, *d*, *e* ita misceri posse, ut una libra mixti ex illis valeat pretio *f*, 9 Juliis. Pro speciebus igitur *b*, *c*, *d*, *e* sumatur ex iis mixtum, cujus una libra valeat pretio *f*. Tum per regulam alligationis sim-

simplicem, numero 1. traditam, inveniatur mixtum x, z ex f, & a cujus una libra valeat pretio medio 7. Liquet igitur x, z libram esse mixti ex omnibus datis a, b, c, d, e; cum x, a mixtum sit ex a, & f; f autem mixtum ex b, c, d, e. Atque ita per assumptum uumerum f majorem, cum minimo ipsorum b, c, d, e, tum ipso medio, minorem vero e maximo, una habetur solutio quæstionis, quæ toties variabitur, quoties pro f alius ejusmodi medius assumetur diversus. Atqui tales medii diversi assumi possunt, adhibitis fractionibus, infiniti. Ergo quæstionis datæ solutio variabitur infinities. Quod erat propositum.

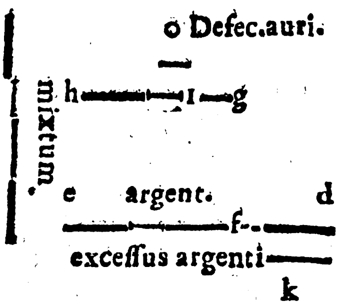
				Differ.
	a.	3		2
Mixti Pret.med.	b.	4		
7.	c.	6	f	
	d.	8	9	4
	e	10		
		2	$\frac{2}{6}$	x
6. lib. 1				
		4	$\frac{4}{6}$	z

Fur-

Furtum Aurifabri in coronâ Hieronis Regis detectum.

CUm Hiero, Syracusarum Rex, coronam auream Diis vovisset, & Aurifaber, sublata portione auri, argenti tantundem substituisset, fraus ab Archimede detecta est. Sed quo præcise artificio, non satis constat. Varii sunt modi: qui regula alligationis utitur, omnium facillimus est.

Referant *a a b*, *ed*, *bg* tres massas metalli singulas lib. 20; & sit aurea *bg*; *ed* argentea; *abb* verò ea, de qua dubitatur, an mixta sit ex auro, & argento.



Primò invenienda est ex Hydro-staticæ principiis trium massarum proportio quoad molem: ad quod minime opus est, ut de facto habeantur massæ, aurea, & argentea, uti in Hydro-statica, si Deo placuerit, ostendam. Quod si moles *ab* me-

dia

dia reperiatur inter auream *g h*, & argenteam *ed*, certum erit in *a b* admixtum esse argentum: qua verò proportione, per alligationis regulam innotescet.

Est enim, ut differentiarum summa *k*, *o* ad *o* differentiam, seu defectum molis aureæ *h g* a mixta *a b*; ita 10 libræ mixti *a b* ad libras argenti in *a b*.

Id verò eodem modo demonstratur, ut supra. Nam *k* excessus in mole argenti supra mixtam *ab* præcise oritur ab auro, quod est in mixto; & defectus auri *h g* a mixto præcise oritur ab argento, quod est in mixto. Ergo *k* excessus argenti *e d* est ad *o* defectum auri *h g*, ut reciproce quantitas, seu pondus auri in 10 libris mixti *ab* est ad pondus argenti in eodem mixto. Igitur, componendo, totum mixti pondus argenti, nempe 10 libræ, est ad pondus argenti in mixto, ut *k* cum *o*, hoc est differentiarum summa est ad *o* auri defectum. Quod erat propositum.

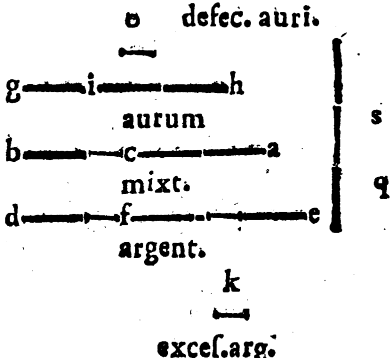
Si ergo *k* ponatur esse ad *o*, ut 15 ad 1, per regulam trium deprehendetur in *a b* massa 10 libr. esse unius libræ argenti 5 octavas.

Quod si detur mixtum ex metallis tribus, aut pluribus; nullo artificio deprehendi poterit, qua proportione sint commixmixta, quod ea possit infinities variari, ut demonstravi supra.

Alia Demonstratio.

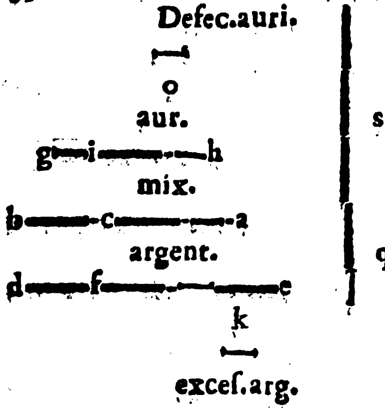
Quamvis demonstratio jam allata mihi videatur clarissima esse; atque id ipsum pateat ex demonstratione universali supra: tamen quod in hac re demonstranda nobiles Geometræ, & inprimis Marinus Ghetaldus in Archimede promoto, laborarint, visum est hoc ipsum alio modo, & faciliori, quam sit ille Ghetaldi, demonstrare.

Argentum in mixto AB repræsentet CB, aurum CA. Tum in argentea mole DE intelligatur DE par BC; in aurea vero HI par AC.



Quoniam ex hypothesi DE excedit AB per K; ablatis utrimque æqualibus DF, BC, etiam FE excedet

det AC, hoc est per constr. HI, per K. Pari modo, quia AB excedit GH per O; ablatis æqualibus AC, HI etiam BC, seu FD excedet GI, per O. Jam quia argentum BC, & argentum DF æqualia sunt mole, adeoque etiam pondere, & totum pondus AB toti ponderi DE per hyp. sit æquale; erit quoque pondus reliquum auri AC, hoc est HI per const. æquale ponderi reliquo argenti EF. Igitur moles argentea EF est ad molem auream HI, ut reciproce gravitas auri ad gravitatem argenti, exemp. gr., ut Q S ad S. Ergo dividendo K, qui est excessus EF supra HI, ut ostendi supra, est ad HI, ut Q ad S. Deinde, quia jam ostendimus æqualia esse pondera EF, HI, cum etiam per hyp. æqualia sint tota ED, HG; liquet, reliqua FD, IG paria esse. Rursum igitur argentea moles DF est ad auream molem IG, ut reciproce gravitas auri ad gravitatem argenti, hoc est ut Q S ad S. Igitur dividendo O, qui est excessus FD per demonstrata superius supra IG, est ad IG, ut Q ad S. Atqui jam ostensum est etiam, ut Q est ad S, ita K esse ad HI. Ergo, ut K ad HI, sic O est ad IG;



IG: & permutando, ut K eſt ad O, ſic HI eſt ad IG; & componendo, ut K cum O eſt ad O, ſic HG eſt ad IG; & quia HG eſt moles homogenea, ſic pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG per hyp. eſt pondus AB; & pondus IG ſupra oſtendi eſſe pondus argenti FD, ſeu CB. Ergo, ut K cum O ad O, ita mixti pondus AB eſt ad CB pondus argenti in eodem mixto. Quod erat demonſtrandum.

CAP. V.
Regula Poſitionis ſimplex.

PRo quæſito numero pone quemvis numerum, qui hypotheſis appellabitur, eumque examina juxta tenorem quæſtionis. Is ſi quæſtioni non ſatisfaciat, in regula trium primum locum teneat

neat numerus, ex decursu inventus; secundum hypothesis; tertium numerus in quæstione datus. Quartus, ex his inventus, solvet quæstionem.

Illæ igitur quæstiones, & solæ per unam positionem solvi possunt, ex quarum decursu inventus est ad hypothesim, ut numerus datus ad quæsitum.

Quæstio I.

TRes simul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm secundus; & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

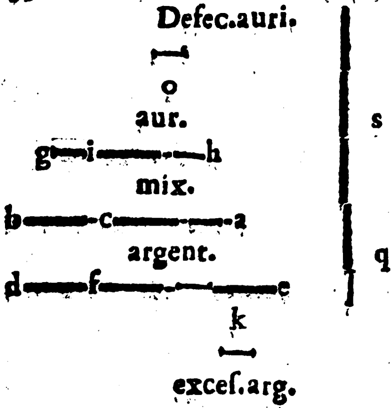
Pone secundum debere 100. Ergo primus debet 200, tertius 300: quæ simul conficiunt 600. Deberent autem conficere 7000. Numerus inventus 600 fit prius in regula trium; hypothesis 100, secundus; datus in quæstione 7000, tertius. Ex his invenitur quæsitus A. Igitur secundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri simul juncti conficiunt 7000.

A $1166\frac{2}{3}$

B $2333\frac{1}{3}$

C 3500

De



IG:& permutando, ut K est ad O, sic HI est ad IG; & componendo, ut K cum O est ad O, sic HG est ad IG; & quia HG est moles homogenea, sic pondus HG ad pondus IG. Atqui pondus HG per hyp. est pondus AB; & pondus IG supra ostendi esse pondus argenti FD, seu CB. Ergo, ut K cum O ad O, ita mixti pondus AB est ad CB pondus argenti in eodem mixto. Quod erat demonstrandum.

CAP. V.

Regula Positionis simplex.

PRo quæsito numero pone quemvis numerum, qui hypothesis appellabitur, eumque examina juxta tenorem quæstionis. Is si quæstioni non satisfaciat, in regula trium primum locum teneat

neat numerus, ex decurſu inventus; ſecundum hypotheſis; tertium numerus in quæſtione datus. Quartus, ex his inventus, ſolvet quæſtionem.

Illæ igitur quæſtiones, & ſolæ per unam poſitionem ſolvi poſſunt, ex quarum decurſu inventus eſt ad hypotheſim, ut numerus datus ad quæſitum.

Quæſtio I.

TRes ſimul debent 7000. Primus autem debet duplo plus, quàm ſecundus; & hic triplo minus, quàm tertius. Singuli quantum debent?

Pone ſecundum debere 100. Ergo primus debet 200, tertius 300: quæ ſimul conficiunt 600. Deberent autem conficere 7000. Numerus inventus 600 ſit prius in regula trium; hypotheſis 100, ſecundus; datus in quæſtione 7000, tertius. Ex his invenitur quæſitus A. Igitur ſecundus habuit A, primus B, tertius C, qui numeri ſimul juncti conficiunt 7000.

A	$1166\frac{2}{3}$
B	$2333\frac{1}{3}$
C	3500

Demonstratio hujus exempli, atque adeo totius Regulæ per se est manifesta,

Quæstio II.

HOstilis Exercitus tertia pars cæsa est, pars quarta capta, 1000 fugerunt. Quot ergo fuere universi? quot cæsi? quot capti?

Pro quæsito totius exercitus numero pone quemvis numerum, qui habeat datas partes, exemp. gr. 12. Igitur cæsi sunt 4, capti 3, & supersunt 5, qui fugerunt. Deberent autem fugisse 1000. Numerus, ex decursu inventus 5, primus esto in regula trium; hypothesis 12, secundus; datus 1000, tertius. Ex his prodit quæsitus 2400, cujus tertia pars est 800; quarta pars capta est 600: 800 autem, & 600 cum 1000 fugitivis conficiunt 2400.

Quæstio III.

TErtiam itineris partem confeci eques, quintam pedes, quæ simul efficiunt 50 leucas. Quot ergo milliaria to-

totum iter complectitur? quot eques absolvi? quot pedes?

Pro itinere toto pone quemvis numerum, datas habentem partes, puta 15. Eques igitur confeci 5 milliaria, pedes 3: quæ simul efficiunt 8 milliaria. Deberent autem conficere 50. In regula trium primus est 8, numerus inventus ; hypothesis 15, secundus ; datus 50, tertius : ex quibus prodit quæsitus A. Totum ergo iter sunt milliaria A, cujus pars tertia equestris est B, pars verò quinta pedestris est C: quæ simul efficiunt 50 milliaria.

A $93\frac{3}{4}$

B $31\frac{1}{4}$

C $18\frac{3}{4}$

Quæstio IV.

SI præsidium augeretur tertia sui parte, & adhuc 100 accederent, essent Milites 3000. In præsidio igitur quot sunt?

Hæc quæstio, & huiusmodi aliæ, sic propositæ, unica positione solvi nequeunt. Ut ergo per unam positionem hujusmodi quæstiones solvantur, numerus integer 100 fractionibus, quæ partes denominant numeri quæsiti, adhærens anferendus est a dato uumero 3000, ut fiat 2900; atque interim quæstio sic formanda. Si præsidium tertia sui parte augeretur, Milites essent 2900: quot igitur sunt in præsidio? Operando ex præscripto regulæ, reperies in præsidio esse Milites 2175: hi enim aucti tertia sui parte, quæ est 725, finnt 2900. Quod si numero sic invento 2175, præter tertiam sui partem, addantur 100, quæ a 3000 supra abstulimus, restituentur 3000, atque ita solutio obtinebitur quæstionis datæ.

Quæstio V.

ANtonius ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos, Paulus utriusque ætatem complectitur, & insuper annos 6: omnes verò tres simul conficiunt 60 annos. Quot ergo singuli annos habent?

Neque hæc quæstio per unicam positionem solvenda est. Ponatur enim Carolum habere annos 6. Horum duplo si addam 4, habebo 16 annos Antonii. Horum verò anni juncti, adjectis 6, dant 28 annos Pauli. Et tres simul conficient annos 50. In regula trium pri-

primus esto 50; secundus, 6 hypothesis; tertius 60, datus. Ex his pro quæsito annorum Caroli proveniet A. Qui numerus non solvit quæstionem: sic enim Antonius haberet annos B; Paulus verò annos C; & tres simul conficient annos D. Deberent autem 60.

	1
A	7 — 5
	2
B	14 — 5
	3
C	21 — 5
	1
D	43 — 5

Certum igitur est, non esse hìc numerum inventum ad hypothesim, ut datus est ad quæsitum: aliàs enim unica positione fuisset quæstio per regulam trium soluta. Verum, cum sæpe non ita promptum sit discernere, utrum numerus, ex positione inventus, sit ad positionem, seu hypothesim, ut datus sit ad quæsitum; aliud erit hujus rei indicium assignandum.

Ex quo indicio colligatur, quæstionem unica positione solvi non posse.

Quotiescumque, ut cum numero ad libitum posito iuxta quæstionis tenorem procedatur, assumi debet numerus aliquis, in quæstione datus, certus esto, quæstionem unica positione solvi non posse.

Exemplum sumatur in quæstione ultima superiori, in qua pro annis Caroli positus est 6. Ut jam cum hac hypothesi procedatur juxta tenorem quæstionis, assumi debent 4, ad duplicatos Caroli annos adjiciendi, ut habeatur ætas Antonii: qui numerus 4, quia datus est in quæstione, ea solvi non poterit unica positione.

Quod universaliter sic demonstro.

	F	V
X	A	
Z	I	D

Hypothesis, seu positio falsa sit F: numerus verus, qui quæritur, esto V: numerus quispiam, in quæstione datus, qui assumi debuit, ut cum falsa hypothesi F, quæstio decurri posset, sit A. Numerus datus, seu cognitus principalis, qui cum eodem A, & vero quæsito V, tenore quæstionis decurso, producitur, esto D. Manifestum est, A non esse ad F, ut A est ad V; cum F, & V ex hyp. sint inæquales. Alius ergo X major, minorve, quam A, erit ad F, ut A est ad V. Procedendo igitur cum V, & F, juxta quæstionis tenorem,

pro-

producatur Z. Quoniam igitur V, & A ipsis F, & V sunt proportionales; manifestum est, si juxta ejusdem quæstionis tenorem, tam cum X, & F, quàm cum A, & V procedatur, productos inde numeros Z, & D fore ipsis F, & V proportionales. Sit jam I ille numerus, qui inventus est, decurrendo cum falsa positione F tenorem quæstionis, assumendo ad hoc datum illum numerum A. Quoniam igitur E, & A, ut ostendi supra, sunt inæquales; etiam Z, & I producti, seu inventi ex decursu quæstionis ille cum X, & F; hic cum A, & F, inæquales erunt. Quare cum supra demonstratum sit, Z esse ad E, ut D est ad V; non erit I, inventus ex decursa quæstione cum falsa hypothesi F, & uno ex datis A, ad hypothesim F; ut est datus numerus D, qui fit decurrendo quæstionem cum vero quæsito V. Ejusmodi ergo quæstio non solvitur una positione. Quod erat demonstrandum.

Scholium

CUm numerus ex positione inventus, & in quæstione datus sunt similes plani, vel solidi, vel gradus altioris cujuscumque; neque tum quartus proportionalis, per regulam trium inventus, erit is, qui quæritur.

Disponendi sint 1875 milites acie rectangula, sic ut latus sit triplo longius fronte. Quot in fronte disponendi? quot in latere? Pone 4 in fronte. Ergo in latere erunt 12: qui numeri ducti in invicem conficiunt 48. Deberent autem 1875. Sunt ergo 48 inventus, & 1875 similes plani, cum latera habeant similia. Ergo eorum proportio per XVIII.VIII. duplicata est proportionis laterum, quæ sunt ipsa hypothesis 3, & quæsitus. Igitur permutando, non est inventus 48 ex hypothesi 4 ad hypothesim 4, ut datus 1875 ad quæsitum. Ergo hæc quæstio per hanc regulam solvi nequit. Eodem modo id ipsum ostendam, cum inventus, & datus sunt similes solidi, ut continget in hac quæstione. Est murus, qui continet 13824 pedes cubicos, longitudo ejus est decupla altitudinis, hæc vero quintupla spissitudinis. Quæritur longitudo, altitudo, spissitudo.

Cæterum quæstiones hujusmodi aliis solvuntur viis, & facillime per Algebram, cujus vis nullo quæstionum genere limitatur.

CAP.

CAP. VI.

Regula duplicis positionis.

HÆc regula præcedenti multo universalior est: omnes enim quæstiones, quæ per unam positionem solvi possunt, solvuntur etiam per duas; & præter has aliæ innumeræ, quæ per unam solvi non possunt.

Regula verò sic habet. Pro quæsito numero pone quemvis numerum, qui dicetur hypothesis, & cum eo procede, juxta tenorem quæstionis: cui si non satisfaciat, errorem hypothesi subscribe. Ponatur deinde alius quicumque numerus, cum quo similiter ratiocinare, juxta quæstionis sententiam: cui si non satisfaciat, errorem subscribe hypothesi suæ. Errores porro, si excessu peccant, notentur signo +; si defectu, signo —.

Ex duplici hac positione quæsitus numerus per regulam trium elicietur duobus modis.

Primus modus ex duplici errore eliciendi quæsitum.

IN regula trium primo loco statuatur differentia errorum, si similes ii sunt; errorum summa, si dissimiles: secundo loco differentia hypothesium: tertio loco error alteruter.

Quartus proportionalis, ex his tribus inventus, illi hypothesi, ex qua error tertio regulæ trium loco assumptus est fluxit, addendus est, cum assumptus est error deficiens; subtrahendus, cum excedens, ut habeatur quæsitus.

Errores dicuntur similes, cum vel uterque est per defectum, vel uterque per excessum; dissimiles, cum unus est per defectum, alter per excessum.

Nota I. Expedit plerumque hypotheses assumere quàm minimas, imo unitatem si fieri potest, & binarium, ut quàm brevissima sit operatio. II. Expediet item plerumque primam hypothesim sola unitate augere, vel minuere, ut habeatur hypothesis altera, sic enim regula trium absolvetur sola divisione. III. assumendæ hypotheses, quæ sine fractionibus, quantum fieri poterit, juxta te-

tenorem quæstionis possint examinari: qua de causa nonnunquam expediet duas notationes primas negligere.

Reliquum est, ut exemplis præcepta declaremus.

Quæstio I.

TRes lucrati sunt aureos 400. Lucrum secundi superat lucrum primi aureis 12. Lucrum verò tertii excedit lucrum secundi aureis 16. Quæritur lucrum singulorum.

Lucrum primi esto aureus unus. Ergo secundi lucrum sunt 13 aurei, tertii 29: quæ simul omnia conficiunt 43 aureos. Debebant autem conficere 400. Error igitur per defectum est 357.

Hyp. 1.	2. hyp.
err.-357.	-354 err.
3 differ.	

Esto rursus lucrum primi, 2 aurei. Ergo secundi est 14, tertii 30: quæ simul efficiunt 46. Deberent autem 400. Erratum igitur est rursum defectu 354.

hyp. 1.	2. hyp.
-357	-354

Quoniam igitur uterque error defectus est, sic regulæ trium ordinandi erunt

ter-

3 1 .357. err. pri.
Differ. err. Differ. hyp.
.354. err. sec.

termini, ex tribus 3, 1, 357 elicitur quartus 119, addendus primæ hypothesi 1, ut fiat 120 numerus quæsitus: ex tribus 3, 1, 354, quartus prodit 118, qui additus secundæ hypothesi 2, etiam dat 120 numerum quæsitum. Igitur primi lucrum sunt aurei 120: quibus adde 12, fit lucrum secundi 132. Huic quoque si addas 16, fit 148 lucrum tertii, qui tres numeri faciunt 400.

Aliter.

hyp. 1000 1001. hyp.
+ 2640 + 2643

Finge primi lucrum esse 1000. Ergo secundi est 1012, & tertii 1028: quæ simul omnia faciunt 3040. Deberent autem 400. Erratum est ergo excessu 2640. Finge rursum primi lucrum esse 1001. Ergo secundi est 1013, tertii 1029: quæ tria simul efficiunt 3043. Deberent autem 400. Erratum est ergo rursus excessu 2643. Quare cum uterque error sit per excessum, regula trium ordidinabitur, ut supra; sed quartus proportionalis ab hypothesi erit subducendus.

3	1	+ 2640. err. pri.
Diff. error.	Diff. hyp.	
		+ 2643. err. sec.

Ex tribus 3, 1, 2640 elicitur quartus 880, subtrahendus ab hypothesi prima 1000, ut habeatur quæsitus 120. Ex tribus 3, 1, 2643 quartus prodit 881, qui subtractus ab hypothesi secunda 1001, exhibet rursus quæsitum 120.

Aliter.

hyp. 1.	1000. hyp.
-357	+ 2640.

Finge primi lucrum esse unum. Deprehendes, ut supra, errorem 357 per defectum. Finge rursus lucrum secundi esse 1000. Error deprehendetur 2640 per excessum. Quoniam ergo dissimiles errores sunt, regula trium sic ordinabitur.

2997	999	-357 err. pri.
Summa err.	Diff. hyp.	
		+ 2640. err. sec.

Ex tribus 2997, 999, 357 habetur quartus

tus 119, qui, quod error fuerit per defectum, addendus est primæ hypothesi 1; ut habeatur quæsitus 120. Ex tribus, 2997, 999, 2640 invenitur quartus 880 qui, quod error fuerit per excessum, subtrahendus est ab hypothesi secunda 1000, & prodit idem quæsitus 120, qui supra.

Voluimus in hujus primæ quæstionis solutione omnes regulæ casus exponere. Quod hìc fecisse semel sufficiet.

Quæstio II.

ÆTas Antonii ætatem Caroli continet bis, & adhuc 4 annos; Paulus utriusque ætatem complectitur, & annos adhuc 6. Omnes verò tres simul conficiunt annos 60. Quæ ætas est singulorum.

Hæc quæstio est illa, quam Cap. præced. huc rejecimus.

Ætas Caroli esto annus 1. Ergo Antonii ætas est 6: Pauli 13: & tres simul efficiunt 20. Debe-rent autem 60. Erratum est ergo defectu 40. Fingo rursum, annos Caroli esse 2. Ergo Antonii sunt 8: Pauli 16: & simul omnes efficiunt

Hyp. 1.	2. hyp.
—40	—34.

ciunt 26. Erratum igitur defectu 34. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Err. diff.	Hyp. diff.	Error prim.
6	1	40

Ex qua proveniet quartus A, addendus hypothesi primæ 1, ut fiat quæsitus B, ætas nempe Caroli.

$A\ 6\ \frac{2}{3}$

$B\ 7\ \frac{2}{3}$

Quæstio III.

