EVCLIDES RESTITVTVS,

Siue

PRISCA GEOMETRIÆ ELEMENTA,

Breuiùs, & faciliùs contexta,

In quibus pręcipuè

PROPORTIONVM THEORIÆ noua, firmiorique Methodo promuntur

A IO: ALPHONSO BORELLIO

in Meſſanenſi pridem, nunc verò in Piſana Academia Matheſeos Profeſſore.

Piſis, ex Officina Franciſci Honophri. 1658. *Superiorum permiſſu.*

SERENISSIMO PRINCIPI

LEOPOLDO

AB HETRVRIA

Io: Alphonsus Borellius F.

SEmper odi atque irrisi (Serenis. Princeps) vulgarem illam sententiam, qua pręclara hominum ingenia à nouis rerum mirandarum inuentionibus arcentur; præconceptam videlicet illam opinionem, quòd prisci tantùm magistri nati sint arcanorum naturæ inspectores atque interpretes, sapientiamque vniuersam iure sibi debitam hauserint; neque aliquid pręterea detegendum, siue melius aut facilius explicandum posteris relictum sit: cęteraque hominum multitudo inter discipulos reponi debeat, cui non liceat oculos aut mentem è libris maiorum amouerę. Non tamen is sum, qui præceptoribus debitos honores denegandos esse existimem. vtrumque vitium fugiendum est; ingratitudinis nimirum, & ignorantiæ. Gratiæ ergo & honores priscis reddendi ob doctrinam nobis liberaliter traditam. Simul ratum sit tamen eos non caruisse vitijs, quibus humana imbecillitas subiacet. Hoc autem ipsimet credere nos iubent, dum scibilium infinitatem à finito ac tenui humano ingenio post mille sęcula exhauriri non posse frequenter enunciant; pariterque præceptores inculpabiles habendos non esse, satis apertè docent, tum emendationes ab ijs factæ, tum nonnulla variè innouata, vel exposita contra suorum præceptorum mentem. Quod vt clarius pateat, omissis alijs, ea saltem, quæ ad rem elementarem spectant, vel prolixè ac fideliter exequi ex Procli commentationibus ad Euclidem operę pretium duxi.

Post vetustissimam itaque Geometriæ in Aegypto inuentionem, Thales Milesius primus eam auxit, atque in Græciam transtulit; exinde Ameristus Stesicori Poetę frater, Hippias Eleus, atque Pythagoras, qui præcipuè eam philosophiam, quæ circa Geometriam versatur, in liberalis doctrinæ formam, altius eiusdē principia contemplatus, instru-

xit.

xit. Post eos non pauca, quę ad Geometriam pertinent, aggressus est Anaxagoras Clazomenius; hoc verò aliquanto iunior Oenopides Chius, Hippocrates itidem Chius, atq; Theodorus Cyreneus insignes in Geometria euasere; ac primus eorum, qui afferuntur, Hippocrates elementa Geometrica conscripsit. Successit Plato, qui tum Geometriam, tum cęteras mathematicas disciplinas quam maximè coluit, & auxit. Eodem tempore floruere Leodamus Thasius, Archytas Tarentinus, Theęthetus Athęniensis, Neoclides, atque eius discipulus Leon; horum primi Theoremata auxerunt, ad peritioremq; perduxere constitutionem; postremi verò multa ijs, quę superiores excogitauerant, addidere, ita vt Leon accuratius construxerit elementa, & propter multitudinem, & propter vsum eorum, quæ in ipsis ostenduntur: ac determinationem inuenerit, quando scilicet Problema, quod quæritur, possibile sit nec ne. Eudoxus deinde Cnidius primus Theorematum eorum, quæ vniuersalia appellantur, numerum reddidit locupletiorem, ac tribus proportionibus tres alias adiecit, quęque circa sectionem à Platone sumpserant initium, in copiam, resolutionibus, vt ille, in ipsis vsus, diffudit vberiorem. Amyclas verò Heracleotes, Menęchmus Eudoxi discipulus, eiusque frater Dinostratus perfectiorem adhuc fecere Geometriam. Postmodum Theudius Magnes elementa construxit egregiè, multaque particularia magis vniuersalia fecit. Successere Cyzicinus Atheniensis, atque Hermotimus Colophonius illustres Geometræ, qui Hermotimus ea, quę ab Eudoxo, & Theętheto edita fuerant fusius illustrauit, compluraque inuenit elementa, locosque nonnullos conscripsit. Post Philippum denique Metæum Platonicum Euclides hęc aggressus est diligentius; nam elementa collegit, & multa quidem construxit eorum, quæ ab Eudoxo, multa verò perfecit, quæ à Theætheto reperta fuerant; & quæ priores imbecillius ostenderant, ad eas ipse demonstrationes redegit, quæ neque coargui, neque conuinci possunt. Post ipsum Euclidem vsque ad tempora Procli Diadochi, licet nullus vniuersam elementarem institutionem sit ausus aliter contexere, adhuc tamen extant in ipso Proclo fragmenta Apollonij, Ptolemæi, Pappi Alexandrini, Heronis, & Gemini, in quibus non pauca Euclidianæ institutionis elementaris corriguntur, & prolixitatis, aut obscuritatis incusantur. Vnde coniectari licet quamplurima alia Euclidis loca veterum censuram non effugisse, quamuis non extent innumeri codices, quibus hoc possit manifestè comprobari; proximis quidem temporibus non defuerunt Arabes, qui duo præcipua Euclidis loca corrigere studuerint; alterum in primo libro, vbi parallelarum passiones ostenduntur; alterum in quinto de proportionibus. Idem Io: Baptista Benedictus, nonnullique iuniores fecere.

Sicuti ergo multis ante, & post ipsum Euclidem licuit, licebit quoque

que mihi, seruata antiquitatis reuerentia, iterum elementa Geometriæ à maioribus reperta, longoque tempore exculta, atque aucta in nouam formam, clariorem, aliquibus etiam in locis firmiorem contexta restituere; quod quidem, quo ordine sit factum, post quam occasionem, quę me ad scribendum impulit, enarrauero, paucis exponam.

Decimus septimus est annus, ex quo cùm à Mamertino Senatu ad Italiæ Academias missus Florentiam attigissem, Tua Celsitudo me humanissimè excepit; cùmque tunc temporis de quinto Euclidis elementorum libro restaurando inter viros doctos disceptaretur; ipse quoque eandem rem contemplari sum aggressus, animaduertique restitutiones omnes eiusdem quinti libri ab alijs factas, siue typis excusas, siue stylo exaratas optatam difficultatis metam minimè attigisse, neque debitam Euclidiano operi adhibuisse medicinam. Inueni demum (nisi fallor) legitimam demostrandi viam, illamque Geometriæ partem hactenus obscuram declaraui. Idcirco de proportionibus, & proportionalitate librum composui, & cum plurimis mathematicas probè callentibus amicis communicaui; quorum iudicio atque hortatu sollicitatus, reliquos etiam elementaris institutionis Euclidianæ libros (quos facilius ac breuius tradi posse multoties affirmaueram; si nimirum ordo ab ipso Euclide seruatus perturbaretur) sum denique aggressus. Quorum exemplaria schedis commissa, Pisis tandem in hanc breuissimam formam redegi, in qua ea omnia quæ Euclides propositionibus 473. comprehendit, ea ego propos. 230. exposui, si excipiantur lemmata, & quæ ex Archimede, Pappo, & alijs adieci. Atque eiusmodi forma contexui, vt propositiones prædictæ multo breuiores ac faciliores, sæpe etiam vniuersaliores redderentur; illas autem propositiones tantummodo intactas reliqui, quas faciliores, breuioresque reddere minimè potui. Primus itaque meus liber propositiones 34. tantùm habet. Secundus 24. & ipsæ sunt, quæ in I. & III. Euclidis. Tertius autem de proportione, & proportionalitate agit; qui omnino nouus est, amplectiturq; propositionibus 27. omnia, quę Euclidis V. habet, cum alijs additis propositionibus Pappi, Campani, &c. Quartus verò propos. 26. ea, quæ in VI. Euclides, tradit. Quintus propos. 33. breuissimè exponit propositiones IV. & II. Euclidis, sed methodo vniuersaliori, & reliqua omnia, quæ ad Geometriam planam pertinent. Sextus propos. 37. Elementa Stereometriæ noua & faciliori methodo XI, & XII. Eucl. comprehendit. Septimus propos. 17. descriptiones quinque corporum regularium cum omnibus laterum comparationibus, radiorum, superficierum planarum, atque ipsorum corporum vberrimè præstat, quæ omnia ab Euclide in XIII. & XIV. atque à Pappo aperiuntur, cum plurimis antehac non consideratis. Octauus propos. 48. elementarem Arithmeticam institutionem enodat, quæ in Eucl. libb. VII. VIII. IX. reperiuntur. No-

stitus

nus denique de quantitatibus rationalibus, & irrationalibus vniuersaliori methodo agit, & nedùm lineis, atque earum quadratis, vt Euclides; sed etiam omnibus quantitatibus cuiuslibet generis easdem passiones conuenire demonstrat, idq; ea breuitate, vt propos. 45. contineat propositiones 116. lib. X. Euclidis.

Quia tandem Euclidis elementa iuxta vulgatum Theonis ordinem passim in libris mathematicorum citantur, vt studiosis consulerem, eadem ad operis calcem cum locis, in quibus exponuntur, apposui.

Restabat ipso iam opere perfecto, vt cui potissimum dicandum esset statuerem. At Vir Princeps quærendus erat, qui auctoritate ac dignitate, huius nobilissimę Scientiæ susciperet patrocinium, studiumque ac nomen amplificaret: mihi nempe imitandam proposueram veterum mathematicorum consuetudinem, qui non nisi huius diuinæ facultatis peritioribus sua dicabant opera, eorumque submittebant iudicio: ac denique is debebat esse Princeps, qui non, vt complures diuersis detenti studijs noua omnia contemnunt; nihilque quod ab antiquitatę recedat, vtile atque honestum ducunt; sed qui summopere philosophię studia promouere, nouisque ditare inuentis omni conatu contenderet. Hæc omnia cùm in Te vno (Sereniss. Princeps) summo cum amore erga mathematicas excellenter coniuncta reperissem, hunc qualemcunque meum laborem Tibi dicatum, & commendatum magnopere velim. Tibi, cui iure hereditario omnium scientiarum patrocinium debetur, vt qui ex ea familia ortum habuisti, quæ non modò scientias atq; artes è Græcia in Italiam transferri curauit; sed nunquam non auctoritate protexit, studio auxit, munificētia locupletauit. Tibi, cui rerum mathematicarū ea est peritia, vt facile sit inuenire neminem, qui supremi Principis munia minimè seponens, ita probè calleat, quæ Euclides, ac diuinus Archimedes, alijque mathematici litteris mandauere. Studium porrò tuum Philosophiam promouendi, detegendique falsitates per sedula impensis liberalioribus facta experimenta, nullus est quem fugiat. Quo circa si elementaris institutio ad ritè rectèque philosophandum maximè necessaria censetur, Tibi potissimum dicanda erat, qui Naturalis Philosophię instaurationem moliri vehementer desideras. Si ergo aliquid ex hac mea restitutione Reipublicæ litterariæ vtilitatis eueniet; vti etiam ex physiologico opere, quod nunc meditor circa naturæ phaenomena, quæ in dies accuratissimè experiri curas; quantum quantum erit à Tuæ Celsitudinis benignitate oriri cognoscent meritò posteri, Tibique gratias habebunt, quòd mihi id otium impertitus sis, vt mea opera & perfici & in lucem prodire valerent: mihi verò pergratum fuerit hoc meæ Tibi obtulisse obseruantiæ & gratitudinis monumentum, tempusque in cassum non omnino triuisse. Vale.

EV-

EVCLIDIS RESTITVTI

A IOAN. ALPHONSO BORELLIO.

Liber I.

PROOEMIVM.

GEOMETRIA precipua, inter diſciplinas mathematicas, magnitudines conſiderat; atq; vniuerſa ſpeculatio ſcientifica, quę de tali ſubiecto fieri poteſt, verſatur, aut in cõtemplatione rationis ſtructuræ, qua magnitudines formatę ſunt; aut in cõtemplatione proprietatum eſſentialium, & paſſionũ earundem magnitudinum. Cumq; aliquę magnitudinum ſtructuræ, atque paſſiones, ſint adeò faciles, & euidentes, vt nedum nullam prorſus laborioſam inquiſitionem requirant; ſed nemo ſanæ mentis eis aſſenſum negabit: aliæ verò ſint adeò reconditæ, & difficiles, vt nullo pacto concedi poſſint: ſitque innata nobis via à notioribus ad ignota procedendi (cùm omnis doctrina intellectiua ex præexiſtenti, ſeu anticipatá cognitione fiat): debent euidentes conſtructiones, & paſſiones magnitudinum, aſſumi vt principia, ex quibus ſcientificè diſcurrendo aliæ abſtruſæ, & difficiles conſtructiones, & paſſiones venentur.

Attamen, ſiue faciles, ſiue difficiles ſint huiuſmodi contemplationes, ſemper nuncupari conſueuerunt propoſitiones; eo quod in qualibet earum aliquid contemplandum proponitur intellectui.

Patet ergo principia Geometriæ esse propositiones, exponentes facilem rationem structuræ, qua magnitudines formantur; aut facilem, & euidentem proprietatem, vel passionem earundem magnitudinum.

Et quoniam sæpenumero magnitudines, habentes euidentissimam constructionem, aut passionem, non habent proprium nomen; aut habent nomina æquiuoca, res diuersas significantia: propterea, vt quælibet magnitudo distinguatur à qualibet alia, nomen ipsi imponi debet, aut exponi germana nominis significatio. Quapropter principiorum Geometriæ tria genera erunt.

Primum, in quo declaratur, seu imponitur nomen alicuius magnitudinis, habentis euidentem constructionem, aut manifestam passionem: Et vocatur Definitio.

Secundum, in quo magnitudinis, cuius nomen impositum, & vsu receptum est, exponitur aliqua euidens eius constructio: Et vocatur Petitio.

Tertium, in quo magnitudinis, iam nominatæ, exponitur euidens eius proprietas, aut aliqua manifesta eius passio; & vocatur Dignitas, vel Axioma, aut Pronunciatum, siue communis notitia.

Et quoniam huiusmodi principia demonstrari nequeunt, cùm sint notissima; propterea tantummodo eorum catalogus in vestibulo huius scientiæ apponetur, vt postea, demonstratiuè syllogizzando, ex eis deducantur veritates aliarum propositionum reconditarum; quæ pariter subdiuiduntur. Propositio itaque difficilis, in qua contemplatur ratio structuræ, qua magnitudo aliqua formatur, vocabitur Problema: Illa verò propositio abstrusa, in qua contemplatur proprietas, vel passio aliqua magnitudinis, vocatur Theorema.

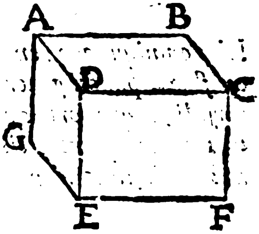
DE-

DEFINITIONES.

I.

CORPORIS extremitates, nullam profunditatem habentes: vocentur Superficies.

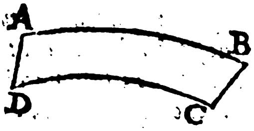
Quoniam magnitudo species est quantitatis continuæ, cuius proprium est diuidi semper posse, augeri, multiplicarique; estque corpus magnitudo quædam, quæ terminos, atque extremitates habet: iam termini extremi, latitudine sua corpus comprehendentes, à quibus per intellectum omnino profunditas excluditur (qui termini aliquid sunt, non autem nihil, cùm existant in natura, & mensurari possint, diuidi, & augeri): vocantur Superficies. Vt corporis A B C D E F G extrema pleura, siue apparentia A B C D, à qua terminatur corpus, exclusa omni profunditate, ita vt indiuisibilis remaneat, quoad profunditatem, licet, quoad longitudinem, & latitudinem, diuidi semper possit: vocatur superficies, sicuti etiam superficies erit A G E D, &c.



II.

SVPERFICIEI extremitates, nullam latitudinem habentes: vocentur Lineæ.

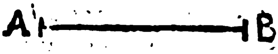
Similiter superficiei, latitudinem habentis, termini extremi, comprehendentes longitudine sua dictam superficiem; si ab eis per intellectum omnis latitudo tollatur: vocantur lineæ; qui sanè termini determinatum situm in mundi spatio occupant. in reuolutione enim cuiuslibet corporis in seipsum, aut circa suum extremum, manifestè aliquid in eo assignari potest quiescens, distinctum, & separatum à reliquis partibus translatis; quod verò quiescit, corpus non est, cùm vniuersum corpus transferri supponatur. Igitur erit linea, seu simplex longitudo. Vt superficiei A B C D extremus terminus A B, vel B C, aut C D, siue D A, à quo terminatur superficies, exclusa totaliter latitudine, ita vt indiuisibilis remaneat, quoad latitudinem, & profunditatem, licet quoad longitudinem tantummodo diuidi possit: vocatur linea.



III.

LINEAE extremitates, nullam longitudinem habentes, vocentur Puncta.

Pari modo lineæ, longitudinem tantummodo habentis, termini extremi, determinantes mensuram longitudinis ipsius; si ab eis per intellectum omnis longitudo tollatur: prædicti termini, qui non sunt nihil, cùm sint signa, positionem in mundi spatio habentia: Vocantur puncta. Vt lineæ A B extremi termini A, & B, à quibus mensura longitudinis ipsius lineæ A B determinatur, ablata totaliter longitudine, ita vt indiuisibiles omniquaque remaneant: Vocantur puncta. Patet ergo quod linea ex fluxu puncti generari potest; superficies verò ex fluxu lineæ transuersali; atque corpus ex fluxu superficiei transuersali gigni potest. Quæ tres species quantitatis continuæ possunt concipi infinitæ; si nimirum fluxus per infinitum spatium continuari intelligatur.



IV.

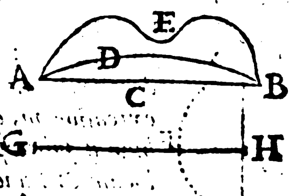
LINEAM autem omnium breuissimam earum, quę à puncto ad punctum extendi possunt, Rectam voco.

Hæc est definitio rectæ lineæ Archimedea; Euclides autem ait: Recta linea est, quæ ex ęquo sua interiacet puncta. *Valde laborant Interpretes in expositione huius definitionis. Proclus putat tunc lineam ex ęquo inter sua puncta interiacere; quando spatium, seu interuallum inter duo puncta eius extrema, æquale est ipsimet lineæ. hæc quidem expositio valde abstrusa videtur, eo quod ignoratur quęnam sit vera distantia inter duo puncta; imo ignoratur quidnam ipsa distantia sit. non enim proprietas, à qua distantia designatur, exposita fuit ab Euclide. Clauius postea aliter definitionem exponit. Inquit enim rectam lineam esse eam, quæ ęqualiter inter sua puncta extenditur; hoc est in qua nullum punctum intermedium ab extremis sursum, aut deorsum, vel ad latera deflectendo subsultat; in qua denique nihil flexuosum est, veluti in filo tenuissimo, summa vi extenso, omnes partes mediæ cum extremis æqualem obtinent situm, neque vlla est alia sublimior, aut humilior; sed omnes æquabiliter prograediuntur, inter extremos suos fines dispositæ. Hęc tamen expositio etiam obscura videtur; eo quod æquabilitas dispositionis par-*

Lib. 1. cap. 11.

in lib. 1. Eucl. Def. 4.

partium in linea, denotat terminum alium relatiuum, respectu cuius partes ipsæ æqualibiter dispositæ sunt; & omnia illa vocabula supponunt lineam rectam, esse iam cognitum. nam illud est flexuosum, quod non est rectum. ergo malè per exclusionem inflexionis declaratur rectitudo; quandoquidem hæ duæ voces æquè ignotæ sunt. Melius ergo Archimedes exposuisse mihi videtur naturam rectæ lineæ per proprietatem notiorem, cùm dicit rectam lineam esse breuissimam ex vno in aliud punctum extensionem. Si enim intellectu collocentur duo puncta A, & B in spatio mundano, concipi potest vnum ipsorum fluere versus aliud diuersis itineribus, in quibus omnibus describentur variæ, & infinitæ lineæ, seu longitudines A D B, A E B, & A C B; quæ quidem valde inæquales inter se esse possunt; & in hac multitudine infinita inæqualium linearum necesse est, vt detur breuissima omnium; quæ quidem vnica erit: aliàs non esset breuissima. hæc inquam breuissima extensio, seu fluxus breuissimus à puncto ad punctum, qui ponatur esse A C B, linea recta meritò vocari potest. Tradita iam clara, & intelligibili definitione lineæ rectæ, benè intelligi potest curuam aliquam, eosdem terminos cum recta habentem A D B, vel A E B flexuosum aliquid habere, & partes intermedias non iacere ex æquo inter extrema, siue non habere eandem æquabilitatē, facta comparatione cum linea recta, iam cognita. Erit ergo recta A B regula, seu trutina, qua examinari reliquæ lineæ possunt; & sic cùm dubitatur an linea G H sit recta, vel curua, fieri debet comparatio cum alia A B, quæ recta linea ex hypothesi erat; & si omnia puncta ipsius G H ex æquo sunt disposita inter sua extrema, veluti sunt ea, quæ in proposita recta A B, collocantur: aut si omnes partes lineę G H omnibus partibus lineę rectæ A B similiter congruunt: vel si omnia puncta ipsius G H distant æqualiter à linea A B: tunc puncta illius non subsultabunt sursum, aut deorsum; neque ipsa aliquid flexuosum habebit. Quare necesse est lineam G H esse quoque rectam. Ex his ergo patet, Euclidis definitionem vsum habere posse, quando comparatur aliqua linea cum recta, prius exposita; sed absolutè non declarare passionem manifestam lineę rectę.

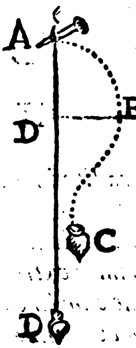


Hinc manifestum est Procli expositionem idem prorsus significare, ac verba Archimedis sonant. Nam inquit: Quando interuallum inter duo puncta ęquale est lineę, quę inter eadem duo puncta extenditur: Tunc quidem linea assumpta recta est. Sed quia interuallum inter duo puncta est distantia breuissima omnium, quæ concipi possunt. Ergo tunc linea erit ęqualis interuallo inter duo puncta, quando erit æqualis distantiæ breuissimę; seu quando linea aßumpta est eadem-

met

net distantiâ inter duo puncta; siue est breuissima omnium linearum, quæ à puncto ad punctum duci possunt; hæc autem erat definitio Archimedis. Ergo Euclidis definitio iuxta Procli expositionem idem prorsus sonat, ac illa, quæ ab Archimede tradita est: sed in hoc tamen deficit, quod Proclus vtitur nomine interualli ignoto, quando nondum definitio interualli tradita est.

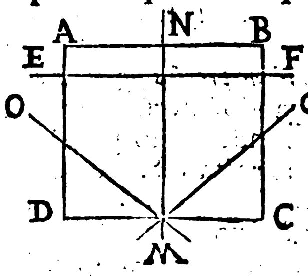
Tandem quænam sint lineæ rectæ, & quam passionem habeant plurimis exemplis ostendit natura ipsa. Nam radij lucidi, & visuales, nec non motus grauium descendentium per rectas lineas fiunt, idest fluunt itinere breuissimo; quod quidem multis experimentis comprobari potest: sed satis erit vnico exemplo veritatem hanc confirmare. Sit pila plumbea B alligata filo tenuissimo A B, atque eius extremum clauo A firmatum sit: Tunc plumbum B liberè premendo, dum accedere contendit ad Telluris centrum, directam fili producit extensionem, quam rectam lineam esse dico. Nam si plumbum B subterposita manu suspendatur, & transferatur in locum C: Tunc quidem longitudo fili inflectetur, constituetque lineam A E C: eritque interuallum, seu distantia ab A puncto ad C minor, quam longitudo ipsius fili A E C, seu A D B; ideoque A D B recta, & A E C curua erit. Hoc exemplum, licet sensibile sit, & improprium, inseruiet saltem ad tollendam difficultatem imaginationis, tum rectitudinis, tum curuitatis.



V.

SVPERFICIES, cui omni ex parte recta linea congruit: plana vocetur.