Conficienda est certa pecuniæ summa. Si singuli conferrent 1 florenum, deficerent ad summam floreni 19. Si duos singuli, redundarent itidem 10. Quanta est summa, & quot Collatores?

Fingo Collatores esse 100, qui singuli conferentes 1 florenum conficient 100 Flor., quæ summa quia a summa quæsita deficere debet florenis 10, summa quæsita esset 110. Si jam singuli ex Collatoribus 100 conferant Flor. 2, fient 200: a quibus si aufers 10, fit summa 190, quæ deberet esse æqualis priori 110. Sed aberrat per excessum 80. Fingo rursum Collatores esse 101, hi singuli conferentes

tes 1 florenum conficiunt summam 101, ac	Hyp. 100. + 80	101. hyp. + 81

proinde summa quæsita esset 111. Quod si conferrent singuli duos florenos, conficerent 202; a quibus si aufers 10, fit summa 192, quæ deberet æqualis esse summæ priori 111. Sed aberrat excessu 81. Sic ergo regula trium ordinabitur.

1	1	80
Diff. err.	Diff. hyp.	Err. pri.

Qua reperitur quartus 80, auferendus ab hypothesi prima 100. Quæsitus ergo Collatorum numerus est 20; quibus si addas 10, fit summa quæsita 30 flor. Si enim viceni singuli conferant 1, fit summa 20, quæ deficit a 30 per 10. Si verò singuli conferant 2, fit summa 40, quæ 30 excedit per 10.

Quæstio IV.

Regius Exercitus constat Hispanis, Belgis, Germanis. Germani sunt 10,000. Belgæ conficiunt tertiam partem Germanorum, & Hispanorum. Hispani dimidiam Germanorum, & Belgarum.

rum. Quot ergo sunt Belgæ? quot Hispani?

Pono Belgas esse 4000. Ergo Germani & Hispani sunt 12000. Ergo quia Germani sunt 10000, Hispani erunt 2000: qui bis sumpti deberent conficere Germanos, & Belgas, nempe 14000. Conficiunt autem tantum, 4000. Erratum ergo est defectu 10000. Fingo rursum, Belgas esse 5000. Ergo Germani, & Hispani sunt 15000. Et quia Germani sunt 10000, Hispani erunt 5000: qui bis sumpti conficiunt 10000. Deberent autem conficere Germanos, & Belgas, nempe 15000. Erratum ergo est rursum defectu 5000. Sic ergo regula trium ordinabitur.

Hyp.	Hyp.
4000	5000
-10000	-5000

5000.	1000.	-10000.
Diff. errorum.	Diff. hyp.	Error primus.

Qua reperitur quartus 2000, addendus hypothesi primæ 4000. Sunt igitur Belgæ 6000, Hispani 8000.

Quæ

Quæstio V.

SI ex Regio Equitatu ad hostilem transfugerent 900, æquales forent utrimque. Si vero 900 ex hostili ad Regium transfugerent, esset Regius decuplo major hostili. Quæritur numerus utriusque Equitatus.

Fingo Equitatum hostilem esse 2000. Si ex his transfugiant 900 ad Regios, restabunt 1100, & his decuplo tum major erit Equitatus Regius, ac proinde 11,000 Unde si demam 900 transfugas, Regius Equitatus erit 10,100. Si ex hoc transfugiant 900 ad hostilem, restarent ex Regiis 9200, & hostilis fieret 2900: exceditque tum adhuc Regius hostilem numerum 6300. Debebat autem equalis esse. Erratum est igitur excessu 6300. Fingo

	Hyp.	hyp.
	2000	2001.
	+6300	+6309

deinde hostilem Equitatum esse 2001, & discurrendo rursum juxta tenorem quæstionis, reperio errari per excessum 6309. Sic igitur regula trium ordinabitur.

9	1.	+ 6300.
Diff.err.	Diff.hyp.	Err.primus.

Ex qua reperitur quartus 700, a prima hypothesi 2000 auferendus, quia error hypotheseos est per excessum, ut fiat 1300. Hostilis ergo Equitatus est 1300, Regius 3100.

Hæc quæstio sic etiam proponi poterat. Si Petrus Paulo ex suis nummis det 9, habebunt æque multos ambo. Si verò Paulus ex suis det 9 Petro, is decuplo habebit plures, quàm Paulus. Quot ergo nummos habuit Petrus? quot Paulus? Reperies Petrum habuisse 31, Paulum 13.

Fraus Aurifabri, de qua egi sub finem Cap.IV., etiam per hanc regulam reperitur hunc in modum.

Quæstio VI.

CORONA ex auro, & argento mixta fit 10 lib. Inquiratur, quantum aurum in aqua fiat levius, quàm in aere. Fit proportione 18 ad 19. Hinc per regulam trium elicitur, massam auri 10 lib. in aqua leviorem fieri proportione

$$A \quad 9\tfrac{9}{19} \text{ ad } 10$$

$$A \quad 9\tfrac{27}{589} \text{ ad } 10$$

$$C \quad 9\tfrac{25}{589} \text{ ad } 10$$

$$B \quad 9\tfrac{1}{31} \text{ ad } 10$$

$$B \quad 9\tfrac{19}{589} \text{ ad } 10$$

A ad 10. Inquiratur deinde, qua proportione argentum in aqua fiat levius. Ea est 28 ad 31. Ex qua elicitur, massam argenti 10 lib. leviorem fieri in aqua proportione B ad 10. Si jam Corona 10 lib. ex auro, & argento mixta imponatur aquæ, ea fiet levior proportione aliqua inter priores media. Ea sit C ad 10. Quæritur, quantum argenti sit permixtum.

Fingo admixtam esse libram 1. Ergo auri sunt in Corona lib. 9. Jam si au-

ri

si libræ 10 sunt in aqua libræ A; ergo 9 libræ auri in aqua quot appendent libras? per regulam trium, reperio libras D. Rursum si

$$D\ \frac{47952}{5890} \qquad E\ \frac{5320}{5890}$$

$$F\ \frac{42632}{5890} \qquad G\ \frac{20628}{5890}$$

10 lib. argenti in aqua sunt lib. B; ergo 1 lib. argenti in Corona quid appendet in aqua? reperio E. Igitur D, & E deberent conficere G pondus coronæ in aqua. Conficiunt autem F. Erratum est igitur defectu G. Fingo deinde, admixtas esse libras argenti duas, & discurrendo ut supra, errorem reperio alterum L per excessum. Sic igitur regula trium ordinabitur.

$$L\ \frac{2}{589}\ \text{seu}\ \frac{20}{5890}$$

$$\frac{10648}{5890} \qquad 1. \qquad \frac{2}{589} \qquad N\ \frac{12780}{6271672}$$

Sum. err. Diff. Hyp. err. sec.

Ex qua proveniet N, quæsita argenti quantitas in mixto.

Alter modus ex duplici errore eliciendi quæsitum.

SI errores sunt similes, ducatur prima hypothesis in errorem secundæ, & hypothesis secunda in errorem primæ, & productorum differentia dividatur per differentiam errorum. Quotiens erit numerus quæsitus.

Si errores sunt dissimiles, productorum summa dividatur per summam errorum.

Resumatur quæstio prima, in qua hypotheses erant 1, & 2; errores similes —357, —354. Facta multiplicatione alterna, sive in crucem, producta sunt 354, 714, quorum differentia 360 divisa per errorum differentiam 3, dat 120 numerum quæsitum.

Pri.	Sec.		
1	2		
-357	-354.		
3		Producta	
Err. Diff.		354	714
			360
			Diff.

In eadem quæstione aliæ erant hypotheses 1000, & 1001, ex quibus errores provenerant similes + 2640, & + 2643. Ex hypothesium per errores alterna multitiplicazione producta sunt 2643000, 2642640, quorum differentia 360, divisa per 3 differentiam errorum, exhibet 120 quæsitum numerum.

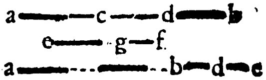
Rursus in eadem quæstione hypotheses fuere, 1 & 1000, ex quibus errores dissimiles — 357, & + 3640. Ex his, in alternos errores ductis, producuntur 2640, & 357000; quorum jam summa (sunt enim errores dissimiles) 359640, divisa per summam errorum 2997, exhibet quæsitum 120.

Prior modus simplicior est, & plerumque expeditior.

De primi modi demonstratione.

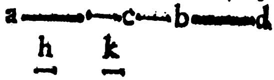
Quod ad primum modum attinet, nulla peculiari demonstratione opus est: quandoquidem supponitur, ut quæstio per hanc regulam solvi possit, uti differentia, vel summa errorum est ad differentiam hypothesium, ita esse errorem ad numerum, qui suæ hypothesi addendus, vel demendus est ad obtinendum quæsitum. Tantum igitur proportionalitas illa erit nonnihil declaranda.

Quæsitum sit AB: hypothesis prima



AC, & illius error EF: hypothesis secunda AD, & hujus error EG. Sint autem primò hypotheses, vel ambæ simul minores quæsito, vel simul ambæ majores, ut errores habeantur similes. Si jam sit, ut errorum differentia GF ad hypothesium differentiam DC, ita primus error EF ad CB, quod primæ hypothesi AC ad quæsitum AB deest, vel redundat: vel rursum si sit, ut errorum differentia GF, ad hypothesium differentiam DC, ita secundus error EG ad DB, quod secundæ hypothesi AD deest, vel redundat ad quæsitum AB, quæstio per hanc regulam solvi poterit. Si tunc enim, quod præscribit regula, differentiæ errorum, differentiæ hypothesium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is illud erit, quod alterutri hypothesi debet addi, vel demi, ut habeatur quæsitum. Quod quidem per se est manifestum.

Esto deinde hypothesis prima BC minor quæsito AB, ejusdem error H per defectum; hypothesis verò secunda AD major quæsito, ejusque error K per excessum. Si jam, ut summa errorum HK, est ad hypothesium differentiam CD, ita sit



sit H error primus ad CB defectum primæ hypotheseos AC a quæsito AB, vel secundus error K ad BD excessum hypotheseos secundæ AD supra quæsitum, solvetur quæstio per hanc regulam. Si enim, quod regula jubet, summæ errorum, differentiæ hypothesium, & errori alterutri quæratur quartus proportionalis, is erit hypotheseos a quæsito defectus, vel excessus, ut per se patet.

Si porro quæras, quando sit errorum differentia, vel summa ad differentiam hypothesium, ut error ad hypotheseos suæ excessum, defectumve a quæsito; ac proinde quæ sub hanc regulam quæstiones cadant, quæ non. Respondeo, id ex ipsa quæstionum natura esse dijudicandum. De quo quidem, quia multa dicere operæ pretium non est, e pluribus unum, alterumve indicium adferam obvium, & facile.

Si ex duabus hypothesibus plures habeantur errores, quàm duo, quæstio sub hanc regulam non cadet. Talis est hæc: invenire numerum, quo diviso per 2, 3, 4, 5, 6 restet semper unum, vel alii numeri dati: diviso verò per 7 restet nihil.

Si, cum uterque error est per defectum, error hypotheseos majoris non sit minor errore minoris; aut cum uterque error est per excessum, si error hypotheseos majoris non sit major errore minoris: scito rursum quæstionem non cadere sub hanc regulam. Talis est quæstio præcedens, imo etiam hæc. Invenire numerum, quo diviso per 7 restent 3; diviso per 9 restet nihil. Pono 27 pro quæsito: hunc metitur quidem 9, sed 7 dividens relinquit 6. Deberet autem relinquere 3. Error igitur est 3 per excessum. Pono deinde pro quæsito 54, majorem prima hypoth. 27. Hunc 9 metitur, at 7 dividens relinquit 5. Deberet autem solum 3. Error igitur etiam per excessum, & minor errore primo. Non cadit ergo quæstio sub hanc regulam.

Tandem, ne nimium hic intricentur Tirones, generale indicium illis accommodatum istud esto. Si semel cum duabus hypothesibus ex præscripto regulæ operatus quæsitum non obtineas, neque per alias quascumque hypotheses quæsitum obtinebitur.

Mo-

Modi secundi demonstratio.

Casus I.

a——c——d——b

e——g——f

Quæsitum esto AB: hypothesis prima AC, secunda AD, utraque quæsito minor: error primæ EF, secundæ EG. Productum ex hypothesi prima AC in errorem secundum EG, dicatur AC in EG. Productum ex hypothesi secunda AD in errorem primum EF, æquatur [a] his quatuor, AC in EG; AC in GF; CD in EG; CD in GF, Quia igitur AC in FG utrique producto commune est, erit

[a] collig. ex 1.2.

Productorum differentia. Æ AC in GF, CD in EG, CD in GF | quæ X dicantur.

Dein AB in FG Æ [b] AC in GF, CD in GF, DB in GF | quæ dicantur Z.

[b] 1.2.

Jam quia ex suppositione GF differentia errorum est ad CD hypothesium differentiam, ut error primus EF ad CB hypotheseos primæ defectum a quæsito AB; etiam permutando erit GF ad EF, ut CD ad CB. Ergo & GF est ad EG, ut CD ad DB.

DB. Ergo in aggregato Z, GF in DB; seu DB in GF æquatur CD e in EG, in aggregato X. Quare cum reliqua utrimque communia sint, erunt tota X, & Z æqualia. Atqui jam ostensum est Z æquari AB in GF, X verò æquari differentiæ productorum. Ergo etiam AB in GF æquatur differentiæ productorum. Atqui AB in GF, diviso per GF, quotiens est AB. Ergo etiam differentia productorum, divisa per GF differentiam errorum, quotiens est AB, ipsum videlicet quæsitum. Quod erat demonstrandum.

Ciy. r.

Casus II.

Esto jam hypothesis utraque AC, AD major quæsito AB. Productum ex hypothesi prima AC in errorem secundæ EG, dicatur AC in EG.

AC in EG	Æ	AB in EG BD in EG DC in EG	quæ dicantur P

Productum ex hypothesi secunda AD in errorem primæ EF, dicatur AD in EF.

AD

AD in EF	Æ	AB in EG AB in GF BD in FG BD in GF	quæ dicantur Q

a —— b —— d —— c
e —— g —— f

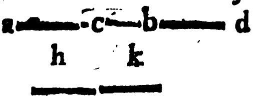
Nunc quia ex suppositione GF differentia errorum est ad DC differentiam hypothesium, ut primus error EF ad BC excessum hypotheseos primæ AC supra quæsitum AB, (aliàs enim quæstio per hanc regulam solvi non posset) etiam permutando erit GF ad EF, ut DC ad BC. Ergo etiam GF est ad EG, ut DC ad BD. Ergo GF in BD, seu BD in GF æquatur DC in EG. Quare si in aggregato Q pro BD in GF substituatur DC in EG, erit

AD in EF	Æ	AB in EG AB in GF BD in EG DC in EG	quæ dicantur R

Quare si conferantur R, & P, invenietur productorum differentia esse AB in GF. Atqui AB in GF, diviso per GF, quotiens est AB. Ergo differentia productorum, divisa per GF errorum differentiam,

tiam, quotiens est AB, ipsum nempe quæsitum. Quod erat demonstrandum.

Casus III.



SIt denique prima hypothesis AC minor quæsito AB; at secunda AD major. Productum ex hypothesi prima AC in errorem secundum K, dicatur AC in K. Productum ex AD hypothesi secunda in errorem primum H æquatur, AC in H; CB in H; BD in H. Ergo

a collig. ex I. 2.

Summa productorum Æ a AC in K, AC in H, CB in H, BD in H — quæ vocentur S.

Dein AB in HK Æ AC in K, AC in H, CB in H, CB in K — quæ vocentur V.

Vide etiam schemata pag. praec.

Nunc quia per hypothesim HK errorum summa est ad CD differentiam hypothesium, ut H error primus est ad CB hypotheseos primæ AC defectum à quæsito AB; erit etiam permutando, dividendendo, ac invertendo H ad K, ut CB ad BC. Ergo in S, & V, BD in H, & CB in K o æqualia sunt. Quare cum reliqua utrimque communia sint, erunt tota S, & V æqualia. Quare cum V sit AB in HK, & S sit summa productorum; etiam AB in HK summæ productorum æqualis erit. Atqui AB in HK, diviso per HK, quotiens est AB. Ergo etiam productorum summa divisa per HK summam errorum, quotiens est AB, ipsum nempe quæsitum. Quod erat demonstrandum. 19. 7.

Scholium.

Quæstio, quam negavi supra per regulam duplicis positionis solvi posse, celebratur ab Arithmeticis, nec tamen solvitur ab ullo, quem legerim. Quare visum est in gratiam Studiosorum illius solutionem hic apponere.

Lemma.

Datum numerum A, sæpius positum, dividere per datum B, donec residuus sit datus D.

D	3.
A	B
9	7.

2.4.6.1.3.
9.9.9.9.9.45
7 7 7 7 7

Hoc ita fiet: primo A 9 diviso per B 7, restat 2, scribe supra primum 9: *ac mente adi-*

dito ad secundum 9, ut fiat 11, divide per 7, restabit 4, quæ scribe supra secundum 9, ac adde ad tertium 9, ut fiat 13; quæ rursum divide per 7, restabit 6. Sic deinceps procedendo, reperies hic ex quinta divisione relinqui D 3, numerum datum.

Eodem modo operaberis, si dētur duo numeri dividendi A, & X, quorum primus A tantum semel, alter X sæpius ponitur. In exemplo apposito post quintam divisionem relinquitur numerus datus D 2.

A		X	D 2.	
45.		63		
		B 5		
0	3	1	4	2
45.	63.	63.	63.	63.
5	5	5	5	5

Quod si contigat bis relinqui eumdem numerum, diversum a dato,

3	0	3	0	3
9	9	9	9	9
6	6	6	6	6

quæsitum lemmatis erit impossibile. In primo exemplo, in quo 9 sæpius positus dividitur per 6, tam post primã, quàm post tertiã divisionẽ restat 3: liquet igitur continuata ulterius divisione sẽmper eadẽ fore residua 3.0.3. In secundo exemplo, in quo 9, & 8 sæpius positus dividuntur per 6, tã post primam divisionem,

quàm post quartam restat 3: quare si conti-

3	5	1	3	5	1	3
9	8	8	8	8	8	8
6	6	6	6			

nue-

nuetur divisio, eadem semper recurrent residua 3. 5. 1: ac proinde si residuum quæsitum in lemmate sit ab his diversum, lemma erit impossibile. Ratio per se est manifesta.

PROBLEMA I.

INvenire numerum K, quo diviso per datos quoscumque A, B, C, sint residua data V, X, Z, diviso autem per alium datum D, restet nihil.

Inveniatur F multiplex numeri D talis, ut eo diviso per C, restet Z: quod fiet si D toties ponatur, ac dividatur per C, donec restet Z, ut expositum est in lemmate: F enim tam multiplex est ipsius D, quoties D positus est.

Si jam F diviso etiam per B, non etiam restat X, inveniatur per XXXVI. Lib. VII. minimus, quem D, & C metiuntur, qui sit M: tum inveniatur numerus G, compositus ex F, & multiplo ipsius M talis, ut eo diviso per B restet X. Id vero fiet, si primò ponatur F 45, ac deinde toties M 63, donec his per B divisis restet X: G enim æquatur F, & tam multiplo ipsius M, quoties M positus est.

Quod si jam G etiam diviso per A, non restet etiam V, quæratur per XXXVIII. Lib.

Lib. VII. *numerus N minimus, quē tres D, C, B, metiuntur: inveniatur deinde K compositus ex G, & multiplo ipsius N talis, ut eo diviso per A, residuus sit V: hoc verò obtinebitur, si primò ponatur G 297, ac deinde toties N 315, donec his divisis per A, restet V: K enim æquatur G, & tam multiplo ipsius N, quoties N positus est.*

Dico K esse quæsitum, & quidem minimum.

	A	B	C	D.	N. 315			63 M	
	8.	5	7.	9.					
	5	2	3		K		G	F	
	V	X	Z		1557.		297.	45.	
2	4	6	1	3	0	3	1	4	2
9.	9.	9.	9.	9.	45	63	63	63	63
7	7	7	7	7	5	5	5	5	5
		1	4	7	2	5			
		297.	315.	315.	315.	315.			
		8	8	8	8	8			

Demonstratio.

Ex constr. D metitur M, ac proinde & multiplum ipsius M. Metietur etiam D multiplum b *suum F. Ergo D metitur G compositum ex F, & multiplo ipsius M. Metitur autem D* c *etiam N, adeoque & multiplum ejus. Ergo D metitur compositum*

b const.

c const.

tum d *ex G, & multiplo ipsius N. Quod* d constr.
erat e quæsitis primum.

Deinde C dividens F e *relinquit Z. At-* e constr.
qui C f *metitur M, adeoque & multiplum* f constr.
ejus. Ergo C dividens G, compositum g *ex* g constr.
multiplo ipsius M, & ex F, etiam relinquit Z. Rursum C metitur N, adeoque & ejus multiplum. Ergo C dividens K, compositum ex multiplo h *ipsius N, & ex G,* h constr.
etiam relinquit Z. Quod erat secundum.

Rursus per constr. B dividens G relinquit X. Atqui B metitur i *N, adeoque &* i constr.
ejus multiplum. Ergo B dividens K, compositum l *ex multiplo ipsius N, & ex G,* l constr.
relinquet X. Quod erat tertium.

Denique per construct. A dividens K relinquit V. Quod erat postremum. Quæsitus igitur numerus est K. Quod verò etiam minimus sit, ex constructione patet. Sumpsimus enim M minimum, quem metiuntur D, C; & N minimum, quem metiuntur D, C, B.

Determinatio problematis patet ex lemmate.

PROBLEMA II.

Iisdem positis, numerum, qui problemati satisfaciat, secundum, & tertium, & omnes ex ordine reliquos infinitos reperire.

a 18.7. Vide etiam schema pag. praec. Inveniatur O minimus, a quem omnes divisores dati A, B, C, D metiuntur. Hic O additus primo K, superius invento, dabit secundum K+O; additus verò secundo, dabit tertium K+2O. Et sic deinceps.

Demonstratio.

K	K+O	K+2O
1557.		
	O	

QUoniam A per constr. metitur O, & per praeced. dividens K relinquit V; etiam A metiens K+O relinquit V. Rursum quia B metitur b O, dividens verò c K relinquit X; etiam B dividens K+O relinquit X. Pari modo ostendam, si C dividat K+O relinqui Z. Denique, quia D metitur O ex constr. & K per praeced., metietur etiam K+O. Ergo K+O ex iis est, qui problemati satisfaciunt; & quidem secundus, quod ex K primo, & ex O omnium divisorum A, B, C, D minima dividendo sit procreatus.

b constr.
c constr.

Eadem modo demonstrabitur, tertium esse K+2O, & sic deinceps in infinitum.

PROBLEMA III.

SI numerus quaeratur, quo diviso per quotcumque datos A, B, C, residuus sit sem-

semper idem numerus V: diviso autẽ per alium datum D, restet nihil, brevior erit operatio hunc in modum.

A	B	C	D		
8.	4.	7.	6.		
Q	R			4	σ
56.	114.	2.		56.	56.
	V			6.	6.
	2				

Inveniatur a *minimus Q, quem A, B, C metiuntur. Tum inveniatur R, compositus ex V, & multiplo ipsius Q, talis, ut eo diviso per D, nihil remaneat; quod obtinebitur, si primò ponatur V 2, ac dein toties Q 56, donec his divisis per D, nihil superſit. Q enim toties acceptus, quoties positus fuit, una cum V, dabit R.* a 38. 7

Dico R esse quæsitum.

Demonstratio.

QUoniam *A*, B, *C metiuntur* b Q, *metientur etiam multiplum ipsius Q. Ergo A, B, C dividentes R, compositum ex multiplo ipsius Q, & ex V; relinquunt V. D autem dividens R, nihil* c *relinquit. Ergo R est quæsitus.* b consl. c consl.

Secundus, tertius, quartus, & reliqui omnes sine termino, qui problemati satisfaciunt, *reperientur, ut Probl. II.*

ARITHMETICÆ PRACTICÆ LIBER V, DE PROGRESSIONIBUS.