Hæc definitio Heronis clarior mihi videtur, quam Euclidiana, quæ ijsdem difficultatibus, quibus definitio lineæ rectæ, inuoluitur. Inquit enim: Superficies plana est, quæ ex æquo suas interiacet lineas. *Melius ergo cum Herone dicemus: Si in superficie A B C D, recta linea M G congruit, idest tota tangit ipsam superficiem; & nedum in situ M G, sed similiter si transferatur in situm M N, & in situm M O, & sic in reliquos omnes; & in quacunque applicatione congruit, idest præcisè tota eius lōgitudo tangit superficiem A B C D: vocetur dicta superficies plana.*



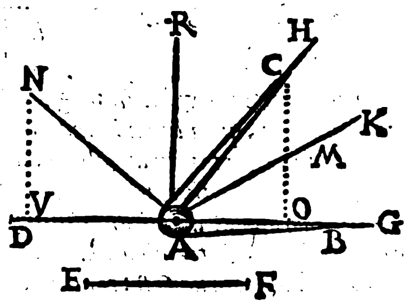
VI.

VI.

QVANTITAS inclinationis duarum rectarum linearum in plano se mutuò tangentium, & non in directum iacentium alterius ad alteram: vocetur angulus planus.

Ambigit Proclus in quo genere quantitatis angulus planus reponi debeat. Nam si est quantitas permanens, & continua, erit linea, aut superficies. linearis quantitas esse non potest. Primò quia in superficie plana non determinat, aut mensurat longitudinem solam, sed spatium. Secundò quia vt linea diuiditur à puncto, sic superficies à linea; sed angulus à linea diuiditur. Ergo superficies est. lib.2.c.11.

Aliqui vero dixerunt angulum planum non esse superficiem, aut lineam, sed meram relationem. Proclus autem vtramque naturam, magnitudinis scilicet, & relationis in se habere existimauit. Quæ omnia vt clarè intelligantur, exponatur in plano linea recta A B, infinitè extensa versus G. Iam alia linea recta quatuor modis collocari potest circa rectam A B. Primò si illam nullo modo contingat, vt E F, & tunc hæ duæ rectæ angulum constituere non dicuntur. Secundò si illam contingat, sed sit posita in directum, vt D A, tangens rectam A B in

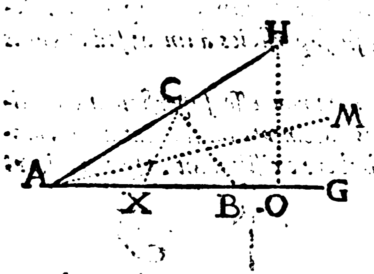


puncto A; & tunc pariter angulum non constituunt; sed solummodo vnicam lineam rectam D A B. Tertiò si tota linea totam lineam contingat, vt A G, & A B non constituunt angulum; cùm vnicam rectam lineam componant. Quartò si recta linea A C contingat quidem rectam A B in puncto A tantummodo, sed non sit in directum posita, vt erat D A; tunc quidem duæ rectæ B A, & C A angulum dicuntur constituere. Vbi notandum, quod recta A C distat quidem ab alia recta A B, sed non eo modo, vt E F, prioris casus, ab alia distabat; cum hæ sint prorsus separatæ, illæ verò se se contingant in puncto A. Hæc inquam distantia, seu separatio non absoluta linearum A C, & A B, se tangentium in puncto A, dicitur angulus.

Sed rursus notandum est, vt Proclus, Carpum Antioch. redarguens, ait: dici non posse angulum esse illarum linearum distantiam; quia si concipiatur lib.2.c.12.

tur

tur regula A C, cum linea A C H, collocata super immobilem lineam rectam A B G; & postea aperiatur regula transportando brachium A C, primò in situm A M K: Secundò in situm A H: Tertiò in situm A R: Quartò in situm A N efficientur quidem semper anguli maiores, & maiores in infinitum: & tamen distantiæ linearum ne dum nõ augentur mensura, qua anguli crescunt; sed è contra possunt distantiæ decrescere, cùm anguli augentur. Vt distantia N V rectæ A N à recta A B minor esse potest, quàm distantia C O inter rectas A C, & A B: Et tamen angulus N A B maior est, quàm angulus C A B. Rationabilius ergo dicemus anguli mensuram sumi debere ex apertione, seu dilatatione totius lineæ A C ab ipsa A B. Nam in primo instanti, in quo punctum C separatur à puncto B, tota linea A C necessariò separatur à tota linea A B, excepto communi puncto A. Quo ergo maior fuerit hæc dilatatio, seu apertio, mensura anguli augebitur. Et quia magis appositè, & significanter hæc dilatatio exprimitur per vocabulum inclinationis, propterea iure angulus inclinatio dicetur.



Modò cùm quæritur ab antiquis an angulus sit magnitudo? Dico non esse superficiem: primò quia spatium, quod lineæ infinitæ A B G, & A C H amplectuntur, erit infinitum; cùm tamen anguli quantitas, seu mensura inclinationis finita sit: Secundò spatium infinitum non potest diuidi, nec augeri; & tamen inclinatio anguli diuiditur, & augetur. Tertiò licet spatium angulare esset finitum, & terminatum ab aliqua recta linea H O, ad libitum ducta, vel ab alia ~~curua C B: tunc~~ quidem, secto spatio bifariam à recta C X, angulus bifariam sectus esset; quod est falsum. Nam solummodo à linea A M, per punctum A ducta, angulus diuidi potest; quando nimirum apertio, siue inclinatio linearum C A, & B A diuiditur in duas inclinationes æquales C A M, & M A B. Patet ergo angulum superficiem non esse; neque in genere magnitudinis contineri.

Restat modò, vt exponamus in quo genere quantitatis angulus reponi debeat. Dico angulum esse genus quantitatis continuæ diuersum à linea, superficie, & corpore; sicuti proportio duarum magnitudinum est quantitas diuersa à linea, superficie, corpore, & ab angulo; licet in quolibet genere quantitatis proportio reperiatur; & sicuti proportio duorum numerorum diuiditur à numero; & proportio duarum linearum diuiditur à linea, à qua efficiuntur duæ proportiones, nec propterea proportio illarum linearum erit superficies: ita angulus planus diuidi poterit à linea, nec proptèrea erit superficies, sed erit inclinatio diuisa in duas inclinationes.

VII.

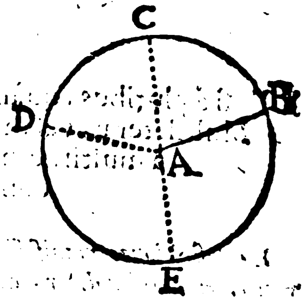
SVPERFICIES plana sub vno, vel aliquibus terminis comprehensa, Figura vocetur.

Potest ab vnico termino superficies plana claudi: quando nimirum ab aliqua linea curua, in se ipsam reflexa, terminatur, vt patet in figura A: Si verò à pluribus lineis spatium circumscribatur, vt patet in B: dicetur hęc figura à pluribus terminis comprehensa.

VIII.

FIGVRA, quę describitur ex reuolutione rectæ lineæ finitę in plano, circa alterum eius punctum extremum quiescens, quousque ad eum locum redeat, à quo moueri cęperat, vocetur Circulus. Et punctum quiescens vocetur Centrum. Linea verò, ab extremo eius termino designata, dicatur Circunferentia. Et quęlibet recta, à centro ad circunferentiam extensa, Radius circuli nuncupetur, vel semidiameter.

Vt si recta linea A B, circa punctum A quiescens, reuoluatur in plano per E, D, & C, quousque redeat ad locum A B, à quo moueri cęperat: Vocabitur figura plana, ex fluxu illius lineę descripta, Circulus; & punctum A, Centrum; & linea B E D C, Circunferentia; & rectę lineę A C, & A B Radij circuli vocentur.



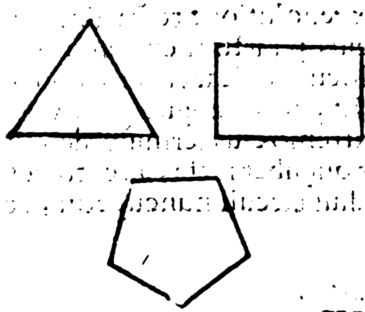
Vulgata circuli definitio hęc est: Circulus est figura plana ab vna linea comprehensa, quę peripheria appellatur, in qua ab vno puncto eorum, quę intra figuram sunt posita, cadentes lineę rectę sunt ęquales. *Et hęc est vna ex ijs definitionibus, quę passionem ignotam tradunt. Non enim facilè est videre, an in natura reperiri possit talis figura, quę habeat punctum vnicum intra se, à quo omnes rectę, ad eius terminum ductę, sint inter se ęquales. Semper enim dubitari potest, an aliqua ex infinitis illis lineis habeat eãdem men-*

lib.II. *suram cum reliquis. Melius ergo procedemus definiendo circulũ eo modo, quo Euclides in definitione spherę vsus est, in qua nulla difficultas adest; neque dubitari potest an in natura detur figura, quę à centro ad circunferentiam habeat distantias ęquales: cum ex ipsamet descriptione, & constructione, in definitione posita, declaretur. Nam eadem linea reuoluta circa centrum, cùm sit semper eiusdem mensurę, necessariò facit distantias à centro ad circunferentiam inter se ęquales.*

IX.

FIGVRAE planę, quę à rectis lineis continentur, vocentur Rectilineę.

X.



ET, quæ à tribus rectis lineis, Trilateræ, seu Triangula vocentur.

XI.

QVAE sub quatuor, Quadrilaterę, seu quadrangula.

XII.

ET, si á pluribus, quàm quatuor rectis lineis contineantur, Multilateræ, vel multangulæ dicantur, denominatæ à multitudine laterum, ipsam figuram comprehendentium.

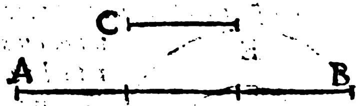
Hę definitiones manifestę sunt. Nam post definitionem circuli, quę vnico termino clauditur, declarantur reliquę figurę planę, quę à pluribus terminis comprehenduntur, quę licet sint diuersę inter se, vt potè quę à pluribus lineis curuis comprehendi possunt, (de quibus in hisce libris non tractatur) definiendę sunt tantummodo figurę planę, quę à rectis lineis continentur. hę quidem tot species constituunt, quot sunt multitudines rectarum linearum, superficiem comprehendentium. Et quia agitur pręcipuè in hisce libris de triangulis, & quadrangulis; propterea hę duę species figurarum pręcipuè declarantur, & definiuntur.

XIII.

XIII.

MAGNITVDO magnitudinis mensura dicitur, cùm illa, multoties sumpta, alteri æqualis fuerit.

Vt linea C dicitur mensura lineæ A B, si ipsa C, sumpta multoties, scilicet quater, quinquies, sexies, &c. æqualis fuerit ipsi A B.



PETITIONES, SEV POSTVLATA.

I.

A PVNCTO ad punctum lineam rectam ducere.

II.

ET lineam rectam producere in continuum, & directum.

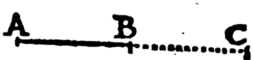
III.

ET quouis centro, & interuallo circulum describere.

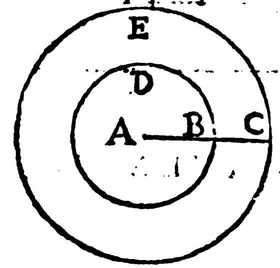
IV.

ITEM quacunque magnitudine data, posse aliam magnitudinem sumi, vel maiorem, vel minorem.

Sunt Petitiones, vt dictum est, propositiones, quæ constructiones intellectuales exponunt ita faciles, vt nullo artificio, neque ratiocinio indigeant; & propterea assumuntur inter prima principia indemonstrabilia. Itaque cùm à puncto ad punctum recta linea ducenda est, debet solummodo concipi punctum A fluere breuissimo itinere vsque ad punctum B; eritque prædictus fluxus æquabilis, non inflexus. & in hac operatione non hæsitat intellectus, neque difficultatem habet; nec etiam obiici potest, quod hæc sit fictio chimerica. nam re vera in spatio mundano



dantur huiusmodi dimensiones; & sic ducere rectam à puncto ad punctum idem est, ac si quis consideret lineam rectam, iam existentem in mundo; seu illam dimensionem, quę inter duo illa puncta reperitur. Pari ratione possumus lineam quamlibet rectam finitam A B producere in directum, quantum libuerit vsque ad C; scilicet intelligendo extremum eius punctum vlterius produci ęquabili fluxu, & breuissimo itinere.



Similiter posita qualibet linea recta finita A B, vel A C, potest extremum eius punctum A fixum considerari; & tota linea A B, vel A C, quę est interuallum, intelligi potest reuoluta in plano, quousque reducatur in locum, vnde moueri cęperat. manifestum est superficiem B D, vel C E, descriptam ex reuolutione, iam dictę lineę, circulum esse. Et quia quęlibet linea, cuiuscumque sit magnitudinis, eodem modo intelligi potest circunducta; hinc est, quod quolibet centro, & interuallo circulus describi potest. Tandem magnitudine quacumque data sumi potest maior, & minor, quia intellectualiter, & non mechanicè fieri debet; propterea etiam facillimum est, & aßumi potest, vt principium.

AXIOMATA, SEV PRONVNCIATA.

I.

QVAE eidem ęqualia, inter se sunt ęqualia. Et quod vno ęqualium maius est, aut minus, maius quoque, aut minus est altero ęqualium; & contra.

II.

ET si ęqualibus ęqualia adiecta sint, tota quoq; sunt ęqualia.

III.

ET si ab ęqualibus ęqualia ablata sint, quæ relinquuntur sunt ęqualia.

IV.

AEQVALIA addita, vel ablata ab inęqualibus, inęqualia faciunt.

V.

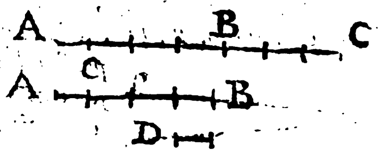
DVPLA, tripla, &c. vel dimidia eiusdem, vel ęqualium, sunt pariter ęqualia.

VI.

VI.

SI eadem magnitudo metiatur duas magnitudines, & earum compositum, atque differentiam mensurabit.

Vt, si magnitudo D mensurat duas A B, & B C, necesse est, vt aggregatum, atque differentiam A C mensuret. Nam a vtraque A B, & B C, distribuitur in partes, quarum singulę ęquales sunt ipsi D. a Def.13.



VII.

TOTVM sua parte maius est.

VIII.

TOTVM ęquale est omnibus suis partibus, simul sumptis.

IX.

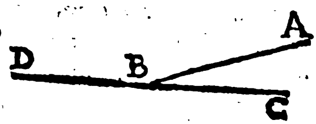
QVAE sibi mutuò congruunt, sunt ęqualia.

Debet intellectualiter fieri hęc applicatio; ita vt tota magnitudo pręcisè totam magnitudinem contingat, absque eo, quod aliquid intactum relinquatur; scilicet quando intermedię partes cum intermedijs conueniunt; & extremę pręcisè cum extremis; & tunc eorum congruentia intellectui constare dicetur. Conuersum verò, scilicet quod ea, quę ęqualia sunt sibi inuicem congruant, non in omnibus verum est, sed in ijs, quę specie similia sunt, vt lineę rectę inter se, & circunferentię ęqualium circulorum, vt Proclus animaduertit. lib.3.

X.

DVAE rectę concurrentes, & se mutuò secantes, non habent aliquam partem communem.

Vt si fuerint duę rectę lineę A B, & C B, concurrentes in puncto B, & ibidem sese secantes, est impossibile, vt ambę lineę rectę, productę vlterius, constituant vnicam rectam lineam B D; ita vt A B D sit vnica recta linea; & pariter C B D sit vna recta, hoc enim repugnat.

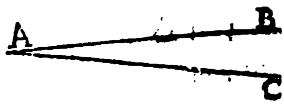


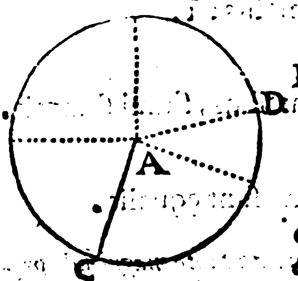
XI.

XI.

DVAE rectæ lineæ, possunt quidem constituere angulum, sed non claudere spatium, seu figuram efficere.

Vt duę rectę AB, & AC, concurrentes in puncto A, possunt quidem constituere angulum BAC; sed nunquam possunt claudere spatium superficiale; eo quod tota linea AB distat, & separatur à tota linea AC, excepto puncto contactus A (licet in infinitum producantur), aliàs destrueretur conceptus rectitudinis linearum; deberetque altera ipsarum incurvari, aut inflecti, quod est contra hypothesin.





XII.

LINEAE omnes, à centro ad circunferentiam circuli ductæ, sunt ęquales inter se.

b *Def.8.*

Manifestum est hoc, quia b *radij omnes AC, AD, &c. mensurantur ab eadem linea recta AC.*

XIII.

SI eadem recta linea intra duas figuras tota collocata fuerit, habebunt illę figurę partem aliquam communem, & se se secabunt.

Sunt axiomata, vt dictum est, propositiones speculatiuę, seu theoremata, quę ob sui maximam euidentiam non indigent demonstratione; sed statim, cognitis terminis, necesse est, vt intellectus illis assentiatur; & propterea assumuntur inter principia indemonstrabilia. Pronunciatorum alia quidem communia sunt omnibus scientijs mathematicis; alia sunt peculiaria Geometrię. Illa enim, quę sunt septem priora inseruiunt tam in motu, quàm in tempore, in numeris, & in magnitudinibus, & vbicunque de quantitate agitur; posteriora verò vsum tantùm habent in scientijs Geometricis, vbi de magnitudinibus tractatur.

Cùm aliquę definitiones immutatę sint in hac elementorum restitutione; aliquę verò relictę, atque alię in alia loca translatę, vt ostendam non sine ratione id me fecisse, antequam ad expositionem propositionum deueniam, accuratius videndum est, quid nam sint mathematicę definitiones;

&

& qua methodo veneantur; & quomodo differant à postulatis, & pronunciatis. Nam hoc ab aliquibus praue, & confusè expositum fuit.

Clauius putat definitiones esse artis vocabula, neque opus esse, vt ratio afferatur, cur res aliqua hoc, aut illo definiatur modo; sed satis esse, vt nunquam res definita asseratur alicui conuenire, nisi prius definitionem traditam eidem conuenire demonstretur. Proe. lib I. Eucl & in def. lib 5.

Commandinus verò cum Proc o censet definitiones mathematicas esse hypotheses. Sed Aristoteles positiones eas vocat; loquiturque de eis satis confusè. Vult enim definitiones esse positiones, & principia immediata indemonstrabilia, de quibus precognoscitur quid sint, & quia existunt in natura; sed necesse non esse docendum eas habere. Rursus dignitatem à suppositione, & petitione differre; quia hec duo non sunt nota per se, sed exteriore indigent ratione; & licere instare contra eas. Diuidit postea definitionem quid nominis à definitione quid rei; & hanc ait aliquando esse principium demonstrationis, aliquando esse eius conclusionem. lib.2. Post lib. I. & 2.

Sed huiusmodi ambiguitates, his premissis, facilè tollentur.

Primò definitiones adhibentur in demonstratione, vt premisse. Quare necesse est, vt sint euidenter cognite, aliàs cognitio scientifica, seu euidentissima ex eis acquiri non posset.

Secundò definitiones, que debent esse scientie principia, sunt anticipationes, seu preexistentes in animo cognitiones, vel effigies, siue idee, à quibus in animo clarè, & distinctè circunscribitur, quare, & quomodo tale quid est vnaqueque res, & diuersificatur à qualibet alia; vt circunscriptio illius figure plane, que à tribus rectis lineis continetur; est precognitio, seu idea, ad quam respicientes, perspicuè eius naturam percipimus, & distinguimus à qualibet alia.

Tertiò circunscribetur in animo id, quod vnaqueque res est per suam propriam efformationem, aut per eius essentialem affectionem, vel proprietatem, omni, soli, & semper conuenientem. Vt omnes trianguli à tribus rectis lineis continentur, & soli trianguli, non autem relique figure; & semper. Non enim aliquando triangulus caret tribus lateribus.

Quartò nomina sunt signa, ad placitum imposita, ad significandam precognitionem, in animo existentem; idest efformationem, aut essentialem passionem alicuius subiecti. Vt nomen circuli est signum, impositum ad indicandam efformationem, factam à recta linea, reuoluta, &c. Vel est signum, indicans passionem essentialem dicte figure, que est equalitas omnium rectarum linearum, à centro ad circunferentiam extensarum.

Quintò ratio structure formalis alicuius subiecti quanti multiplex esse potest. Sicut etiam quelibet res non vnicam, sed plures essentiales proprietates conuertibiles habere potest. Vt structura circuli, ne dum ex reuolutione recte linee in plano circa punctum fixum; sed ex reuolutione

anguli

anguli recti circa diametrum; & ex sectione coni, & cylindri, & alijs pluribus modis effici potest. Pari ratione triangulum, præter passionem dictam, quod à tribus lateribus continetur, habet alias non minus essentiales; quod nimirum tres interni anguli sint æquales duobus rectis: quod externus sit æqualis duobus angulis internis, & oppositis: & innumerabiles alias, à quibus eius natura declaratur, & à qualibet alia distinguitur.

Sextò inter rationes structuræ formalis, vel inter passiones essentiales, quæ alicui subiecto quanto tribuuntur, aliquæ possunt esse omnino impossibiles, & falsæ; aliæ autem possunt esse possibiles, & veræ, sed nobis ignotæ, aut dubiæ; aliæ verò possunt esse veræ, & cognitæ, & inter eas omnium maximè facilis, & manifesta, quæ non ex alijs, sed ex ea reliquæ deduci possunt: Vocetur structura, vel passio prima, & notissima talis subiecti; & hæc solummodo principium scientiæ constituere possunt, reliquæ vero non.

His præmissis, si nomen sit iam impositum alicui subiecto quanto, & illius subiecti sumatur essentialis proprietas prima, & notissima, poterit copulari nomen proprietati eiusdem subiecti. Et hoc erit Axioma. Vt voces Totum, & Pars, iam impositæ, & vsu receptæ sunt; & euidentissima proprietas est omnium totorum, vt excedant suas partes. Ergo euidentissimum est pronunciatum vniuersale: Omne totum maius est sua parte.

At si res aliqua non habet nomen, sed habeat notissimam, & primam proprietatem: potest quodcunque nomen copulari illi proprietati. Et hæc erit definitio; ita vt sit conuertibilis propositio: Res habens talem euidentissimam passionem essentialem omni, soli, & semper conuenientem, est, aut vocetur tali nomine. Et è contra tale nomen significet rem, habentem illam talem proprietatem primam. Vt figura illa plana, quæ habet euidentissimam proprietatem, vt tres rectæ lineæ ipsam comprehendant quocunque nomine, vt trianguli, designari potest: & efficitur definitio. Patet ergo, quòd definitio non differt à pronunciato nisi in nomine, quod illi de nouo imponitur; huic verò iam impositum est.

Vnde colligitur, quod quælibet definitio esse posset Axioma, si nomen iam esset receptum. Et è contra quodlibet axioma esset definitio, si nomen non esset receptum. Vt si nomen trianguli esset iam impositum, & vsu receptum, dici posset: Omne triangulum à tribus rectis lineis continetur. Et istud esset axioma, non definitio. E contra si nomen æqualitatis non esset adhuc impositum, dici posset: Quæ sibi mutuò congruunt vocentur æqualia, & hæc esset definitio, non pronunciatum.

Pari modo definitio non differt à petitione, nisi in nomine, quod illi de nouo imponitur; huic verò iam impositum est. Vt si nomen circuli iam esset receptum, cùm sit nota constructio prædictæ figuræ ex reuolutione rectæ lineæ in plano circa punctum eius fixum, ex coniunctione huius de-

scri-

scriptionis, & nominis resultat Petitio. Et si huic descriptioni nomen circuli de nouo imponatur, consurget Definitio.

Ex his deducitur, quod quotiescunq; perquiri debent definitiones, quæ sint principia demonstrationis, idest quę producant certam, & euidentem cognitionem scientificam, licet laborandum non sit in electione nominis, nam ad libitum quodcunque nomen illi attribui potest: tamen non temerè, sed maxima cautione eligi debet ratio structure, aut essentialis passio prima, & notissima alicuius subiecti. Nam si constructio, & passio nominata sit impossibilis, tunc non efficietur definitio scientifica, vt si quis diceret: Duæ rectæ lineę inter se ęquales, & simul inter se inęquales, vocentur irrationales. Aut diceret: Duę rectę lineę spatium comprehendentes, vocentur figurales, essent definitiones non entium, & impossibiles; & propterea potius ignorantia, quàm scientia ex his deduceretur.

Deinde si constructio, aut passio nominata, sit quidem possibilis, & vera, sed nobis ignota, aut dubia; tunc bona definitio non erit: Nam conclusiones ab ignoto, & dubio principio ortæ, incertę quoque, & dubię erunt; & ideo suspicionem, aut opinionem, non autem scientiam certam afferent. Vt cùm dicitur in vulgata definitione parallelarum: Duę rectę lineę in eodem plano ex vtraque parte non concurrentes, vocentur parallelę. Ignoratur an dari possint duę rectę lineę, habentes hanc conditionem. Similiter ignoratur, an reperiri possit in natura figura quadrilatera, in qua omnes anguli sint recti, & quatuor latera sint inter se ęqualia, quę vocatur quadratum. Pari modo incertum est an reperiri possint figurę planæ ęquiangulæ, habentes circa angulos ęquales latera proportionalia, quę similes vocantur; ambiguum quoque est, an reperiantur duæ lineę, quę nunquam possint habere aliquam communem mensuram; & sic alia quamplurima. Hę omnes passiones licet veræ sint: tamen non sunt per se euidentes, nisi postquam ostensum fuerit ipsas veras esse; & propterea huiusmodi definitiones non debent præponi, sed ex suis locis, postquam demonstratę fuerint, deduci debent.

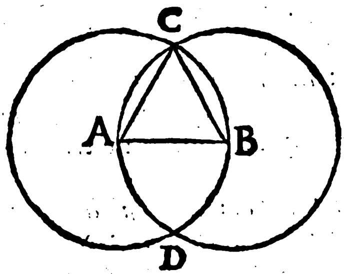
Tandem licet constructio, aut passio definitionis sit manifesta, debet esse omnium euidentissima, vt non ea ex aliis; sed reliquę omnes ab ea deduci possint. Vt si quis diceret: voco triangulum æquilaterum figuram planam triangularem, in qua quilibet angulus tertia pars est duorum rectorum: traderet principium non maximè notum & primum. nam magis notum est, quòd dicta figura trilatera comprehendi possit à tribus rectis lineis ęqualibus, & ex hac illa deduci potest; non autem hęc ab illa.

Ex hac theoria quilibet per se potest facilè resoluere difficultates aliorum; & insuper naturam principiorum demonstrationis, & scientiæ perspectam habere.

Eucl Prop. 1. lib. I.

PROPOS. I. PROBLEMA I.

Super data linea recta terminata Triangulum, habens tria latera inter se equalia, constituere. Vocetur tale triangulum Aequilaterum.



IN omni problemate quinque partes, vt plurimum, reperiuntur, quando perfectum est; sunt autem ille, Propositio, Expositio, Constructio, Demonstratio, & Conclusio. Propositio dicit datum, seu concessum, id est subiectum; & rursus declarat id, quod faciendum est. Secunda pars, quæ est Expositio declarat in vnico exemplo particulari, seu in aliqua figura sensibili id, quod in propositione dictum erat; nec propterea in tali figura sensibili alteratur vniuersalitas propositionis, quia figura particularis apponitur facilitatis gratia, ne intellectus nimium laboret; sed inspiciendo imaginem illam facilius vniuersaliter discurrere possit. Tertia pars, quæ est Constructio, semper est necessaria in problematibus; nam efficit id, quod in propositione imperatur; seu potius contemplatur intellectualem operationem, per quam quęsita constructio formalis scientificè percipi possit. Quarta pars, quę est Demonstratio, colligit ex primis principijs, demonstratiuè argumentando, constructionem imperatam legitimè factam fuisse. Tandem Conclusio est quidam epilogus totius propositionis, monendo factum esse id, quod in propositione imperabatur. Hæc omnia semel tantùm monuisse superfluum non erit in hac prima propositione; quæ licet in reliquis propositionibus non apponantur, semper subintelligi debent.

EXPOSITIO.

Sit igitur data linea recta A B, super ipsam construendum est triangulum, quod habeat tria latera inter se æqualia. Iam hęc linea data A B, licet sit vnius mensurę, nihilominus eam intel-

intellectus debet concipere, vt repræſentatiuam cuiuſcunque menſuræ, ex infinitis, quę proponi poſſint.

CONSTRVCTIO.

Iuxta tertium postulatum, facto centro A, interuallo verò rectę AB, deſcribatur circulus CBD; Rurſus centro B interuallo eiuſdem rectę BA, a alius circulus CAD deſcribatur. Et quoniam eadem recta linea AB intra ambos circulos CBD, & CAD collocatur. Ergo ex XIII. axiomate hi duo circuli ſe ſe mutuò ſecant: propterea que circunferentię dictorum circulorum ſe ſe mutuò ſecabunt in aliquo puncto; cùm ſint ipſę circunferentię lineę indiuiſibiles. Pònatur ergo punctum ſectionis eſſe C; iam à puncto A ad C b recta ducatur; pariterque à puncto B ad C alia recta extendatur. Hic iam perfecta eſt constructio; facta enim eſt figura trilatera ABC, quam eſſe ęquilateram pronuncio. a Poſt. 3. b Poſt. 1.

DEMONSTRATIO.

Quoniam duæ rectę lineæ AB, & AC ducuntur à centro A ad circunferentiam circuli BCD, c Ergo recta AC ęqualis eſt rectę AB. Rurſus quia rectę BC, & AB ducuntur à centro B ad circunferentiam circuli CAD: d erit recta BC ęqualis eidem rectæ BA. Tam ergo AC, quàm CB ęquales ſunt eidem rectę AB. e Quare AC, & CB ęquales ſunt inter ſe. Et tres lineę rectę AB, BC, & CA, claudentes triangulum ABC, ęquales ſunt inter ſe. c Axio. 11. d Axio. 11. e Axio. 1.

CONCLVSIO.

Ergo ſuper data recta linea AB triangulum, à tribus lateribus ęqualibus comprehenſum, conſtruximus. quod faciendum imperabatur in propoſitione. Vocetur talis figura triangulum Aequilaterum.

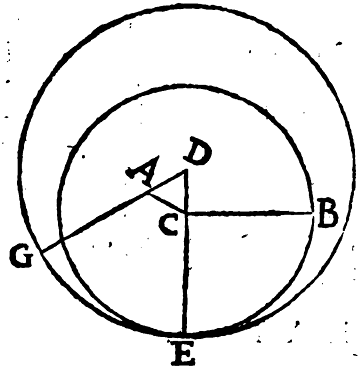
SCHOLIVM.

Animaduertendum etiam eſt proceſſum demonſtratiuum ad euitandam prolixitatem non exponi per ſyllogiſmos in forma; ſed nihilominus in hiſce demonſtrationibus ſemper proceditur per ſyllogiſmos primę figurę, in quibus vt plurimum ommittitur minor propoſitio breuitatis cauſa.

Eucl. prop. 2. I.

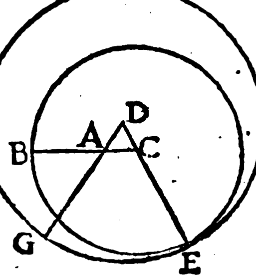
PROPOS. II. PROBL. II.

AD DATVM punctum datæ rectæ lineę ęqualem rectam lineam ducere.



a Pet. 1.
b Prop. 1.
c Pet. 3.
d Pet. 2.
e Pet. 3.
f axi. 12.
g axi. 3.
h ax. 12.
k ax. 1.

Sit datum punctum A, & data recta linea B C. Duci debet à puncto A recta linea, quæ sit ęqualis ipsi rectæ B C. Ducatur à *a* puncto C ad A recta linea, si opus est; & super *b* C A triangulum ęquilaterum A D C describatur; & centro *c* C, interuallo C B circulus B E describatur; & recta D C in directum producatur ad partes C, quousque circunferentiam circuli secet in puncto E. Et rursus *e* centro D, interuallo D E, alius circulus E G describatur, secans rectam lineam D A, productam in G. Dico rectam A G æqualem esse datę rectæ lineæ B C. Quoniam rectæ D E, & D G ducuntur à centro ad peripheriam circuli E G: *f* Ergo sunt ęquales inter se; & ab his auferuntur partes ęquales A D, & C D (cùm sint latera trianguli ęquilateri). *g* Ergo residuum A G ęquale est residuo C E. Sed etiam C B ęqualis est eidem C E; *h* cùm sint ductę à centro ad circunferentiam circuli B E. Ergo duę rectę B C, & A G ęquales sunt vni tertię C E. *k* ideoque ęquales inter se. Quare ducta est à puncto A recta A G æqualis datę B C. Quod erat faciendum.

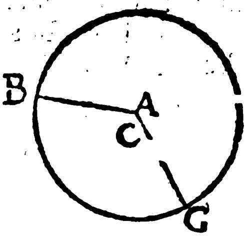


SCHOLIVM.

Punctum A in hoc problemate diuersimodè collocari potest, aut enim reperitur in ipsamet linea B C, aut in eius extremo puncto, aut supra, aut infra, vel ad latera ipsius. Vnde constat problema tres casus habere; sed doctrinę gratia difficiliorem casum exposuimus, cuius constructio comprehendit primum, & tertium casum.

Secun-

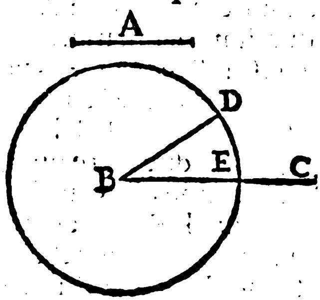
Secundus verò quando scilicet punctum datum A in C puncto extremo datę rectę lineę B C reperitur; tunc centro A, interuallo A B, m descripto circulo B G, & ducta A G: erit A G recta quęsita. m. Pet. 3.



PROPOS. III. PROBL. III. Eucl prop. 3. 1.

DVABVS datis rectis lineis inęqualibus, de maiore ęqualem minori rectam lineam detrahere.

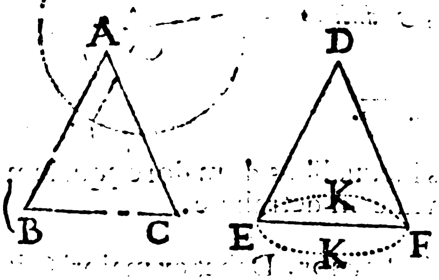
Sit A linea recta minor, C B maior. Debet ex maiori C B abscindi segmentum ęquale ipsi A. Ducatur à puncto B recta linea B D, quę sit ęqualis ipsi A, a Prop. 2. b & centro B, interuallo B D, describatur circulus D E, secans rectam C B in E puncto. b Pet. 3. Dico B E esse segmentum detractum ęquale ipsi A. Quoniam B E ęqualis est ipsi B D, c quia ductę sunt à centro ad peripheriam circuli; c ax. 12. sed ex constructione A ęqualis est eidem B D. Quare A, & B E, cùm sint vni tertię ęquales: d erunt inter se pariter ęquales. d ax. 1. Duabus igitur datis, &c. quod erat faciendum.



PROPOS. IV. THEOR. I. Euclprop. 4. 1.

SI in duobus triangulis, circa verticales angulos ęquales, duo latera vnius ęqualia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, singula singulis: erunt bases ęquales inter se; & triangula erunt ęqualia; & duo anguli reliqui ęquales erunt duobus reliquis angulis, singuli singulis, qui opponuntur ęqualibus lateribus. Vocentur autem huiusmodi triangula similiter ęqualia.

Sint duo triangula A B C, & D E F, quorum anguli verticales A, & D, ęquales sint inter se, & latus A B ęquale sit lateri D E, nec non latus A C ęquale sit lateri D F. Dico basim B C ęqualem esse basi E F; & triangulum A B C ęquale triangulo D E F; & angulum B ęqualem esse angulo E, quibus opponunponuntur ęqualia latera A C, & D F, & angulum C ęqualem esse angulo F, quibus opponuntur reliqua duo latera ęqualia A B, & D E.



Facta intellectuali superpositione trianguli A B C super triangulum D E F, ita vt punctum A super punctum D, & recta A B super D E cadat; necessariò sibi mutuò *a* cõgruunt duæ rectę A B, & D E: pariterque angulus A angulo D congruet, propter æqualitatem; ideoque A C super D F cadet: & propter eorum ęqualitatem sibi mutuò *b* congruent. vnde punctum C super punctum F incidet. His positis dico bases B C, & E F sibi mutuò congruere. Si enim hoc verum non est, cadant partes intermediæ ipsius B C supra, vel infra ipsam E F, vt in situ E K F; & tunc duę rectę lineę E F, & E K F clauderent superficiem; *c* quod est absurdum. Non ergo basis B C supra, vel infra basim E F incidere potest, quando puncta extrema B, & C precisè supra puncta E, & F cadunt. Quapropter necesse est bases B C, & E F sibi mutuò congruere; & *d* ideò inter se ęquales erunt. Similiter triangula ipsa A B C, & D E F sibi mutuò congruent; quandoquidem superficies planę sunt, quarum omnia extrema se tangunt, & partes intermediæ triangulorum se se tangant necesse est, aliàs *e* linea recta non congrueret omni ex parte vtrique superficiei planę, quod est absurdum. Ergo *f* triangula A B C, & D E F ęqualia pariter sunt inter se. Postremò anguli B, & E, cùm sibi mutuò congruant, ęquales erunt inter se, qui opponuntur ęqualibus lateribus A C, & D F: *g* pariterque anguli C, & F sibi mutuò congruent, eruntque inter se ęquales; qui opponuntur lateribus ęqualibus A B, & D E. Quapropter si in duobus triangulis, &c. quæ erant demonstranda. Vocentur autem breuitatis causa duo triangula, iam dictas conditiones habentia, similiter ęqualia.

a *Axiom.* 9.
b *Axiom.* 9.
c *Axiom.* 11.
d *Axiom.* 9.
e *Defin.* 5.
f *Axiom.* 9.
g *Axiom.* 9.

SCHOLIVM.

In hoc primo theoremate tot partes licet reperire, quot in proble-

mati-

matibus; sed constructio non semper necessaria est, vt patet in hac propositione. Rursus considerari debet, quod in hoc theoremate tam subiectum, quàm eius passio demonstranda, non est simplex, sed multiplex, & complexa; eo quod plura supponuntur in dictis triangulis, & plures passiones de eisdem demonstrantur.

PROPOS. V. THEOR. II.

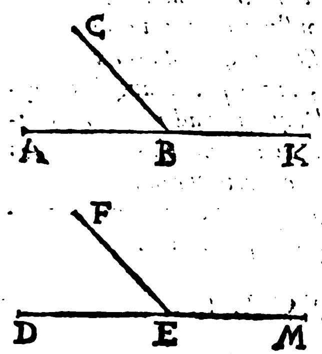
DVO anguli, qui duos æquales angulos, vel eundem angulum consequuntur, sunt inter se æquales.

Sint duo anguli A B C, & D E F inter se æquales; & productis rectis lineis A B, & D E ad partes angulorum B, & E vsque ad K, & M. Dico angulos C B K, & F E M, qui eosdem consequuntur, ęquales inter se esse. Quoniam angulus D E F supponitur ęqualis angulo A B C. Ergo facta intellectuali superpositione rectæ D E super A B, atque puncti E super B, ipsi a anguli D E F, & A B C sibi mutuò congruent; ideoque recta E F cadet super B C; sed recta E M cadit super rectam B K; quandoquidem rectę b D E, & A B, in directum productæ vsque ad M, & K, sibi mutuò congruentes, segmentum commune habere nequeunt. Ergo anguli F E M, & C B K sibi mutuò congruent, & d proptereà ęquales inter se erunt.

a Axiom. 9.

b Axiom. 10.

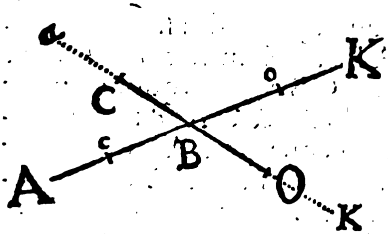
d Axiom. 9.



Secundò vnius anguli A B C producantur rectæ lineę A B, & C B, ad partes anguli B, in K, & O. Dico angulos ambos C B K, & A B O, (qui consequuntur) esse inter se ęquales. Intelligatur idem angulus A B C applicatus supra se ipsum, inuerso modo; ita vt recta A B cadat supra rectam C B, atque recta C B cadat supra rectam A B. Manifestum est rectam e B K cadere precisè supra B O; & recta O B cadet supra rectam K B. Quare f angulus A B O ęqualis erit angulo C B K, quod erat ostēdendum.

e Axiom. 10.

f Axiom. 9.



CO-

COROLLARIVM.

Eucl. prop. 15. I.

HINC colligitur duas rectas lineas se secantes, efficere angulos ad verticem ęquales inter se.

Nam in duabus rectis lineis A K, & C O, se secantibus in B, g ostensi sunt duo anguli ad verticem A B O, & C B K æquales inter se, qui consequebantur angulum A B C. Eadem ratione duo anguli ad verticem A B C, & K B O h ęquales erunt inter se; cùm consequantur eundem angulum A B O.

g Prop. 5.

h Prop. 5.

SCHOLIVM.

Corollarium est aliud theorema, aut problema incidenter, & præter intentionem demonstratum in progressu demonstrationis, aut constructionis alterius propositionis. Vt in hac propositione quærebatur tantummodo an anguli, qui consequuntur vnum, aut æquales angulos, essent inter se æquales. Sed quia semper anguli, qui sunt ad verticem, consequuntur vnum, eundemque angulum, notatu dignum est reperisse nos nouam cognitionem, non quæsitam. Quia non querebatur in propositione an anguli ad verticem essent æquales. Cumque sit vtilis hæc noua cognitio, breui annotatione in fine propositionis est apponenda.

PROPOS. VI. THEOR. III.

Eucl. prop. 5. I.

IN triangulo, duo latera inter se ęqualia habente, anguli, qui ad basim sunt, ęquales erunt inter se; & productis ęqualibus lateribus, anguli infra basim positi ęquales quoque inter se erunt. Vocetur huiusmodi triangulum Isoscelium.

Sit triangulum A B C, cuius latera ęqualia sint B A, & C A. Dico angulos A B C, & A C B, qui supra basim sunt, ęquales esse inter se; & productis rectis A B, & A C infra basim B C, vt in D, & E, esse angulos D B C, & E C B ęquales quoque inter se. Producantur a indefinitè latera B A, & C A ad partes verticis A, vt in G, & F; & tam ex A G, quàm ex A F b secentur rectę A M, & A H, singulę ęquales ipsi A B, vel A C; & coniungatur c recta H M. Et quoniam duo triangula B A C, H A M circa angulos B A C & H A M d ęquales (cùm sint ad verticem) habent latera ęqualia, singula singulis, ex constructione.

a Postul. 2.

b Prop. 3.

c Post. 1.

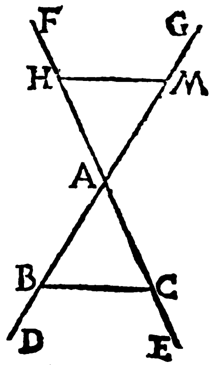
d Coroll. prop. 5.

ctione. Ergo *e* angulo M H A ęqualis est angulus C B A (cùm latera sub eis subtensa M A, & C A æqualia facta sint). Eadem ratione *f* angulus A C B ęqualis erit eidem angulo M H A (cùm pariter subtensa latera B A, & M A ęqualia posita sint). Quare duo anguli A B C, & A C B sunt ęquales vni tertio angulo M H A; ideoque *g* duo anguli, supra basim, A B C, & A C B ęquales inter se erunt. Quod erat primo loco ostendendum.

e Prop. 4.

f Prop. 4.

g Axiom. 1.



Rursus quoniam duo anguli A B C, & A C B ęquales ostensi sunt. *h* Ergo duo reliqui, qui deinceps sunt, anguli D B C, & E C B ęquales inter se erunt. Quapropter duo anguli infra basim trianguli, latera ęqualia habentis, sunt inter se ęquales. Vt erat probandum. Vocetur huiusmodi triangulum Isoscelium.

h Prop. 5.

COROLLARIVM.

Patet triangulum ęquilaterum esse quoque ęquiangulum, idest tres eius angulos esse pariter ęquales inter se. Nam triangulum ęquilaterum est quoque isoscelium, si duo eius latera, ad libitum sumpta, considerentur; & sic quodlibet ex tribus lateribus trianguli ęquilateri erit basis isoscelij. Vnde patet propositum.

SCHOLIVM.

Hæc propositio, vt refert Proclus reperta fuit à Thalete Milesio, eiusque demonstratio ab Euclide relata, satis est eligans, & ingeniosa, sed valde molesta tyronibus; qui ne ab illa intricata propositione adumbrati arceantur à Geometria, vtile fortasse erit aliam faciliorem attulisse.

lib. 3.

PROPOS. VII. THEOR. IV.

SI duo triangula tria latera tribus lateribus ęqualia habuerint, singula singulis, erunt similiter ęqualia.

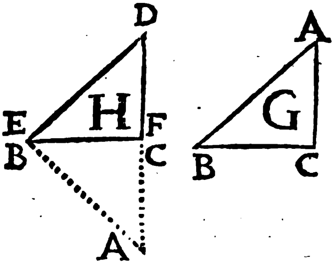
Sint duo triangula G, & H, atque latus A B ęquale sit late-

D ri D E,

ri D E, & A C ipsi D F; pariterque B C equale lateri E F. Dico angulum A ęqualem esse angulo D, & B ipsi E, nec non C ipsi F. Intelligatur triangulum G, cum eius latere B C, collocatum supra latus E F, ita vt punctum B in E cadat; *a* C verò in F propter æqualitatem; & triangulum non ad easdem partes, sed ad oppositas cadat: tunc reliqua latera contermina erunt ęqualia. Coniungatur tādem *b* recta A D: quæ aut per punctum C transit, aut secat communem basim B C, aut extra ipsam cadit.

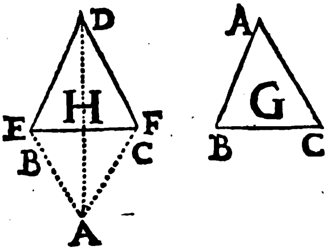
a Axio 9.

b Post. 1.



In primo casu, cùm duo latera A B, & B D in triangulo D A B sint ęqualia ex hypothesi, erit *c* triangulum ipsum isoscelium; ideoque duo anguli A, & D supra basim ęquales erunt inter se, & ex quarta propositione, triangula ipsa G, & H erunt similiter ęqualia.

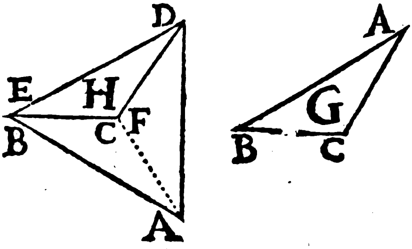
c Prop. 6.



In secundo verò casu erit triāgulum A D B pariter isosceles: vnde *c* duo anguli B A D, & B D A æquales erunt inter se: Pari ratione in triangulo isoscelio C D A duo anguli C A D, & C D A æquales erunt inter se. Ergo si prioribus ęqualibus hi posteriores æquales addantur, efficientur *d* duo anguli B D C, & B A C inter se æquales. Denique in tertio casu, ab angulis ęqualibus B D A; & B A D auferendo æquales angulos C D A, & C A D relinquentur *e* duo anguli B D C, & B A C inter se æquales; deinde *f* reliqui anguli æquales erunt. Quapropter si duo triangula, &c. Quod erat ostendendum.

c Prop. 6.

d Axio. 2.



e Axio. 3.

f Prop. 4.

SCHO-

SCHOLIVM.

Hęc propositio, quam Proclus Philonis familiaribus tribuit, facilior est illa, quæ ab Euclide adducitur. Non enim ad eius demonstrationem necessaria est septima propositio, quæ est negatiua, & valde difficilis. lib. 3.

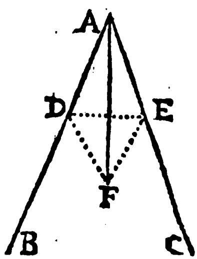
Notandum est hanc propositionem esse conuersam quartę. Est enim conuersio transpositio subiecti in prædicatum, & è contra; ita vt quod supponitur, vt notum in vna propositione, in altera sit quæsitum; & id, quod ibi erat quęsitum, postea efficitur subiectum: attamen conuersę propositiones diuiduntur; in alijs enim totum id, quod in subiecto continetur, efficitur prædicatum conuersę propositionis, & è contra; & hæ vocantur conuersiones secundum totum; aliæ verò propositiones conuertuntur secundum aliquam partem sui subiecti, & prædicati; huius autem posterioris generis est hęc septima propositio. Nam retinet partem subiecti ipsius quartæ, & partem conclusionis; reliqua verò conuertuntur.

PROPOS. VIII. PROBL. IV. Eucl. 9. I.

Datum angulum rectilineum bifariam secare.