Quintum hunc, & postremum Arithmeticæ librum progressionibus dare visum est. Eas alii obiter fere tantum, & quasi appendicis instar tractare solent: Sunt tamen ejusmodi, sive theoriam spectes, sive praxim, ut contemplationem longiorem, accuratioremque mereantur.

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA

CAPUT I.

Progressionis Arithmeticæ affectiones.

PRogressio Arithmetica est series numerorum, se mutuò æquali excessu superantium. Primus seriei terminus potest esse quicumque; excessus quoque terminorum quilibet esse potest; etiam æqualis primo termino.

1	2	3	4	5	6	7	8	9.	&c.
1	3	5	7	9	11	13	15	17.	&c.
3	6	9	12	15	18	21	24	27.	&c.

THEOREMA I.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	17	20	23	26	29

excess. x.

3.

QUilibet terminus f progressionis Arithmeticæ continet primum, hoc est minimum terminum a, & toties communem excessum x, quot post primum usque ad ipsum f inclusive sunt termini.

Patet ex definitione progressionis Arithmeticæ.

Corollarium.

HAbetur igitur maximus terminus, si excessus ducatur in numerum terminorum unitate mulctatum, & producto addatur minimus.

THEOREMA II.

IN progressione Arithmetica summa duorum quorumlibet terminorum c, g *æquatur summæ quorumlibet duorum, ab ipsis æqualiter distantium* a, k.

Demonstratio.

QUoniam *k* superat *b* excessu *x*, eodem, quo *b* superat *a*; si *k* det suum *x* ipsi *a*, patet *k* futurum æquale ipsi *h*, & *a* ipsi *b*. Igitur *a* cum *k* æquatur *b* cum *h*. Eodem modo ostendam *b* cum *h* æquari *c* cum g. Ergo *a* cum *k* æquatur *c* cum g. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA III.

PRogressionis Arithmeticæ terminus quicumque dimidius est summæ duorum, a se æquliter distantium.

De-

Demonstratio.

a	b	c	d	e	f	g	h	k
5	8	11	14	(17)	20	23	26	29
		excess. x						
			3					

Accipiatur terminus *e* quilibet. Quoniam tam *f* ipsum *e*, quàm *e* ipsum *d* excedunt excessu *x*; manifestum est, si *f* suum *x* det ipsi *d*, omnes tres *f*, *e*, *d* fore æquales. Ex quo patet *e* dimidium esse summæ duorum *d*, *f*. Atqui per Theor. præced. summa *d*, *f* æquatur summæ *c*, *g*; & summæ *b*, *h*; & alteri cuilibet summæ duorum, æqualiter utrimque ex *d*, & *f* distantium. Ergo etiam *e* dimidius est summæ duorum, a se æqualiter distantium. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA IV.

In qualibet progressione Arithmetica omnium terminorum summa habetur.

I. Si summa minimi, & maximi termini ducatur in numerum terminorum, & productum per 2 dividatur:

Vel II. Si summa minimi, & maximi ducatur in semissem numeri terminorum:

Vel III. Si semissis summæ minimi, & maximi ducatur in numerum terminorum.

Demonstratio.

SIt primò numerus *a b c d e f g h* terminorum par.
Summæ binariæ *a,h*; & *b,g*; & *c,f*; & *d,e* sunt inter se æquales per Theor. II. Earum autem numerus æqualis est dimidio numero terminorum. Ergo una ex his summis binariis, puta *a,h*, ducta in dimidium numerum terminorum, æquabitur omnium terminorum summæ, (quod erat secundum;) ac proinde ducta in totum numerum terminorum erit summæ omnium dupla. Ex quo patet primum, & ex illo tertium.

Esto deinde numerus terminorum impar, ut in schemate Theor. III. Cum summæ omnes binariæ *a,k*; & *b,h*; & *c,g*; & *d,f* sint inter se æquales per Theor. II. patet ex discursu præcedenti, unam ex his, puta *a,k*, ductam in numerum terminorum *a, b, c, d, f, g, h, k*, qui in hoc exemplo, medium *e* omittendo, est 8, duplam fore eorumdem terminorum. Atqui summa *a, k* dupla est medii *e* per Theor. III. Ergo summa *a, k*, ducta in totum terminorum numerum 9, qui jam propter medium assumptum est priori 8 unitate major, dupla

pla est omnium terminorum. Ex quo patet primum; ex illo autem facilè patebunt secundum, & tertium.

THEOREMA V.

Cum numerus terminorum est impar; medius in numerum terminorum ductus exhibet summam omnium terminorum.

a	b	c	d	(e)	f	g	h	k
2	7	12	17	(22)	27	32	37	42.

Demonstratio.

Medius *e* dimidius est summæ extremorum *a*, *k* per Th. III. Atqui summa extremorum *a*, *k*, ducta in numerum terminorum, per Th. IV. dupla est summę omnium. Ergo medius *e*, ductus in numerum terminorum, æqualis est omnium summæ. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VI.

In progressione naturali numerorum 1, 2, 3, 4, 5, &c. si ultimus 8 ducatur in numerum proxime majorem 9; producti 72 semissis est summa omnium.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

De-

Demonstratio.

NUmerus ultimo proxime major, quia tantum unitate major est, æquatur summæ ultimi, & primi, qui est unitas. Deinde numerus ultimus in progressione naturali est ipse terminorum numerus. Ducendo igitur ultimum in proxime majorem; duco summam primi & ultimi in numerum terminorum. Atqui sic producitur duplum summæ omnium per Theor. III. Ergo etiam cum ultimus in proxime majorem ducitur, duplum producitur summæ omnium. Producti ergo semissis est omnium summa. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA VII.

IN progressione naturali imparium 1, 3, 5, 7, &c. summa tota æqualis est quadrato numeri terminorum.

a									l
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21

excess. 2.

Demonstratio.

PEr Theor. IV. hæc summa tota æqualis est producto ex dimidio summæ extretremorum a, & l in numerũ terminorum. Atqui dimidia summa extremorum a, l est par numero terminorum, adeoque productum illud est quadratus numeri terminorum. Ergo summa tota æqualis est quadrato numeri terminorum.

Quod autem semissis summæ extremorum a, l sit par numero terminorum, sic ostendo. Per Theor. I, l continet a unitatem, & toties excessum communem 2, quot sunt termini, dempto uno. Ergo si ad l adjiciatur a, nempe unitas, adhuc semel, continebit summa a, l toties 2, quot sunt termini; ac proinde dupla est numeri terminorum. Ergo semissis summæ a, l numero terminorum æqualis est.

THEOREMA VIII.

IN progressione naturali numerorum parium 2, 4, 6, 8, 10, &c. omnium summa æqualis est numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

excess. 2.

a									k
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20.

De-

Demonstratio.

PEr IV. Theor. hæc tota sūma æquatur semissi summæ extremorum a, k ductæ in numerum terminorum. Atqui semissis summæ a, k est unitate major numero terminorum. Ergo tota summa æquatur numero terminorum, ducto in numerum unitate majorem.

Quod verò semissis summæ a, k sit unitate major numero terminorum, sic demonstro: Quia hìc excessus communis est ipse primus terminus a, manifestum ex Theor. I, k toties continere a nempe 2, quot sunt termini; ac proinde duplum esse numeri terminorum. Ergo summa ipsorum a, k excedet duplum numeri terminorum excessu a. Ergo semissis summæ a, k excedet numerum terminorum dimidio ipsius a, hoc est unitate.

THEOREMA IX.

Cujuscumque progressionis Arithmeticæ numerus terminorum habetur, si à maximo dematur minimus, & residuum per communem excessum dividatur, addita quotienti unitate.

Demonstratio patet ex Theor. I.

CAP.

CAP. II.

Progressionis Arithmeticæ Problemata.

PROBLEMA I.

PRogressionem Arithmeticam continuare, uno termino, & excessu datis.

Continuabitur aſcendendo, ſi exceſſus x termino dato a addatur, ut fiat b; & ad b rurſus x, ut fiat c; & ſic deinceps. Continuabis verò deſcendendo, ſi a termino	a b c d 1 4 7 10 exceſ. 3. x

dato, puta d, demas exceſſum x, ut fiat c; & ab c rurſus auferas x, ut fiat b; & ſic deinceps.

PROBLEMA II.

MInimo termino, exceſſu, & terminorum numero datis, invenire maximum.

Exceſſum duc in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum adde minimo termino, ſumma dabit maximum. Patet ex Theor. I. & Corollario.

PRO-

PROBLEMA III.

Minimo termino, excessu, & numero terminorum datis, invenire summam progressionis.

Per Probl. I. inveni maximum; si datus non sit. Deinde summam extremorum id est minimi, & maximi duc in numerum terminorum. Producti semissis est summa.

Patet ex Theor. IV.

Aliter. Si summa extremorum par est, ejus semissis, ducta in numerum terminorum, dabit summam totam.

Aliter. Si numerus terminorum par est, summa extremorum, ducta in semissem numeri terminorum, dabit summam totam.

Utrumque patet ex IV. Theor. *Cum aut summa extremorum, aut numerus terminorum impar est, proveniet quidem summa, sed ut fractiones declinentur, præstat tum uti modo primo.*

Aliter. Cum numerus terminorum impar est, medius in numerum terminorum ductus summam totam exhibebit.

Patet. ex Theor. V.

Hi-

Hi tres modi sunt universales, & primus insuper a fractionibus liber est. Alii tres particulares habentur ex Theorem. VII., VIII., IX.

PROBLEMA IV.

Maximo termino, excessu, & numero terminorum datis, invenire minimum.

Ducatur excessus in numerum terminorum unitate mulctatum, & productum aufer a maximo. Relinquetur minimus.

Patet ex Theor. I. & Coroll.

Etiam independenter, vel ab excessu, vel a numero terminorum reperietur minimus, si maximus per numerum terminorum unitate mulctatum, vel per excessum dividatur: residuus enim erit minimus, ut patet ex eodem Theoremate.

PROBLEMA V.

Datis maximo, ac minimo terminis, & numero terminorum, invenire excessum.

Minimum aufer a maximo. Residuum divide per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens erit excessus.

Pa-

Patet ex Theor. I. ac Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur excessus, si maximus dividatur, quantum potest, per numerum terminorum unitate mulctatum. Quotiens enim erit ipse excessus, ut patet ex eodem Theor. Residuum verò divisionis erit minimus.

PROBLEMA VI.

Minimo, maximo, & excessu datis, invenire numerum terminorum.

A maximo aufer minimum, & residuum divide per excessum. Quotiens unitate auctus erit numerus terminorum.

Patet ex I. Theor. & Coroll.

Etiam independenter a minimo reperietur terminorum numerus, si maximus per excessum dividatur, quantum potest. Quotiens enim unitate auctus rursus erit numerus terminorum, ut patet ex eodem Theor. Residuum verò ex divisione erit minimus.

PROBLEMA VII.

Numero terminorum, excessu, & progressionis summâ datis, invenire minimum, & maximum.

Sum-

a b
3 7 11 15 19 23
exc. 4. ſum. 78. num. term. 6.
c d e
quoti. 13. f
20. k
26. n

Summa progreſſionis *d*, dividatur per *e* numerum terminorum. Quoties *f* erit ſemiſſis ſummæ extremorum *a*, *b*, per Theor. IV. Duplicetur *f*, & fiat *n*; erit *n* ſumma extremorum.

Deinde numerus terminorum *e* unitate mulctatus, ductus in exceſſum *c*, ſit *k*. Erit *k* extremus, dempto minimo, ut patet ex Coroll. Theor. I.

Si auferatur igitur *k* ab *n*, reſiduum erit duplum minimi. Semiſſis ergo reſidui erit minimus, eoque adjecto ad *k*, qui erat maximus, dempto minimo, proveniet maximus.

Si non k *auferas a duplo* f, *ſed ſemiſſem ipſius* k *a ſimplo* f, *reſiduum erit minimus quæſitus.*

PROBLEMA VIII.

D*Ato minimo* a, *excessu* c, *& summa progressionis* b; *invenire numerum terminorum, & maximum terminum.*

Quia duplum minimi *a* potest esse majus, vel minus excessu *c*, hinc gemina Problematis solutio est.

a					
3	7	11	15	19	23
c					b.
exc.					sum.
4					70.

Esto primum duplum minimi *a* majus excessu *c*. Residuum, hoc est differentiam, divide per excessum *c*. Quadratum ex semisse quotientis adde duplo summæ progressionis *b*, diviso per excessum *c*. Ex hac nova summa extrahe radicem quadratam; a qua aufer semissem quotientis. Quod restabit, erit numerus terminorum quæsitus.

Esto deinde duplum minimi *a* minus excessu *c*. Duplum minimi aufer ab excessu *c*. Residuum, hoc est differentiam, divide per excessum *c*. Quadra-

a					
2	7	12	17	22	27
c					b
exc.					sum.
5					87.

dratum ex semisse quotientis adde duplo summæ Progressionis *b*. Ex hac nova summa elice radicem quadratam: cui si addatur semissis quotientis, proveniet numerus quæsitus terminorum.

Invento numero terminorum, habetur maximus, per Probl. II.

$$yy \text{ Æ } \frac{2b.}{c} \quad \frac{2a+c}{c} \, y$$

PROBLEMA IX.

Data sit progressio Arithmetica a, b, c *&c., cujus excessus* k, *& numerus quicumque* n: *progressionem per tot terminos continuare, ut ejus summa par sit numero dato* n, *in multitudinem terminorum ducto.*

Quoniam duplum minimi *a* potest esse majus, vel minus excessu *k*, duplex habetur solutio Problematis.

min.	a	3.
excef.	k	2
mult.	y	8.
num. datus	n	10.

Si duplum minimi majus est excessu k; ex duplo dati *n* aufer differentiam inter duplum minimi *a*, & excessum. Residuum divide per excessum *k*. Quo-

 tiens

tiens est multitudo terminorum quæsita.

Si minimi *a* duplum est minus excessu *k*; duplo dati *n* adde differentiam inter duplum minimi *a*, & excessum *k*: summam divide per excessum *k*. Quotiens est multitudo terminorum quæsita.

Determinatio patet ex constr.

$$y \;\text{Æ}\; \frac{2n - 2a + k}{k}$$

PROBLEMA X.

Datur a *minimus terminus progressionis Arithmeticæ, & multitudo terminorum* b, *quæ ducta in alium datum numerum* m *æquatur summæ progressionis. Quæritur ipsa progressio.*

A duplo numeri dati *m* aufer duplum minimi termini *a*. Reliquum divide per multitudinem terminorum, unitate mulctatam. Quotiens erit excessus secundi termini supra primum: quo invento, habentur singuli termini progressionis, per Prob. I.

mini.	a
mult.	b
num. datus	m
exces.	x

Cum

$$y \; Æ \; \frac{2m - 2a}{b - 1}$$

Cum tria hæc postrema Problemata solverim per Algebram, & per eamdem facillime demonstrentur, non putavi operæ pretium esse iis via synthetica, hoc est ordinaria, demonstrandis hic immorari.

CAPUT III.

Quæstiones circa Progressiones Arithmeticas.

RELIQUUM est, ut ex allatis jam Problematis nonnulla ad materiam certam traducamus; per quæstiones aliquot sequentes

Quæstio I.

COnscripti sunt Milites per dies 30. Primo die adscripti sunt 300. Diebus sequentibus affluxere semper totidem, quot die præcedenti, & adhuc 10 amplius. Quot ergo universim sunt conscripti?

Solvẽdo problema III. reperies cõscriptos esse 13350. *Similis erit quæstio sequens.*

Quidam cum Operario, illius stimulaturus industriam, ita convenit: primo die lucraberis 30 asses; secundo totidem, & si satisfeceris, adhuc tres superaddam; atque ita quolibet die tantum lucraberis, quantum præcedenti, & asses insuper tres. Hac lege 20 dies operi sunt impensi. Quæritur summa stipendii.

Solvendum est denuo Problema III. Ex quo reperies asses 1100, id est florenos 55.

Quæstio II.

ARtifex ex pacto die primo lucratus est 40 asses, postremo 90; quolibet autem die tantum, quantum præcedenti, cum auctario semper 5 assium. Quot ergo dies operi impendit? & quantum lucratus est?

Solve Problema VI. Reperies dies 11. Tum solve problema III., & summa lucri proveniet assium 715.

Quæstio III.

EX pacto lucratus est Artifex die primo tres solidos. Deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, cum auctario semper solidorum 4.

Lu-

Lucri summa fuit 78 solidorum. Quæruntur dies operi impensi.

Solvendo problema VIII., reperies dies 6.

Quæstio IV.

Duo æqualem summam nummorum expenderunt in pauperes: unus quotidie distribuit nummos 10: alter verò die primo tres nummos; deinceps autem tantum die quolibet, quantum præcedenti, duobus semper adjectis. Quæritur numerus dierum, huic distributioni impensus, & ipsa summa.

Solvendo problema IX., reperies 8 dies, quibus singuli expenderunt 80 nummos.

Quæstio V.

Duo expenderunt in pauperes spatio dierum 4 æqualem summam nummorum. Unus quotidie distribuit nummos 7: alter primo die unum; deinceps autem tantum die quolibet, quantū præcedenti, adjecto tamen semper adhuc aliquo nummorum numero super eodem. Quantum ergo dedit quotidie? & quanta est summa tota?

Solve problema XVIII. reperies eum, qui primo die expendit nummū unum, secundo die expendisse 5, tertio 9, quarto 13, & summam totam 28.

De Progressione Geometrica, tum finita, tum infinita.

PRogressio Geometrica est series numerorum, sese mutuo eadem proportione excedentium, sive est quælibet proportio per plures terminos, quàm duos continuata. Si proportio continuatur per terminos crescentes, dicetur progressio ascendens; descendens verò, si per decrescentes. Porro cum progressio quælibet Geometrica, vel finita esse possit, vel infinita, seu indefinita, hoc est, continuari per terminos multitudine finitos, vol infinitos; de hac librum prorsus insignem scripsit Gregorius a S. Vincentio; de illa sola Arithmetici meminere. Quod sane miror, quando (ut ostendi ad Prop. XXXV L. IX, & ex dicendis hoc Capite planum fiet) facillimus fit a finita ad infinitam transitus.

De utraque igitur acturus hìc sum, ostendamque, quod ab aliis hactenus animadversum non reperio, progressionis infinitæ mysterium omne in progressione finita, Arithmeticis jam pridem nota, la-

latere. Quod priusquam aggrediar, necessaria quædam præmitto.

I. Denominator X proportionis numericæ scilicet, seu rationalis *a* ad *b*, est numerus ita se habens ad unitatem, ut major terminus	a. 35 b. 15	2 2 — X 3 8 — Z 3

a ad minorem *b*. Reperitur, si major *a* dividatur per minorem *b*. Quotiens enim X, est denominator quæsitus. Nam quotiens omnis ita est ad unitatem, ut divisus *a* ad divisorem *b*. Quando quotienti adhæret fractio, ea ad minimos terminos est revocanda: imo, ut usui denominator sit, integer ad fractionem sibi adhærentem revocandus est, ut vides in Z.

II Si denominator est numerus integer, quod tum accidit, cum minor numerus majorem metitur; unitas, & denominator sunt minimi termini, ad quos proportio data reduci potest.

III. Si denominator est integer *c* cum fracto, quod tum eveniet, cum minor proportionis terminus *a* majorem *b* non metitur, tunc minimi termini qui-

bus

bus data proportio *a* ad *b* exprimi potest, sunt duo numeri; ac proinde minimos proportionis terminos non ingreditur unitas.

		2 d 8 f
a 35		c 2 —— ——
		3 e 3 e
b 15		Uni
		o m
		2 o ——
		n n

Demonstratio.

FRactus integro *c* adhærens, si in minimis terminis non sit, ad minimos redigatur per Probl. I. C. III. L. II., & sit *d*, *e*. Ducatur deinde *e* in *c*, & genito adde *d*, ut fiat *f*, cui subscribe *e*. Erit fractus *f*, *e* par integro *c* cum fracto *d*, *e*, ut tradidi C. IV. L. II: & si *e* dividat *f*, restituetur *c*, *d*, *e*. Per Theor. I. C. II. L. II. *f* est ad *e*, ut fractio *f*, *e* est ad unitatem; hoc est, ut denominator *c*, *d*, *e* est ad unitatem; hoc est ut *a* est ad *b*. Expressa igitur est ratio *a* ab *b* numeris *f*, & *e*: neque posse minoribus, jam ostendam. Exprimatur, si fieri potest, minoribus *m*, & *n*. Quoniam igitur *m* est ad *n*, ut *a* ad *b*, hoc est ut *f* ad *e*, manifestũ est *m* diviso per *n* eumdem provenire quotientem, qui ex *f* diviso per *e*, integrum nempe *c*, atque insuper fractum *o*, *n* parem fracto *d*, *e*. Unde per Theor. II. C. II.

L.

L. II. *o* est ad *n*, ut *d* ad *e*. Atqui volebas *n* minorem esse, quàm *e*. Ergo etiam *o* minor est, quàm *d*. Quod est absurdum, cum fractio *d*, *e* in minimis terminis ponatur existere. Minimi igitur termini, quibus ratio *a* ad *b* exprimi potest, sunt duo numeri *f*, & *e*. Quod erat demonstrandum.

C A P. IV.

Progressionis Geometricæ finitæ, & infinitæ affectiones.

THEOREMA I.

P*Roportio quælibet* a *ad* b *continuatur ascendendo, si denominator* z *multiplicet terminum majorem* b; *descendendo, si denominator* z *dividat terminum minorem* a.

Demonstratio.

Z multiplicans *b* gignat *m*. Ut 1 est ad denominatorem z, ita *a* est ad *b*. Atqui ex definitione multiplicationis, etiam ut 1 est ad z,

ita

3
Uni.—Z.
2.

h	g	f	a	b	m	n	o
32	16					81	243.
——	——	8.	12.	18.	27.	——	——
9	3					2	4.

ita multiplicatus *b* ad productum *m*. Ergo ut *a* est ad *b*, ita *b* est ad *m*. Quod erat primum. Deinde *z* dividens *a* gignat quotientem *f*. Per definitionem divisionis divisus *a* est ad divisorem *z*, ut quotiens *f* est ad 1. Ergo permut. divisus *a* est ad *f*, ut divisor *z* ad 1. Atqui etiam est, ut *z* ad 1, ita *b* ad *a*; cum *z* sit denominator rationis *b* ad *a*. Ergo *b* est ad *a*, ut *a* ad *f*. Quod erat alterum.

THEOREMA II.

Omnis proportio, tam ascendendo, quàm descendendo, continuari potest per terminos infinitos.

Demonstratio

Vid schema praec.

DAta sit ratio quævis *a* ad *b*, cujus denominator *z*. Potest major terminus multiplicari per denominatorem, & pro-

productum m rursus per z, & sic in infinitum. Atqui, per Theor. I, sic ratio data continuatur ascendendo. Ergo &c. Pari ratione potest minor terminus a dividi per denominatorem z, & quotiens f rursum dividi per z, atque ita in infinitum. Sed per Theor. I. ita continuatur ratio data descendendo. Ergo &c. *Termini tamen non erunt semper integri numeri, ut patebit ex Theor. IV.*

THEOREMA III.

Omnis proportio multiplex, ascendendo continuari potest per infinitos numeros integros; descendendo tamen non semper usque ad unitatem.

h	g	f	a	b	m	n	o.	
1.	2.	4,	8.	16.	32.	64.	128.	Den. 2.

Demonstratio I. Partis.

Cujuscunque rationis multiplicis minor terminus a metitur majorem b, ac proinde ejus denominator est numerus integer, qui multiplicans b producit tertium terminum integrum m, & multiplicans m, producit quartum integrum n. Et sic in infinitum.

De-

m. l. k. a. b. p. q.

$\frac{3}{2}$. 3 6 12 24 48 96. Den. 2.

Demonstratio II. Partis.

EX præc. patet, ut descendendo continuetur ratio data *a* ad *b*, debere minorem terminum *a* dividi per denominatorem, qui cum non semper metiatur terminos, quos divisurus est, provenient quandoque quotiens non integri numeri. Ut in serie hìc apposita denominator 2 dividens *a* gignit quotientem *k*; & dividens *k* quotientem *l*; dividens verò *l*, quem non metitur, gignit quotientem *m*.

Corollarium.