Sit angulus rectilineus B A C. Debet hic angulus diuidi in duos angulos ęquales. Sumatur in A B quodlibet punctum D; & ex A C *a*, producta indefinitè, secetur *b* A E ęqualis ipsi A D, & coniungatur *c* recta D E; & super D E, ad partes oppositas, describatur *d* triangulum ęquilaterum D F E. Tandem à puncto A ad F recta *e* coniungatur. Dico A F problema efficere. Quoniam in duobus triangulis D A F, & E A F latus A F est commune, & latera D A, & A E sunt ęqualia, ex constructione, & bases D F, & E F sunt ęquales, cùm sint latera trianguli ęquilateri. Ergo, ex præcedenti propositione, anguli D A F, & E A F sunt inter se ęquales. Quare angulus B A C diuisus est bifariam à recta A F. Quapropter datum angulum bifariam secuimus; quod erat faciendum.

a Post. 2.
b Prop. 3.
c Post. 1.
d Prop. 1.
e Post. 1.



Eucl. 10. I.

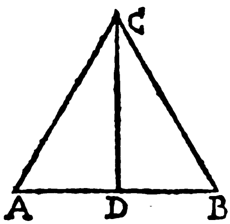
PROPOS. IX. PROBL. V.

Datam rectam lineam bifariam secare.

a Prop. 1. Sit recta linea finita A B diuidenda bifariam. a Describatur super ipsam triangulum æquilaterum A C B, cuius angulus verticalis C b bifariam secetur à recta C D, diuidente basim A B in puncto D. Dico punctum D esse quęsitum. Quoniam in triangulis A C D, & B C D circa angulos verticales A C D, & B C D, ęquales ex constructione, latus C D est commune, & latera A C, & B C sunt æqualia; cùm sint latera æquilateri trianguli. Ergo c basis A D ęqualis est basi B D. Datam igitur rectam A B bifariam secuimus in D. Quod erat faciendum.

b Prop. 8.

c Prop. 4.



Eucl. 11. I.

PROPOS. X. PROBL. VI.

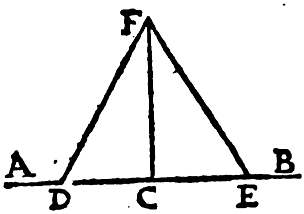
Data recta linea, à puncto in ea dato rectam lineam eleuare efficientem angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se. Vocetur vterque ęqualium angulorum Rectus; & quę insistit recta linea Perpendicularis vocetur eius, cui insistit.

Sit recta A B, & punctum in ea C, à quo debet educi linea, efficiens cum recta A B angulos, qui deinceps sunt, æquales inter se. Sumatur quodlibet pūctum D; atque ex altera parte secetur, a ex C B, producta, linea C E æqualis ipsi C D; & super D E b triangulum ęquilaterum D F E describatur. Denique à puncto C ad F c recta ducatur. Dico F C Problema efficere.

a Prop. 3.

b Prop. 1.

c Post. 1.



Quoniam duo triangula D C F, & E C F habent latus C F commune, & latera D C, & E C æqualia ex constructione; nec non bases F D, & F E ęquales, cùm sint latera trianguli æquilateri. Ergo d anguli F C D, & F C E æquales sunt inter se; vt propositum fuerat. Vocentur ambo anguli A C F, & B C F Recti; & F C Perpendicularis dicatur ad rectam A B.

d Prop. 7.

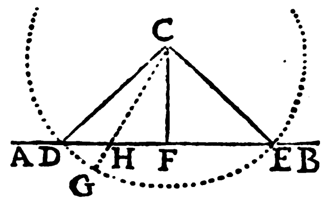
PRO-

PROPOS. XI. PROBL. VII.

Eucl. 12. I.

Super datam rectam lineam infinitam à puncto dato, quod in ea non est, perpendicularem rectam ducere.

Sit A B recta interminata, & punctum extra ipsam C. Ducenda est à puncto C perpendicularis super A B. Sumatur in recta A B quodlibet punctum H, & iungatur [a] recta C H, & producatur [b] vltra rectam A B in G; & centro [c] C, interuallo C G, circulus D G E describatur, cuius circunferentia necessariò secabit rectam A B: Nam punctum G radij C G vltra rectam A B positum fuit. Secet igitur eam in punctis D, & E; postea [d] secetur D E bifariam in F, & ducantur rectæ C F, C D, & C E. Dico C F esse perpendicularem quæsitam.



a Post. 1.
b Post. 2.
c Post. 3.
d Prop. 9.

Quoniam in triangulis D F C, & E F C latus C F est commune, & D F æquale est ipsi F E, ex constructione; pariterque bases C D, & C E ęquales sunt, cùm [e] à centro ad circunferentiam circuli sint ductæ. Ergo [f] anguli D F C, & E F C ęquales sunt inter se, ideoque [g] recti. Vnde C F perpendicularis est ad A B. Duximus ergo à puncto C perpendicularem super A B. Quod erat, &c.

e Axio. 12.
f Prop. 7.
g Prop. 10.

PROPOS. XII. THEOR. V.

Eucl. 13. I.

Cùm recta linea, super rectam consistens lineam, angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis ęquales efficiet. At angulorum inæqualium, qui maior est recto, vocetur Obtusus: Qui verò recto minor est, Acutus.

Recta linea A B insistat rectę C D, faciatque angulos, qui sunt deinceps, A B D, & A B C. Ostendendum est, vel ambos esse rectos, vel simul sumptos, duobus rectis æquales. Si enim A B perpendicularis est ad CD, [a] erunt anguli deinceps duo recti, sin minùs erit alter acutus, alter obtusus. Ergo educatur [b] ex puncto B linea E B perpendicularis ad C D, vt sint duo anguli deinceps E B C, & E B D recti. Quoniam rectus angulus

a Prop. 10.
b Prop. 11.

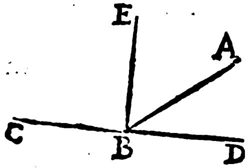
c *Axio.* 8. angulus E B D c æqualis est duobus angulis simul sumptis, D B A, & A B E. Ergo addito communi angulo recto E B C: d erunt duo recti D B E, & E B C, simul sumpti, æquales tribus angulis D B A, A B E, & E B C, simul sumptis. Rursus quia angulus C B A e æqualis est duobus angulis C B E, & E B A, simul sumptis. Ergo addito communi angulo A B D; f erunt duo anguli, C B A obtusus, & A B D acutus, simul sumpti, æquales tribus angulis simul D B A, A B E, & E B C; sed eisdem tribus angulis, ostensi fuerunt æquales duo recti C B E, & E B D; g suntq; inter se æqualia, quæ eidem æqualia sunt. Duo ergo anguli C B A, & A B D, simul sumpti, duobus rectis æquales erunt. Quapropter cùm recta linea, &c. Quod erat, &c.

d *Axio.* 2.

e *Axio.* 8.

f *Axio.* 2.

g *Axio.* 1.



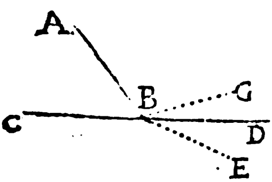
PROPOS. XIII. THEOR. VI.

Eucl. 14. I.

Si ad aliquod punctum rectæ lineæ duæ aliæ rectæ, non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps, angulos duobus rectis æquales fecerint: indirectum erunt inter se duæ posteriores rectæ lineæ.

Ad punctum B rectæ lineæ A B concurrant duæ aliæ C B, & D B ex aduersis partibus, quæ faciant cum prima A B duos angulos A B D, & A B C duobus rectis æquales. Dico ipsas C B, & B D esse in directum constitutas; idest efficere vnicam lineam rectam. Si enim C B D non est vnica linea recta, producatur a C B in directum ad partes B, quæ cadet, aut supra B D, aut infra ipsam. Cadat supra, si fieri potest, vt est C B G; tunc ex præcedenti, erunt duo anguli C B A, & A B G duobus rectis æquales; sed ex hypothesi duo anguli C B A, & A B D simul, sunt æquales duobus rectis. Quare duo anguli C B A, & A B G simul, æquales sunt duobus angulis, simul sumptis, C B A, & A B D; & ablato communi angulo C B A: erit b angulus A B D æqualis angulo A B G, pars, & totum; c quod est absurdum. Non ergo recta C B, producta, cadit supra B D; sed neque intra cadet, vt in E. Nam eadem ratione procedendo

a *Post.* 2.



b *Axio* 3.

c *Axio.* 7.

do, essent anguli A B D, & A B E inter se æquales, pars, & totum; quod rursus est absurdum. Quare C B producta in directum transibit præcisè per B D. ideoque C B D vnica recta linea erit. Quod erat ostendendum.

SCHOLIVM.

Processus huius propositionis diuersus est à præcedentibus. Nam prius ex principijs veris directè discurrendo peruenimus ad conclusionem veram, hic verò assumpta conclusione falsa deuenimus ad principium falsum, & postea rursus ex destructione prædicti principij falsi, retrocedendo, falsitatem assumptę conclusionis redarguimus. Itaque sciendum est ex antiquis præceptoribus artis demonstratiuę, omnes demonstrationes procedere, vel à principijs ad conclusiones, & hę vocantur compositiuę; vel è contra à conclusione ad principia, & hæ vocantur resolutiuę, seu analyticę. Analysis verò duplex est, aut enim ponit principia, aut destruit; quæ principia ponit propriè vocatur resolutio, cui opponitur compositio; quandoquidem fieri potest regreßus ordinatè procedendo ab ijsdem principijs ad conclusiones; quę verò principia destruit proprio vocabulo appellatur deductio ad impossibile, quia eius facultas est destruere aliquod primum principium euidens. & hoc est manifestum; quia in syllogismo demonstratiuo, quando assumitur vna propositio falsa, licet altera sit vera, necessariò conclusio debet esse falsa. Cumque vera conclusio non nisi ex veris propositionibus deduci possit, hinc est quod in prędicto syllogismo in aliquod falsum incidere debemus. Vt in hac propositione, aßumpsimus lineam C B E esse vnicam lineam rectam; atque ex prĕmissa, & ex hypothesi vera deduximus angulum A B D ęqualem fuiße angulo A B E; cumque iste sit pars illius; erit pars ęqualis suo toti; sed hęc conclusio destruit principium, quod [a] totum sit maius sua parte. Ergo si impossibile est, vt totum ęquale sit suę parti; pariter aliquod falsum, & impossibile in premissis assumptum est; sed inter assumpta datum, seu hypothesis propositionis vera est; (de subiecto enim non dubitatur an sit), verum etiam est, quod [b] recta supra rectam incidens faciat duos angulos ęquales duobus rectis. Erit ergo falsa illa pars, in qua dicebatur, quod linea C B E esset vnica linea recta; sed quotiescunque non est linea recta, illa quę transit infra lineam B D, neque supra ipsam: restat, vt in ipsammet lineam B D recta linea cadat. Patet ergo veritas huius proceßus demonstratiui vsitatissimi apud Euclidem, Archimedem, Apollonium, Aristotelem, & alios.

[a] Axio. 7.

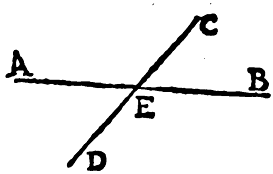
[b] Prop. 12.

CO-

COROLLARIVM I.

Hinc patet duas lineas, se mutuò secantes, efficere quatuor angulos, qui, simul sumpti, æquales sunt quatuor angulis rectis, simul sumptis. Nam ex vna parte rectæ AB versus C c duo anguli AEC, BEC duobus rectis sunt ęquales; pariterque ex altera parte, eiusdem rectæ AB, versus D, duo anguli AED, BED duobus rectis sunt æquales. Ergo quatuor anguli AEC, CEB, BED, & DEA, simul sumpti, æquales sunt quatuor angulis rectis.

c *Prop. 12.*



COROLLARIVM II.

Et si ad idem punctum conueniant quotcunque rectę lineę, efficientes circa ipsum punctum tres, vel quatuor, seu plures, quàm quatuor, angulos: erunt illi omnes, simul sumpti, quatuor rectis ęquales.

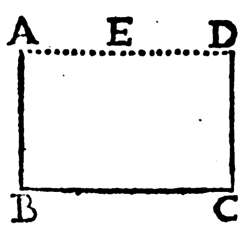
Pro sequentibus propositionibus pręmitti debet sequens pronunciatum, quod inter euidentissima principia reposuerunt Arabes, Clauius, a Guldinus, b & alij.

a *in Prop. 28. lib. 1.*
b *centrobar. lib. 4.*

AXIOMA XIV.

Si recta linea, in suo extremo semper perpendiculariter constituta super aliam rectam lineam, moueatur in transuersum in eodem plano: alterum punctum extremum translatæ rectæ lineę in eius fluxu rectam lineam describet.

Si enim recta linea AB, perpendiculariter erecta super rectam lineam BC, intelligatur translata, in eodem plano, versus C, hac lege, vt punctum B extremum ipsius AB semper contingat rectam lineam BC; pariterque, vt AB dum transfertur semper constituat cum BC angulos rectos. Manifestum est lineam AED, descriptam à pũcto A fluente, esse rectam; eo quod fluxus puncti A per AED non est vacillans, non flexuosus, sed ęquabilis, & vniformis; veluti non flexuosus, sed simplex, ęquabilis, & vniformis est fluxus breuissimus



puncti

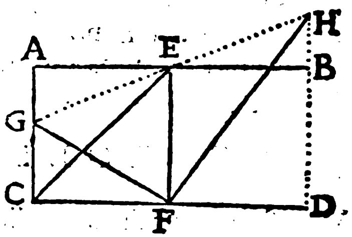
puncti B, constituentis rectam lineam B C. Nam recta linea A B (quę est mensura distantiarum omnium punctorum lineę A E D à recta B C) dum mouetur non vacillat, cùm semper perpendiculariter, idest equaliter inclinata perseueret, super rectam B C. Quare omnia puncta, in linea A E D contenta, eadem ordinata dispositione, & eadem ęquabilitate, absque vlla depressione, aut eleuatione diriguntur; quemadmodum directè sic consequuntur puncta rectę lineę B C in fluxu breuissimo, qui rectitudinem eius constituit. Et re vera cogitari nequit aliam lineam preter rectam habere posse conditiones, supra expositas, & omnia eius puncta ęqualiter distantia à recta linea B C: & propterea linea A E D recta erit.

PROPOS. XIV. THEOR. VII.

Si ad duas rectas lineas in vno plano iacentes eadem recta perpendicularis fuerit, quælibet alia recta perpendicularis ad vnam earum æqualis erit illi, & erit quoque perpendicularis ad reliquam. Vocentur illæ duæ rectæ inter se Parallelæ. & recta linea ad eas perpendicularis, vocetur distantia parallelarum. interposita

Sit recta linea E F perpendicularis ad vtramque rectam A B, & C D, existentes in eodem plano; & ducta à puncto A quælibet *a* recta A C perpendicularis ad C D, secans eam in C. *a Prop. 11.*

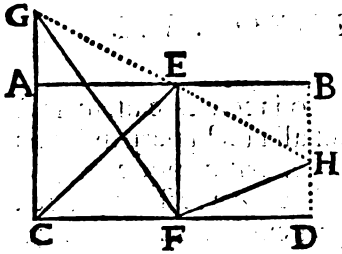
Dico primo A C æqualem esse ipsi E F. Si enim hoc verum non est, secetur *b* recta G C æqualis E F; & secetur *c* F D æqualis C F, & intelligatur G C transferri vsque ad D, semper perpendiculariter constituta in pũcto C super rectam C D; necessariò *d* punctum G in eius fluxu rectam G E H describet, quæ per punctum E transibit; quandoquidem G C, & E F æquales ponuntur. Et tandem iungantur *e* rectæ lineæ G F, & H F. Quoniam duo triangula G C F, & H D F circa angulos rectos C, & D latera æqualia habent G C ipsi H D; & C F ipsi D F. *f* Ergo bases G F, & H F æquales sunt; pariterque anguli G F C, H F D inter se sunt æquales; suntque anguli C F E, D F E recti. Igitur *g* residui anguli *b Prop. 3.* *c Prop. 3.* *d Axio. 14.* *e Post. 1.* *f Prop. 4.* *g Axio. 3.*



guli G F E, & H F E æquales sunt; & circa eos latera G F, H F equalia ostensa sunt, & E F est commune. Ergo h anguli G E F, & H E F equales sunt inter se; ideoque i recti. Erat autem angulus A E F, ex hypothesi rectus. Igitur anguli G E F, & A E F equales inter se sunt; pars, & totum. quod est impossibile. Nulla ergo alia recta præter ipsam A C esse potest æqualis ipsi E F.

h Prop 4.
i Prop 10.

Dico secundò angulum C A E rectum esse. Quoniam recta C F perpendicularis est ad duas rectas A C, & E F; & alia recta A E perpendicularis est ad vnam ipsarum E F. Ergo, vt prius erit recta A E equalis ipsi C F, quæ est perpendicularis ad vtranque. Ducatur postea recta E C. Quia in triangulis A E C, & F C E latus A C ipsi F E est equale; atque A E ipsi F C equale; & basis C E communis. Ergo k recto angulo E F C equalis est angulus C A E. Quare angulus C A E rectus erit. vt propositum fuerat. Vocentur rectę lineæ A B, & C D Parallelę. & E F perpendicularis ad vtranque: vocetur Distantia parallelarum.



k Prop. 9.

COROLLARIVM I.

In quadrilatero, in quo tres anguli recti sunt, erit reliquus angulus rectus; & latera opposita inter se equalia. In quadrilatero enim A C F E, positis tribus angulis C, F, & E rectis: ostensus l fuit reliquus angulus A rectus quoque: & latera opposita equalia ostensa fuerunt.

l in Prop. præceden.

COROLLARIVM II.

Manifestum est duas parallelas A B, & C D non concurrere, licet producantur in infinitum ad vtrasque partes. propterea quod vbique inter ipsas intercipi potest aliqua perpendicularis, vt est A C, vel B D, quæ semper equalis esse debet ipsi E F, scilicet distantię parallelarum.

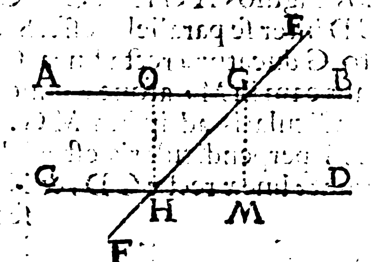
PRO-

PROPOS. XV. THEOR. VIII.

Eucl. 29. I.

Recta linea, secans duas parallelas, efficiet alternos angulos æquales; externum æqualem interno, opposito, & ad easdem partes; atque internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet.

Sint rectæ lineæ A B, & C D inter se parallelæ; secenturque à recta linea E F in punctis G, & H. Dico primò alternos angulos A G F, & D H E æquales esse inter se. Ducatur a à puncto G recta G M perpendicularis ad rectam C D, secans eam in M, atque à puncto H ducatur H O perpendicularis ad A B, secans eam in puncto O. Et quoniam duæ rectæ A B, & C D sunt parallelæ, & G M perpendicularis est ad vnam ipsarum C D: erit b quoque eadem G M perpendicularis ad reliquam A B; estque H O perpendicularis ad A B. Ergo c in quadrilatero G M H O, quod tres angulos rectos habet, erunt opposita latera O G, & H M æqualia; pariterque inter se æqualia erunt latera O H, & G M. Quare in triangulis O H G, M G H duo latera G O, & H O æqualia sunt duobus lateribus H M, & G M, singula singulis; Estque basis G H communis. Ergo d anguli alterni D H G, & A G H æquales sunt inter se; pariterque eorum e complementa ad duos rectos, scilicet anguli B G H, & C H G æquales erunt inter se.



a Prop. 11.
b Prop. 14.
c Corol. 1. Prop. 14.
d Prop. 7.
e Prop 5.

Dico secundò externum angulum E G B æqualem esse interno opposito, & ad easdem partes constituto, angulo G H D. Quoniam f propter parallelas A B, & C D æquales sunt inter se alterni anguli D H G, & A G H; estque g angulus E G B æqualis eidem angulo A G H ad verticem eius: Ergo h angulus E G B æqualis est angulo G H D.

f ex part. 1. huius.
g Corol. prop 5.
h Axio. 1.

Dico tertiò duos angulos A G H, & C H G internos, & ad easdem partes, esse æquales duobus rectis. Quoniam propter parallelas i sunt duo anguli alterni A G H, & D H G æquales inter se, addito k communi angulo C H G: erunt duo anguli A G H, & C H G, simul sumpti, æquales duobus angulis D H

i part. 1. huius.
k Axio. 2.

l prop. 12. G; & C H G; sed l hi, simul sumpti, æquales sunt duobus rectis. Ergo duo anguli A G H, & C H G duobus rectis sunt æquales. Quæ omnia demonstrari debebant.

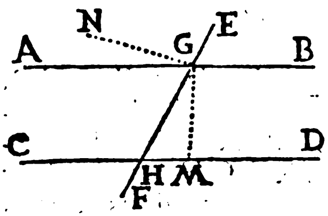
Eucl. 27. & 28. I.

PROPOS. XVI. THEOR. IX.

Si in duas rectas lineas recta linea incidens, alternos angulos ęquales inter se fecerit; aut externum angulum æqualem interno, opposito, & ad easdem partes; aut duos internos ad easdem partes fecerit æquales duobus rectis: parellelæ erunt inter se ipsæ rectæ lineæ.

In duas rectas lineas A B, & C D incidens, vtcunque, recta linea E F, secans eas in punctis G, & H, efficiat primò alternos angulos A G H, & D H G æquales inter se. Dico A B, & C D inter se parallelas esse. Si enim hoc verum non est, à puncto G ducatur a recta linea G M perpendicularis ad C D, secans eam in M; atque à puncto G educatur b recta G N perpendicularis ad ipsam M G. Et quoniam eadem recta linea G M perpendicularis est ad duas rectas lineas C D, & N G: erunt c lineæ rectæ C D, & N G parallelæ inter se, quæ, cùm secentur, vtcunque, à recta linea E F in punctis G, & H: erunt d duo anguli alterni N G H, & D H G ęquales inter se; sed angulus A G H suppositus fuit æqualis eidem angulo D H G. Ergo e anguli N G H, & A G H æquales sunt inter se, pars, & totum. f quod est absurdum. Nulla ergo alia recta linea N G præter ipsam A B esse potest parallela ipsi C D.

a Prop. 11.
b Prop. 10.
c Prop. 14.
d Prop. 15.
e Axio. 1.
f Axio. 7.



Sit secundò externus angulus E G A ęqualis interno, opposito, & ad easdem partes constituto angulo G H C. Dico rectas A B, & C D pariter parallelas esse. Quoniam angulus C H G supponitur æqualis angulo A G E, estque g angulus B G H æqualis eidem angulo A G E ad verticem. Ergo h duo anguli C H G, & B G H alterni, inter se æquales erunt; & ideò ex prima parte huius, rectę lineæ A B, & C D parallelę erunt.

g Corol. prop. 5.
h ax. 1.

Sint tertiò duo anguli interni ad easdem partes A G H, & C H G ęquales duobus rectis. Dico pariter rectas A B, & C D parallelas esse. Quoniam duo anguli A G H, & C H G supponunponuntur ęquales duobus rectis; & sunt *i* duo anguli D H G, & C H G deinceps, ęquales duobus rectis. Ergo duo anguli A G H, & C H G, simul sumpti, ęquales sunt duobus angulis D H G, & H H G, & ablato *k* communiter angulo C H G: erunt duo anguli A G H, & D H G alterni, ęquales inter se; & ideò, ex prima parte, rectę A B, & H D parallelę erunt. Quę omnia ostendenda fuerant. *i Prop. 13.* *k Axio. 3.*

COROLLARIVM.

Eucl prop. 31. I.

Constat, qua ratione à dato puncto duci possit recta linea, quę parallela sit alteri datę. Si enim à puncto dato *l* ducatur perpendicularis ad datam rectam lineam; & *m* ab eodem puncto altera perpendicularis eleuetur super alteram perpendicularem eductam: erit postrema perpendicularis parallela datę rectę lineę. Nam in constructione primę partis huius propositionis à puncto G ducta est recta G M perpendicularis ad rectam C D; atque altera G N, perpendicularis ad ipsam M G, ostensa fuit parallela ipsi C D. *l Prop. 11.* *m prop. 10.*

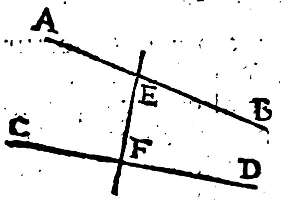
SCHOLIVM.

Cùm in demonstrandis passionibus parallelarum methodum, à maioribus receptam, reliquerim, operę pretium fuerit rationes hic paucis afferre, quare noua via procedendum esse duxerim. Existimarunt Ptolomęus, Possidonius, Geminus, Proclus, & alij antiquiores, referente Proclo, Euclidem optimè quidem, & scientificè processisse in suis elementis; sed aliquo pacto vacillasse in demonstrandis passionibus parallelarum. Communis sententia est defectum prędictarum demonstrationum pendere ab imperfectione principiorum assumptorum: estque primùm parallelarum definitio, quę talis est: Duæ rectæ lineæ in eodem plano infinitè extensæ, & non concurrentes ex vtraque parte vocentur parallelæ. *Et patet hanc passionem esse valdè remotam, & incomprehensibilem. nam extensio illa infinita ad vtramque partem absque concursu concipi non potest; neque conueniens est, vt à passione remota difficili, & non euidenter cognita, deducantur in propos. 27. 28. & 29. alię passiones magis manifestę. magis enim comprehensibile est posse duos angulos alternos inter se ęquales esse, quam duas rectas lineas, in infinitum productas, ad vtrasque partes non concurrere. In illa enim intellectus facilè acquiescit, in hac verò confunditur, & allucinatur. Quare potius deberet assumi passio illa ęqualitatis*

angu-

angulorum alternorum, vt principium in demonstratione, quàm ista. Hanc ob causam Possidonius aliam definitionem parallelarum excogitauit, vt refert Proclus, dixit enim duas rectas esse inter se parallelas, cùm equali interuallo semper inter se distant. *Que passio non videtur prima, & euidentissima omnium, quę huic subiecto competunt. Faciliùs enim quis percipiet angulos alternos ęquales esse posse, quàm infinitas perpendiculares ab vna recta linea ad aliam duci posse, quę omnes inter se ęquales sint. Alterum principium, ab Euclide assumptum, est petitio quinta apud Proclum, Campanum, & Commandinum, & axioma XIII. apud Clauium, vbi dicitur* : Si in duas rectas lineas, in eodem plano existentes, tertia recta incidens duos angulos internos, & ad easdem partes minores duobus rectis fecerit: illæ rectæ concurrent ad partes, vbi anguli duobus rectis sunt minores. *Vt si recta E F, secans duas rectas A B, & C D fecerit duos angulos B E F, & D F E, simul sumptos, minores duobus rectis, necessariò A B, & C D productę tandem concurrent in aliquo puncto ad partes B, & D.*

lib. 1. c. 11.



Antiqui (referente Proclo) negant hanc V. petitionem indemonstrabiliter euidentem esse, quia eius conuersum demonstratur in 17. propos. Euclid. & Proclus ipse, atque Geminus, Possidonius, & Ptolomęus eam penitus è principiorum numero reijciunt, ne dùm quia hoc non est cognitum lumine naturę; sed etiam quia annuere duas lineas coincidentię certum signum non est. nam alię lineę annuunt, & non coincidunt, vt Apollonius, & Nicomedes docent. reperiri enim possunt quędam lineę, quarum spatium, & si magis ac magis semper stringatur, & coangustetur (vt contingit ipsis E B, & F D versus partes B, & D) nunquam tamen illę in vnum punctum conueniunt, licet infinitè extendantur.

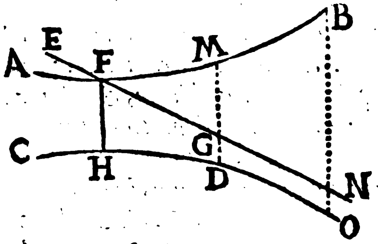
lib. 4 c. 2. 3.

Patefacta principiorum insufficientia Antiquos, cupientes corrigere iam dictas, demonstrationes noua principia assumpsisse, ex quibus parallelarum passiones demonstrasse verisimile est; quæ cùm non extent, coniectari potest eas forsan firmiores non fuisse ijs, quę à Proclo afferuntur; aliàs non omnino eas neglexisset. Possidonius verò, & Geminus, qui nouam definitionem parallelarum excogitarunt, nescimus pariter, quo alio principio assumpto Euclidis propositiones correxerint, vel innouarint; sed eadem probabilitate persuasi, & considerata imperfectione definitionis parallelarum, ab ipsis adductę, iudicare licebit non fuisse eorum demonstrationes Euclidianis firmiores. Postea Ptolomęus in lib. cuius titulus: Rectę lineę, productę ad partes, vbi duo anguli minores sunt duobus rectis coincidunt; retenta definitione Euclidis, & relictis demon-

stratio-

strationibus propositionum eiusdem, tantummodo eius petitionem V. è principiorum numero reiecit; & vt Theorema duplici via demonstrauit. Ptolomęi progressus, à Proclo relatus, tanto viro dignus non videtur; & meritò eum carpit Proclus; ait enim captiosam, & peruersam esse vtramque Ptolomæi demonstrationem Petitionis V. lib.4.c.2.3.

Tandem Proclus affert nouam demonstrationem eiusdem Petit. V. prȩassumpsit autem pronunciatum, antiquitus receptum ab Aristotele, & ab alijs, & est tale: Si ab vno puncto duæ rectæ lineæ, angulum facientes, infinitè producantur, ipsarum distantia omnem finitam magnitudinem excedit. *Procli demonstratio reijcitur à Clauio, & ab alijs eo nomine, quòd assumptum pronunciatum Peripateticum incertum est non minùs, quàm Euclidis petitio V. At ego admisso pronunciato Peripatetico adhuc imperfectam Procli demonstrationem esse censeo. Sint enim duȩ rectȩ lineȩ A B, & C D, quȩ perpendiculares sint ad eandem rectam F H: erunt illȩ parallelȩ inter se; & recta E G secet vnam ex parallelis A B in F: erunt duo anguli interni ad easdem partes D H F, & G F H minores duobus rectis. Modò Proclus putat, quòd recta E G, secans vnam A B, necessariò secare debet reliquam ex parallelis C D. Ait enim:* Duæ rectæ lineæ F B, F G, quæ ab vno puncto F infinitùm producuntur omni magnitudine maiorem habent distantiam. Quapropter hæc quoque, quæ tanta est, quantum est interuallum, quod inter parallelas adiacet. Cùm igitur maiorem distantiam ab inuicem distiterint harum parallelarũ distantia, ipsa F G ipsam C D secabit. lib.1,cœl:



Patet ergo, ex adducto textu, in Procli demonstratione assumi debere suppositionem, seu pronunciatum, sine quo non licet quicquam concludere; quòd nimirum interuallum parallelarum A B, & C D vnicum est, seu omnes perpendiculares, quȩ ab omnibus punctis rectȩ A B ducuntur ad reliquam ex parallelis C D ȩquales sunt inter se. quod sanè incertum est; cùm nec ex definitione rectarum, non concurrentium, nec ex propos. 27. & 28. iam demonstratis, deduci possit. Quinimmò dicere quis posset, quòd huiusmodi interualla semper magis ac magis augentur ad vtrasque partes puncti F, ita vt perpendicularis M D maior sit, quàm F H; & B O adhuc sit maior, quàm M D: pariterque affirmari posset, quòd licet M G, distantia duarum rectarum F B, & F G, continentium angulum B F G, maior sit, quàm interuallum parallelarum in puncto F, scilicet quàm F H: nihilominùs M G minor est, quàm perpendicularis M D;

quȩ

quę determinat interuallum earundem parallelarum in puncto M. Neque oppositum affirmari potest absque demonstratione: quandoquidem probabiles, & coniecturales rationes respuit Geometria. Et rursus licet B N, distantia earundem rectarum, angulum B F N continentium, maior sit, quàm parallelarum interuallum M D; nihilominùs B N minor censebitur, quàm B O; quæ mensura est interualli parallelarum in puncto B; & sic vlterius. Quare licet recta F G secet vnam ex parallelis A B, non propterea secabit reliquam C D. & ideo licet duo anguli G F H, & D H F minores sint duobus rectis, non conuenient necessariò rectæ F G, & C D ad partes G D. Quapropter Procli demonstratio insufficiens erit.

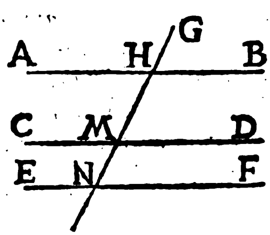
In prop 28. lib 1. Huic defectui Clauius, vt occurreret, sedulò dedit operam, vt iam dictam Euclidis V. petitionem firmiùs, ac solidè demonstraret. Et sanè negandum non est feliciter suum finem assecutum fuisse, præmisso eodem principio, satis manifesto, quod in XIV. Axiom. retulimus cum paucis alys. Hoc autem Arabicum quendam fecisse idem Clauius refert; sed duplici causa Arabicam, & Clauianam correctionem non retineo: prima est, quia vtuntur definitione parallelarum Euclidis, quę habet passionem ignotam, quoad eius possibilitatem; vel saltem non est prima, & notissima omnium, quæ subiecto definito competunt: altera est, quia assumpto eodem pronunciato XIV. & alys valde prolixè, & laboriosè post multas propositiones petitio quinta demonstratur; ex qua postea passiones parallelarum deducuntur. propter has omnes rationes conatus sum, si non solidiùs, saltem faciliùs, & breuiùs passiones earundem parallelarum ostendere, quàm hactenus factum est.

Eucl. 30. I.

PROPOS. XVII. THEOR. X.

Quæ eidem rectę lineę parallelę sunt, inter se quoque parallelę erunt.

Sint eidem A B, tam C D, quàm recta E F parallelę. Dico C D, & E F & inter se parallelas esse.



Secentur omnes à recta G N in punctis H, M, N. Quoniam C D, & A B parallelę ponuntur. Ergo *a* alterni anguli A H M, & D M H æquales sunt inter se. Rursus quoniam E F, & A B sunt parallelæ. Ergo *b* alterni anguli A H N, & F N H æquales sunt inter se. Ergo *c* duo anguli H M D, & M N F ęquales sunt inter se, cùm sint æquales vni tertio

a prop. 15.
b prop. 15.
c Axio. 1

tertio

tertio A H M. sed in duabus rectis C D, & E F, cùm externus angulus H M D æqualis ostensus sit angulo interno, & opposito ad easdem partes M N F. Ergo *d* duæ rectę C D, & E F inter se quoque parallelę erunt. Quapropter, &c. d Prop.18.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est, quòd, si duæ rectę, conuenientes in vnico puncto, sint parallelę vni cuidam rectę lineę, constituent illę vnicam rectam lineam; nec se secabunt.

Nam cùm *e* inter se quoque sint parallelæ, & se se tangant, vnicam rectam lineam constituere debent. e Prop. 17

PROPOS. XVIII. THEOR. XI.

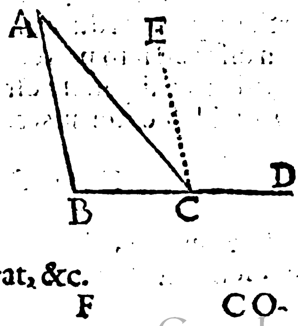
Eucl. 32. I.

Cuiuscunque trianguli, vno latere producto, externus angulus duobus internis, & oppositis est æqualis. Et tres interni anguli eius æquales sunt duobus rectis.

Cuiuslibet trianguli A B C, cuius latus B C productum sit ad D. Dico primò externum angulum D C A æqualem esse duobus internis, & oppositis A, & B; simul sumptis. Ducatur *a* ex C recta C E parallela ipsi A B. Quoniam A C secat ambas parallelas A B, & C E. Ergo *b* angulus E C A æqualis est alterno angulo A. Pari ratione B D, secans vtrasque parallelas C E, & A B, faciet *c* externum angulum D C E æqualem interno, opposito, & ad easdem partes angulo B. Quare duo anguli D C E, & E C A simul; idest *d* angulus externus D C A, ęqualis erit duobus angulis B, & A, simul sumptis.

a Cor oll. prop. 16. b prop. 15. c prop. 15. d Axio. 8.

Dico secundò angulos A, B, & A C B internos eiusdem trianguli, simul sumptos, duobus rectis esse æquales. Quoniam D C A, externus, ostensus est æqualis duobus internis, & oppositis A, & B. Ergo addito *e* communi angulo A C B, erunt duo anguli D C A, & A C B simul, æquales tribus angulis A, B, & A C B, simul sumptis; sed *f* duo anguli D C A, & A C B æquales sunt duobus rectis. Ergo tres *g* anguli A, B, & A C B simul, æquales sunt duobus rectis. Quod erat, &c.



e Axio. 2. f prop. 12. g Ax. 1.

CO-

Eucl. prop. 16.17. l.

COROLLARIVM I.

Hinc patet externum angulum quolibet interno, & opposito maiorem esse; Et duos internos angulos, cuiuslibet trianguli, minores esse duobus rectis. Quandoquidem externus ostensus est ęqualis duobus internis, & oppositis, simul sumptis: atq; tres, simul sumpti, quantitatem duorum rectorum complent.

COROLLARIVM II.

Patet etiam tres angulos, cuiuslibet trianguli, ęquales esse tribus angulis, simul sumptis, alterius trianguli.

COROLLARIVM III.

Patet triangulum non posse plures angulos rectos, aut obtusos habere, quàm vnum. Vnde quotiescunque in triangulo vnus angulus rectus fuerit, vel obtusus, necessariò reliqui duo acuti erunt; quia reliqui duo, simul sumpti, cùm sint complementum duorum rectorum, erunt ęquales, aut vni recto, aut acuto; ideoque vterque erit aut pars recti, aut pars acuti; & propterea erunt acuti.

COROLLARIVM IV.

Patet etiam in triangulo isoscele rectangulo angulos ad basim esse semirectos.

COROLLARIVM V.

Patet etiam quemlibet angulum trianguli ęquilateri esse tertiam partem duorum rectorum; & angulum eius externum esse tertiam partem quatuor rectorum: quia sextuplum anguli interni ęquale est quatuor rectis; & duplum interni anguli, idest externus, tertia pars est quatuor rectorum.

COROLLARIVM VI.

Patet etiam, si à vertice trianguli isoscelis ad basim perpendicularis ducatur, verticis angulum secari bifariam; eo quod

quod duo triangula efficiuntur, quę duos angulos rectos habent prope perpendicularem, & h duos alios ęquales ad basim isoscelis. Ergo i qui ad verticem sunt, ęquales inter se erunt. h prop. 6.

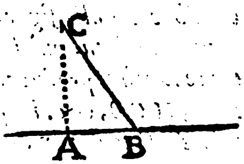
i Corol. 2. prop 18.

COROLLARIVM VII.

Manifestum est etiam, quod si à vertice trianguli ęquilateri ad basim perpendicularis ducatur: sectus erit angulus verticis bifariam; & quęlibet medietas eius tertia pars erit vnius recti. propterea quod eius duplum, scilicet *k* angulus trianguli ęquilateri, est tertia pars duorum rectorum. k Cor 5. prop. 18.

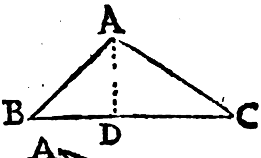
SCHOLIVM I.

Facilè colligitur ex hac propositione, quòd si à puncto sublimi C recta CB, cadens super aliam rectam subiacentem AB, constituat angulos inęquales, perpendicularis ab eodem sublimi puncto super subiacentem lineam ducta, cadet ad partes anguli acuti CBA. nam cùm debeat constitui triangulum CBA rectangulum in A, l reliquus internus CBA necessariò acutus esse debet. l Corol. 5. prop. 18.

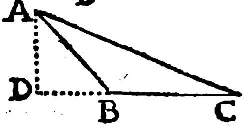


COROLLARIVM VIII.

Hinc patet, si ad basim trianguli duo anguli acuti fuerint: perpendicularem, à vertice, cadere intra triangulum.



Et à vertice ad basim trianguli ambligonij perpendicularis, ab angulo acuto cadens, extra triangulum ad partes anguli obtusi pertinget.

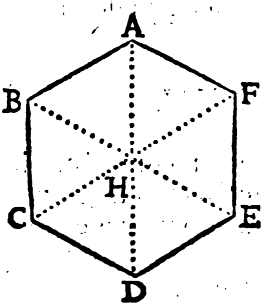


SCHOLIVM II.

Procli lib. 4.

Omnes anguli interni, cuiuslibet figurę rectilineę, simul sumpti, sunt ęquales tot angulis rectis, bis sumptis, quot sunt eius latera, demptis quatuor rectis. Patet hoc, nam intra quamlibet figuram rectilineam

A B D F sumi potest aliquod punctum H, à quo ad angulos figurę coniungi rectę lineę possunt H A, H B, H C, &c. vnde figura vniuersa distribuetur in tot triangula, quot sunt eius



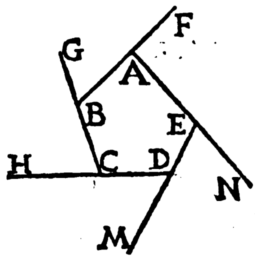
latera; propterea quod latus cuiuslibet figurę erit basis vnius trianguli, vt A B basis est trianguli A B H, & sic reliquę omnes; & vertices omnes prędictorum triangulorum in eodem puncto H, intra figuram assumpto, conueniunt. Ergo l cùm tres anguli cuiuslibet trianguli sint ęquales duobus rectis, debent toties sumi duo recti, quot sunt triangula, idest quot sunt eorum bases, seu quot sunt latera Polygoni. Ex hisce omnibus angulis rectis tolli debent omnes vertices triangulorum, eo quod hi fiunt in medio figurę, scilicet in H; sed m omnes anguli, qui fiunt circa vnicum punctum H, ęquales sunt quatuor rectis. Ergo ex illa summa angulorum rectorum, demptis quatuor, reliqui erunt ęquales omnibus angulis figurę rectilineę.

l prop. 18.

m Coroll. 2 prop. 13.

Patet etiam, quòd, si latera cuiuslibet Polygoni extra figuram ex vna parte tantùm producantur, consurgent anguli omnes externi F A E, G B A, H C B, &c. in quolibet Polygono, simul sumpti, ęquales quatuor rectis. Quoniam n quilibet externus F A E cum suo interno E A B summam duorum rectorum complet. Ergo quot

n prop. 32.



sunt anguli, siue quot sunt latera in Polygono, toties sumi debent duo anguli recti, vt sint aequales omnibus internis, & externis Polygoni; sed (vt dictum est) omnes interni sunt ęquales tot binis rectis, quot sunt eius latera, demptis quatuor rectis. Ergo quatuor recti sunt ęquales omnibus externis angulis, simul sumptis.

COROLLARIVM IX.

Hinc manifestum est, si fuerint duę figurę, ęquè multos angulos habentes: esse omnes angulos vnius figuræ, simul sumptos, æquales omnibus angulis alterius, simul sumptis.

COROLLARIVM X.

Et si in eisdem figuris omnes anguli, vno excepto eorum, qui

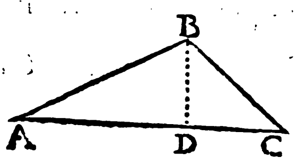
qui in vna figura sunt, ęquales fuerint omnibus angulis alterius figurę absque vno, erunt illi duo anguli relicti æquales inter se. eo quod omnes anguli vnius figuræ, simul sumpti, ęquales sunt omnibus angulis alterius, simul sumptis.

PROPOS. XIX. THEOR. XII. Eucl. 18. I.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

Sit latus A C maius latere A B in triangulo A B C. Dico angulum B maiorem esse angulo C. Ex maiore latere A C seceturª A D ęqualis A B minori; iungaturque B D. ᵇ Ergo triangulum B A D isocelium erit; ideoque anguli supra basim A B D, & A D B inter se ęquales: Est autem angulus A B C maior angulo A B D, totum scilicet sua parte. Ergo angulus A B C maior quoque erit angulo A D B. est ᶜ verò angulus A D B externus in triangulo B D C; & ideò maior angulo C interno, & opposito. Ergo multo magis angulus A B C maior erit angulo C. Quare maiori lateri A C opponitur angulus maior A B C. Quod erat ostendendum.

a Prop 3.
b Prop. 6.
c Corol. 1. Prop. 18.



COROLLARIVM.

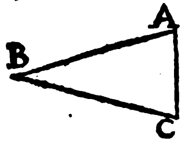
Hinc patet in triangulo, cuius tria latera inęqualia sunt, (quod vocatur Scalenum) tres angulos esse inæquales; quandoquidem tria eius latera inęqualia sunt. In isoscele verò, quando basis minor est vtrolibet laterum ęqualium, tunc angulus verticalis minor est vtrolibet angulorum, qui ad basim sunt. si verò basis maior est, pariter angulus verticalis maior erit.

PROPOS. XX. THEOR. XIII. Eucl. 6. & 19. I.

Angulis ęqualibus eiusdem trianguli opponuntur latera ęqualia. Et maiori angulo maius latus opponitur.

Sit primò in triangulo A B C angulus A æqualis angulo C. Dico latus C B ęquale esse lateri A B. Si enim hoc verum non

est,



est, sit B C maius, aut minus, quàm A B. Ergo, ex præcedenti, angulus A maior, aut minor erit, quàm C; quod est contra hypothesin. Non ergo C B maius est, aut minus, quàm A B. Quare illi esse æquale necesse est. Quod erat primo loco ostendendum.

Sit secundò angulus A maior, quàm B. Dico latus B C maius esse latere A C, Si enim hoc verum non est: erit B C, aut
a Prop.6. ęquale, aut minus, quàm A C. Sit ęquale, si fieri potest. Ergo a anguli B, & A ęquales erunt inter se: positus autem fuit angulus A maior, quàm B. Ergo erunt æquales, & inęquales. quod est absurdum. Non ergo B C ęquale est ipsi A C.

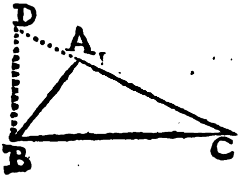
Sit tertiò minus, si fieri potest. Ergo ex pręcedenti minori lateri B C opponitur minor angulus A, quod rursus est contra hypothesin. supponebatur enim angulus A maior, quàm B. Non ergo latus B C minus est latere A C, sed neque ęquale ostensum fuit. Ergo B C maius erit, quàm A C. Quapropter, &c.

Eucl.20.I.

PROPOS. XXI. THEOR. XIV.

Cuiuslibet trianguli duo latera tertio sunt maiora; & differentia duorum laterum minor est reliquo; atque tria latera, simul sumpta, maiora sunt duplo vnius: sed minora sunt duplo duorum laterum.

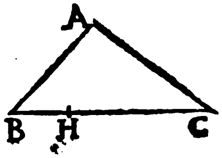
Sit quodlibet triangulum A B C. Dico primò duo quælibet eius latera, vt B A, & A C, simul sumpta, maiora esse tertio latere B C.
a prop. 3. Producto latere C A versus A, secetur a D A ęqualis ipsi B A, iungaturque recta B D. Quoniam in triangulo B A D duo eius latera B A, & D A ęqualia sunt inter se.
b Prop.6. Ergo b anguli ad basim D, & A B D ęquales sunt inter se; estque angulus C B D maior partiali angulo A B D. Igitur angulus C B D maior est angulo D; & propterea c in triangulo C B D erit latus C D, angulum maiorem subtendens, maius latere B C:
c Prop.20.



sed D C ęqualis est duabus rectis lineis B A, & A C, simul sumptis (eo quod ęqualibus B A, & D A additur communis

nis A C) Ergo duo latera B A, & A C, simul sumpta, maiora sunt tertio latere B C.

Secundò ex maiore latere B C secetur *d* C H ęqualis A C; eritque B H differentia duorum laterum B C, & C A. Dico iam B H minorem esse, quàm B A. Quia duo latera B A, & C A maiora sunt, quàm B C; si ab eis tollantur ęquales H C, & C A: erit *e* B A, residuum maioris aggregati, maior, quàm B H. *d Prop. 3. e Axio. 4.*



Tertiò dico tria latera B A, A C, & C B, simul sumpta, maiora esse, quàm duplum ipsius B C. Quoniam duo B A, & A C maiora sunt, quàm B C, addita *f* communiter B C: erunt tria latera B A, A C, & C B maiora, quàm latus B C, bis sumptum. *f Axio. 4.*

Quartò dico tria latera B C, B A, & C A, simul sumpta, minora esse, quàm duplum ipsius B A, vnà cum duplo ipsius C A. Quia B C minus est, quàm B A, vnà cum C A; additis communiter duobus B A, & C A: erunt *g* tria latera B C, B A, & C A, simul sumpta, minora, quàm B A, bis sumptum, vnà cum C A, bis sumpto. Quę demonstranda erant. *g Axio. 4.*

SCHOLIVM.

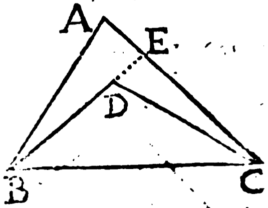
Ne dùm in lateribus cuiuslibet trianguli; sed in quibuslibet tribus quantitatibus, quarum duę quęlibet tertia sint maiores, idem verificatur. Erit enim quarumlibet earum differentia minor tertia; & tres, simul sumptę, maiores erunt duplò vnius; sed minores duplo duarum reliquarum.