CUm omnis progressio, ab unitate incipiens, terminis constet multiplicem proportionem habentibus; patet ex theoremate, eam posse per integros numeros infinitos continuari.

THEOREMA IV.

N*Ulla proportio, quæ multiplex nõ sit, per numeros integros cõtinuari potest, seu*

seu ascendendo in infinitum, seu descendendo usque ad unitatem.

Demonstratio

PRoportionis *a* ad *b*, quæ multiplex non est, hoc est cujus minor terminus non metitur majorem, denominator non est numerus integer. Ergo, ut in præmissis num. III. demonstravi, minimos terminos, quibus exprimi ea potest, non ingreditur unitas: sed ii sunt duo numeri, proinde per XXIV. VII. inter se primi sunt. Quare, per XVI. IX., nequit illis reperiri tertius proportionalis; ac proinde neque ascendendo, neq; descendendo data proportio in his terminis continuari potest. Jam verò, per Pro. II. L. VIII, exhiberi potest progressio proportionis datæ constans tribus terminis integris; item alia progressio terminorum 4; item alia terminorum 5; atque ita infinitæ progressiones diversæ per II. VIII. reperiuntur, omnes terminis diversis constantes, quarum unaquæque unum terminum habet amplius, quàm prior. Verum, quia in singulis hisce progressionibus datæ proportionis, extremi termini in Pro. II. L. VIII, jā citata demōstrantur esse primi inter se,

ea-

earum nulla continuari ulterius potest; ut patet ex XVII.L.IX. Nulla igitur proportio, quæ multiplex non sit, &c. Quod erat demonstrandum.

l	k	h	g	f	a	b	m	n	o	p			
		16					81						z
		—	8	12	18	27	—			Den.			— Z
		3					2						3

Si quæras, quousque sine fractis continuari possit, respondeo id ex ipso opere continuationis innotescere. Ut sursum continues rationem *a* ab *b*, ducendus est denominator *z* in terminum majorem *b*, per Theor. I. Quia verò denominator *z* integer numerus non est, qui producetur, necessario fractus erit: qui si ad integrum reduci potest per ea, quæ traduntur Prob. IV. C. III. L. II., continuabitur per illum adhuc integrum ratio data *a* ad *b*; si non possit, quod continget, si denominator numeratorem non metiatur, non poterit per integros numeros ratio *a* ad *b* ulterius continuari.

THEOREMA V.

Progressio Geometrica, cujus extremi numeri sunt primi inter se, nec sursum, nec

nec deorsum ulterius potest per numeros integros continuari.

Demonstratur Prop. XVII. Lib. IX.

THEOREMA VI.

IN omni progressione geometrica incipiente ab unitate, secundus terminus, (unitas inter terminos non computatur,) quartus, sextus, & reliqui omnes locorum parium sunt quadrati.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
.	a	b	c	d	e	f	g	h
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Tertius, sextus, nonus, & reliqui, duobus intermissis, omnes, quorum videlicet exponentes metitur ternarius, sunt cubi.

Sextus, duodecimus, decimusoctavus, & reliqui omnes, quorũ exponentes metitur senarius, sunt quadrati simul & cubi.

Quintus, septimus, undecimus, decimustertius, & reliqui omnes, quorum exponentes sunt primi numeri, neque quadrati sunt, neque cubi.

Demonstrantur hæc omnia in Prop. VIII. Lib. IX. ejusque scholio. *Exponentes sunt numeri seriei naturalis ab unitate, indicantes loca terminorum progressionis.*

THEOREMA VII.

In progressione geometrica trium terminorum, bb *quadratus medii (hoc est medius in se ipsum ductus) producto* ac *extremorum æqualis est.*

a	b	c
2	4	8

bb	ac
16	16

Demonstratur Prop. XX. Lib. VII.

THEOREMA VIII.

In progressione Geom. quatuor terminorum, productum ad *extremorum æquatur producto* bc *mediorum. Idem verum est in quibuscumque quatuor proportionalibus, licèt non continuè: ut si* f *sit ad* g, *ut* k *ad* m; f m *productum ab extremis æquatur* g k *producto a mediis.*

a	b	c	d
2	4	8	16

ad	bc
32	32

f	g	k	m
2	6	4	12

fm	gk
24	24

Demonstratur Prop. XIX. Lib. IX.

THEOREMA IX.

In omni geometrica progressione, a f *productum extremorum, & producta*

be,

be, cd, *terminorum aequaliter ab extremis distantium inter se aequalia sunt.*

Demonstratio.

QUoniam omnes a, b, c, d, e, f,* sive a, b, c, x, d, e, f sunt continuè proportionales; manifestum est a esse ad b, ut e ad f.

a	b	c	d	e	f
3	6	12	24	48	96

Prod. 288.

a	b	c	x	d	e	f
3	6	12	24	48	96	192

Prod. 576.

Ergo per XIX. VII. af productum ex primo a in quartum f aequatur producto be ex mediis b, & e. Pari ratione erit b ad c, ut d ad e. Ergo rursum per XIX. VII. be genitus ex b in e aequatur cd genito ex c in d. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA X.

Q*Vivis terminus progressionis geometricae in se ductus aequatur producto quorumlibet, aequaliter ab ipso distantium.*

Demonstratio.

SUmatur quicumque x, sive is sit praecisè omnium medius, sive non. Quo- Schema prec.

uiam ex hyp. *c*, *x*, *d* sunt proportionales; erit per Theor. IV. sive per XX. VII. *xx*, quadratus assumpti *x*, æqualis *cd* producto extremorum *c*, & *d*. Atqui per præced. productus ex *b* in *e* æquatur producto ex *c* in *d*. Ergo etiam productus ex *b* in *e* æquatur quadrato assumpti *x*. Liquet ergo propositum.

Nota pro sequentibus Theorematis, loca terminorum progressionis numerari ab unitate exclusivè, vel, si progressionis principium non sit unitas, exclusivè a termino minimo progressionis: id enim, ut deinde apparebit, commodius est ad praxim. Porro numeri 0.1.2.3.4.*&c. supra progressionis terminos adscripti, quos indices, seu exponentes dicimus, indicant quotus quisque sit ab unitate, seu termino minimo; sive quot locis quisque ab unitate, vel minimo termino distet. Supra unitatem scribitur* 0, *supra* a *primum ab unitate ponitur* 1, *supra sequentem* b 2, *& sic deinceps ordine naturali.*

THEOREMA XI.

IN progres-	1	2	4	8	16	32	64	128	256
sione geo-	0	1	2	3	4	5	6	7	8
metrica,		a	b	c	d	e	f	g	h

cu-

cujus principium unitas est, si quivis terminus c *per se ipsum multiplicetur, producetur alius ejusdem progressionis terminus* f, *locis duplo pluribus ab unitate distans.*

Demonstratio.

EX Prop: XI. Lib. IX. Coroll. III. Et facile etiam ostenditur, si termini progressionis multiplicatione speciosa exprimantur.

0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	a	aa	aaa	aaaa	aaaaa	aaaaaa	a^7	a^8
1	2	4	8	16	32	64	128	256

Ex Lemmate Prop. VIII. Lib. IX. & quia multiplicationis productum sola litterarum appositione exprimitur; patet ex *a* primo in se fieri *aa* secundum; & ex *a* in *aa* fieri tertium *aaa*; & ex *a* in *aaa* fieri quartum *aaaa*; & sic deinceps. Ex quo manifestũ est, singulos terminos tot locis distare ab unitate, quot litteris scribũtur; & contra tot scribi litteris, quot distant ab 1 locis. Atqui si terminus quivis, puta tertius *aaa*, in se ducatur, productus *aaaaaa* duplo pluribus litteris scribitur, quàm ipse. Ergo etiam duplo pluribus ab unitate distabit locis. Quod erat demonstrandum.

 THEO-

THEOREMA XII.

Vide 1. Schema Theor. prec.

IN progressione geometrica, cujus principium unitas est, si termini duo quilibet b, *&* e *invicem multiplicentur; eorum ab unitate distantiæ simul sumptæ conficiunt producti* g *ab unitate distantiam.*

V. Schema 2. prec.

Demonstratio similis præcedenti. Exprimatur series speciosè. Et multiplicent sese mutuo secundus *aa*, & quintus *aaaaa*. Eorum litteræ simul junctæ dant productum a^7, ac proinde (ut ostendi in præced.) etiam eorum junctæ distantiæ exhibent distantiam producti ab unitate. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIII.

IN progressione geometrica, cujus principium uni-	0	1	2	3	4	5	6
	a	b	c	d	e	f	g
	3	6	12	24	48	96	192

tas non est, si quivis terminus c *se ipsum multiplicet, & productum per minimum* a *dividatur; quotiens distabit ab minimo* a *locis duplo pluribus, quam terminus se ipsum multiplicans* c.

De-

Denom. q. 2

o 1	2	3	4	5	6.	
a aq	aqq	aqqq.	aqqqq.	aqqqqq.	aqqqqqq.	
3 6	12	24	48	96	192.	

Demonstratio expeditur facillime, si termini progressionis multiplicatione speciosa exprimantur. Per Theor. I. minimo termino *a* ducto in denominatorem *q* fit *aq* primus ab minimo; & primo *aq* ducto in denominatorem *q*, fit secundus *aqq*; & ex hoc in *q*, fit tertius *aqqq*; & sic deinceps procreantur termini reliqui progressionis omnes. Ex quo patet, quemlibet terminum tot locis distare ab minimo *a*, quot in ipso repuriuntur litteræ *q*, denominatorem exprimentes. Terminus jam quispiam, puta secundus *aqq*, ducatur in se, hoc est in *aqq*; productus *aaqqqq* continebit litteras illius bis, nimirum duo *a*, & duplo plura *q*, quam producens *aqq*. Ergo si productus *aaqqqq* dividatur per minimum *a*, quotiens *aqqqq* scribetur uno *a*, & duplo pluribus *q*, quam *aqq*, qui seipsum multiplicaverat. Quare cum jam ostenderim, terminum quemlibet tot distare locis ab minimo *a*, quot in ipso reperiuntur *q*, liquet quotientem *aqqqq* locis duplo pluribus distare ab minimo *a*; quam *aqq* terminus se ipsum multiplicans. Quod erat demonstrandum.

THEOREMA XIV.

Schema prec.

IN progressione geometrica, cujus principium unitas non est, duo quivis termini c, *&* e *sese invicem multiplicent, & productus per minimum* a *dividatur; quotientis distantia a minimo* a *æqualis erit se mutuo multiplicantium distantiis a minimo, simul junctis.*

Demonstratio est similis præcedenti, ut tantum opus sit exemplum adferre. Exprimatur series speciosè, ex qua se mutuò multiplicent primus *aq*, & quartus *aqqqq*. Productum erit *aaqqqqq*, quo diviso per minimum *a*, quotiens est *aqqqqq*, qui est quintus in progressione terminus, cujus distantia ab minimo *a*, est 5, quem efficiunt ipsorum *aq*, & *aqqqq* distantiæ 1, & 4.

THEOREMA XV.

SI a maximo termino finitæ pregressionis duplæ auferatur minimus; reliquus æquatur summæ progressionis dempto maximo.

Mi-

Minimus *a*,		a	b	c	d	e	f	g
3, auferatur ex		3	6	12	24	48	96	192

maximo *g*, 192.
Reliquus 189 æquatur omnibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, hoc est toti summæ, dempto maximo *g*.

Demonstratum est in Coroll. IV. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVI.

IN omni finita progressione geometrica, ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem, ita maximi, & minimi termini differentia (sive maximus dempto minimo) est ad totam progressionis summam dempto maximo.

Demonstratum est in Coroll. I. Prop. XXXIV. Lib. IX.

Corollarium.

ITaque excessus maximi termini supra minimum in progressione dupla æqualis est summæ reliquorum; (hoc est omnibus dempto maximo) in progressione tripla, duplus; in progressione quadrupla, triplus; & sic deinceps.

Demonstratio patet ex hoc Theoremate.

THEO-

THEOREMA XVII.

Schema Theor. 15. *IN omni progreſſione geometrica finita, ut duorum maximorum* f, g *terminorum differentia eſt ad maximum* g, *ita maximus* g *dempto minimo* a *eſt ad totam progreſſionis ſummam dempto minimo.*

Demonſtr. eſt Coroll. V. Prop. XXXV. Lib. IX.

THEOREMA XVIII.

SI progreſſio quæcumque geometrica deſcendendo continuetur in infinitum; ut denominator unitate multatus eſt ad unitatem, ita primus, ſeu maximus terminus eſt ad reliquum infinitorum terminorum ſummam.

Dentur exempli gratia duo termini proportionis triplæ 54, & 18; & progreſſio

a	b	c	d	e	f	g	h	k
54	18	6	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{2}{81}$	$\frac{2}{243}$
				M	27			

inſtituatur *a, b, c, d* &c. continueturque per Theorema II. deſcendendo, (hoc eſt per terminos proportionaliter decreſcentes

tes in infinitum. Ut denominator 3 unitate mulctatus, nempe 2, est ad unitatem, ita primus terminus 54 est ad summam reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, &c.

Demonstratio.

PEr Theor. XVI. in progressione finita, ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem; sic primus, seu maximus terminus, dempto minimo, est ad summam reliquorum. Quare cum in progressione per decrescentes in data proportione terminos in infinitum continuata, minimus terminus evanescat (ut ostensum est in Elementis nostris Geom. in Schol. Prop. XI. Lib. VI. Lem. II.) erit ut denominator unitate mulctatus ad unitatem, ita primus terminus ad reliquorum infinitorum summam. Quod erat demonstrandum.

Vides, opinor, qui hæc legis, quàm facilis sit, quod supra me ostensurum promiseram, a progressione finita ad infinitam transitus. Unde mirum est, priores Arithmeticos, qui progressiones finitas tenerent, infinitas ignorasse, cum hæ ab illis immediatè dependeant. Theorema siquidem XVI ex quo demonstratio hujus facillimè deducta est, Corollarium est Prop. XXXV. Lib. IX.

Idipsum apparebit ex Corollario sequenti, ex Theorematis XIX. XX. & Coroll. Theor. XIX. ex Problematis VII. VIII. IX. X. XI.

Corollarium.

PRimus terminus reliquorum infinitorum summæ in progressione dupla æqualis est; in progressione tripla, duplus; in progressione quadrupla, triplus; in quintupla, quadruplus; & sic deinceps.

Patet ex Theoremate.

THEOREMA XIX.

SI progressio geometrica deorsum continuetur in infinitum, ut duorum primorum, hoc est maximorum terminorum differentia est ad secundum terminum, ita primus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam.

Demonstratio.

PEr Prop. XXXV. Lib. IX. in progressione finita ut primorũ, seu maximorum terminorum differentia est ad secundum, ita primus, dempto minimo, est ad summam reliquorũ. Quare cũ in progressio-sione, descendendo in infinitum continuata, minimus terminus evanescat, erit ut primorum differentia ad secundum, ita primus ad reliquorum infinitorum summam. Quod erat demonstrandum.

Theorema convenit tã magnitudinibus, quàm numeris, quemadmodum & Prop. XXXV. IX. a qua dependet. Cæterùm hic rursus apparet, quàm expeditè a finitis progressionibus ad infinitas transeatur.

THEOREMA XX.

Iisdem positis, si primorum duorum terminorum differentia ax, *primus terminus* ab, *&* az *sint continuè proportionales; erit* az *tota terminorum infinitorum summa.*

a—x——b——c—d—e——z

Demonstratio.

Quoniam *ax* est ad *ab*, ut *ab* est ad *az*, erit invertendo *ba* ad *xa*, ut *za* ad *ba*. Ergo dividendo *bx* ad *xa*, ut *zb* ad *ba*. Igitur invertendo *ax* (differentia primorum *ab*, & *bc*) est ad *bx*, seu *bc* secundum, ut *ab* primus est ad *bz*. Ergo per Theor. XVIII. *bz* est summa omnium, dempto primo *ab*. Ergo *az* est summa tota. Quod erat demonstrandum.

Co-

Corollarium.

k	l.	m
9.	8.	64 &c.
	9	

QUando igitur progreſſionis duo maximi termini *k*, *l* ſolum unitate differunt, quadratus primi termini æquatur reliquorum infinitorum ſummæ.

Demonſtratio patet ex hoc Theor. & ex XVIII.l.IX. Tunc enim duorũ primorum differentia eſt l, quæ dividens quadratum maximi termini, per XVIII.IX. exhibet tertium proportionalem, ipſum videlicet quadratum, quem dividendo non mutat.

THEOREMA XXI.

P*Rogreſſionis geometricæ admiranda incrementa.*

Multa hanc in rem afferri ſolent. Unum ego afferam, ſed illuſtre, & quam breviſſime: oſtendam videlicet progreſſionis decuplæ, incipientis ab unitate, trigeſimum ſeptimum terminum plures continere unitates, quam arenas contineat orbis terræ: & ſi primus terminus ſtatuatur arenula, trigeſimum ſeptimum

ab

ab illo futurum toto terrarum orbe majorem.

Ratiocinatio formabitur hunc in modum.

Scribit Archimedes in arenario, se comperisse 35 grana papaveris longitudinem digiti Geometrici excedere. Sed ponamus ea esse minora, & grana 40 efficere digitum.

Quoniam igitur milliare continet 80, 000 digitorum; continet enim 5000 pedum, quæ ducta in sua 16 digitos, in uno contentos, efficiunt 80, 000: si hæc ducantur in 40 grana unum pedem æquantia, fiunt 32 00, 000, numerus granorum, conficiens milliare unum.

Jam ex Astronomis nemo diametro Terræ tribuit milliaria 10, 000. Sed demus eam esse tantam. Igitur si 10, 000 ducantur in grana unius milliaris, nempe in 32 00, 000, provenient grana 32, 000 000, 000, quæ continet Terræ diameter. Verum pro duabus notis 32 substituamus has 100, ut fiat numerus rotundus A, granorum Terræ diametrum componentium, qui prioris plus quam triplus est, adeoque & Terræ diameter ex hoc capite rursum augebitur plusquam triplo, fietque major 30,000 milliariorum. Erit igi-

Per Lem. 2. in schol. post XI. Lib. VI. igitur ut 1 ad numerum A, ita grani diameter ad diametrum Terræ.

1. Gran.
A. 100, 000 (000000
B. 10, 000 (000000 (000000 (000000
C. 1, 000 (000000 (000000 (000000 (000000 (000000 cyf. 33.

Continuetur ratio 1 ad A per quatuor terminos 1, A, B, C. Erit per XVIII. Lib. XII. ut 1 ad C, ita grani sphærula ad sphæram Terræ; quæ proinde continet numerum granorum C. Is verò præter unitatem habet cifras 33. Cum enim primus A habeat cifras 11, secundus B habebit 22, & tertius C 33; ut patebit ex Probl. I. infra.

Ut jam cognoscantur arenæ orbis Terræ, inveniendæ tantùm erunt arenæ unius grani. Certum est, grani sphærulam non continere arenas 10000. Si ergo C numerus granorum Terræ ducatur in 10, 000, proveniet D numerus arenarum, totum globum Terræ componentium; non illum quidem, qui de facto est; sed alium longè majorem illo, cùm & grana assumpserim minora, quàm sint, & arenas uni grano dederim justo plures, & diametrum

trum terræ posuerim multò plus, quàm triplo majorem verâ: ex quo postremo solo, cæteris neglectis, sphæra ex arenis D composita, per XVIII. Lib. XII. plus quàm vigesies septies orbe nostro toto major est.

D

10(000000(000000(000000(000000
(000000(000000

Est porro numerus D, quia constat unitate, & cifris 37, terminus trigesimus septimus progressionis decuplæ 1, 10, 100 &c. ut patebit ex Prob. I.

Scio, minori numero quæsitum obtineri posse, si aliter calculus instituatur. Sed quia id parum interest ad finem hic intentum, hanc viam, cæteris breviorem, secutus sum.

THEOREMA XXII.

PErinde admiranda sunt progressionũ geometricarum decrementa, atque incrementa.

Quemadmodum enim ab unitate per 37 terminos proportionis decuplæ ascendendo, pervenitur ad numerum, qui multo major sit numero arenarum, totam telluris molem componentium ; ita vicissim ab illo prope immenso numero, per 37 terminos proportionis decuplæ descendendo, devenitur ad unitatem. Et quemadmodum ab arenula minima, ascendendo per proportionis decuplæ terminos 37, ventum fuit ad magnitudinem, toto terrarum orbe majorem; ita vicissim ab ingenti illa mole orbis terrarum, descendendo per decuplæ proportionis 37 terminos, venietur ad arenulam.

CAP. V.

Progressionis geometricæ finitæ, ac infinitæ Problemata.

PROBLEMA I.

Datam progressionem geometricam tam sursum, quàm deorsum continuare in infinitum.

Constructio habetur ex Theor. I., & II. Quædam solummodo hìc adnotanda sunt.

I. Progressionis, ab unitate incipientis, denominatorem esse terminum ab unitate primum. Patet ex definitione denominatoris.

II.

II. Cum termini progressionis constant unitate, & cifris, solâ cifrarum primi post unitatem termini additione cæteros terminos procreari, ut in Theor. XXI. quia A primus habet cifras 11; secundus B habebit 22 cifras; tertius C cifras 33; & sic deinceps. Patet ex Theor. I. & ex ipso multiplicationis opere.

III. Terminum quemlibet progressionis decuplæ 1, 10, 100 &c. tot locis distare ab 1, quot cifras habet. Patet ex II. hìc.

PROBLEMA II.

Progressionis geometricæ, ab unitate incipientis, terminum quemcumque, licet cogniti non sint omnes medii, exhibere.

Res tota pendet ex XI, & XII. Theor. Data sit exempli gr. progressio dupla ab 1, cujus oporteat terminum quadragesimum tertium invenire.

Continuetur progressio per aliquot terminos, quousque

0	1	2	3	4	5
1.	2.	4.	8.	16.	32.

nimirum potes absque ulla molestia, (hìc facile continuabis usque ad quintum,) & supra singulos scribantur exponentes. Duc quintum 32 in se: proveniet decimus 1024 per Theor. XI. Hoc rursum in se ducto, prodibit 1048576 vigesimus per idem Theor. Quo etiam ducto in se, fit quadragesimus 1(078, 340(517, 776, cujus exponens est 40: quæritur autem terminus exponentis 43. Differentia exponentium inventi 40, & quæsiti 43 est 3. Terminum igitur exponentis 3, nempe 8, duc in terminum jam inventum exponentis 40: producetur terminus exponenti 43 quæsitus, ut patet ex Theor. XII., nimirum 3(235,621(583, 328.

Simili modo per XI, & XII. Theor. facile erit, quemvis terminum cujuscumque progressionis reperire.

PROBLEMA III.

Prrogressionis geometricæ, cujus principium non est unitas, quemcumque terminum, licet cogniti non sint omnes medii, invenire.

Praxis tota pendet ex Theor. XIII, & XIV. Data sit progressio *a* ad *b*, cujus oporteat terminum vigesimum reperire.

Continuetur progressio	0	1	2	3
per aliquot terminos, pu-	a	b	c	d
ta tres, & singulis suos ex-	2.	6.	18.	54.
ponentes suprascribe. Du-				

ca-

catur deinde tertius in se, & producto diviso per a, proveniet sextus. Hoc rursum in se ducto, & diviso per a, habetur duodecimus. Quo etiam in se ducto, ac diviso per a, prodibit vigesimusquartus, cujus distantia, seu exponens 24 deficit ab 29 exponente quæsiti, defectu 5. Assumo ergo duos exponentes, ut 3, & 2, qui juncti faciunt 5; & termino quidem exponentis 3 ducto in terminum jam inventum exponentis 24, & diviso producto per a, habetur vigesimusseptimus: quo rursum ducto in terminum exponentis 2, ac diviso per a, habetur vigesimusnonus, qui petebatur.

Demonstratio patet ex Theor. XIII. & XIV. Simili methodo, quilibet alii termini reperientur.

PROBLEMA IV.

Progressionis duplæ finitæ summam exhibere.

A maximo termino g aufer minimum a. Residuus omnibus antecedenti-

a	b	c	d	e	f	g
3	6	12	24	48	96	192

$$\begin{array}{r} 192 \\ 3 \\ \hline 189 \end{array}$$

bus f, e, d, c, b, a æqualis eſt, per Theor. XV.

PROBLEMA V.

Cujuſcumque progreſſionis geometricæ finitæ ſummam exhibere.

Maximus terminus ſi non datur, inveniatur per Probl. II, vel III. A maximo aufer minimum. Reſiduum divide per denominatorem progreſſionis, unitate mulctatum: quotiens æqualis erit toti ſummæ, dempto maximo.

Demonſtratio.

PEr Theor. XVI. ut denominator unitate mulctatus eſt ad 1, ita maximi, & minimi differentia eſt ad ſummam reliquorum. Ergo per XIX. Lib. X. quartus proportionis, reliquorum nempe ſumma invenitur, ſecundum (qui eſt unitas) ducendo in tertium (maximi nempe, ac minimi differentiam), & productum, hoc eſt differentiam ipſam (ea quippe ducta in 1, non immutatur) dividendo per primum, nempe per denominatorem unitate mulctatum.

Exem

Exempla.

k m n o p q r
1.3.9.27.81.243.729.
3. den.
a b c d e f g
1.3.9.27 81 243 729

$$\frac{3}{2}\ \frac{9}{4}\ \frac{27}{8}\ \frac{81}{16}\ \frac{243}{32}$$

$$\frac{1}{2}\ q \text{—} \frac{3}{2}\ S \text{—} \text{denom. } l.\qquad \frac{665}{32}\ \left\{ V\ \frac{1330}{32} \right.$$

DEtur progressio tripla *k*, *m*, *n*, &c. Denominator unitate mulctatus est 2. A maximo *r* aufer minimum *k*. Residuum 728 divide per 2. Quotiens 364 æquatur omnibus antecedentibus *q*, *p*, *o*, *n*, *m*, *k*.

Detur deinde progressio sesqui-alteræ proportionis *a*, *b*, *c* &c. Aufer minimum *a* ex maximo *g*: residuum est *l*. Ex denominatore *f* aufer unitatem: restat *q*. Per *q* divide residuum *l*, maximi nempe, & minimi differentiam. Quotiens V æquatur omnibus maximum antecedentibus *f*, *e*, *d*, *c*, *b*, *a*.

PROBLEMA VI.

CUm progressio datur finita proportionis multiplicis, ejus summa adhuc aliter reperitur per Coroll. Theorematis.

Si datur progressio duplorum; excessui primi termini supra minimum adde æqualem numerum.

Si datur progressio triplorum; eidem excessui adde dimidiam ejus partem.

Si datur progressio quadruplorum; excessui adde tertiam ejus partem.

Et sic deinceps: hac additione habebitur tota summa terminorum omnium, dempto minimo, ut patet ex citato supra Corollario.

PROBLEMA VII

PRogressionis geometricæ cujuscumque, per infinitos terminos descendentis, summam exhibere.

Primus terminus dividatur per denominatorem progressionis, unitate mulctatum: quotiens primo termino adjunctus exhibet totam summam terminorum infinitorum progressionis datæ.

De-

Demonstratio

PEr XVIII. Theor. ut denominator unitate mulctatus est ad unitatem, ita primus terminus est ad reliquam infinitorum terminorum summam. Cùm hæc igitur illis tribus sit quarta proportionalis, exhibebitur ipsa per Prop. XIX. IX. si secunda quantitas ducatur in tertiam, unitas nempe in primum progressionis terminum, & productum, hoc est primus ipse terminus (is enim ductus in 1, non immutatur) dividatur per denominatorem, unitate mulctatum, qui ex quatuor proportionalibus erat primus.

Exemplum.

DAta sit progressio proportionis octuplæ, per infinitos terminos descendens. Primus a si dividatur per denominatorem unitate mulctatum, hoc est per 7, quotiens erit P. Igitur P æquatur toti summæ infinitorum, dempto primo a.

$$\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \\ 512 & 64 & 8 & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{512} & \&c. \end{array}$$

8. Denom.

$$P\ 73\tfrac{1}{7} \qquad Q\ 585\tfrac{1}{7}$$

Qua-

Quare si P addatur ad *a*, fiet Q æqualis infinitis terminis, in proportione octupla decrescentibus *a*, *b*, *c*, *d*, &c.

Aliud.

k m n o
25 20 16 64
—— &c.
5

5 1
—— den. —— p
4 4

DAta sit progressio *k*, *m*, *n*, *o* &c. Hujus denominator unitate mulctatus est *p*. Per hanc diviso primo termino *k*, 25, quotiens proveniet 100, Quibus additis ad primum terminum, fit numerus 125 æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA VIII.

PRogressionis geometricæ cujuscumque, per infinitos proportionales terminos descendentis, summam aliter exhibere.

Per excessum primi termini supra secundum divide quadratum primi termini: quotiens toti summæ infinitorum proportionalium æqualis est.

Demonstratio patet ex Theor. XX., & ex XVIII. Lib. IX.

Exem-

Exemplum.

REpetatur progressio antecedens *k*, *m*, *n*, *o* &c. Excessus primi termini supra secundum est 5. Quadratus primi 25 est 625: quo diviso per excessum 5, fit quotiens 125, æqualis proportionalibus infinitis *k*, *m*, *n*, *o* &c.

PROBLEMA IX.

PRogressionis multiplicis, per infinitos terminos descendentis, summam aliter invenire.

Si datur progressio dupla, ut 12, 6, 3 &c. primo termino adde æqualem.

Si tripla, ut 9, 3, 1, &c. primo termino adde partem ejus dimidiam.

Si quadrupla, ut 16, 4, 1 &c. primo termino adjice partem ejus tertiam.

Si quintupla, ut 25, 5, 1 &c. primo termino adde partem ejus quartam: atque ita deinceps. Hac additione summa procreabitur æqualis toti progressioni proportionalium infinitorum.

Demonstratio patet ex Coroll. Theorematis XVIII.

PROBLEMA X.

Progressionis super-particularis, per infinitos terminos descendentis, summam aliter invenire.

Cum proportio super-particularis sit; quando major terminus a minorem b continet semel, & unam ejus aliquotam, numerus aliquotam denominans sit m.

a	b	c	d	e
16	12	9	$\frac{27}{4}$	$\frac{81}{16}$

den. $\frac{1\ n}{3\ m}$ 64 Z

x 48

Primus terminus per hunc m multiplicatus æquatur toti summæ infinitorum reliquorum b, c, d, e, &c.

Demonstratio.

Denominator proportionis super-particularis est unitas cum fracto, cujus numerator est unitas, nominator vero ipse numerus m aliquotam denominans. Ergo denominator progressionis super-particularis unitate mulctatus est sola illa fractio n,m, per quam diviso primo a, proveniet summa reliquorum infinitorum

rum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. ut patet ex Probl. VII. Atqui primus terminus *a* dividitur per fractum *n*, *m*, cum per eumdem inversum multiplicatur; multiplicatur verò per illum inversum primus *a*, si solus nominator *m* multiplicet primum *a*, cum numerator *n* sit unitas: quæ omnia patent ex Cap. VII. Lib. II. Ergo si *m* numerus aliquotam denominans multiplicet primum *a*, habetur summa reliquorum infinitorum *b*, *c*, *d*, *e*, &c. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XI.

Progressionis geometricæ, cujus primi duo termini differunt unitate, per infinitos terminos descendentis, summam aliter exhibere.

Ducatur primus terminus in se ipsum, ut habeatur ejus quadratus. Is toti infinitorum proportionalium summæ æqualis est.

Demonstratio patet ex Corollario Theor. XXX.

$$\frac{1}{9}\quad 9 \quad 8 \quad 7 \text{ — \&c.}$$

Exemplum.

Data sit progressio proportionis 9 ad 8. Primi termini quadratus 81 infinitis hujus progressionis terminis æqualis est.

Præ-

Præcedentia quinque Problemata, quæ artificio longe facillimo progressionis, per infinitos terminos descendentis, exhibent summam, deducta sunt, vel ex Theoremate XVIII. ejusque Corollario, vel ex XX. illa verò nullo negotio ex progressione finita deduxi. Liquet igitur, quod initio spoponderam, progressionis infinitæ mysterium omne in finita latere.

Cæterum assertiones Theor. xviii. xix. xx. Capitis præcedentis, & constructiones Problematum vii. viii. xx, xi. capitis hujus quædam sunt P. Gregorii in Lib. II. quadraturæ; quædam ex illo derivari possunt; quamvis ego, ut jam dixi, tam has, quàm illas ex progressione finita, quæ similes planè, ac infinita, affectiones habet, nova quadam ratione deduxerim, ac demonstraverim. Interim P. Gregorio sua laus manet, & ea quidem eximia prorsus, & singularis, qui progressionum naturam libro integro amplissimè, subtilissimèque prosecutus est, ut cæteris vounisi spicas ex sua messe colligendas reliquerit.

PROBLEMA XII.

Progressionis finitæ dato denominatore, summa, & maximo termino, invenire minimum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium, dempto maximo. Productum & aufer a maximo. Restabit minimus.

Demonstratio.

DEnominator unitate mulctatus dividens maximum, dempto minimo, quotientem produxit summam omnium præter maximum, ut patet ex Probl. V. Ergo ex definitione divisionis si quotiens, nempe summa omnium præter maximum ducatur in denominatorem unitate mulctatum, producetur maximus, dempto minimo. Ergo si hoc productum auferatur ex maximo, relinquetur minimus, qui quærebatur.

PROBLEMA XIII.

PRogressionis finitæ data summa, denominatore, & minimo termino, invenire maximum.

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium, & producto addatur minimus. Hoc aggregatum divide per denominatorem. Quotiens erit maximus quæsitus.

Demonstratio hujus operationis patet ex Probl. V., & ex analysi, per quam inventa est.

PRO-

PROBLEMA XIV.

Progressionis finitæ datis extremis, & omnium summa, invenire denominatorem, & singulos intermedios.

Maximi, ac minimi differentiam divide per summam omnium, dempto maximo. Quotiens unitate auctus est denominator: quo invento per Probl. I. habentur singuli termini.

Demonstratio

SI maximi, ac minimi differentia dividatur per denominatorem unitate mulctatum, per Probl. V. provenit summa omnium, dempto maximo. Ergo per Coroll. II. Prop. XVI. Lib. VII., si eadem maximi, ac minimi differentia dividatur per summam omnium, dempto maximo, proveniet denominator unitate mulctatus. Quod erat demonstrandum.

PROBLEMA XV.

Progressionis infinitæ descendentis dato denominatore, & omnium summa, invenire maximum terminum, & reliquos.

De-

Denominator unitate mulctatus ducatur in summam omnium: productum dividatur per denominatorem : quotiens erit maximus terminus.

Demonstratio hujus operationis patet ex Probl. VII., & ex analysi, per quam inventa est.

PROBLEMA XVI.

Sprogressionis infinitæ descendentis data maximo termino, & omnium summâ, invenire denominatorem, & reliquos terminos.

Primum terminum divide per summam omnium, dempto maximo. Quotiens unitate auctus erit denominator: quo invento, per Probl. I. habentur singuli termini.

Demonstratio.

SI denominator unitate mulctatus dividat primum terminum, quotiens per Prob. VII. est summa omniū, dempto maximo. Ergo si summa omnium, dempto maximo, dividat eumdem primum, quotiens erit denominator unitate mulctatus, per II. coroll. p. XVI. Lib. VII. Quotiens igitur, unitate auctus, erit denominator quæsitus. Quod erat demonstrandum.

CAP. VI.

Quæstiones circa progressionem geometricam.

Reliquum est, ut ex problematis jam allatis ad materiam nonnulla applicemus.

Quæstio I.

Quanto tempore potuerit humanum genus propagari?

Statuamus Adamum 20 annis genuisse 20 liberos, 10 mares, & 10 fœminas. His verò, & deinceps aliis, qui ab his descendent, ut singuli proles 20 gignant, paria scilicet 10 maris, ac fœminæ, demus annos 40; annis nempe 20, quibus apti ad generandum evadant, assignatis.

Adam igitur 20 annis genuit maris, ac fœminæ paria 10. Ab illis 40 annis sequentibus gignentur paria 100. Ab his verò proximis 40 annis producuntur paria 1000: atque ita deinceps per singulos quadragenos annos instituetur progressio proportionis decuplæ; cujus terminus nonus, qui est 100(000000, incidit in annum mundi 340. Quadragenâ igi-

igitur annum 340 complente nascentur 1000 milliones parium: & quadragenâ complente annum mundi 380, decies mille milliones parium: ea verò, quæ complet annum 420, parium 100 millia millionum: & sic deinceps. Tandem in quadragenâ, complente annum 620, nascentur paria hominum 10, 100 (000000 (000000, hoc est decies mille milliones millionum; is enim est progressionis decuplæ terminus decimus septimus, incidens in annum mundi 620, per additionem continuam 40, ad 20 primos Adami annos. Quid si his addamus omnes præcedentium quadragenarum homines, plerosque adhuc superstites, quanta multitudo ex solis 20 liberis Adami primo mundi vicenario procreatis exurget?

Atqui in hac hypothesi habita solum fuit ratio unius vicenarii annorum Adæ. Quot igitur tales ex Adami ætate accipiemus annorum vicenarios, tot habebimus progressiones generationum similes, quarum quælibet annos mundi 20 plures continebit, quàm progressio ipsam antecedens. Similiter ex ætatibus descendentium singulorum habita solum fuit ratio annorum a 20 usque ad 40, ac si per reliquam vitam liberos nullos produ-

 ce-

cerent. Quæ omnia, si in calculum deducantur, hominum multitudo adhuc multo amplior evadet: vel certe abunde compensabunt ea, quæ in hypothesi superiori alicui videri possint liberalius assumpta.

Quæstio II.

Quantum frumenti ex uno grano haberi possit intra annos 8?

Respondeo granorum plus, quàm decies mille milliones millionum.

Nam granum unum plura ordinarie profert, quàm 100. Statuamus tamen proferre 100. Hæc sequenti anno producent centies centum grana, hoc est 10,000. Atque ita progressio proportionis centuplæ instituetur per annos 8. Anno igitur octavo granorum numerus proveniet 10,000 (000000 (000000, hoc est decies mille milliones millionum; is enim, ut patet ex Probl. I., est octavus terminus progressionis centuplæ. Quod si hæc progressio per paucos adhuc annos continuetur, ne omnia quidem totius mundi horrea capient frumenti copiam, ultimo anno provenientem.

Hinc

Hinc apparet, quàm facile peregrini fructus, olera, flores &c. in aliquam Provinciam advecti, intra annos non multos multiplicentur.

Quæstio III.

Statuamus Beatissimæ Virgini Deiparæ hanc à Deo prærogativam esse datam, ut per singulos charitatis actus gratiam prius habitam duplicaret. Statuamus insuper gratiam intra primum annum, quo ratione fuerit usa, acquisitam, ita excessisse gratiam primo acceptam, ut hic numeros 18(446, 774(073,709 (551, 615 unitatem. Quæritur, per quot actus tantam gratiam obtinuerit?

Respondeo per 64. Progressionis enim duplæ per 64 terminos continuatæ summa constituit dictum numerum.

Quæstio IV.

Si mobile quodpiam ita moveretur per totam æternitatem, ut primo die conficiat milliaria 9, secundo die milliaria 8, tertio 7 & 1 nonam; & sic deinceps diebus singulis percurrat spatia, in proportione semper eâdem 9 ad 8 decrescentia. Quæritur, omnia illa spatia percursa æternitate tota, si in unam summam colligantur, quot milliaria conficient?

Invenienda est summa progressionis per infinitos terminos proportionis 9 ad 8 descendentis. Ea verò est 81. Conficeret igitur mobile istud motu, eâ ratione in æternum continuato, non nisi 81 milliaria; hoc est, conficeret plus omni eo, quod minus est milliaribus 81, accederetque ad hunc terminum intervallo quovis dato minori, licet numquam pertingeret.

Quæstio V.

Duo Viatores iter faciunt; primus quotidie absolvit milliaria ab 12, *secundus quotidie milliaria* cb 10, *sed primum præcessit milliaribus*, d 18: *Quæritur quo die, & post quot milliaria primus secundum assequetur.*

ab 12 a..c.........b
cb 10 d. 18
....
f 9
....

Problema, hac quæstione contentum, à P. Gregorio a S. Vincentio applicatur Achilli testudinem insequenti, & tum ab illo, tum ab aliis ex illo, solvitur per progressiones geometricas; quæ causa fuit

fuit cur id hoc loco adduxerim. Verùm independenter etiam a progreſsionibus & expeditiſsime quidem ſolvitur hunc in modum.

Milliariorum; quæ uterque abſolvit quotidie, differentia *ac* dividat milliaria *d*; quibus alter præceſsit: quotiens *f* 9 erit numerus dierum, quo primus ſecundum aſſequetur. Quod ſi *f* ducas in *ab* provenient milliaria 108, in quorum termino ſe invicem aſſequentur.

Demonſtratio.

Quoniam *ac* dividens *d* fecit *f*; ergo *ac* in *f* producit *d*; hoc eſt *ac* in *f* æquatur *d*. Quare ſi addatur utrique quod fit ex *cb* in *f*; erit *ac* in *f* cum *cb* in *f* æquale ipſi *d* cum *cb* in *f*. Atqui per I. Lib. II. *ac* in *f* cùm *cb* in *f* eſt *ab* in *f*. Ergo *ab* in *f*, (hoc eſt milliaria, quæ diebus *f* primus confecit (æquantur ipſi *d*, cùm *cb* in *f* (hoc eſt milliaribus, quibus ſecundus præceſſerat, una cum his, quæ confecit diebus *f*. Ergo in termino dierum *f* primus ſecundum aſſecutus eſt. Quod erat demonſtrandum.

CAP. VII.

De mediis quotcumque proportionalibus inter duos datos numeros.

INter duos datos numeros datam mediorum proportionalium multitudinē invenire, nihil aliud est, quàm progressionem geometricam exhibere, constantem dato numero terminorum, cujus extremi duo sint dati. Pertinet igitur ad progressiones, quod hoc capite proponitur.

THEOREMA I.

A 2	5 B
	X
C 10	Z.

INter duos numeros A, B qui se invicē multiplicātes quadratum numerum nō producunt, medius proportionalis neque integer, neque fractus reperiri potest.

Demonstratio.

SI enim posit, ille sit X, qui in se ductus faciat Z. Ergo per XX Lib. VII. factus ex A in B, nēpe C, æquatur Z. Quare cum numerus X sit radix quadrata Z, per constr. etiam numerus X erit radix quadrata facti ex A in B: quod est absurdum, cum demonstratum sit Cap. VII. Lib. III. numeri non quadrati radicem, neque integro numero ullo, neque fracto explicabilem esse.

Aliter. Medius proportionalis inter A, & B esset radix quadrata geniti ex A ducto in B, ut patet ex xx. IX. At radix ista, cum genitus ex A in B ex hypothesi sit non quadratus, nullo numero sive integro, sive fracto explicabilis est, ut ostendi L. III. C. VII. Ergo inter A, & B nullus cadit medius proportionalis sive integer, sive fractus. Quod erat demonstrandum.

Est illa igitur arcana indoles numerorum, ut quamvis quibuslibet duobus datis semper exhiberi possit tertius proportionalis, saltem fractus, medius non semper possit.

Sed & hoc observatione dignum, inter quos numeros non cadit medius unus, inter eos posse exhiberi medios duos, aut plures. Exponatur series progressionis duplae; 1 2 4 8 16 32 64 128 *in hac* 2, & 16 *se invicem multiplicantes gignunt* 32, *qui quadratus non est, ac proinde inter eos unus medius non cadit: & nihilominus exhibentur inter eos medii duo, nempe* 4, & 8. *Pari modo* 2 *in* 64 *gignit* 128, *qui quia quadratus non est, inter* 2, & 64 *nequit reperiri me-*

dius

dius unus, & tamen inter eos exhibentur medii quinque, nimirum 4, 8, 16, 32, 64.

THEOREMA II.

X a b c Z
d g
e h
f k
i

DAti sint duo numeri X, Z, vel primi absolute, vel primi inter se, alterutro existente primo. Dico inter hos, aut quoslibet his proportionales nullos exhiberi posse medios proportionales sive integros, sive fractos.

Demonstratio.

CAdant, si fieri potest, inter X, & Z primo medii proportionales integri quocumq; numero, puta tres *a*, *b*, *c*. Quia ergo inter X, Z inter se primos cadunt tres medii; etiam per IX. Lib. VII. inter ipsos, & unitatem totidem medii cadent *d*, *e*, *f*, & *g*, *h*, *k*. Ergo per XI. Lib. IX. quilibet mediorum *d*, *e*, *f* metitur X, & quilibet ipsorum *g*, *h*, *k* metitur Z: quod est absurdum, cum alteruter datorum X, Z ponatur esse primus.

Cadant deinde inter X, Z, si fieri potest, medii proportionales fracti *ab*, *cd*, *ef*. Revocentur tam integri X, Z, quàm fra-

$$X \quad \frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f} \quad Z$$

$$\frac{o}{p} \quad \frac{l}{p} \quad \frac{m}{p} \quad \frac{n}{p} \quad \frac{s}{p}$$

fracti medii ad fractiones ejuſdem nominis *op*, *lp*, *mp*, *np*, *ſp*. Erunt igitur etiam hæ continuè proportionales. Quia verò harum fractionum communis eſt nominator *p*, erunt per Theor. VI. C. II. L. II. numeratores *o*, *l*, *m*, *n*, *s* ipſis fractionibus proportionales; ac proinde etiam ipſi *o*, *l*, *m*, *n*, *s* continuè proportionales erunt. Igitur inter extremos *o*, & *s* cadunt medii proportionales integri *l*, *m*, *n*. Sed quia per conſtructionem X, & Z æquantur fractis *op*, & *ſp*, erit X, ad Z, ut fractus *op* eſt ad fractum *ſp*, hoc eſt, ut *o* ad *s*: Quare cum inter *o*, & *s* cadant integri proportionales medii *l*, *m*, *n*, etiam inter X, & Z cadent per VIII. Lib. VIII. totidem medii proportionales integri: quod fieri non poſſe, jam oſtenſum in prima parte.

Eodem diſcurſu per VIII. L. VIII. demonſtrabitur, proportionales nullos reperiri medios inter numeros quoſcumque jam dictis proportionales.

PROBLEMA I.

Inter duos datos numeros unum medium proportionalem invenire.

Da-

Dati numeri se invicem multiplicent. producti radix quadrata est medius quæsitus. Quod si productus non sit quadratus, Problema est impossibile, ut patet ex Theor. I.

PROBLEMA II.

Inter duos datos numeros quotcumque medios proportionales exhibere.

			A		B			
1		c		d		e		f
1	R4)	c	R4)	d	R4)	e	R4)	f
A	R4)	m	R4)	n	R4)	p	R4)	s

Dati sint numeri A, B. Major B dividatur per minorem A, & quotiens sit *c*. Instituatur progressio geometrica incipiens ab 1, & *c* per terminos uno plures (unitate non computata) numero mediorum quæsitorum: ut si cupis duos medios, progressio continuetur per terminos tres; si tres medios, per quatuor; & sic deinceps. In exemplo apposito progressio constat, præter unitatem, quatuor terminis *c*, *d*, *e*, *f*, quia petuntur tres medii.

Ex hisce terminis extrahatur radix cubica, si petantur medii duo; radix biqua-

dra-

drata, si tres; & sic deinceps. In exemplo nostro, quia petuntur medii tres, ex 1, *c*, *d*, *e*, *f* extrahantur radices biquadratæ, quæ sic exprimuntur: 1, R4) c, R4) d, R4) e, R4) f. Ducantur deinde hæ radices in A minorem datum, ut fiant A, R 4) m, R 4) n, R 4) p, R 4) s.

Dico, inter duos datos tres medios esse R4) m, R4) n, R4) p, si quidem numeri *m*, *n*, *p* sint biquadrati: sin verò, Problema esse impossibile.

Demonstratio.