PROPOS. XXII. THEOR. XV. *Eucl. 21. I.*

Si ab extremitatibus vnius lateris trianguli duę rectę lineę intra ipsum conueniant, hę, simul sumptę, minores erunt duobus reliquis trianguli lateribus, simul sumptis; maiorem verò angulum continebunt.

Sit triangulum A B C, & à punctis B, C concurrant intra triangulum duę rectę B D, & C D in D. Dico B D, C D simul, minores esse, quàm B A, C A, simul sumptæ; sed angulum B D C maiorem esse angulo B A C. Producta B D, secet A C in E: erunt *a* B A, & A E, simul sumptæ, maiores, *a prop. 21.*

quàm



quà in B E; & addita communi E C: erunt *b* duæ B A, & A E C maiores duabus B E, & E C simul.

b Axio.4.

Rursus *c* C E, & E D simul, maiores sunt, quàm C D; & addita communi D B: erunt *d* duæ C E, & E D B simul, maiores duabus C D, & D B. Quare A B, & A C simul sumptæ, multo maiores sunt, quàm B D, & D C simul.

c Prop 21.

d Axio. 4.

Postea *e* angulus B D C externus in triangulo E D C maior est interno, & opposito C E D: hic verò externus est in triangulo E A B; & ideo *f* maior interno, & opposito angulo A. Quare angulus B D C multo maior erit, quàm angulus A. Quod erat ostendendum.

e Coroll. 1. prop. 18.
f Coroll 1. prop. 18.

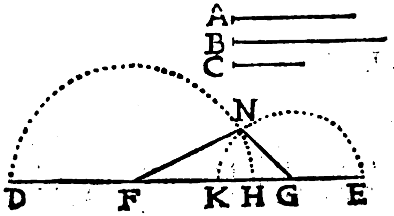
Eucl. 22. I.

PROPOS. XXIII. PROBL. VIII.

Datis tribus rectis lineis, triangulum constituere, cuius singula latera singulis datis rectis lineis ęqualia sint. Oportet autem, vt vnaquęque datarum linearum minor sit reliquarum aggregato.

Sint tres rectæ lineę A, B, & C, quarum duæ quælibet reliqua sint maiores. Debet constitui triangulum, habens tria latera ęqualia tribus datis rectis lineis. Sumatur quælibet recta linea D E indefinita, & in ea secetur *a* D F æqualis ipsi A, & ex reliqua secetur F G æqualis B; & tandem secetur G E æqualis C. Deinde *b* centro G, interuallo G E circulus E N K describatur. Et centro F, interuallo F D alius circulus D N H describatur. Et quia singulæ rectę D F, F G, & G E æquales sunt singulis A B, & C; atque vnaquæque harum minor est aggregato duarum reliquarum. Ergo duæ quælibet ipsarum, D F, F G, G E maiores sunt tertia. Estque circuli D N H diameter D H dupla radij D F, & E K dupla ipsius G E. Igitur *c* D H, & E K simul, maiora sunt, quàm D E (quæ est summa omnium triũ);

a prop. 3.



b Post. 3.

c Scol. prop. 21.

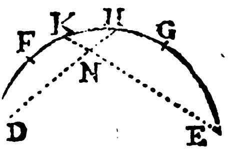
&

& ablata d cõmuniter D H, erit E K maior, quàm H E, quę est residuũ ipsius D E. Ergo punctum H cadit vltra pũctum K ad partes E. Postea e quia D H dupla ipsius D F minor est, quàm omnium trium summa D E. Ergo pũctum H figuræ D N H F cadit inter puncta E, & K diametri K E, idest intra figuram K N E G; & propterea duæ peripheriæ D N H, & E N K se secãt antequam ad pũcta H & K pertingant. se secent in puncto N, & ducantur rectæ F N, & G N. Et quia f F N æqualis est ipsi D F, cùm à centro ad peripheriam circuli D N H ducantur; estque recta A æqualis eidem D F. Igitur g F N æqualis est ipsi A. Similiter G N, & G E sunt radij eiusdem circuli; & ideo h ęquales: estque recta C æqualis eidem G E. Ergo i N G æqualis est ipsi C; atque recta F G facta est ęqualis ipsi B. Igitur trianguli F N G tria latera ęqualia sunt tribus datis rectis lineis A, B, & C. Quod erat propositum.

d Axio. 4.
e Schol. prop. 21.
f Axio. 12.
g Axio. 1.
h Axio. 12.
i Axio. 1.

SCHOLIVM.

Constat, si tres lineę D F, F G, G E, deinceps positę, fuerint peripherię eiusdem circuli, quę efficiant arcum D F E minorem integra circuli peripheria; & duę quęlibet ex illis maiores sint tertia peripheria; sitque D H, dupla ipsius D F, atque E K dupla ipsius E G. atque coniungantur rectę lineę D H, E K; necessariò hę duę rectę lineæ se secabunt intra circulum, antequam ad puncta H, & K pertingant. Nam punctum H lineę D F H, cadit, vt in propositione ostensum est, inter puncta K, & E alterius lineę K G E, idest intra figuram K G E N. Et quoniam k K G E dupla ipsius G E minor est, quàm D K E. Ergo punctum D non cadit inter puncta H, & K. Rursus quia D K E minor est peripheria integra circuli. Ergo punctum D non cadit inter E, & H: ideoque punctum D cadit extra figuram K G E K. Quare duę lineę D N H, & E N K se secabunt antequam ad puncta H, & K pertingant. & propterea intra circulum conueniunt.



k Schol. prop. 21.

Pręsens Problema dicitur determinatum, eo quod non potest fieri nisi contrahatur eius vniuersalitas in illis verbis: oportet autem, &c. *Nam absque tali determinatione Problema esset impossibile. Proprium est ergo determinationis destruere illam vniuersalitatem suppositionis. Non enim licet ex tribus quibuslibet datis rectis lineis triangulum constituere, nisi habeant, iam dictam, conditionem; propterea l quod in quolibet triangulo duo quęlibet eius latera reliquo debent esse maiora: nec ob-*

l Prop. 21.

 stat,

stat, quòd absque illa determinatione multoties triangulum fieri possit. Nam propositiones demonstratiuę debent semper vniuersaliter considerari; & ideo cùm in hypothesi dicitur: Datis tribus rectis lineis: *sensus est qualescunque sint prędictę lineę, idest variata infinitis modis mensura ipsarum, triangulum constitui debet.*

Eucl prop. 23. I.

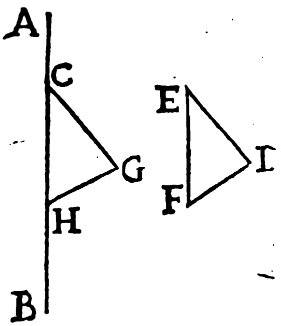
PROPOS. XXIV. PROBL. IX.

Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo æqualem angulum constituere.

Sit data recta linea A B, ad punctum eius C, debet constitui angulus ęqualis dato angulo E. Ducatur, vtcunque, recta D F, vt fiat triangulum D E F; postea a fiat triangulum C G H, cuius latera æqualia sint tribus lateribus trianguli D E F, singula singulis, ita vt ad punctum C conueniant duo latera, C G quidem æquale ipsi D E, & C H ęquale ipsi E F (fieri enim hoc poterit, cùm duo quælibet latera trianguli E D F reliquo sint maiora). iam in his duobus triangulis omnia latera vnius ęqualia sunt omnibus lateribus alterius, singula singulis. Ergo b angulus C æqualis est angulo E (qui à lateribus G H, & D F æqualibus subtenduntur). Et hoc erat faciendum.

a Prop. 23.

b Prop. 7.



COROLLARIVM.

Patet eadem constructione fieri posse triangulum similiter æquale cuilibet dato triangulo. Nam si datum fuisset triangulum D E F, constructum esset alterum triangulum C G H illi ęquale, æquilaterum, & æquiangulum.

Eucl. 26. I.

PROPOS. XXV. THEOR. XVI.

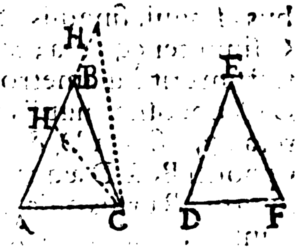
Si in duobus triangulis fuerint duo anguli vnius ęquales duobus angulis alterius, vterque vtrique, & vnum latus vni lateri æquale, quæ siue æqualibus angulis adiaceant, siue

æqua-

æqualibus angulis opposita sint: erunt triangula similiter æqualia.

In triangulis A B C, & D E F sint latera A C, & D F ęqualia inter se, & angulus B A C æqualis angulo D, atque angulus A B C æqualis angulo E, siue sint anguli B A C, & D ęquales: pariterque anguli A C B; & F inter se æquales. Patet a in vtroque casu tertium angulum vnius trianguli æqualem esse postremo angulo alterius trianguli. Dico latera A B, & D E esse ęqualia; pariterque latera C B, & F E inter se ęqualia esse. Si enim hoc verum non est, sit A B maius, aut minus, quàm D E; & secetur b A H ęquale D E, iungaturque recta C H. Et quia circa ęquales angulos A, & D latera C A, & F D ęqualia sunt; pariterque latera H A, & E D sunt ęqualia. Igitur c in triangulis A C H, & D F E erunt anguli A C H, & F ęquales inter se. Erat autem angulus A C B ęqualis eidem angulo F. Ergò d duo anguli A C H, & A C B ęquales sunt inter se, pars, & totum, quod e est impossibile. Quare recta linea B A non est maior, neque minor, quàm E D, sed ęqualis erit. Eadem ratione latera C B, & E F ęqualia erunt. Quod erat probandum.

a Coroll. 2. prop. 18.
b Prop. 3.
c Prop. 4.
d Axio. 1.
e Axio. 9.



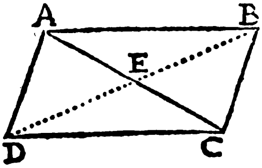
PROPOS. XXVI. THEOR. XVII.

Eucl. 34. I

Quadrilaterum, cuius opposita latera sunt parallela, habet angulos oppositos, & latera opposita ęqualia inter se; atque diameter ipsum secat bifariam; sed diametri vicissim se se bifariam secant. Vocetur talis figura Parallelogrammum. Et perpendicularis, à summitate ad oppositam basim ducta, vocetur Altitudo Parallelogrammi.

Sit quadrilaterum B D, cuius diameter A C, sintque latera A B, & D C parallela inter se; pariterq; latera A D B C sint parallela. Dico primò latera A B, & D C inter se, nec non latera A D, & B C ęqualia esse; Secundò angulos B, & D inter se, nec non angulos B A D, B C D inter se ęquales esse; Tertiò triangula A B C, & A D C, secta à diametro, ęqualia esse; Quartò diametros A C, & B D se se mutuò bifariam

 secare



secare in E. Quoniam in quadrilatero A C latera opposita A B, & D C sunt parallela, & secantur ab A C. Ergo *a* anguli alterni B A C, & D C A æquales inter se sunt. Similiter quia *b* rectæ A D, B C sunt parallelę, & secantur à recta A C. Ergo alterni anguli B C A, & D A C æquales sunt inter se. Quare in triangulo B A C duo anguli supra basim A C æquales sunt duobus angulis trianguli D A C, super eandem basim adiacentibus, singuli singulis; & ideo *c* erunt triangula B A C, & D A C similiter ęqualia; & propterea quadrilaterum ipsum B D, sectum erit à diametro A C bifariam. Postea latera A B, & D C, opposita angulis æqualibus alternis inter se; nec non latera opposita A D, & B C ęqualia erunt. Deinde duo anguli oppositi B, & D æquales erunt, quia eidem basi A C opponunrur. Rursus quia æqualibus angulis D A C, & B C A adduntur anguli æquales B A C, & D C A. Ergo *d* toti anguli oppositi D A B, & B C D æquales inter se erunt. Tandem quia in triangulis A B E, & C D E duo anguli B A E, & D C E æquales ostensi sunt, & anguli A E B, & C E D ad verticem sunt *e* æquales; & duo latera A B, & C D, subtendentia angulos æquales, ostensa sunt æqualia. Ergo *f* A E ipsi E C æqualis est; nec non B E ipsi E D æqualis est. Quare patet propositum. Vocetur figura A B C D parallelogramma. Et recta à supremo latere A B ad oppositam basim D C perpendiculariter ducta; vocetur Altitudo parallelogrammi.

a Prop. 15.
b prop. 15.
c prop. 25.
d Axio. 2.
e Coroll. prop 5.
f prop. 25.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd, si fuerint duo parallelogramma, quę habeant vnum angulum vni angulo ęqualem, erunt reliqui anguli vnius parallelogrammi æquales reliquis angulis alterius parallelogrammi, singuli singulis. Nam *g* duo quilibet oppositi æquales sunt inter se, & interni, *h* & ad easdem partes duobus rectis sunt æquales.

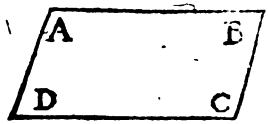
g prop. 26.
h prop. 15.

Eucl. 33. I.

PROPOS. XXVII. THEOR. XVIII.

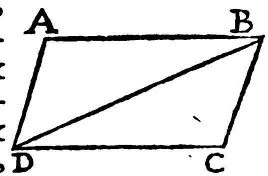
Si in quadrilatero anguli oppositi inter se, aut latera opposita fuerint ęqualia, vel duo latera opposita tantùm sint paralella, rallela, & æqualia, vel duo latera opposita parallela, & duo anguli oppositi ęquales, siue duo latera opposita parallela, & triangula facta à diametro, ęqualia, siue duę diametri mutuò se secẽt bifariam: erit semper Parallelogrãmum.

Sint primò in quadrilatero B D anguli B, & D inter se, pariterque A, & C æquales. Dico B D parallelogrammum esse. Quoniam A, & C æqualibus, si addantur anguli æquales D ipsi A, & B ipsi C: erunt a anguli A, & D simul, ęquales duobus C, & B: sed quatuor b anguli cuiuslibet quadrilateri æquales sunt quatuor rectis. Ergo duo anguli A, & D simul, duobus rectis sunt ę quales; & sunt interni ad easdem partes. Ergo c A B, & D C parallelæ sunt. Eadem ratione A D, & B C parallelæ erunt; ideoque spatium B D parallelumgrammum erit.



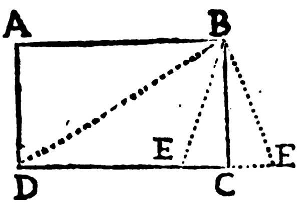
a Axio. 2.
b Scol. 2. prop. 18.
c Prop. 16.

Sint secundò duo latera opposita A B, & D C ęqualia inter se; pariterque D A, & B C ęqualia. Dico spatium esse parallelogrammum. Ducta diametro B D, erunt in triangulis A B D, & C B D singula latera singulis lateribus ęqualia, & B D latus commune. Ergo d erunt similiter equalia, ideoq; anguli oppositi A, & C ęquales erũt, atq; A D B, C B D inter se, nec nõ anguli A B D, C D B ęquales erũt inter se. Quare e duo anguli A D B, & CDB, simul sumpti, atq; C B D, & A B D, simul sumpti, ęquales erunt inter se. Igitur ex prima parte huius spatium ipsum erit parallelogrammum.



d Prop. 7.
e Axio. 2.

Tertiò sint latera opposita A B, & C D parallela, & ęqualia tantummodo, idem sequetur. Si enim hoc verum non est, ducta f B E parallela ipsi A D, fiat parallelogrammum A D E B. Cadet ergo recta B E citra, aut vltra punctum C. Ergo g latus D E æquale erit opposito A B, seu D C, pars, & totum, quod est impossibile. Non ergo alibi, quàm in C puncto, cadit B E parallela ipsi A D. Quare spatium A C parallelogrammum est.



f Coroll. prop. 16.
g prop. 26.

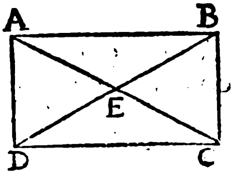
Quartò sint A B, & D C parallelę, & anguli ADC, & A B C

ęqua-

h Coroll. p op.16. ęquales, idem ſequetur. Sin minùs, ducta *h* B E parallela ipſi D A non in C cadente, fiat parallelogrammum A E. Ergo angulus *i* A B E ęqualis erit oppoſito angulo D, ſiue illi ę-
i prop 26. quali A B C, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo B E parallela ipſi D A alibi, quàm in C cadit. Vnde patet propoſitum.

Quintò ſint A B, & D C parallelę, & triangula A D B, &
k Corollar. prop.16. C D B ęqualia, idem ſequetur. Sin minùs ducta *k* B E parallela ipſi D A, non in C cadente, fiat parallelogrammum E A. Ergo *l* triangulum E B D ęquale erit triangulo B A D, ſiue
l prop.26. illi ęquali triangulo B D C, pars, & totum, quod eſt abſurdum. Non ergo B E parallela ipſi D A alibi, quàm in C cadit. Quapropter quadrilaterum A C eſt parallelogrammum. Quod erat oſtendendum.

Sextò ſint diametri A C, B D ſectę bifariam in E, erit quoque A C parallelogrammum. Nam duo

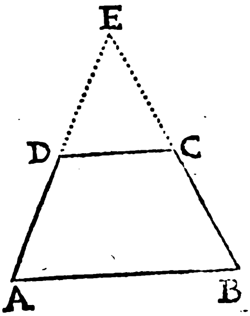


m Coroll. prop.5. triangula A E B, C E D circa ęquales angulos ad verticem *m* E habent latera ę-
n prop. 4. qualia, A E ipſi E C, & B E ipſi E D. Er-
o prop.16. go *n* anguli A B E, & C D E alterni ęquales inter ſe erunt; ideoque *o* A B, D C in-
p prop.26. ter ſe parallelę erunt. Eadem ratione A D, & B C parallelę erunt; & propterea ſpatium *p* A B C D parallelogrammum erit. Quæ erant oſtendenda.

SCHOLIVM.

Si in quadrilatero duo latera oppoſita ſint parallela, & duo reliqua latera oppoſita inter ſe ſint ęqualia, non erit neceſſariò parallelogrammum.

q Coroll. prop.16. *Sit triangulum iſoſcelium E A B, & ducatur q D C parallela baſi A B. Et quoniam trianguli iſoſcelij*
r prop. 6. *r duo anguli E A B, E B A ęquales ſunt ſupra baſim; eſtque*
ſ prop 15. *ſ angulus externus E D C ęqualis interno, & oppoſito E A B, propter parallelas A B, D C; eademque ratione angulus E C D*
t Axio.1. *ęqualis eſt angulo E B A. Ergo t duo anguli E D C, E C D ęquales inter ſe ſunt; & propterea*
u prop 20. *u ſubtenſa latera D E, C E ęqualia erunt. Quare, x ſi*
x Axio.2. *ab ęqualibus lateribus E A, E B trianguli iſoſcelij E A B tollantur ęqualia latera D E, C E, erunt reſidua D A, B C ęqualia; & propterea quadrilaterum A B C D, habens duo latera oppoſita A B, D C parallela; & duo reliqua latera A D, B C æqua-*

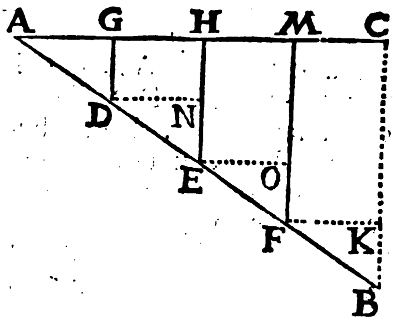


æqualia, non erit parallelogrammum; cùm latera A D, B C conueniant in E. y Corol. 2. prop 14.

PROPOS. XXVIII. PROBL. X. Eucl. 9. VI

Datam rectam lineam in quotcunq; ęquales partes diuidere.

Sit data recta linea A C, secanda in datam multitudinem partium æqualium. Ducatur à puncto A recta A B, efficiens in A quemlibet angulum C A B, & in A B secetur quodlibet segmentum A D, & fiant *a* successiuè partes D E, E F, F B (a Prop. 3.) æquales ipsi A D, quæ tot sint, quot partes ęquales in A C, debent contineri; iungaturque recta B C, & à punctis D, E, F intra triangulum A B C ducantur *b* rectæ D G, E H, F M (b Coroll. prop. 16.) parallelæ basi B C, quæ secent rectam A C in G, H, M. Dico rectam A C sectam esse in partes æquales imperatas. à punctis D, E, F ducantur *c* rectæ D N, E O, F K (c Corol. prop. 16.) parallelæ ipsi A C, secantes proximas parallelas in N O K.



Et *d* quoniam, propter parallelas oppositas, spatium G D N H parallelogrammum est: erit *e* D N æqualis ipsi G H; cùmque in triangulis D N E, & A G D externus *f* angulus N D E æqualis sit interno, & opposito angulo A propter parallelas D N, A C, atque *g* internus angulus N E D æqualis sit externo, & opposito angulo G D A, propter parallelas H E, G D; atque duo latera adiacentia D E, A D ęqualia sint facta. Ergo *h* latera D N, & A G ęqualia sunt inter se: erat autem G H æqualis eidem D N. Igitur *i* G H ęqualis est ipsi A G. Eadem ratione H M, & M C ostendentur ęquales eidem A G. Quare A C secta erit in tot partes ęquales A G, G H, H M, M C, quot sunt partes imperatæ, contentæ in recta A B. Et hoc erat faciendum.

d Prop. 26. e Prop. 26. f prop. 15. g prop. 15. h prop. 25. i axio. 1.

COROLLARIUM.

Constat ex constructione huius propositionis, quòd, si latus trianguli distributum fuerit in quotcunque partes ęquales,

les, atque à diuisionibus ducantur rectæ lineæ parallelæ basi, diuidetur ab eis reliquum latus in totidem partes æquales.

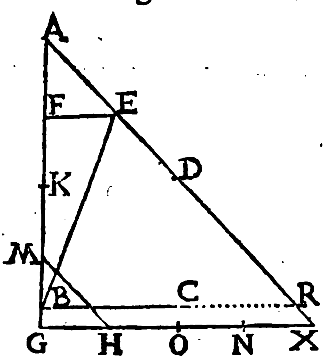
Nam trianguli A B C sectum fuit latus A B in partes æquales A D, D E, E F, & F B, & ostensum fuit latus A C sectum in totidem partes æquales à parallelis D G, E H, F M, & B C.

PROPOS. XXIX. THEOR. XIX.

Eucl. post. V vel axioma XIII.

Si duo anguli interni ad easdem partes eiusdem lineæ rectæ, secantis duas alias rectas, fuerint minores duobus rectis angulis: illę rectę lineę, productæ, triangulum constituent.

Sint duo anguli D A B, & C B A minores duobus rectis. Dico rectas lineas A D, & B C concurrere ad partes D, C, & efficere triangulum. A quolibet puncto E, infra A, coniungatur recta E B; & fiat *a* angulus B E F ęqualis angulo E B C. Et quoniam duo anguli A, & A B C, idest tres anguli A, A B E, & E B C minores sunt duobus rectis. Ergo *c* minores sunt duobus angulis B E D, & B E A, qui duobus rectis ęquales sunt; & est *d* angulus D E B ęqualis duobus angulis A, & A B E internis, & oppositis in triangulo A B E. Ergo *e* reliquus angulus A E B maior erit angulo E B C; & propterea angulus B E F (qui ęqualis erat angulo E B C) erit minor angulo A E B; & ideo recta linea E F secabit rectam lineam A B, inter puncta A, & B. Deinde *f* secentur rectæ F K, K M, & M G, singulę ęquales ipsi A F, quousque fiat A G maior, quàm A B. Postea ducatur *g* G X parallela ipsi F E, vel B C, & F E mensuret ipsam G X, productam, toties, quoties A F metitur ipsam A G, & coniungatur *h* recta A X, & à punctis F, K, M *i* ducantur, intra triangulum A G X, rectæ M H, K O, F N parallelę ipsi A X, secantes latus G X in punctis H, O, N. Patet *k* latus G X fore diuisum in tot partes inter se ęquales G H, H O, O N, N X, quot sunt partes ęquales ipsi A F, contentę in A G; sed quoties A F mensurabat ipsam A G, toties F E metiebatur rectam G X. Igitur rectæ F E, & G H



a prop. 24.
c prop. 12.
d prop. 18.
e Axio. 4.
f prop. 3.
g Corol. prop. 16.
h Post. 1.
i Coroll. prop. 16.
k Coroll. prop 28.