Quoniam 1, *c*, *d*, *e*, *f* sunt per constr. continuè proportionales, etiam radices eorum similes 1, R 4) c, R 4) d, R 4) e, R 4) f continuè proportionales erunt. Atqui A has multiplicans produxit A, R 4) m, R 4) n, R 4) p, R 4) s. Ergo, per XVII. VII. etiam hi producti erunt continuè proportionales; ac proinde inter A, & R 4) s inventi sunt tres proportionales medii R 4) m, R 4) n, R 4) p. Quare si ostenderimus R 4) s æquari B, liquebit propositum.

Quia per const. 1, *c*, *d*, *e*, *f* sunt continuè proportionales, erit per VIII. Lib. IX. quartus *f* biquadratus radicis *c*. Ergo *c*

est

	A		B	
1	c	d	e	f
1.	R4) c	R4) d	R4) e	R4) f
A	R4) m	R4) n	R4) p	R4) s

est R4) f. Jam quia A dividens B fecit quotientem *c*, ergo A ductus in *c* producit B. Quare cum *c* sit R4) f, etiam A ductus in R4) f, producet B. Sed A ductus in R4) f produxit R4) s. Ergo R4) s est B. Inter A igitur, & B medii sunt inventi tres R4) m, R4) n, R4) p.

Quod si numeri *m*, *n*, *p* non sint biquadrati; eorum biquadratæ radices R4) m, R4) n, R4) p nullis poterunt numeris integris, fractisve explicari, ut demonstratum est Lib. III. Cap. VII.; ac proinde impossibile erit quæsitum Problematis.

CAP. VIII.

De Combinationibus, & Permutationibus.

HOc Capite, quod ad progressiones quasi quædam appendix est, Arithmeticam hactenus explicatam, ac demonstratam concludo.

Quamvis voces illæ combinatio, & permutatio promiscue possint accipi, visum est

est hìc tamen eas distinguere hunc in modum. Datus sit certus rerum numerus, exempli gr. 10 litteræ. Si quæratur quot ex his 10 litteris haberi possint diversi binarii litterarum, & quot diversi ternarii, & sic deinceps, dicentur quæri omnes combinationes diversæ litterarum 10, quarum singulæ, & semper minori constant rerum numero, quàm is, qui datus est, & nulla rem eamdem bis continet, & nulla habet omnes res easdem cum ulla altera. Quod si quæratur, quoties 10 illæ datæ litteræ misceri inter se possint sic, ut semper accipiantur omnes solo ordine mutato, dicentur quæri permutationes omnes 10 litterarum.

PROBLEMA I.

Ex dato numero rerum combinationes omnes reperire.

Dentur exempli gr. 8 litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Prima *a* combinetur cum singulis ipsam sequentibus, nimirum cum *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & provenient inde combinationes binarum diversæ 7, nempe *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af*, *ag*, *ah*. Secunda *b* combinetur cum singulis ipsam sequentibus, nempe cum *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, & sic deinceps singulæ datarum cum omnibus ipsas sequentibus combinentur: provenient diversi binarii omnes, qui ex dato litterarum numero haberi possunt.

Quod si singulos binarios diversos jam repertos combines cum singulis litteris ipsos consequentibus, prodibunt omnes diversi terniones, qui haberi possunt ex dato numero litterarum. Exempli gr. binariorum inventorum primus *ab* combinetur cum singulis litteris ipsum sequentibus, quæ sunt *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, provenient terniones *abc*, *abd*, *abe*, *abf*, *abg*, *abh*. Sumatur jam alius quivis binarius *cf*; litteræ hunc sequentes sunt *g*, *h*; hic ergo dat terniones *cfg*, *cfh*, non plures.

Combinationes 8 litterarum

a b c d e f g h.

Binarii diversi 28.

ab,ac,ad,ae,af,ag,ah,
bc,bd,be,bf,bg,bh,
cd,ce,cf,cg,ch,
de,df,dg,dh,
ef,eg,eh,
fg,fh,
gh.

Quaterniones diversi 70.

abcd,abce,abcf,abcg,abch.
abde,abdf,abdg,abdh.
abef,abeg,abeh.
abfg,abfh.
abgh.
acde,acdf,acdg,acdh.
acef,aceg,aceh.
acfg,acfh.
acgh.

Ter-

Terniones diversi 56.

abc,abd,abe,abf,abg,abh
acd,ace,acg,ach,
ade,adf,adg,adh.
aef,aeg,aeh.
afg,afg.
agh.
bcd,bce,bcf,bcg,bch
bde,bdf,bdg,bdh.
bef,beg,beh.
bfg,bfh.
bgh.

cde,cdf,cdg,cdh.
cef,ceg,ceh,
cfg,cfh.
cgh.

def,deg,deh.
dfg,dfh.
dgh.

efg,efh.
egh.
fgh.

adef,adeg,adeh.
adfg,adfh.
adgh.
aefg,aefh.
aegh.
afgh.
bcde,bcdf,bcdg,bcdh.
bcef,bceg,bceh.
bcfg,bcfh.
bcgh.
bdef,bdeg,bdeh.
bdfg,bdfh.
bdgh.
befg,befh.
begh.
bfgh.
cdef,cdeg,cdeh.
cdfg,cdfh.
cdgh.
cefg,cefh.
cegh.
efgh.
defg,defh
degh
dfgh
efgh.

Rursum, si omnes jam inventi terniones combinentur cum litteris ipsos sequentibus, prodibunt omnes quaterniones diversi possibiles. Et sic deinceps.

Ratio hujus constructionis per se satis est manifesta. Ad pleniorem porro intelligentiam totius methodi.

Observa I. Si ex dato rerum numero capiantur duo numeri, qui simul componunt ipsum datum numerum, eorum combinationes sunt æque multæ. Dentur 8 litteræ, & ex numero 8 sume 1, & 7, quæ simul efficiunt 8, poterunt ex 8 sumi octo diversæ unitates, ac proinde etiam 8 diversi litterarum septenarii.

Rursum ex 8 cape 2, & 6, quæ juncta efficiunt 8. Methodo jam tradita ex 8 litteris habentur combinationes binarum diversæ 28; totidem ergo erunt etiam diversæ combinationes senariæ. Sumantur ex 8 rursum 3, & 5, quorum summa est 8. Quoniam combinationes ternariæ diversæ reperiuntur 56; etiam totidem erunt diversæ combinationes quinariæ. Quæ omnia sunt manifesta consideranti.

Observa II. Quò numeri, secundum quos fit combinatio, utrimque magis accedunt versus medium, eò plures exhibent combinationes. Sic ex datis litteris 8 plures habentur biniones, & senarii diversi, quàm unitates, & septenarii; item plures diversi terniones, & quinarii, quàm biniones, & senarii.

Observa III. Cum numerus rerum datus est par, tunc illius semissis maximum dabit numerum combinationum, ut cum lit-

litterarum numerus datur 8, si litteræ combinentur quaternæ, habebitur maximus combinationum numerus.

Cum verò numerus rerum datur impar, tunc duo numeri contigui, quorum summa facit datum numerum rerum; exhibent maximum numerum combinationum. Ut si dentur 9 litteræ, numeri contigui, quorum summa faciat 9, sunt 4, & 5. Quarum si litteræ combinentur quaternæ, vel quinæ; maximus habebitur numerus combinationum.

Quoniam verò ex methodo jam tradita sciri nequit combinationum numerus, nisi singulæ exhibeantur, regulam adjungo ex Petro Herigono, qua facile is innotescat.

Reg. Datus sit re-	a	c	f
rum numerus *a*, & a-	8.7.6.	336	56
lius eo minor *b*, se-	3.2.1	6	f
cundum quem res	b	e	
datæ sint combinan-			

dæ: Instituantur duæ progressiones Arithmeticæ per subductionem unitatis à numeris datis *a*, *b*, tot terminorum, quot minor *b* habet unitates. Tum numerus *c*, genitus ex multiplicatione terminorum majoris progressionis, dividatur per numerum *e* productum ex multiplicatione terminorum progreſſionis minoris. Quotiens erit quæſita combinationum multitudo, quæ haberi poteſt, ſi res datæ ſecundum numerum *b* combinentur.

Quod ſi lubeat ſcire in quot combinationibus res ſingulæ reperiantur, multitudinem combinationum duc in numerum, ſecundum quem res ſunt combinatæ; productum divide per datum numerum rerum: quotiens oſtendet, in quot combinationibus unaquæque res reperiatur.

Appoſui exemplum horum omnium in litteris 8 *a, b, c, d, e, f, g, b*. Ex his diverſi habentur binarii 28, terniones 56, quaterniones 70, quinarii 56, ſenarii 28, ſeptenarii 8, qui reſpondent totidem diverſis unitatibus, ut ſenarii binariis, & quinarii ternionibus. Soli porro binarii, terniones, & quaterniones hìc ſunt expreſſi; cæteri eadem arte reperiuntur. Itaque litteræ octo *a, b, c, d, e, f, g, b*, admittunt combinationes 246; permutationes dabit Caput ſequens.

PROBLEMA II.

D*ato numero, omnes permutationes poſſibiles invenire.*

Den-

Dentur exempli gr. litteræ 10 *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*. Oporteat omnes possibiles 10 litterarum ordines diversos exhibere.

Methodus, ejusque demonstratio traditæ sunt in scholio Prop. XIX. Lib. VIII, quem locum consulo. Inde sequens permulationum tabella confecta est.

Num. Rerum.	Permut.
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40,320
9	362,880
10	3,628,800
24	620,448,401,733,239,439,360,000

Quod si in dato numero rerum aliquæ similes sint, seu eædem; ut si detur hæc vox *Ignatius* 8 litteris constans, in qua duæ litteræ occurrunt eædem, nempe *i*, permutationum numerus invenietur hac regula, ex *a* Kirchero nostro deprompta.

Numerus permutationum totius dividatur per numerum permutationum, quas subire possunt res similes, quotiens dabit quæsitum.

a Tom. 2. musurg. pag. 5.

Litteræ 8 hujus vocis *Ignatius*, si omnes essent diversæ, admitterent permutatationes 40, 320. Litteræ eædem sunt 2. Porro 2 permutationes admittunt duas, Igitur 40, 320 dividantur per 2. Quotiens 20, 160. dabit omnes ordines diversos possibiles 8 litterarum, quibus constat vox *Ignatius*.

Corollaria.

I. HOmines 10. possunt mensæ accumbere plus, quàm termillionesies, sic ut numquam sit idem ordo accumbentium. Rerum quippe 10 ordines diversi sunt 3 628, 800.

II. Mille milliones Scriptorum, mille annorum millionibus, non scribent omnes 24 litterarum alphabeti permutationes, licet singuli quotidie absolverent 40 paginas, quarum unaquæque contineret 40 diversos ordines litterarum 24.

Id breviter sic ostendo. Quoniam unus Scriptor uno die scribit 40 paginas, quarum singulæ contineant 40 ordines diversos litterarum 24; ductis igitur 40 in 40, fiunt diversi ordines 1600, quos uno die scribet Scriptor unus. Ergo si demus anno dies 366, hoc est plures, quàm ei debeantur, scribet Scriptor unus anno uno 24 litterarum ordines, sive purmutationes

585.

585, 600: fit enim hic numerus ex 1600 ductis in 366.

Annis igitur 1, 000 (00000), hoc est mille millionibus annorum scribet unus

A 585 (600000) 000000
B, 585, 600(000000(000000(000000
C. 620, 448 (401,733 (239,439(360,000

permutationes diversas A: hic enim numerus oritur ex 585, 600 ductis in 1, 000 (000000. Quare si mille annorum millionibus Scriptor unus scribat permutationes, seu ordines diversos A; Scriptorum mille milliones eodem tempore, videlicet mille annorum millionibus, scribent litterarum 24 tot permutationes diversas, quot fiunt ex 1, 000(000000, hoc est mille millionibus, ductis in A. Numerus verò permutationum, ex hac multiplicatione genitus, est B, qui adhuc minor est numero C, designante permutationes omnes 24 litterarum.

III. Ex problemate eodem reperientur omnia Anagrammata possibilia nominis dati. Quod si aliquæ litteræ in nomine dato sint eædem, adhibenda insuper erit regula superius tradita.

IV. Ut habeantur omnia vocabula, quæ

ex litteris alphabeti 24 concinnari possunt, oportebit per Probl. I. omnes 24 litterarum combinationes binarias, ternarias, quaternarias, quinarias, senarias, &c. exhibere; & primum quidem combinationes omnes stricte acceptas, de quibus agitur in I. Probl., quæ non solum omnes inter se diversæ sunt, sed etiam nullam litteram bis continent: deinde verò etiam eas omnes, in quibus litteræ una, vel plures sæpius recurrunt, quarum inventio ex prioribus satis est manifesta, Tum verò combinationum singularum litteræ per Probl. II. diversimode insuper erunt permutandæ toties, quoties possunt. Ex omnibus illis tum combinationibus, tum permutationibus numerus vocabulorum ingens quidem ille, & prope immensus, sed tamen certus, atque determinatus procreabitur.

FINIS.

AP-

APPENDIX,

Qua Theoria, & Praxis Arithmeticæ etiam in Figuris demonstratur.

HIc epilogus est minus in Tironum eruditionem, quàm in Eruditorum gratiam, seu potius in hujus Arithmeticæ complementum, ac ornamentum. Cum enim quatuor illius partes præcipuæ, scilicet additio, subtractio, multiplicatio, & divisio super libris ipsis præpositis, illorumque Prolegomenis totaliter fundentur, & a libris postpositis admodum perficiantur: nunc restat, ut pars ejus quælibet figura aliqua geometrica, iisdem principiis demonstranda, in postremum adornetur.

ADDITIO.

DAta sint triangula simul addenda, ut summa sit triangulum datis æquale. Tabula 6. Fig. 1.

Si triangula data sint inæqualis altitudinis, ut A B C, C D E, E F G; ad æqualem altitudinem sunt reducenda; ut patet ex figuræ constructione; quæ pendet ex primis Geometriæ elementis Tironibus vix ignotis. Hanc tamen praxim, ad faciliorem hujus axiomatis intelligentiam; hic apponemus.

Sint igitur triangula A B C; E F G, ad altitudinem C D E reducenda. Ad altitudinem CD ducatur paralella HL contra basim A G a: postea linea CB producatur in H b, unde ducatur linea H A: & ducta ipsi paralella I B determinabit punctum I, ex quo ducenda est linea IH, quæ triangulum IHC perficit, illudque triangulo A B C æquale c constituit ad altitudinem requisitam.

a p. 31. l. 1.
b postul. 2. l. 1.
c p. 37. l. 1.

Ad eamdem altitudinē reducetur triangulum E F G, si ducta linea L G, & ipsi paralella FK, ducatur ex puncto K linea KL, quæ triangulum K L E perficit, illudque triangulo EFG æquale constituit ad altitudinem requisitam. Demonstratio ut supra.

Sed sicut ducendo lineam EH, triangulum I H E est æquale triangulo A B C + C D E d: sic etiam ducta linea K H, triangulum I H K est æquale A B C + CDE + EFG. e

d p. 37. l. 1. Axiom. 2. l. 1.
e ibidem.

Quan-

Quando autem triangula sunt altitudinis æqualis, ut I H C, C D E, E L K: bases eorum I C, C E, E K componantur in rectam lineam, cui parallela HL ducatur in summitate angulosum; tunc si ex extremitatibus basis generalis IK ducantur duæ lineæ ad quodlibet punctum lineæ parallelæ HL, etiam ad angulum datum, ut in 2da fig. CP, constituent triangulum I H K *n*, sive I M K *o* æquale triangulis datis simul additis. Tabula 6. Fig. 1. & 2. n Fig. 1. o Fig. 2.

Demonstratio.

HÆc prauis, a Tironibus si attente considererur, sufficienter illis patebit ex principiis *a* in hoc opere contentis: summa enim trianguli I H C + C D E + E L K semel continetur in triangulo IHK, aut IMK. a Axiom. 2.3.4.5. 1.7. Definit. 13.14. 1.7.

Ut tamen peritioribus, qui rigorem geometricæ demonsttationis postulant, fiat satis; sequentem *b* hic adjungimus, de qua consuli potest Geometria supra *c* citata. b Desaiguil. c pag. 2.

E H K est æquale E L K, per Proposit. XXXVII. Lib. I. pag. 45. Tabula 6. Fig. 1.

E H C est æquale C D E, per eamdem.

Er-

Fig. 1. Ergo GHK est æquale ELK + CDE, per ax. II. Lib. I. Sed IHC est etiam sibi æquale IHG, per idem pag. 11. Ergo IHK est æquale IHG + ELK + CDE. Cum autem per constructionem, sive per transmutationem figurarum, quam primo supposuimus etiam Tironibus vix ignotam, IHG sit æquale ABG; & ELK etiam æquale EFG: evidens est, quod
a Fig. 1. b Fig. 2. si triangulum IHK *a* aut IMK *b* sit æquale IHC + ELK + GDE trianguli æqualis altitudinis, ut demonstratum est;
Fig. 1. erit etiam æquale ABG + CDE + EFG triangulis inæqualis altitudinis, quod adhuc erat demonstrandum.

Probrema alterum.

Triangulum sit triangulo addendum, ut summa sit Parallelogrammum, vel quadratum.

Tabula 7. Fig. 1. Si triangula sint æque alta, ut EDA, & AIG, ad dimidiam partem basis fiat Parallelogrammum BCRG ad eamdem altitudinem, & erit ipsis æquale. Si verò
Fig. 2. triangula non sunt æque alta, ut DEF, & FGH, revocentur ad eamdem altitudinem, ut supra, & in basi communi fiat Paral-

rallelogrammum ad dimidiam altitudinem. Si autem etiam in quadratum mutare desideres hæc duo triangula; confectum ex iis Parallelogrammum revocetur ad quadratum. Sit nempe Parallelogrammum H I K O æquale triangulis D E F, F G H. Producatur latus ejus HO in M, ut O K sit æquale O M; describatur super HM semicirculus, & a puncto O erigatur perpendicularis O Q, cujus quadratum O Q P N erit æquale Parallelogrammo, & per consequens triangulis datis. Fig. 2.

Eodem modo fieri potest additio omnium specierum figurarum, & illarum transformatio in quaslibet figuras additis diversas. & ad magnitudinem requisitam, aut convenientem. Cum autem hanc materiam separatim, Deo juvante, simus brevi tractaturi; aliquod illius specimen ad rem præsentem potest sufficere, sive in additione, sive in aliis Arithmeticæ partibus.

SUBTRACTIO.

Datum sit triangulum a triangulo subtrahendum, ut maneat triangulum.

Triangulum D E I subtrahendum sit ex BAD. Si sint æque alta, transferatur Tabula 8. a Fig. 1.

tur basis D I in D O, & ducatur A O, tunc O A D erit æquale D E I *a*; & manebit pro excessu triangulum B A O. *b*

a p.1.l.vi.
b Defin.4. l.vii.&p. 4. hujus.
Fig. 2.

Si verò triangula non sint æquè alta, ut B A C, C D G; revocetur C D G ad G F H, & facta subtractione, ut supra, remanebit pro excessu triangulum B A S. Demonstratio patet ex constr. & ex præc. Problem.

MULTIPLICATIO.

Detur quadratum per quemlibet numerum 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. multiplicandum, ita ut duplum, triplum, quadruplum, & sic in infinitum multiplum constituatur.

Tabula 9.
a p.31.l.1.

Sit quadratum A B C D duplum constituendum. Sumatur diagonalis A C, & ducatur linea illi similis ex A in E, & in G; exinde per parallelas E F, F G *a* quadratum A E F G erit duplum quadrati dati A B C D.

Quod si idem quadratum A B C D sit triplum constituendum; sumatur linea BG, & ducatur ex A in K, & in I; exinde per parallelas K H, H I quadratum A K H I triplum erit quadrati dati

A

ABCD, quod eodem modo quadruplum, 5um, 6um, 7um &c. constituetur.

Si per 9 sit multiplicandum; sumatur linea 4, & 5 sive V N, & erit latus Quadrati requisiti A R M T. Si per 13. l. 4. 9.

Si per 19; linea 6, 13, seu Q S constituet latera Quadrati A Z X w.

Si per 38; Diagonalis w Z erit latus Quadrati A B C D per 38 multiplicati; & sic in infinitum. Quod admiratione dignum Tironibus apparebit.

Multiplicatio Quadrati fieri potest alio modo, cujus demonstratio *a* eadem est, licet constructio *a* diversa.

a Desaiguil. p. 47. l. 1. def. 15. l. 7. ax. 1. 2. 3. 7. l. 7. b Tabula 10.

DIVISIO

Detur circulus A D C Z in 32 partes dividendus.

Tab. 11.

Ducatur linea D C ad quartam partem circuli, & dividatur in duas partes æquales per perpendicularem B E, quæ erit semidiameter circuli E O K F R.

Postea ducatur linea R O, cujus media pars, seu perpendicularis Q B erit semidiameter circuli Q P w S. Sicque ex lineis I N, H M, G L fiant circuli: tunc in circulo dividendo erunt quinque circuli quorum

R E O K F est	$\frac{1}{2}$	Circuli dati A D C Z.
Q P W S	$\frac{1}{4}$	ejusdem
I M rr T	$\frac{1}{8}$	
H L ii V	$\frac{1}{16}$	
G d e c	$\frac{1}{32}$	circuli in tot partes dividendi.

Demonstratio eadem est, ac præcedentis Problematis, & est simili admiratione dignissima, propter mirabiles circuli ad quadratum rationes, necnon trianguli ad utrumque relationes. Illas igitur benevolo, & erudito Lectori speculandas relinquimus in ultima figura hìc apposita *a*, quæ, tamquam epitome hujus Appendicis, totam istam Arithmeticam, tam Theoricam, quàm Practicam fœliciter coronabit; sicque ejus demonstratio *b* in modum Corollarii, huic opusculo finem pariter imponat.

a Tabula ultima.

b Desaiguiliers.

De-

Demonstratio.

UT 14 est ad 11, sic Quadratum A C, est ad Circulum A B C a: & ut 14 est ad 11, sic etiam A C est ad D C b. Inde sequitur A C esse ad D C, ut Quad. A C ad Circul. A B C c: Et ut A C est ad D C; sic etiam Quad. A C esse ad Quad. B C d.

Ergo Quad. A C est ad Quad. B C, ut Quad. A C est ad Circul. A B C e. Subt. Quad. A C æqual. Quad. A C.

Sicque Quad. B C æquale est Circul. A B C f. Sed Quad. B C est æquale Quad. E F g. Ergo Quad. E F est æquale Circul. A B C h.

Sic etiam per XXXVII. & XXXVIII. Lib. I. Euclid. potest demonstrari Triang. MLN esse æquale Quad. E F, & triang. GIH esse æquale Triang. MLN; sicque Quad. E F esse æquale Triang. M L N i. Sed Quad. E F est æquale Circul. A B C k. Ergo Triang. M L N æquale est Circ. A B C l. Quod erat demonstrandum. Cum autem Quad. E F sit etiam æquale parallelogrammo M N o. Inde sequitur omnes hujus appendicis figuras in hac ulti-

Tabula ultima.
a Archi. med. 2. 1.
b ex cōst.
c Euclid. 11. 5.
d 19. 20. 6.
e 11. 5.
f 9. 5. 3. 1.
g ex cōst.
h 1. Ax. Eucl. 1.
i 1. Ax. Eucl. 1.
k ut supra.
l Ax. 1. l. 1.
o 43. 1.

tima Tabula cum eadem proportione contineri. Quod est majori speculatione dignissimum, ideoque subsecuturo opere plenius pertractandum.

FINIS.

NI-

NICOLAI

DE MARTINO

DE

PERMUTATIONIBUS,

ET

COMBINATIONIBUS

OPUSCULUM.

DE PERMUTATIONIBUS, ET COMBINATIONIBUS.

DOctrinam de permutationibus, & combinationibus utilissimam esse, tum in rimandis naturæ arcanis, cum in Civilis vitæ usu, neminem latere arbitror, nisi quem fugiat infinitam varietatem, quæ tam in naturæ operibus, quàm in Mortalium actionibus elucet, non aliunde, quàm ex diversa partium permutatione, aut combinatione originem trahere. Notum quippe est, quàm difficile sit, modos omnes recensere, quibus res plures, ad effectum aliquem producendum concurrentes, simul permutari possunt, aut combinari. Quin etiam dici potest, nullum esse vitium, in quod Homines, vel maxime prudentes, frequentius impingunt, quàm quòd vulgo dicitur imperfecta partium enumeratio. Itaque doctrina illa, quæ huic medetur defectui, docetque enumerare modos omnes, quibus res plures simul permutari possunt, aut combinari, merito suo utilissima censenda est. Quocirca non exiguum operæ prætium facturum me esse arbitror, si doctrinam istam de permutationibus, & combinationibus, leviter a Tacqueto traditam, in Tironum gratiam paullo fusius in hoc opusculo exponam.

CAP. I.

De Permutationibus.

Duæ, aut plures res dicuntur inter se permutari, quum ita quidem permiscentur, ut eadem rerum servata multitudine, ordo situsve tantummodo inter ipsas permutetur. Qua ratione dicetur quæri duarum, aut plurium rerum permutationes omnes, quum quæritur quoties res illæ permisceri possint ea ratione, ut omnibus semper acceptis, solus ordo situsve mutetur.

Jam duarum rerum diversarum *a*, & *b* duæ esse possunt permutationes diversæ. Quippe vel *a* præcedit,& sequitur *b*, eritque permutatio una; vel vicissim *a* sequitur, & *b* præcedit, eritque permutatio altera.

tera. Quumque ex tribus rebus diversis *a*, *b*, *c* interea ac una primum obtinet locum, reliquæ duæ bis possunt permutari; erunt trium illarum rerum diversarum ter duæ, hoc est sex diversæ permutationes. Atque ita quoque si quatuor extiterint res diversæ *a*, *b*, *c*, *d*, quia dum una primum tenet locum, tres reliquæ sexies ordinem variabunt, fient illarum rerum permutationes omnes diversæ quater sex hoc est viginti quatuor. Proindeque generaliter numerus permutationum diversarũ, quas plures res diversæ subire possunt, toties continebit numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot sunt unitates in ipso rerum numero.

Hinc datis quotcumque rebus diversis, facile erit numerum omnium permutationum diversarum invenire. Numerus namque permutationum, quas plures res diversæ subire possunt, toties continet numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, quot sunt unitates in ipso rerum numero. Itaque si datus rerum numerus multiplicetur per numerum permutationum, quas recipiunt res una pauciores, habebitur permutationum numerus quæsitus. Jam vero duæ res diversæ nonnisi dupliciter possunt permutari. Itaque ad habendum numerum permutationum, quas suscipere possunt tres res diversæ, multiplicari debet 2 per 3. Atque ita quoque multiplicandi erunt inter se mutuo numeri 2, 3, 4, ut habeatur numerus permutationum, quas suscipiunt quatuor res diversæ. Quocirca generaliter si omnes numeri post unitatem naturali ordine se consequentes ad datum usque rerum numerum inclusive multiplicentur per se mutuo, productum numerum permutationum exhibebit.

Verumtamen si in dato rerum numero res aliquæ sint similes, sive eædem, hoc est una eademque res bis, aut sæpius recurrat; tunc numerus permutationum multo minor evadet. Sed ex positis principiis facile quoque erit illum invenire. Nam quum plures res sunt similes, eæ inter se nonnisi semel possunt permutari. Unde omnes illæ permutationes, quæ orirentur, si res illæ essent diversæ, jam propter earum similitudinem evanescent. Itaque quum in dato rerum numero plures res sunt similes, sive eædem, habebitur numerus permutationum omnium diversarum, si numerus permutationum, quas suscipere potest datus rerum numerus, næ, si omnes essent diversæ, dividatur per numerum permutationum, quas subire possunt res similes, si utique velut dissimiles considerentur. Ita si datus rerum numerus sit 5, & in eo res eadem ter recurrat, erit 20 numerus permutationum diversarum; quia si dividatur 120 numerus omnium permutationum per 6 numerum permutationum, quas suscipiunt tres res tantummodo; fiet quotiens 20

Quod si non una, sed duæ, aut plures res in dato rerum numero sæpius recurrant, tunc habebitur numerus omnium permutationum diversarum, si numerus permutationum, quas suscipere potest datus rerum numerus, si omnes essent diversæ, dividatur per productum ex numeris permutationum, quas seorsim recipere possunt singulæ res similes, quæ sæpius recurrunt, secundum propriam cujuscumque multitudinem. Qua ratione si septem sint res permutandæ, inter quas una recurrat bis, altera ter; numerus permutationum omnium diversarum erit 420.

Nam septem res permutari possunt inter se 5040 modis diversis: proindeque quia duæ bis, & tres sexies inter se possunt permutari, diviso 5040 per

per 12 productum ex 6 in 2, fit quotiens 420.

CAP. II.

De Combinatiobibus secundum omnes exponentes.

Combinationum nomine veniunt rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis situsve rerum servata ratione, tantum numerus consideratur, quo res datæ simul sunt conjungendæ. Qua ratione dicentur quæri omnes combinationes diversæ plurium rerum datarum, quum quæritur, quoties ex dato illo rerum numero binæ, ternæ, aut quaternæ accipi possunt sic, ut ipsarum unaquæque numquam sumatur sæpius, quàm semel.

Jam numerus, secundum quem res datæ conjunguntur, dicitur exponens combinationis. Hoc pacto, si res binæ sumantur exponens erit 2; si ternæ, 3; si quaternæ, 4; atque ita deinceps. Sed res, secundum hos exponentes junctæ, dicuntur binarii, ternarii, aut quaternarii; vel etiam biniones, terniones, aut quaterniones: & consequenter dicendæ sunt uniones, quando res sumuntur singulæ: & nul-

nulliones, quum nulla plane sumitur.

Sed priusquam de inveniendis combinationibus secundum datum quemvis exponentem agamus, tradenda nobis est methodus, qua inveniri possint combitiones secundum omnes exponentes conjunctim. Id itaque commode fieri potest in hunc modum. Sunto combinandæ modis omnibus litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c. Fiant tot series, quot litteræ; sed ita tamen, ut in prima serie reperiatur sola littera *a*; in secunda *b*, tum sola, tum conjuncta cum ipsa *a*; in tertia *c*, primo seorsim, deinde vero conjuncta cum omnibus terminis præcedentibus; In quarta *d*, similiter primo sola, deinde vero addita terminis omnibus præcedentium serierum; atque ita deinceps.

a
b. ab.
c. ac. bc. abc.
d. ad. bd. cd. abd. acd. bcd. abcd.

Hac siquidem ratione manifestum est, datas litteras omnifariam, ac secundum omnes exponentes inter se mutuo combinari. Et quoniam littera, quæ cujusque seriei agmen ducit, primo ponitur sola, deinde una secum assumit terminos omnes

nes præcedentium serierũ; manifestum est etiam, in unaquaque serie unum amplius terminum reperiri, quàm in omnibus aliis seriebus antecedentibus simul: proindeque termini dictarum serierum progressionem geometricam duplam ab unitate costituent; quandoquidem per ostensa a Tacqueto in Theoremate XV progressionum geometricarum, progressionis geometricæ duplæ ab unitate eam quoque naturam esse constat, ut summa terminorum quotlibet unitate aucta sequentem terminum exhibeat.

Atque hinc facile modo erit, omnes terminos illarum serierum in unam summam colligere, & consequenter invenire combinationes rerum datarum secundum omnes exponentes conjunctim. Quum enim termini illi costituant ab unitate progressionem geometricam duplam, & quot sunt unitates in dato rerum numero, tot sint series eorumdem terminorum; satis erit in progressione geometrica dupla, quæ initium habeat ab unitate, in unum colligere tot terminos, quot sunt unitates in numero rerum dato. Sed totidem termini progressionis geometricæ duplæ ab unitate colligentur in unum, si capiatur terminus subsequens ejusdem pro-

progressionis, idemque unitate mulctetur: ob eamdem illam proprietatem modo memoratam, quod in progressione geometrica dupla ab unitate summa terminorum quotlibet unitate aucta sequentem terminum exhibeat.

Et quoniam in progressione geometrica dupla ab unitate unusquisque terminus invenitur, si numerus binarius toties per se ipsum multiplicetur, quot eum in progressione termini præcedunt; habebitur subsequens ille terminus, multiplicando binarium toties per se ipsum, quot sunt termini præcedentes, hoc est quot sunt unitates in dato rerum numero. Proindeque regula pro inveniendis combinationibus omnibus secundum omnes exponentes conjunctim talis erit: multiplicetur binarius toties per se ipsum, quot unitates continet datus rerum numerus; auferatur deinde unitas a producto, eritque residuum combinationum numerus quæsitus. Ita si numerum rerum datarum vocemus n; erit numerus omnium combinationum secundum omnes exponentes conjunctim $2^n - 1$, intelligendo pro 2^n eam binarii potestatem, quam designat numerus n.

CAPUT III.

De Combinationibus secundum singulos exponentes.

TRadita methodo de inveniendis combinationibus secundum omnes exponentes conjunctim, sequitur, ut videamus qua ratione inveniendæ sint combinationes secundum singulos exponentes. Et quidem ex ipsa illa methodo qua superiori capite inventæ sunt combinationes secundum omnes exponentes conjunctim, manifestum est, litteram quæ cujuslibet seriei caput est, adjunctam unionibus serierum præcedentium efficere seriei suæ biniones, adjunctam binionibus efficere terniones, ternionibus quaterniones, atque ita deinceps: proindeque in unaquaque serie numerus combinationum secundum datum quemvis exponentem æqualis erit numero combinationum secundum exponentem unitate una minorem, quæ in præcedentibus seriebus inveniuntur.

Ex quo facile modo erit Tabulam conficere, quæ ad oculum nobis ostendat combinationes secundum singulos exponennentes, quæ in unaquaque serie reperiuntur. Nam uniones in singulis seriebus reperiuntur singuli. Itaque in unaquaque serie loco unionum unitas ipsa scribi debet. Et quoniam in prima serie, præter unionem unum, nullæ aliæ occurunt combinationes; proinde in ea loca alia cifris sunt replenda. Sed collectis ordine unionibus omnibus serierum præcedentium, reperietur in secunda serie unum esse binionem, duos in tertia, tres in quarta, atque ita deinceps. Pariterque collectis binionibus, invenietur nullum esse ternionem in secunda serie, sed unum in tertia, tres in quarta, sex in quinta, decem in sexta, &c. Atque ita quoque collectis ternionibus, cognoscetur nullum esse quaternionem tam in secunda, quàm in tertia serie, sed unum in quarta, quatuor in quinta, decem in sexta, viginti in septima &c. Eodemque artificio omnes aliæ combinationes cujuscumque seriei poterunt successive inveniri.

Tab.

TABULA

Combinationum secundum singulos exponentes.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
7	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
8	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
9	1	8	28	56	70	56	38	8	1	0
10	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Hæc

Hac tabula constructa, consideremus modo tres ejus proprietates. Prima proprietas est illa ipsa, per quam tabulæ constructionem obtinuimus, & cujus ope nullo negotio eadem tabula in infinitum potest continuari: nimirum, quod quilibet terminus in unaquaque columna verticali æquatur summæ omnium superiorum præcedentis columnæ verticalis. Ex quo fit, ut ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque columna verticali, satis sit in unum colligere omnes terminos superiores, qui sunt in præcedenti columna verticali.

Secunda proprietas est, quod columnarum verticalium prima nullā habeat ciframin principio, sed unam secunda, duas tertia, tres quarta, atque ita deinceps. Ex quo fit, ut si in iis columnis sumantur termini æque multi, quarum multitudinem designet littera a, multitudo terminorum significativorum, exclusis cifris initialibus, sit a in prima columna $a-1$ in secunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita de aliis.

Tertia proprietas est, quod in unaquaque columna verticali si aliquis terminus significativus multiplicetur per numerum terminorum significativorum, qui eum præcedunt, & productum dividatur per numerum illius columnæ; hoc est per 1 in prima columna, per 2 in secunda, per 3 in tertia, atque ita deinceps, quotiens fit summa ex præcedentibus terminis significativis. Unde facile modo erit, terminos quotcumque cujuscumque columnæ verticalis in unam summam colligere.

Sumantur enim in unaquaque columna verticali ab initio termini æque multi, & designet eorum multitudinem littera a. Itaque ob secundam proprietatem multitudo terminorum significativorum erit a in prima columna, $a-1$ in secunda, $a-2$ in tertia, $a-3$ in quarta, atque ita deinceps. Et quoniam in prima columna quisque terminus est unitas, designabit in ea eadem littera a, vel quod idem est $\frac{a}{1}$ non modo multitudinem, verum etiam summam terminorum significativorum.

Hinc porro, quia per primam proprietatem $\frac{a}{1}$ est terminus, qui in secunda columna proxime sequitur, proinde

si

si $\frac{a}{1}$ multiplicetur per $a-1$, & productum dividatur per 2, erit per tertiam proprietatem quotiens $\frac{a.a-1}{1.2}$ summa terminorum in secunda columna. Quumque summa ista sit terminus proxime insequens in tertia columna, si eadem summa multiplicetur per $a-2$, & productum dividatur per 3, erit quotiens $\frac{a.a-1.a-2}{1.2.3}$ summa terminorum in tertia columna: Atque ita quoque eadem summa terminorum erit $\frac{a.a-1.a-2.a-3}{1.2.3.4}$ in quarta columna, $\frac{a.a-1.a-2.a-3.a-4}{1.2.3.4.5}$ in quinta columna, & sic in infinitum: notando, puncta quantitatibus interjecta continuam earum quantitatum multiplicationem designare.

Patet autem summam istam designari per duplicem progressionem arithmeticam,

cam, unam a multitudine assumpta terminorum per unitatis decrementum descendentem, alteram ascendentem ab unitate per unitatis incrementum, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Unde cum eadem summa designet combinationes omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot sunt termini assumpti, & secundum eum exponentem, quem columnæ numerus designat; perspicuum est, ad inveniendas combinationes omnes, quæ ex pluribus rebus fieri possunt secundum datum quemvis exponentem, hanc regulam observandam esse.

Nimirum fiant duæ progressiones arithmeticæ; una descendens per unitatis decrementum a numero rerum combinandarum, altera ascendens ab unitate per unitatis incrementum, & utraque porro tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter se mutuo, tam termini prioris progressionis, quàm termini alterius; & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens quæsita multitudo combinationum, quæ secundum datum exponentem institui possunt. Quæ quidem est ipsissima regula, la, quam ex Petro Herigono attulit Tacquetus.

CAP. IV.

De Combinationibus, in quibus eadem res sæpius recurrere potest.

In combinationibus rerum inveniendis, tam secundum omnes conjunctim, quàm secundum singulos exponentes, illud supposuimus, nullam rem secum ipsa jungi, neque adeo plus semel in eadem combinatione accipi posse. Quod si autem hæc insuper conditio adjici velit, ut unaquæque res etiam secum ipsa jungi, adeoque in eadem combinatione sæpius redire queat; tum numerus combinationum multo major evadet. Sed eidem methodo insistendo, facile erit has quoque combinationes invenire.

Sunto itaque combinandæ in hunc modum litteræ *a*, *b*, *c*, &c. Fiant tot series, quot litteræ; & singularum capita occupent singulæ litteræ, ceu totidem uniones. Sed pro binionibus cujusque seriei inveniendis, littera, quæ ejus agmen ducit, non tantum cum præcedentibus unionibus, sed etiam cum se ipsa combinetur. Et similiter pro formandis ternionibus, non modo præcedentium serierum, sed etiam suæmet seriei biniones assumat. Idemque fiat etiam in combinationibus secundum omnes alios exponentes. Sic enim nullam combinationem, quæ circa datas res institui queunt, præteriri posse liquido constat.

a. aa. aaa.
b. ab. bb. aab.abb. bbb
c. ac. bc. cc. aac. abc. bbc. acc. bcc.ccc.

Hinc autem clare liquet, in unaquaque serie numerum combinationum secundum datum quemvis exponentem æqualem esse numero combinationum secundum exponentem unitate una minorem, quæ tum in ipsa, cum in præcedentibus seriebus inveniuntur: proindeque eadem tabula superius constructa designabit combinationes secundum singulos exponentes, quæ occurrunt in unaquaque serie; si ex columnis verticalibus deletis cifris initialibus, attollantur eæ sursum, donec omnia cujusque loca repleantur, & unaquæque incipiat ab unitate, quemadmodum factum hic vides.

TA-

TABULA

Combinationum secundum singulos exponentes.

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	120
5	1	5	15	35	70	126	210	330
6	1	6	21	56	126	252	462	792
7	1	7	28	84	210	462	924	1716
8	1	8	36	120	330	792	1716	3432
9	1	9	45	165	495	1287	3003	6439
10	1	10	55	220	715	2002	5005	11440

Jam in numeris hujus tabulæ duas licet cernere proprietates. Prima est, quod si alicujus columnæ verticalis termini quotcumque in unum addantur, summa sit terminus, qui ultimo correspondet in sequenti columna verticali. Altera, quod in unaquaque columna verticali si terminus aliquis multiplicetur per numerum terminorum præcedentium, tot unitatibus adauctum, quot columnæ locus ostendit, & productum dividatur per numerum ejusdem columnæ, quotiens sit summa ipsius cum terminis præcedentibus.

His positis proprietatibus, haud difficile modo erit, terminos quotcumque cujuslibet columnæ verticalis in unam summam colligere. Sumantur etenim ab initio termini æque multi in unaquaque columna, & referat eorum multitudinem littera a. Itaque, quia in prima columna quisque terminus est unitas, designabit eadem littera a, sive $\frac{a}{1}$ summam ipsorum, quæ etiam per primam proprietatem erit ultimus terminus ex assumptis in secunda columna. Unde si eadem multiplicetur per $a + 1$, & productum dividadatur per 2, erit per secundam proprietatem quotiens $\frac{a.a+1}{1.2}$ summa terminorum in secunda columna.

Et similiter, quia hæc eadem summa est ultimus terminus ex assumptis in tertia columna, si ea multiplicetur per $a+2$, & productum dividatur per 3, erit quotiens, $\frac{a.a+1.a+2}{1.2.3}$ summa terminorum in tertia columna. Atque eidem methodo insistendo, summa terminorum erit $\frac{a.a+1.a+2.a+3}{1.2.3.4}$ in columna; $\frac{a.a+1.a+2.a+3.a+4}{1.2.3.4.5}$ in quinta columna; atque ita deinceps.

Patet autem, summam istam designari per duplicem progressionem arithmeticam, utramque ascendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine assumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot unitates continet numerus columnæ. Quocirca, quia eadem summa designat combinanationibus omnes, quæ fiunt ex totidem rebus, quot sunt termini assumpti, secundum eum exponentem, quem columnæ numerus designat, & ea lege, ut unaquæque res non solum cum aliis, sed etiam cum se ipsa jungi possit; perspicuum est, ad inveniendas omnes hujusmodi combinationes, quæ fieri possunt ex pluribus rebus secundum datum quemvis exponentem, hanc regulam observandam esse.

Nimirum, fiant duæ progressiones arithmeticæ, ambæ ascendentes per unitatis incrementum, una quidem a numero rerum combinandarum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot unitates habet combinationis exponens. Multiplicentur deinde inter se mutuo, tam termini prioris progressionis, quàm termini alterius; & diviso producto ex primis per productum ex secundis, erit quotiens quæsita multitudo combinationum, quæ secundum datum exponentem institui possunt ea lege, ut quælibet res non solum cum aliis, sed etiam cum se ipsa combinata reperiatur.

CAP.

CAP. V.

De Combinationibus, in quibus ordo situsve rerum etiam attenditur.

Diximus capite secundo, combinationes vocari rerum conjunctiones, in quibus nulla ordinis situsve rerum habita ratione, dumtaxat multitudo consideratur, secundum quam res datæ simul sunt conjungendæ: qua ratione litteræ *a*, *b*, *c* unum constituunt ternarium, quocumque ordine scribantur. Quod si porro hæc alia hypothesis assumi velit, ut in combinationibus etiam varietas, quæ oritur ex ordine, sive situ rerum combinandarum, sit attendenda; tunc multitudo combinationum longe quidem major evadet: unde qua ratione definiri possit, hoc Capite ostendemus.

Et quidem si rerum combinationes subinde fieri debeant, ut unaquæque res numquam sæpius, quàm semel, id singulis combinationibus recusat; perspicuum est, unamquamque combinationem ratione ordinis, sive situs litterarum toties esse reiterandam, quot modis diversis permutari possunt litteræ, quæ existunt in

ipsa

ipsa combinatione: proindeque habebitur multitudo combinationum, quæ fieri possunt ex pluribus rebus secundum datum quemvis exponentem ea lege, ut ordo situsve rerum etiam inducat variationem, si numerus combinationum, quæ ex iisdem rebus secundum eum exponentem, hac lege neglecta, institui possunt, multiplicetur per numerum permutationum diversarum, quas subire possunt tot res diversæ, quot unitates continet datus exponens.

Jam ex ostensis in Capite tertio numerus combinationum, quæ ex pluribus rebus secundum datum quemvis exponentem simpliciter institui possunt, habetur, si factis duabus progressionibus arithmeticis, una a dato rerum numero per unitatis decrementum descendente, altera ascendente ab unitate per unitatis incrementum, & utraque tot terminorum, quot unitates continet datus exponens, dividatur productum ex terminis primæ per productum ex terminis secundæ. Quocirca, quia per ostensa in Capite primo productum ex terminis secundæ designat numerum permutationum diversarum, quas subire possunt tot res diversæ, quot sunt unitates in dato exponente; de-

designabit productum ex terminis primæ numerum combinationum, quæ ex iisdem rebus secundum eumdem exponentem fieri possunt ea lege, ut ex ordine situve rerum variatio etiam oriatur.

Hinc ad inveniendas combinationes omnes, quæ institui possunt ex pluribus rebus secundum datum quemvis exponentem ea lege, ut ordo situsve rerum etiam variationem inducat, talis regula nobis subnascitur: nempe fiat progressio arithmetica descendens a dato rerum numero per unitatis decrementum, & tot terminis constans, quot unitates continet datus exponens; deinde multiplicentur inter se mutuo termini omnes hujus progressionis, & productum ex hac multiplicatione ortum dabit combinationum multitudinem quæsitam. Ex quo illud inferre licet, quod ubi datus exponens numerum rerum adæquat, quia in progressione ad unitatem usque descenditur, tantumdem fit, ac si simplices permutationes datarum rerum quærerentur.

Quod si autem rerum combinationes subinde institui debeant, ut unaquaque res etiam cum se ipsa conjungi possit; tunc numerus combinationum omnium habebitur, si datus rerum numerus eleve-

tur

tur ad eam potestatem, quam designat datus combinationis exponens, hoc est ad quadratum, si exponens datus sit 2, ad cubum, si 3; ad quadrato-quadratum, si 4; atque ita deinceps. Qua ratione trium rerum diversarum biniones omnes modis omnibus permutati sunt 9; terniones 27; quaterniones 81, &c. Pariterque si datus rerum numerus sit 4, erunt 16 omnes biniones, 64 omnes terniones, 256 omnes quaterniones, atque ita in infinitum.

Nec difficile est hujus regulæ rationem intelligere. Dentur enim plures litteræ *a*, *b*, *c*, *d*, &c., quarum numerus sit *m*, combinandæ in hunc modum, ut unaquæque littera possit secum ipsa jungi, & ordo situsve litterarum etiam variationem inducat. Plane si iis præponatur littera *a*, habebuntur biniones omnes, qui incipiunt ab *a*; si littera *b*, biniones omnes, qui incipiunt à *b*; atque ita de aliis. Itaque series binionum, pro diversitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot sunt unitates in dato numero *m*, & unaquæque series totidem quoque biniones continebit, quot in eodem numero sunt unitates: proindeque erit *mm*, hoc est quadratum numeri *m* binionum omnium

nium numerus.

Jam istis binionibus si præponatur littera *a*, habebuntur terniones omnes, qui incipiunt ab *a*; si littera *b*, terniones omnes, qui incipiunt a *b*; atque ita de aliis. Quocirca series ternionum, pro diversitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quot sunt unitates in dato numero *m*; sed unaquæque series tot terniones continebit, quot sunt biniones, hoc est quot unitates continet quadratum dati numeri *m*: proindeque erit m^3, hoc est cubus ejusdem numeri *m* ternionum omnium numerus.