ęquè

ęquè metientur eandem rectam G X; & propterea l G H æqualis erit ipsi F E; erat autem M G ęqualis ipsi A F, atque angulus m M G H æqualis angulo A F E (eo quod G H, & F E sint parallelæ:) Ergo n angulus G M H ęqualis est angulo F A E. sed, o propter parallelas A X, & M H, est angulus G A X æqualis eidem angulo G M H. Ergo p angulus F A E ęqualis est angulo G A X; congruunt autem duæ rectæ F A, & G A. Ergo q duæ rectæ E A & X A sibi mutuò congruunt; ideoque recta A E, producta, conueniet cum recta G X in puncto X. Tandem cùm in triangulo G A X à puncto B ducatur recta B C, intra ipsum triangulum, parallela basi G X. Igitur producta secabit reliquum latus A E X, vt in pũcto R. Quod erat ostendendum.

l ex axio. 1.
m prop. 15.
n prop. 4.
o prop. 15.
p Axio. 1.
q Axio. 9.

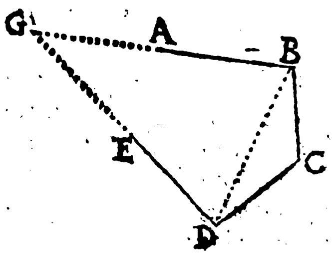
COROLLARIVM.

Patet, si recta linea secuerit vnam parallelarum, secare quoque alteram.

Nam ostensa est recta A D, secans vnam parallelarum F E, secare quoque reliquam B C.

SCHOLIVM.

Hinc colligitur, quòd, si quatuor rectę lineę se secuerint, ita vt constituant tres angulos internos ad easdem partes, qui simul sumpti, minores sint quatuor rectis, postremę rectę conuenient, & quadrangulum efficient.



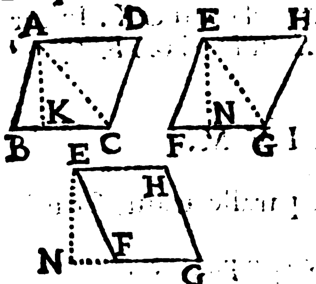
Rectę lineę A B, B C, C D, & D E efficiant tres angulos B, C, & D, internos, & ad easdem partes minores quatuor angulis rectis. Dico postremas rectas lineas B A & D E, productas, concurrere ad partes A & E vt in G, & efficere quadrilaterum. Coniungatur recta linea B D. Quoniam tres anguli A B C, C, & C D E, minores sunt quatuor rectis angulis, suntque r tres anguli trianguli B C D ęquales duobus rectis. Igitur s duo residui anguli A B D, & E D B, simul sumpti, minores erunt duobus rectis; & propterea t rectę B A, & D E productę, conuenient vt in G.

r prop. 32.
s Axio. 4.
t prop. 29.

PROPOS. XXX. THEOR. XX.

Si in duobus parallelogrammis vnus angulus vni angulo æqualis fuerit, atque bases inter se, pariterque altitudines æquales fuerint: etiam parallelogramma erunt æqualia inter se.

In duobus parallelogrammis BD, & FH sint anguli B, & F æquales, & bases BC, FG æquales, atque perpendiculares, seu altitudines AK, EN æquales.



Dico parallelogramma BD, FH æqualia esse. Ducantur diametri AC, EG. Quia in triangulis ABK, EFN sunt anguli B & F æquales, & duo anguli recti K & N, atque latera AK, EN æqualia, quæ opposita sunt angulis æqualibus. Ergo a BA, FE æqualia sunt. Et quoniam circa angulos

a prop. 25. æquales B. F, latera AB, EF sunt æqualia, atque latera BC,

b prop. 4. FG sunt pariter æqualia. Igitur b triangula ABC, EFG æ-

c prop. 26. qualia sunt, & c eorum dupla parallelogramma BD, FH æqualia quoque erunt. Quod, &c.

SCHOLIVM.

Facilè colligitur, quòd in duobus triangulis, aut parallelogrammis, si vnus angulus vni angulo æqualis fuerit, aut ambo simul æquales sint duobus angulis rectis, & latera eleuata fuerint æqualia: erunt perpendiculares à summitatibus triangulorum, vel parallelogrammorum, ad eorum bases ductæ, æquales inter se. Vocentur dictæ perpendiculares Altitudines triangulorum.

In triangulis, & parallelogrammis ABC, & EFG sint anguli B & F æquales inter se, vel ambo simul sint æquales duobus rectis, & latera eleuata AB & EF sint æqualia; & à summitatibus A, & E ducan-

d prop. 11. *tur d perpendiculares AK, & EN, quæ secent bases BC, & FG in K, & N. Dico perpendiculares AK, EN æquales esse. Et primò, si anguli*

e prop. 10. *B & F recti sint, patet e ipsamet latera æqualia AB, EF perpendicularia esse. At si anguli B & F sint æquales duobus rectis; cùm f etiam an-*

f prop. 12. *guli deinceps, facti à recta EF super NFG, sint æquales duobus rectis,*

g Axio. 3. *ablato g communi, remanent anguli B, & EFN æquales inter se; &*

ideo

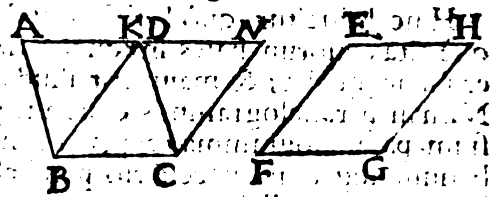
ideo h ambo acuti, aut ambo obtusi: cadunt verò i perpendiculares ad partes acutorum angulorum. Igitur efficientur duo triangula A B K, E F N; quę habent angulos B & F ęquales; nec non angulos rectos K & N ęquales; atque latera A B, E F angulis rectis opposita, etiam ęqualia inter se. Ergo k perpendiculares A K, & E N ęquales erunt. Vocentur triangula, vel parallelogramma A B C, & E F G æquè alta. h prop. 14. i Schol. 1. prop. 18. k prop. 25.

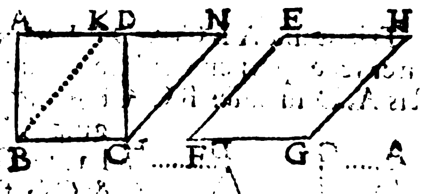
PROPOS. XXXI. THEOR. XXI.

Eucl 35. 36. I.

Si duo parallelogramma non ęquiangula bases ęquales, & altitudines ęquales habuerint, erunt ęqualia.

In parallelogrammis A C, E G, non ęquiangulis, sint bases B C, F G ęquales, & parallelogrammorum altitudines sint etiam ęquales. Dico parallelogramma A C, & E G esse ęqualia. Fiat a angulus C B K ęqualis angulo F, & ducatur b C N parallela B K, & producta A D secet c parallelas B K, C N in K & N; factumque d erit parallelogrammum B C N K, cùm etiam A N sit parallela B C. Quoniam in triangulis A B K, & D C N est e angulus C D N externus ęqualis interno, & opposito angulo B A K (propter parallelas A B, C D); pariterque f internus angulus C N D ęqualis est externo B K A, in parallelis C N, B K, & duo g latera B A, C D, subtendentia ęquales angulos, sunt inter se æqualia, cùm sint latera opposita parallelogrammi A C. Ergo h triangula A B K, & D C N æqualia sunt inter se. Et (in primo, & secundo casu) addita i communiter figura B C D K, erit parallelogrammum A C ęquale parallelogrammo B N. At (in tertio casu) k ablato communiter triãgulo D O K, erunt quadrilatera A B O D & N K O C ęqualia inter se; additoque l communi triangulo B O C, erit pariter parallelogrammum A B C D ęquale parallelogrammo B C N K. Item quia parallelogramma B N, & A C sunt inter easdem paral-

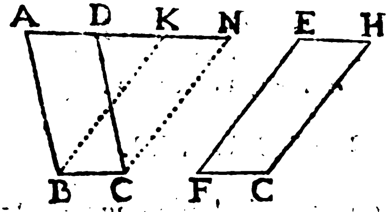




a prop. 24. b Coroll. prop. 16. c Coroll. prop 29. d prop. 26. e prop 15. f prop. 15. g prop. 26. h prop. 25. i Axio. 2. k Axio. 3. l Axio. 2.

 lelas

m prop. 26. lelas A N & B C, erunt m æquè alta; cùm omnes perpendiculares, seu distantiæ parallelarum A N & B C, equales sint. Posita autem fuerunt parallelogramma F H & A C æquè alta. Igitur parallelogramma B N & F H equè alta sunt, & habent bases B C, F G equales inter se, atque angulos K B C, & F equales inter se. Ergo parallelogrammum n F H æquale est parallelogrammo B N: Sed ostensum fuit parallelogrammum A C equale eidem parallelogrammo B N. Igitur o parallelogramma A C, & F H equalia sunt inter se.



n prop. 30.

o Axio. 1.

COROLLARIUM.

Hinc deducitur, quòd, si fuerint duo parallelogramma æquè alta, quorum bases inæquales sint, parallelogramma erunt inequalia; & maius erit illud, cuius basis maior est: Nam in parallelogrammis equè altis, posita æqualitate basium, parallelogramma p æqualia sunt; sed si vna æqualium basium augeatur, necessariò parallelogrammum augetur. Ergo illud parallelogrammum maius erit, cuius basis maior est.

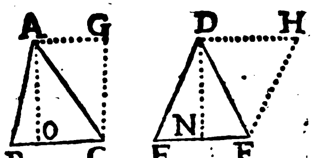
p prop. 31.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXII.

Eucl. 37. 38. I.

Triangula, quorum bases equales, & altitudines sunt æquales, erunt æqualia inter se.

Triangula A B C, & D E F habeant bases B C, E F æquales inter se, & perpendiculares, seu altitudines A O, D N à punctis A, D ad bases B C & E F ductæ, sint æquales. Dico triangula A B C, D E F esse inter se equalia. Ducta a A G parallela ipsi B C, & C G facta parallela ipsi B A, fiat parallelogrammum A B C G. Pari ratione compleatur parallelogrammum E D H F. quoniam parallelogramma B G, & E H habent bases B C, E F æquales, & altitudines æquales (cùm perpendiculares



a Corolll. prop. 16.

res

res A O & D N sint altitudines parallelogrammorum B G & E H). Ergo b parallelogramma B G & E H æqualia sunt inter se, & eorum semisses c pariter æquales erunt: Suntque d triangula A B C, & D E F dimidia parallelogrammorum B G, & E H. Igitur triangula A B C, & D E F æqualia sunt inter se. Quod &c. b prop. 31. c Axio. 5. d prop. 26.

COROLLARIVM I.

Deducitur, quòd, si duo triangula fuerint æquè alta, & bases inæquales sint, erunt triangula ipsa inæqualia; maiusque erit illud, cuius basis maior est.

COROLLARIVM II. Eucl. 41. I.

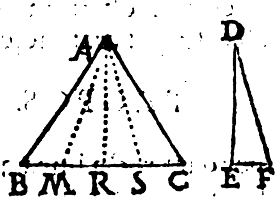
Manifestum est, si parallelogrammum, & triangulum habuerint bases æquales, atque altitudines æquales, esse parallelogrammum duplum ipsius trianguli.

Habent enim parallelogrammum B G, & triangulum D E F bases B C & E F æquales, atque altitudines etiam æquales; & ostensum fuit e triangulum A B C æquale triangulo D E F. Ergo parallelogrammum B G (quod f duplum est ipsius trianguli A B C) erit quoque duplum alterius trianguli D E F. e prop. 32. f prop. 26.

COROLLARIVM III.

Patet etiam, quòd, si fuerint duo triangula æquè alta, & basis vnius aliquoties metiatur basim alterius, triangulum quoque toties reliquum triangulum metietur, quoties basis basim metitur.

Si enim in triangulis A B C; D E F, æquè altis, ipsa basis E F metiatur aliquoties basim B C, vt verbi gratia quater, atque à punctis diuisionum M, R, & S ad verticem A coniungantur rectæ lineæ: distributum erit triangulum A B C in tot triangula A B M, A M R, A R S, A S C, quot sunt bases æquales B M, M R, R S, & S C. Suntque prædicta triangula æquè alta, tum inter se, tum ipsi D E F (quandoquidem à puncto A perpendicularis ad basim B C ducta, altitudo communis est & æqualis altitudini



dini trianguli D E F ; & omnes bases ęquales sunt. Igitur triangula *g* omnia, in quę distribuitur triangulum A B C, ęqualia sunt, tum inter se, cùm ipsi triangulo D E F. Et propterea toties triangulum D E F metietur ipsum triangulum A B C, quoties illius basis E F, huius basim B C metitur.

g prop. 32.

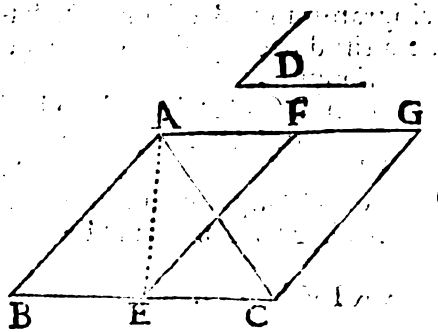
PROPOS. XXXIII. PROBL. XI.

Eucl. 42. I.

Dato triangulo, ęquale parallelogrammum constituere in dato angulo.

Sit datum triangulum A B C, & angulus D. Describendum est parallelogrammum æquale ipsi triangulo, habens angulum ęqualem angulo D. Secta *a* B C bifariam in E, ducatur A E, & angulus C E F fiat *b* ęqualis angulo D, & C G ducatur *c* parallela ipsi E F, & A G ducatur parallela ipsi B C. Patet *d* spatiũ C F parallelogrãmum esse: quod cùm habeat eandem basim E C cum triangulo A C E; sintque prędicta spatia inter easdem parallelas A G, & E C. Ergo *e* parallelogrammum E G duplum est trianguli A E C; *f* Sed triangulum A B E ęquale est triangulo A E C (cùm bases B E, & E C ęquales, & eandem altitudinem habeant). Ergo duo triangula A B E, & E A C simul, idest triangulum A B C, duplum erit trianguli A E C. Erat autem spatium E G duplum quoque eiusdem trianguli A E C. Ergo *g* parallelogrammum E G ęquale est triangulo A B C. Quapropter dato triangulo, &c. Quod erat faciendum.

a prop. 9.
b prop. 24.
c Coroll. prop. 16.
d prop. 26.
e Coroll 2. prop. 32.
f prop. 32.
g Axio. 5.



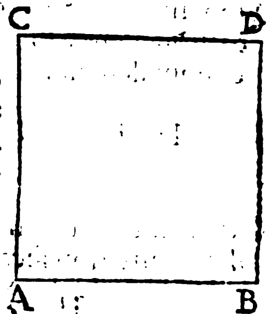
PROPOS. XXXIV. PROBL. XII.

Eucl. 46 I.

Super data recta linea quadrilaterum describere, cuius omnia latera ęqualia sint inter se, atque omnes eius anguli recti sint. Vocetur talis figura Quadratum.

Sit data recta A B, supra quam figura imperata describenda

da est. Eleuetur *a* C A perpendicularis super A B; & *b* secetur *a Prop. 10.*
C A çqualis ipsi A B; ducaturque *c* C D parallela ipsi A B, & *b prop. 3.*
B D parallela alteri A C, conueniens *d* cum D C in puncto D. *c Coroll. prop 16.*
Dico spatium parallelogrammum A D esse çquilaterum, & *d Coroll.*
çquiangulum. Quia A D parallelogrammum est. Ergo *e* la- *prop. 29.*
tus C D çquale est opposito lateri A B; sed eidem A B ex con- *e prop. 26.*
structione est equale C A. Ergo *f* C D *f Axio. 1.*



çquale est ipsi C A. Sed *g* rursus eidem *g prop. 26.*
C A æquale est latus illi oppositum B
D. Ergo B D çquale est ipsi C D; estque *h prop. 26.*
eidem C D çquale latus *h* oppositum A
B. Ergo B D, & A B inter se sunt çqua-
lia. Patet ergo omnia latera parallelo-
grammi A D çqualia esse inter se. Quo-
niam *i* verò in parallelogrammo A D *i Prop. 15.*
duo interni anguli A, & C çquales sunt
duobus rectis; estque A, ex constru-
ctione, rectus. Ergo C quoque rectus est. Cùmque *k* anguli *k prop. 26.*
B, & D suis oppositis sint çquales. Ergo erunt anguli B, & D
recti quoque. proptereaque anguli omnes figurç A D recti
erunt. Descripsimus ergo super A B figuram A D, quam
ostendimus esse çquilateram, & çquiangulam. Vt quçreba-
tur. Vocetur illa Quadratum.

COROLLARIVM.

Ex postrema parte huius propositionis colligitur, cuiuslibet parallelogrammi, cuius vnus angulus rectus sit, esse omnes alios angulos eius, rectos.

Finis Libri primi.

Eucl. lib. 3. III.

LIBER

SECVNDVS.

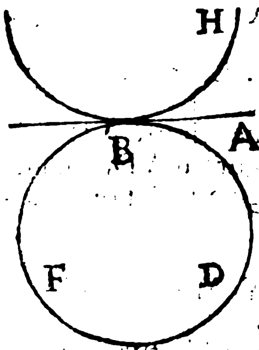
Quoniam in hoc libro considerantur primæ, & elementares passiones circulorum, propterea prius aliquæ definitiones exponi debent.

DEFINITIONES.

I.

Recta linea circulum tangere dicitur, cùm in circulum incidens, eum non secat.

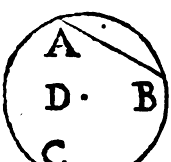
II.



Circulus circulum tangere dicitur, cùm, vnius peripheria, in alteram incidens, non secat circulum.

Posito circulo B F D, si aliqua recta A B, incidens in circulum, & producta eum non secat, Tangens vocabitur; pariterque peripheria B H, si incidat in circulum B D, & eum non secet, Tangens appellabitur. At si producta circulum secat, vocabitur Secans.

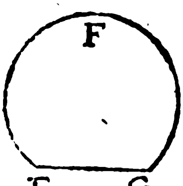
III.



Recta linea dicitur applicari, seu coaptari circulo, cùm eius termini fuerint ad circuli peripheriam.

Vt recta linea A B coaptata erit, vel applicata circulo A B C, quando termini A, & B ipsius rectę lineę fuerint in ipsa peripheria circuli A B.

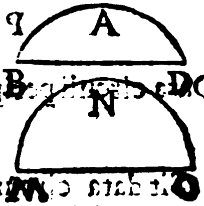
IV.



Segmentum circuli est figura, quæ sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

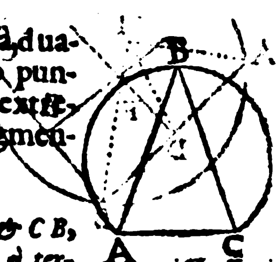
Vt

Vt si in circulo ducatur quælibet recta linea B D, vel E G, aut M O, secans circulum: erit tam segmentum B A D, quàm M N O, vel E F G segmentum circuli. Hæc autem segmenta varia nomina sortiuntur: Si enim centrum circuli fuerit intra eius superficiem: dicetur segmentum maius, vt est E F G; si verò extra ipsum fuerit, vt in B A D: dicetur segmentum minus. Et tandem si centrum fuerit in ipsa recta linea secante, vt in M N O: tale segmentum appellabitur semicirculus.



V.

Angulus in segmento dicitur ille, qui à duabus rectis lineis concurrentibus in vno puncto circumferentiæ, & terminatis in extremitatibus rectæ lineæ, quæ basis est segmenti, continetur.



Vt in segmento A B C duæ rectæ lineæ A B, & C B, concurrentes in quolibet eius puncto B, eductæ à terminis A, C, efficiunt angulum A B C, constitutum in dicto segmento.

AXIOMA.

Duo circuli, quorum radij sunt inter se æquales, erunt æquales inter se. Et contra circulorum æqualium radij æquales sunt.

Manifestum est eos circulos æquales esse, quorum superficies sibi mutuò congruunt: Sed quoniam si duæ rectæ lineæ æquales reuoluantur in plano circa alterum eius punctum fixum, quousque redeant ad locum, vnde moueri cœperant, necesse est, vt circuli geniti sibi mutuò congruant, quandoquidem rectæ lineæ reuolutæ spatia æqualia determinant, eo quod ipsæ semper inter se sunt æquales. Vnde liquet circulos, quorum diametri æquales sunt inter se, esse quoque æquales, & è contra. Et, si radius vnius circuli, vel diameter maior fuerit radio, vel diametro alterius circuli, erit hic maior isto circulo, & è contra maior circulus maiorem radium, vel diametrum habebit.

I PRO-

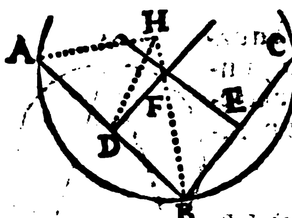
PROPOS. I. PROBL. I.

Eucl. 1 & 25. lib. III.

Data circuli peripheria, reperire centrum circuli, cuius illa est peripheria.

Sit data circunferentia A B C, siue integra, siue non. Debet reperiri centrum illius circuli, cuius A B C est peripheria. Sumantur in dicta circunferentia tria quælibet puncta A, B, & C, & coniungantur rectæ A B, & B C. Postea a ambæ bifariam secentur in punctis D, & E, à quibus excitentur b perpendiculares, D F quidem supra A B, & E F super B C. Et quia tres anguli, simul sumpti, interni, & ad easdem partes, scilicet duo anguli recti F D B, F E B, vnà cum angulo D B E, minores sunt quatuor rectis. Ergo c D F, E F conuenient vt in F. Dico iam punctum F concursus perpendicularium esse centrum illius circuli, cuius A B C est peripheria. Si hoc verum non est, sit centrum circuli A B C punctum H, aliud, quàm F, concursus rectarum linearum D F, E F; ideoque punctum H cadet, si non extra ambas, saltem extra vnam perpendicularium D F Coniungantur rectæ A H, B H, D H. Quoniam in duobus triangulis A H D, D H B sunt latera A D, B D æqualia; & D H commune, atque bases A H, B H æquales, cùm sint radij circuli. Ergo d anguli A D H, B D H æquales sunt; ideoque e recti: erat autem angulus A D F rectus. Igitur anguli A D F, & A D H æquales sunt inter se; pars, & totum, quod est impossibile. Non Ergo punctum H, aliud, quàm F, esse potest centrum circuli A B C. & propterea ipsum punctum F centrum erit. Quod erat faciendum.

a prop. 9. lib. 1.
b prop. 10. lib. 1.



c Sch. prop. 29. lib. 1.
d prop. 8. lib. 1.
e prop. 10. lib. 1.

SCHOLIVM.

Euclid. 5. IV.

Hinc deducitur artificium, quomodo per tres angulos cuiuslibet trianguli, siue per tria quælibet puncta, non in directum posita, circuli peripheria duci debeat. Si enim per A, B, C ducenda sit circuli peripheria, secari f debent bifariam rectæ A B, B C in D, & E, & eleuari g perpendiculares D F, & E F, cōcurrentes in F; intelliganturq; rectæ A F, B F, & C F coniunctæ. Et quoniam in triangulis A D F, B D F circa angulos rectos

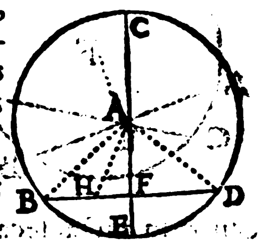
f prop. 9. lib. 1.
g prop. 10. lib. 1.

Bos æquales in D sunt latera A D, B D æqualia, atque D F commune. Ergo h A F æqualis est F B. Eadem ratione C F æqualis erit eidem F B. Et propterea tres rectæ F A, F B, & F C æquales erunt. ideoque centro F, radio F A circulus descriptus transibit per puncta A, B, C. h prop. 4. lib. 1.

PROPOS. II. THEOR. I.

Eucl. 3. III.

Si applicatarum in circulo quædam recta linea per centrum extensa, aliam, non per centrum ductam, bifariam secet: & ad angulos rectos eam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet, bifariam quoque secabit.



Per centrum A, circuli D B C, recta C E applicata, diuidat rectam B D, non per centrum extensam, bifariam in F. Dico rectam C F perpendicularem esse supra B D. Ductis radijs B A, & A D, erunt in triangulis A F D, & A F B duo latera B F, & F D æqualia, ex hypothesi, & F A commune, & bases A B, & A D æquales, cùm sint radij circuli. Ergo a anguli A F B, & A F D æquales erunt. ideoque b recti. Quod erat primum. a prop. 7. lib. 1. b prop. 10. lib. 1.