Eadem ratione si istis ternionibus præfigatur littera *a*, habebuntur quaterniones omnes, qui incipiunt ab *a*: si littera *b*, quaterniones omnes, qui incipiunt a *b*; atque ita deinceps. Quocirca series quaternionum, pro diversitate litterarum, a quibus incipiunt, tot erunt, quo sunt unitates in dato litterarum numero *m*; sed unaquæque series tot quaterniones continebit, quot sunt terniones, hoc est quot unitates continet cubus dati numeri *m*: proindeque erit m^4, hoc est, quadrato-quadratum ejusdem numeri *m* numerus omnium quaternionum.

Atque hæc de permutationibus, combibinationibusque in Tironum gratiam dixisse sufficiat. Cæterum nolim hic silentio præterire, numeros columnarum verticalium utriusque tabulæ, superius constructæ, esse ex numero eorum, qui vulgo a Recentioribus dicuntur numeri figurati: unde hac arrepta occasione non abs re erit, in eorumdem Tironum gratiam istorum quoque numerorum brevem aliquam ideam hoc loco exhibere. Et quoniam eorum consideratio profecta est ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipsis Veteribus facta; proinde qui sint numeri multanguli, sive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

CAP. VI.

De Numeris multangulis, sive polygonis.

NUmeri multanguli, sive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium: & pro diversitate hujus intervalli, variæ distiguuntur numerorum multangulorum species: nam dicuntur trianguli, si intervallum sit unitas; dicuntur quadrati, si inter-

val-

vallum sit binarius; pentagoni, si idem intervallum sit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione si numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, sint ipsi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est unitas, habebuntur ex eorum continua collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, sive 3, erit triangulus secundus; 1 + 2 + 3, sive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod si numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, sint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quadratus; 1 + 3, sive 4, erit quadratus secundus; 1 + 3 + 5, sive 9, quadratus tertius; atque ita continuo.

Jam si series numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, sit 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri

Nn pen-

pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1 + 4, sive 5, erit pentagonus secundus; 1 + 4 + 7, sive 12, erit pentagonus tertius; & sic in infinitum.

Eadem autem ratione si series numerorum, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, sit 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus quaternarius, habebuntur ex continua illorum collectione numeri omnes hexagoni. Qua ratione 1 erit primus hexagonus; 1 + 5, sive 6, erit hexagonus secundus; 1 + 5 + 9, sive 15, erit hexagonus tertius, atque ita deinceps.

Et similiter si series numerorum, progredientium æquali intervallo ab unitate, sit 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, &c.; quia intervallum, quo numeri progrediuntur, est numerus quinarius, producentur ex eorum collectione continua numeri omnes heptagoni. Qua ratione 1 erit primus heptagonus; 1 + 6, sive 7, erit heptagonus secundus; 1 + 6 + 11, sive 18 heptagonus tertius; atque ita de aliis.

Hos numeros polygonos, sive multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, consideravit primum Hypsicles, qui genesim ipsorum hac definitio-

ne

ne complexus est: si fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; summa omnium erit triangulus, si intervallum sit unitas; quadratus, si binarius; pentagonus, si ternarius; hexagonus, si quaternarius; atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypsiclis definitione per numerum, binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, designatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem sic generaliter concepit: si fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium summa multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario superans intervallum, habet unitates.

Hujusmodi porro numeri dicti sunt multanguli, sive polygoni, quia ipsorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam disponi possunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi; atque ita de aliis. Unde definiri quoque possunt numeri multanguli, sive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, sive polygonum æquilaterum exhibent.

Ex quo patet, unumquemque numerorum, a ternario per unitatis incrementum progredientium, multangulum esse, totque angulos, sive latera continere, quot unitates continet ipse numerus. Hac ratione 3 est triangulus, sive numerus trium angulorum; 4 quadratus, sive numerus quatuor angulorum; 5 pentagonus, sive numerus quinque angulorum; atque ita de aliis. Et ratio est, quia unitates cujuslibet illorum numerorum subinde per æqua intevalla disponi possunt, ut repræsentent figuram totidem laterum æqualium.

Et quoniam ipsa unitas virtualiter est omnis multangulus, Est enim, & triangulus, & quadratus, & pentagonus, & hexagonus, quum horum omnium multangulorum proprietates unitati ipsi conveniant; proinde quilibet numerus a ternario erit multangulus in sua specie primus ab unitate: nimirum 3 primus triangulus, 4 primus quadratus, 5 primus pentagonus, 6 primus hexagonus, atque ita in infinitum.

Jam quisque numerus multangulus, sive sit primus ab unitate, sive alius quilibet, si unitatibus suis per æqua intervalla

valla dispositis multangulum ipsum exhibeat, eum numerum habebit pro suo latere, qui tot continet unitates, quot sunt termini, ex quorum collectione oritur datus numerus multangulus. Sic quia numerus triangulus 10 oritur ex collectione quatuor terminorum 1, 2, 3, 4, habebit ille pro suo latere numerorum 4. Pariterque quia numerus quadratus 25 producitur ex collectione quinque terminorum 1, 3, 5, 7, 9, erit latus ejus numerus 5.

Atque hinc circa hujusmodi numeros multangulos, sive polygonos duo potissimum problemata institui solent; quorum primum est, dato latere, invenire multangulum datæ speciei; alterum, dato multangulo, ejusque specie, ejusdem latus determinare. Sed ex iis, quæ de istorum numerorum genesi dicta sunt, perspicuum est horum problematum solutionem ab his aliis pendere: dato numero terminorum, qui ab unitate dato intervallo progrediuntur, summam omnium invenire; & vicissim data summa plurium terminorum, ab unitate dato intervallo progredientium, numerum eorum indagare. Unde quia hæc duo Problemata jam solutionem acceperunt a

Tacqueto libro quinto Arithmeticæ Practicæ capite secundo, frustra iis immorabimur.

CAP. VII.

De Numeris figuratis.

Ex numeris multanguiis, sive polygonis profecta est consideratio numerorum, qui dicuntur figurati. Quemadmodum etenim inter Veteres Hypsicles, & post eum Diophantus considerarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eosque multangulos, sive polygonos numeros appellarunt; quia unitates ipsorum, per æqua intervalla dispositæ, multangulum, sive polygonum æquilaterum repræsentant. Sic Recentiores ulterius progressi considerarunt numeros alios, qui generantur ex continua ipsorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione, & tam hos, quàm illos numeros figuratos appellarunt; quia scilicet unitatibus ipsorum per æqua intervalla dispositis diversimode possunt configurari.

Quo-

Quocirca numeri figurati Recentioribus dicuntur non modo ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verum etiam, qui ex continua inde ortorum numerorum additione generantur. Ex quo patet, numeros istos figuratos non modo in varia genera distingui posse pro diversitate intervalli, quo numeri genitores, hoc est ab initio assumpti ab unitate progrediuntur; sed & ipsos cujusque generis numeros in varios ordines dividi posse pro diversa ratione, qua ex iisdem illis numeris genitoribus, sive ab initio assumptis generari intelliguntur.

Hac ratione, si intervallum, quo numeri genitores ab unitate progrediuntur, sit unitas; numeri figurati exinde geniti dici poterunt primi generis. Sed nihilominus in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per unitatis incrementum progrediuntur; ita dici poterunt numeri figurati primi ordinis; qui oriuntur ex additione numerorum genitorum; numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui sunt ordinis primi;

numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum, qui sunt ordinis secundi; atque ita deinceps.

Similiter si intervallum, quo numeri genitores, sive ab initio assumpti ab unitate progrediuntur, sit numerus binarius; numeri figurati, qui ex iis procreantur, vocari poterunt secundi generis. Sed in hoc eodem genere quemadmodum dicuntur numeri genitores ipsi illi numeri, qui ab unitate per binarii incrementum progrediuntur; ita quoque dici poterunt numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex ipsa numerorum genitorum additione; numeri figurati secundi ordinis, qui oriuntur ex additione eorum, qui sunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui ex additione eorum, qui sunt ordinis secundi, generantur; atque ita in infinitum.

Ex quibus jam liquet id, quod superius in calce Capitis quinti dictum fuit, nimirum numeros columnarum verticalium utriusque tabulæ superius constructo esse ex numero eorum, qui vulgo dicuntur a Recentioribus numeri figurati. In utraque namque illarum tabularum nu-

numeri unius columnæ verticalis ab initio collecti dant numeros sequentis columnæ verticalis. Itaque quia in secunda columna verticali habentur omnes numeri naturales, hoc est qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur, perspicuum est; in columnis illis contineri numeros figuratos primi generis, ita quidem, ut quemadmodum in secunda columna existunt numeri genitores, sic in tertia sint numei figurati primi ordinis, in quarta numeri figurati ordinis secundi, in quinta numeri figurati ordinis tertii, atque ita deinceps. Sed in prima cujusque tabulæ columna verticali existit series unitatum, ex quarum continua collectione numeri naturales in secunda columna existentes producuntur.

Jam numeri isti figurati miras habent proprietates, quæ ad Tirones exercendos non parum conducunt. Sed sufficiat in iis, qui primi generis sunt, istam adnotare: nimirum, quod si ii ita disponantur, quemadmodum in prima tabula cernere licet; adeo ut in prima columna verticali sit series unitatum, in secunda series numerorum naturalium, cum in aliis sint ipsi numeri figurati, qui

qui ex continua illorum additione oriuntur; & unaquæque columna tot cifras habeat in principio, quot numerus columnæ continet unitates, una dempta: quod inquam numeri columnarum transversalium exhibeant ordine coefficientes omnium potestatum a radice aliqua binomia, ut $a + b$, genitarum.

Nam coefficientes ipsius radicis $a + b$ sunt numeri 1, 1, qui reperiuntur in secunda columna transversali; coefficientes quadrati $a2 + 2ab + b2$ sunt numeri 1, 2, 1, qui reperiuntur in tertia; coefficientes cubi $a3 + 3a2b + 3ab2 + b3$ sunt numeri 1, 3, 3, 1, qui occurrunt in quarta; coefficientes quadrato-quadrati $a5 + 4a3b + 6a2b2 + 4ab3 + b4$ sunt numeri 1, 4, 4, 5, 4, 1, qui occurrunt in quinta, atque ita deinceps. Quocirca si prior illa tabula in infinitum continuetur, ope ejus facile quidem erit quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam potestatem attollere.

Tota quippe difficultas, quæ in formatione potestatum occurrit, consistit potissimum in eo, ut inveniantur coefficientes, quibus afficiendi sunt termini potestatum. Nam quantum ad ipsos

ter-

terminos, habentur ii nullo negotio, si constitutis duabus progressionibus geometricis, quarum exponentes sint ipsæ partes radicis binomiæ propositæ, & quarum una a quæsita sui exponentis potestate descendat usque ad unitatem, altera vicissim ab unitate ascendat usque ad potestatem quæsitam sui exponentis; multiplicentur termini unius progressionis per correspondentes terminos alterius.

Ut si velim exempli gratia invenire terminos cubi ex radice binomia $a+b$, constituo duas progressiones geometricas, quarum una habens pro suo exponente partem a descendat a cubo ipsius a usque ad unitatem, altera habens pro suo exponente partem b ascendat vicissim ab unitate usque ad cubum ipsius b: nam quum istarum progressionum una sit $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$: multiplicatis ordine terminis unius progressionis per terminos alterius, fient termini cubi quæsiti $a3$, $a2b$, $ab2$, $b3$.

Similiter si inveniendi sint termini quadrato-cubi ex radice binomia $a+b$, formentur duæ progressiones geometricæ; quarum una habeat pro suo exponente partem a, & a quadrato-cubo ipsius a de-

descendat usque ad unitatem; altera habeat pro suo exponente partem b, & vicissim ab unitate ascendat usque ad quadrato-cubum ipsius b. Quum enim istarum progressionum una sit $a5$, $a4$, $a3$, $a2$, a, 1; altera 1, b, $b2$, $b3$, $b4$, $b5$: multiplicatis terminis unius progressionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæsiti $a5$, $a4b$, $a3b2$, $a2b3$, $ab4$, $b5$.

Quum itaque termini cujuscumque potestatis ex radice aliqua binomia facili negotio habeantur; liquet, totam difficultatem in formatione potestatum in eo sitam esse, ut inveniantur coefficientes, quibus ii termini sunt afficiendi. Unde semper ac isti coefficientes reperiantur ordine in columnis transversalibus prædictæ tabulæ; perspicuum est, ea mediante facillime quamcumque radicem binomiam ad quamlibet datam potestatem posse elevari. Interim si recordemur earum proprietatum, quas circa numeros illius tabulæ Capite tertio recensuimus, poterimus formulam quamdam generalem nobis cudere, qua mediante vel solius substitutionis ope quælibet radix binomia ad quamcumque potestatem

tem

tem elevabitur. Quod quia a nobis præstitum est in nostris Algebræ Elementis, quæ propediem lucem adspicient, ab eo hic consulto nos abstinemus, ne sæpius eamdem rem proferre videamur.

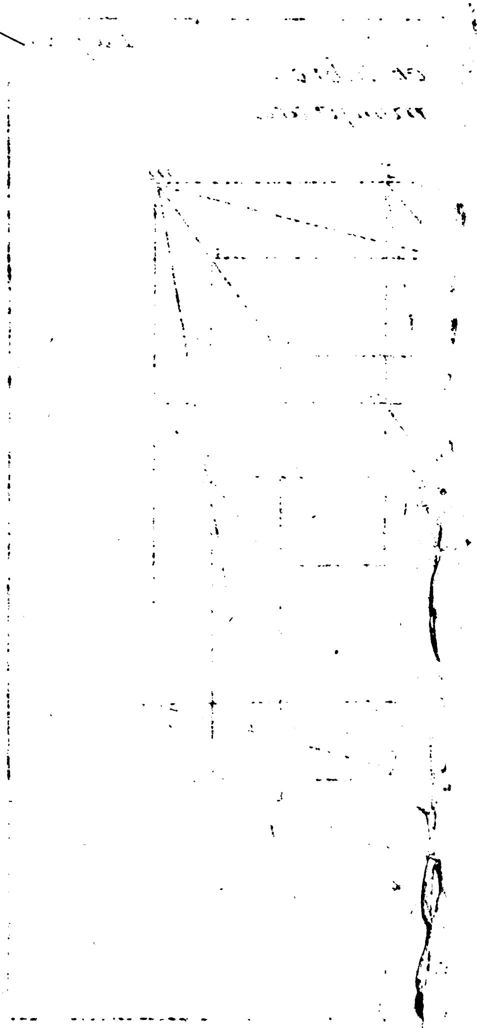
FINIS.

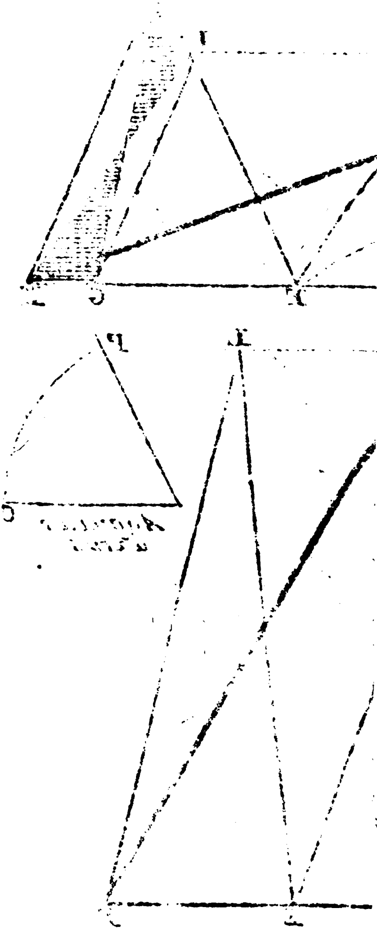
In-

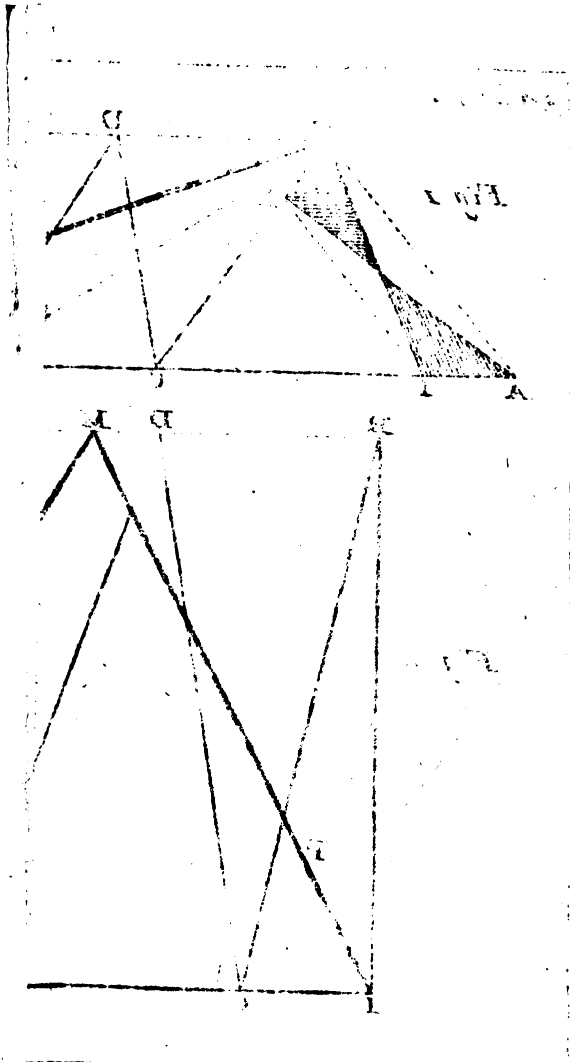
INDEX CAPITUM,

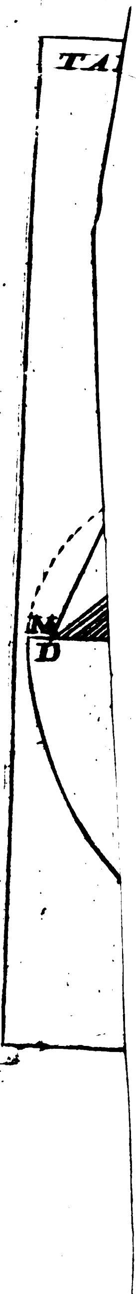
Quæ in hoc Opusculo continentur.

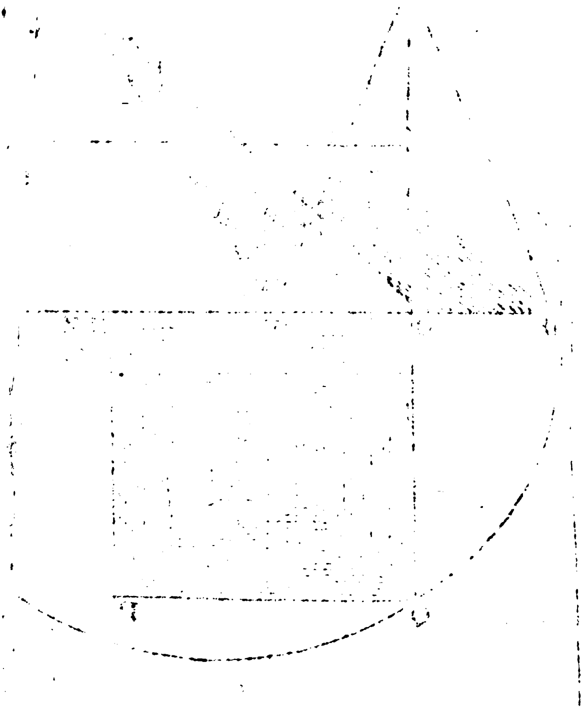
TAB. I

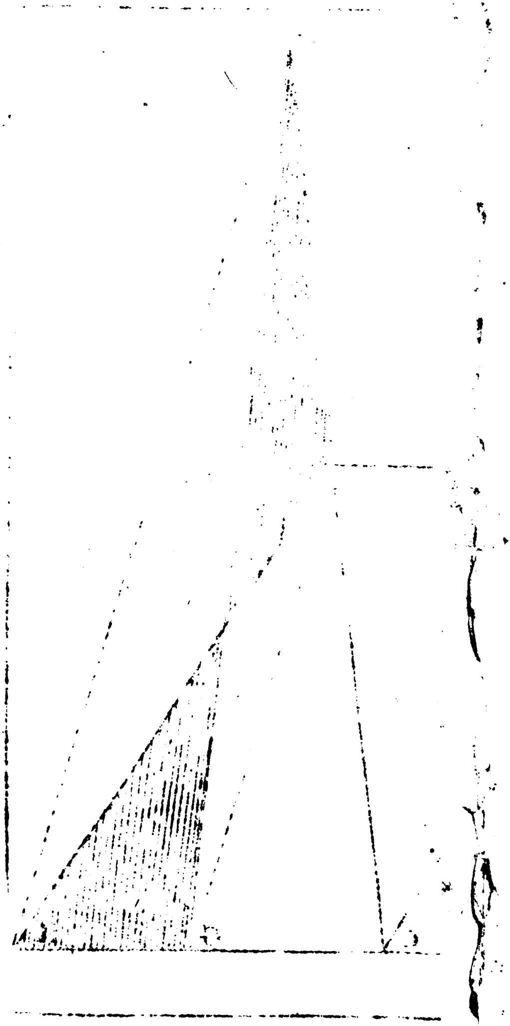


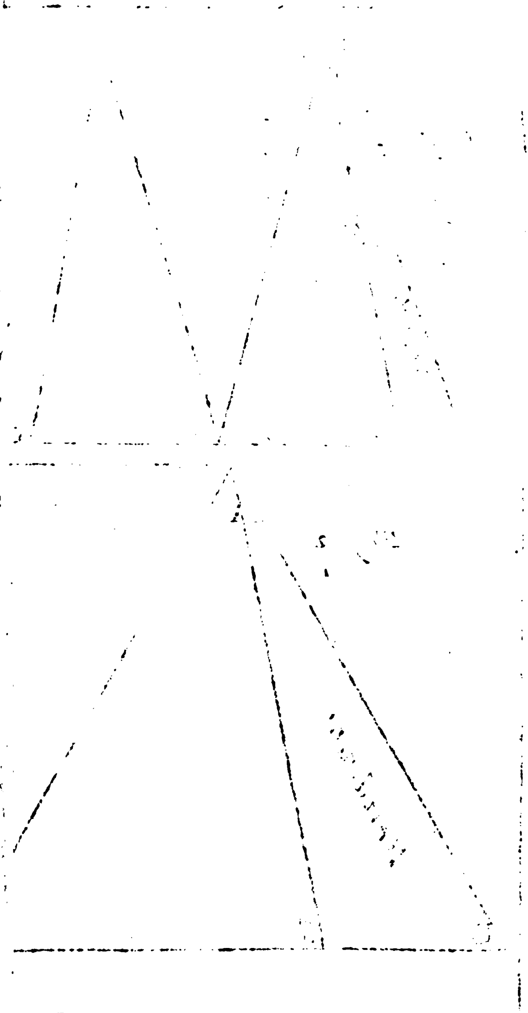





TA
D

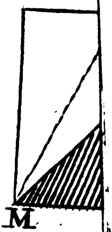




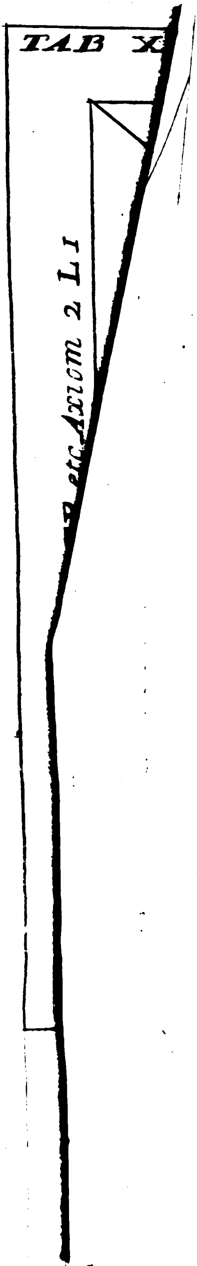


TA

TAB



TA


TAB X
etc Axiom 2 L1

grauius peccat q