Secundò A F, per centrum ducta, sit perpendicularis ad D B. Dico B D in F bifariam sectam esse. Si enim hoc verum non est, secetur c B D bifariam in H, alibi, quàm in F; & iungantur rectæ lineæ A H, A B, A D. Et quia A H, per centrum extensa, secat rectam B D bifariam in H. Ergo (ex prima parte) angulus A H B rectus est: erat autem angulus A F B rectus. Igitur in triangulo A H F externus angulus A H B æqualis est interno, & opposito angulo F; Quod d est absurdum. Non ergo B D alibi, quàm in F, secari potest bifariam. Quare patet propositum. c prop. 9. lib. 1. d Coroll. 1. prop. 8. lib. 1.

COROLLARIVM.

Ex demonstratione huius propositionis constat, in quolibet triangulo isoscelio lineam, secantem basim bifariam, esse ad eandem basim perpendicularem. Et è contra, si ad basim perpendicularis fuerit, eam bifariam secabit. Nam in triangulo isoscelio A B D recta A F, secans bifariam basim B D, ostensa est perpendicularis supra B D: & è contra.

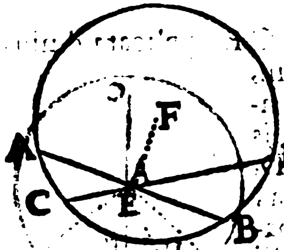
I 2 PRO-

Eucl. 4. III.

PROPOS. III. THEOR. II.

Si applicatarum in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuò secent, non per centrum extensæ, se se mutuò bifariam non secabunt.

In circulo A B D duæ rectæ lineæ A B, & C D se mutuò secent in E, sed non ambæ applicatæ per centrum F sint ductæ. Dico non posse se se mutuò bifariam secare. Si enim vna earum per centrum transit, non secabitur bifariam ab altera, non transeunte per cētrum; eo quod solummodo in centro diameter bipartitur. Sed si neutra per centrum transit, ex centro F ducatur recta F E ad concursum E, ostendendum est rectas A B, & C D in puncto E se se non secari bifariam. Si enim hoc verum non est, sint ambæ in puncto E sectæ bifariam. Et quoniam F E, per centrum ducta, secat bifariam A B. Ergo a ad angulos rectos eam secabit. Eadem ratione recta C D ab ipsa F E secabitur ad rectos angulos. Quare anguli F E B, & F E D recti erunt. ideoque æquales inter se; pars, & totum, quod est impossibile. Non ergo ambæ rectæ A B, & C D in puncto E se se bifariam secant. Quapropter, &c.

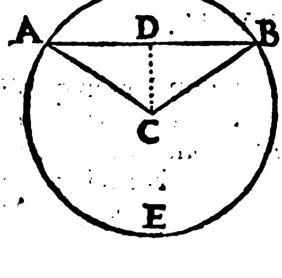


a prop. 3. lib. 3.

Eucl. 2. III.

PROPOS. IV. THEOR. III.

Si in circuli periphéria duo quælibet puncta accepta fuerint, recta linea ipsa puncta coniungens, intra circulum cadet.



In circulo A B E recta linea A B cōiungat duo quælibet pūcta, in eius peripheria assumpta, A & B. Dico rectā A B intra circulū cadere. Sūpto enim quolibet puncto intermedio D in recta A B; à centro C coniungantur rectæ C A, C B, C D. Quoniam in triangulo isoscelio C A B duo latera C A, & C B æqualia sunt. Ergo a anguli, supra basim,

a prop. 6. lib. 1.

sim, A, & B ęquales inter se erunt. Est autem angulus C D A externus *b* maior interno B in triangulo C B D. Igitur idem angulus C D A maior erit angulo C A D; & propterea *c* latus A C, oppositum maiori angulo, maius erit latere D C. Quare recta C D minor erit radio circuli C A; ideoque C D ad peripheriam circuli non perueniet. Vnde punctum D intra circulum existet. Eadem ratione quodlibet aliud punctum ipsius rectę A B intra circulum cadet, & propterea ipsamet recta linea A B, intra circulum extensa erit. Quod erat ostendendum.

b Coroll. 5. prop. 18. lib. 1.
c prop. 20. lib. 1.

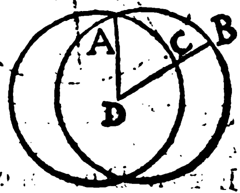
COROLLARIVM.

Hinc manifestum est rectam lineam, circulum tangentem in vnico puncto ipsum tangere. Nam, si in duobus punctis eum tangeret, pars rectæ, inter duo ipsa puncta intercepta intra circulum caderet: & sic circulum secaret; quod est contra hypothesin.

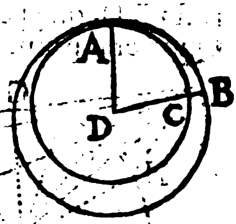
PROPOS. V. THEOR. IV.

Eucl. 5. & 6. III.

Si duo circuli se se mutuò secent, siue interius tangant, non erit eorum idem centrum.



Sint duo circuli A B & A C, qui se se secent, vel tangant in puncto A. Dico ipsos non habere idem centrum. Si enim fieri potest, sit vtriusque centrum D; à quo recta D A ad tactum, vel sectionem ducatur, & altera D C B, secans vtranque peripheriam in punctis C, & B. Quoniam D est centrum circuli A B. Ergo *a* radius B D æqualis est radio D A. Rursus quoniam D ponitur centrum circuli A C, erit radius C D æqualis eidem radio D A: ideoque duæ rectę B D, & C D ęquales erunt inter se, pars, & totum, quod est absurdum. Non ergo duo circuli A B, & A C commune centrum D habere possunt. Quod erat ostendendum.



a Axio. 12. lib. 1.

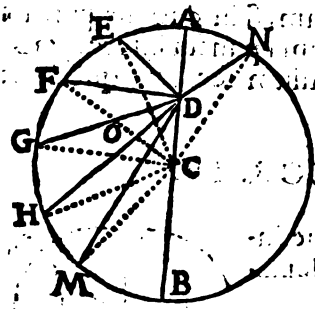
PRO-

Eucl. 7. & 8. III.

PROPOS. VI. THEOR. V.

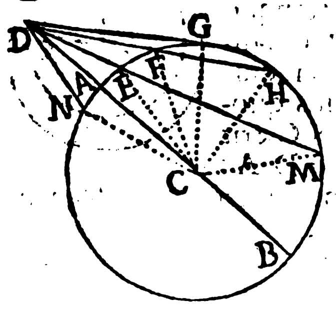
Rectarum, ad peripheriam cadentium à puncto, quod circuli centrum non est, maxima est illa, quæ per centrum transit; minima verò residuum, vel productio diametri; reliquarum verò, quę maiorem angulum ad centrum subtendit, maior erit subtendente angulum minorem; duę autem solùm rectæ lineæ ęquales ab eodem puncto ad vtrasque partes diametri cadent.

In circulo A G B, cuius centrum C, sumatur quodlibet punctum D, aliud à centro (siue intra, vt in prima figura, siue extra circulum, vt in secunda, siue in eius peripheria, vt in tertia); & à puncto D ducatur ad circuli peripheriam quotcunque lineæ rectæ D B, D M, D H, D G, D F, D E, D A & D N, quarum D B per centrum transeat. Dico rectam D B maximam esse omnium. A centro C ad puncta M, H, G, &c. coniungantur radij C M, C H, C G, &c. Quoniam duo a radij C M, & C B ęquales sunt, addita communi C D: erunt duæ rectæ M C & C D simul, æquales rectæ B D; sed b D M minor est, quàm duo latera C M & C D simul, in triangulo M C D. Ergo M D minor est, quàm B D. Eadem ratione minor erit D H, quàm B D, & sic reliquę omnes, D G, D E, &c. Quare recta B D, quę per cētrum ducitur, maxima est omnium, &c. Quod erat primum.



a Axio. 12. lib. 1.

b prop. 21. lib. 1.

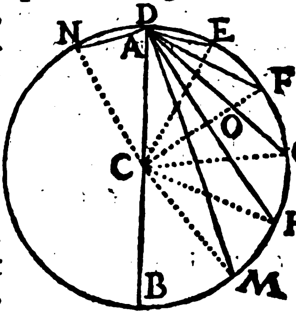


Secundò dico, quod D A (quę est residuum diametri in prima figura, & eius productio in secunda) est minima omnium rectarum, quę à puncto D duci possunt in circulo. Quoniam in triangulo D C E est D A, differētia duorum laterum D C, & E C; eo quod C E, & C A, radij circuli, ęquales inter se sunt. Ergo c erit D A, differentia laterum, minor, quàm basis D E. Eadem ratione erit

c prop. 21. lib. 1.

erit D A minor qualibet alia D F, aut D G, aut D N, &c. Quare D A minima est omnium, quæ à puncto D in circulum duci possunt. Quod erat secundum.

Tertiò quęlibet recta D G subtendat angulum G C D, ad centrum, maiorem angulo F C D, subtenso à recta F D. Dico D G maiorem esse, quàm D F; & siquidem D G secat radium F C intra circulum in puncto O, (vt in primo, & tertio casu). Quoniam d in triangulo G O C duo latera G O, & O C maiora sunt, quàm G C; pariterque in triangulo D O F duo latera D O & O F simul sumpta, maiora sunt, quàm F D. Quare quatuor rectę lineę G O O D F O, & O C, idest duę G D, & F C, simul sumptę, maiores erunt duabus F D & G C; & ab his aggregatis inęqualibus auferantur ęquales radij G C, & F C; relinquetur e G D maior, quàm F D. Si verò D G non secat radium F C (vt in secundo casu). Quoniam intra triangulum D G C concurrunt rectę lineę D F & C F, à terminis basis D C ductę. Ergo f duę C G & G D, simul sumptę, maiores sunt, quàm duę C F & F D; & ab his inęqualibus aggregatis tollantur ęquales C G, C F, radij circuli: erit g residua G D maior residua F D.



d prop. 21. lib. 1.

e Axio. 4. lib. 1.

f prop. 21. lib. 1.

g Axio. 4. lib. 1.

Quartò fiat h angulus ad centrum D C N ęqualis angulo D C E, & coniungatur D N. Quoniam in triangulis D C N, & D C E circa angulos ęquales ad centrum habent latera N C, & C E ęqualia (cùm sint radij circuli), & C D latus cōmune. Ergo k bases D N, & D E ęquales sunt; sed quęlibet alia, quę vltra punctum E, vt est D F, ducitur, maior ostensa est, quàm D E; eo quod maiorem angulum ad centrum D C F subtendit: Ergo maior quoque erit, quàm D N. Rursus quęlibet alia ducta citra D E versus punctum A minor ostensa est, quàm D E, ergo minor quoque erit, quàm D N. Vnde duę solummodo D N, & D E ęquales duci possunt ad vtrasque partes diametri. Quod erat ostendendum.

h prop. 24. lib. 1.

k prop. 4. lib. 1.

COROLLARIVM I.

Manifestum est propinquiorem rectam lineam maximæ remotiore semper maiorem esse, si comparentur eæ, quæ in

cauam

cauam peripheriam cadunt. Et contra propinquiorem mini-me remotiore minorem esse, si comparentur illę, quę in conuexam peripheriam cadunt.

Eucl 9. III.

COROLLARIVM II.

Si in circulo acceptum fuerit punctum, & ab eo ad peripheriam cadãt plures, quàm duæ rectæ lineę ęquales inter se: acceptum punctum centrum erit circuli. Quia à quolibet puncto, quod centrum non est, duę solum modo rectę lineę ęquales duci possunt, & non plures, vt constat ex postrema parte propositionis. Ergo punctum, à quo plures, quàm duę rectę, ęquales cadunt, non poterit esse non in centro collocatum. Quare centrum sit necesse est.

Eucl. 24. I.

COROLLARIVM III.

Colligitur ex tertia parte huius propositionis, quòd, si fuerint duo triangula, habentia duo latera duobus lateribus æqualia, vtrumq; vtriq; angulus verò cõprehensus maior angulo comprehenso à dictis lateribus: erit basis maior base. In triangulis enim D C M, & D C H latera M C, H C ęqualia erant, & latus D C commune, & angulus D C M maior angulo D C H, & ostensa fuit basis D M maior base D H.

Eucl 25. I.

SCHOLIVM.

Conuersum huius corollarij facilè ostendi potest. Suppositis lateribus vtrumque vtrique ęqualibus, si bases inęquales sint, erit angulus, à maiore base subtensus, maior reliquo. Nam, si maior non est, erit ęqualis, aut minor illo; & ideo basis ęqualis, aut minor illa erit, quod est contra hypothesim: Erat enim maior. Quare patet propositum.

Eucl. 10. III.

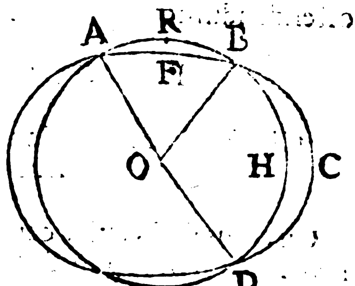
PROPOS. VII. THEOR. VI.

Circulus circulum in pluribus, quàm in duobus punctis, non secat.

Secent se se duo circuli A B H R, A B C F, si fieri potest, in tribus punctis A, B, & D; & reperto a centro O circuli A B H, ab eo ducantur radij O A, O B, & O D ad tria puncta sectionum

a prop. 1. huius.

num circulorum, qui radij æquales erunt inter se. Et quoniam intra circulum alium A B C F sumptum est punctum O, & ab eo cadunt in circuli peripheriam plures, quàm duæ rectę lineæ æquales O A, O B, & O D, Ergo b punctum O centrum est circuli A B C F; erat autē idem punctum O centrum alterius circuli A B H. Ergo duo circuli, se se secantes, habent idem centrum, quod c est absurdum. Non ergo duo circuli se se secant in pluribus, quàm in duobus punctis. Quod erat ostendendum.



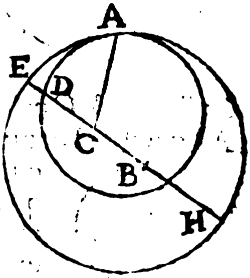
b Coroll. 2. prop. 6 huius.

c prop. 5. huius.

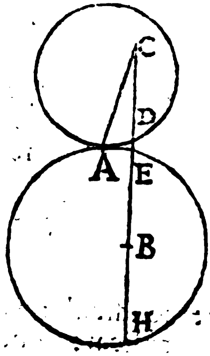
PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 11. & 12. III.

Recta per centra duorum circulorum se tangentium producta, per contactum transibit.



Sint duo circuli A E, cuius centrum B, & A D, cuius cētrum C se se interius, vel exterius tangentes in puncto A. Dico tria puncta B A, & C in vna recta linea esse. Si hoc verum non est, recta linea B C, centra coniungens (producta), secet peripheriam circuli A E in punctis H & E, & peripheriam circuli A D in puncto D. Et quoniam sumptum est punctum C, quod non est centrum circuli A E H (intra ipsum in prima figura, & extra in secunda), atque à puncto C per centrum B ducta est recta linea C E B H: erit a C E, (quæ est residuum diametri H E) minima omnium rectarum, ex puncto C cadentium in peripheriam circuli A E H. Ergo C E minor est, quàm C A; estque b C A radius æqualis radio C D in circulo A D. Ergo C E minor erit, quàm C D, totum minus sua parte, quod est absurdum. Non ergo recta B C, centra coniungens (producta) se-



a prop. 6. huius.

b Axio. 1 lib. 1.

K cat

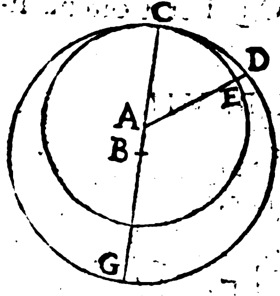
cat circulos alibi, quàm in eorum contactu A. Quod erat ostendendum.

Eucl. 13. III.

PROPOS. IX. THEOR. V.

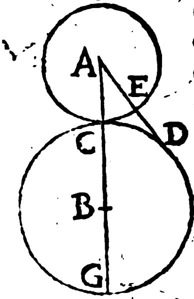
Circulus circulum in vno tantùm puncto, siue intus, siue extra tangit.

Circulus C E, cuius centrum A, tangat circulum C D, cuius centrum B, in puncto C (interius quidem, vt in prima figura, exterius, vt in secunda). Dico in vnico puncto tantummodo circulos se tangere. Ducta per contactum C, & per centra B, & A recta linea B A C,



quæ vnica recta erit, vt in proxima propositione ostendimus, & producta in punctō G, & ducta, vtcunque, alia recta A E D, secante peripherias circulorum in punctis E, & D. Quoniam in circulo C D sumptum est punctum A, quod non est eius centrum, atque ab eo ductę sunt plures rectæ A C & A D, estque A C complementum diametri C G: Ergo a A C minima est omnium, ideoque minor, quàm A D; sed A E æqualis est ipsi A C, quia sunt radij eiusdem circuli C E. Ergo A E minor est, quàm A D: ideoque punctum D vltra punctum E constitutum est: & propterea punctum D peripherię C D extra circulū C E cadit; & sic quodlibet aliud punctum peripherię circuli C D extra circunferentiam C E cadere ostendetur. Cùm ergo omnia puncta peripherię C D G cadant extra peripheriam circuli C E, excepto puncto C. Ergo dicti circuli in puncto C tantummodo se se tangunt. Quod erat ostendendum.

a Prop. 6. huius.

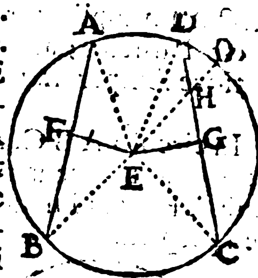


Eucl. 14. III.

PROPOS. X. THEOR. IX.

Perpendiculares, à centro ad ęquales rectas lineas, in circulo applicatas, ductę, erunt inter se æquales. Et si perpendiculares inter se fuerint ęquales, erunt quoque applicatę inter

ter se æquales. Dictæ perpendiculares vocentur Distantiæ, rectarum linearum, applicatarum à centro.



In circulo A B C, cuius centrum E, sint applicatę duę rectę ęquales A B, & C D; ad quas sint ex centro E perpendiculares E F, & E G. Dico E F, & E G ęquales esse. Coniungãtur rectę E A, E B, E C, & E D. Quoniã in duobus triãgulis A B E, & D E C duo latera A E, B E æqualia sunt duobus lateribus D E & C E, atque bases A B, & D C ponuntur ęquales: Ergo a erunt anguli A, & D ęquales inter se; cùmque in triangulis A F E, D G E sint duo anguli recti F, & G æquales; nec non anguli A, & D ostensi ęquales; atque latera A E, & D E ęqualia, subtendentia angulos rectos (cùm sint radij eiusdem circuli). Igitur b latera E F, & E G (quę sunt perpendiculares ex centro ad applicatas ductę) ęqualia sunt inter se.

a prop. 7. lib. 1.

b prop. 25. lib. 1.

Sint secundò perpendiculares E F, & E G ęquales. Dico applicatas A B, & C D ęquales esse. Si enim hoc verum non est, quęlibet earũ, vt C D, sit maior reliqua, & perpendiculares E F, E G ex cẽtro secant c eas bifariam in G, & F. Ergo etiã G D, semissis maioris C D, erit maior, quã F A, medietas minoris. Secetur d iam ex maiori G D recta linea G H ęqualis ipsi F A, iungaturque E H, quę (producta) secet circunferentiam in O. Et quia in triangulis A F E, & H G E circa angulos rectos F, & G sunt duo latera A F & H G æqualia, pariterque E F, & E G fuerunt ęqualia. Ergo e basis E H ęqualis erit basi E A; estque E A circuli radius. Ergo E H ęqualis est radio E A, siue E O, pars ęqualis toto, quod est absurdum. Non ergo C D maior erit, quàm A B. Eadem ratione non erit minor. Quare A B, & C D ęquales erunt, vt fuit propositum. Vocentur perpendiculares E F, & E G Distantiæ, rectarum A B, & C D à centro E.

c prop. 2. huius.

d prop. 3. lib. 1.

e prop. 4. lib. 1.

COROLLARIVM.

Constat duo triangula isoscelia equalium laterum, & ęquè alta, habere bases ęquales.

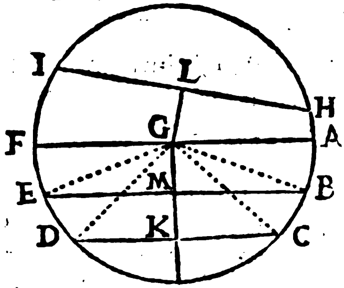
Ostensę enim fuerunt bases A B, & C D ęquales in duobus triangulis isoscelijs A E B, & D E C, in quibus latera sunt æqualia, & altitudines E F, E G equales.

Eucl. 15. III.

PROPOS. XI. THEOR. X.

Rectarum applicatarum in circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem centro propinquior remotiore semper maior est.

In circulo A B C, cuius centrum G, sit diameter A F, & H I propinquior centro, quàm C D. Dico maximam omnium esse A F, & H I maiorem, quàm C D. Ducantur a distantiæ, seu perpendiculares ex centro, G K, & G L super C D, & H I; erit G K distantia maior, quàm G L ex hypothesi. Secetur b ergo G M equalis ipsi G L, & per M ducatur c B M E perpendicularis ad G M, & coniungantur rectæ G B, G C, G D, & G E. Quoniam distantię G M, & G L equales sunt. Ergo rectę d B E, & H I equales inter se erunt. Et quia duę rectę B G, & G E, quæ simul, equales sunt diametro A F, maiores e sunt, quàm B E, erit diameter A F maior, quàm B E, seu, quàm H I. Eadem ratione A F maior erit quacunque alia C D. Postea quia duo latera B G, & G E trianguli B G E equalia sunt duobus lateribus C G, & G D alterius trianguli D G C, estque angulus B G E maior sua parte angulo C G D. Ergo f basis B E maior est base C D, idest H I maior est, quàm C D. Quapropter, &c.



a prop. 12. lib. 1.

b prop. 3. lib. 1.

c prop. 10. lib. 1.

d prop. 10. huius.

e prop. 21. lib. 1.

f Coroll. 3. prop. 6. huius.

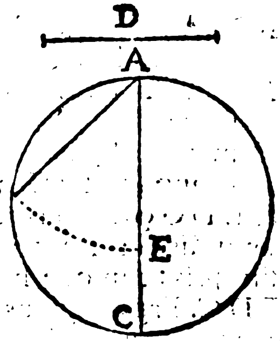
Eucl. 1. IV.

PROPOS. XII. PROBL. II.

In dato circulo rectam lineam applicare equalem datæ rectę lineæ; oportet autem datam rectam lineam diametro circuli non esse maiorem.

In circulo A B C, cuius diameter A C, debet applicari linea recta, quę equalis sit datæ rectę D; sed oportet lineam D esse equalem, aut minorem diametro A C. &, si fuerit equalis, factum erit problema: Si verò D minor fuerit diametro A C, sece-

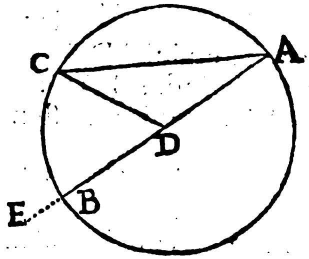
secetur a A E ęqualis ipsi D, & centro A, radio A E describatur circulus E B, secans priorem in B, & iungatur recta A B. Dico lineam rectam A B problema efficere. Quoniam D ęqualis facta est ipsi A E, & A B ęqualis est eidem A E (cùm sint radij circuli E B), Ergo recta A B, applicata in circulo A B C, æqualis est datæ rectæ D. Quod erat faciendum. a prop.3. lib. 1.



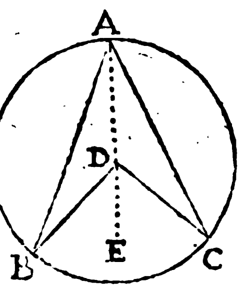
PROPOS. XIII. THEOR. XI. Eucl. 20. III.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad peripheriam, cùm eadem peripheria fuerit basis angulorum.

In circulo A B C, cuius centrum D, constituantur super basim B C duo anguli B D C ad centrum, & B A C ad peripheriam. Dico angulum B D C duplum esse anguli B A C. Ducatur recta A D coniungens angulos ad centrum, & peripheriam; & producatur vsque ad E infra angulum ad centrum, & primò A D E cadat in eandem rectam lineam A B. Quoniam a angulus externus B D C duobus internis, & oppositis A, & C est ęqualis in triangulo A D C; suntque b anguli A, & C inter se ęquales, cùm latera D A, & D C sint ęqualia, nempe radij circuli. Ergo angulus B D C duplex est anguli B A C ad peripheriam. a prop. 18. lib. 1. b prop.6. lib. 1.



Secundò cadat recta A D E intra angulum B D C. Et quoniam c in triangulo B A D externus angulus E D B ęqualis est duobus internis, & oppositis B, & D A B, qui ęquales sunt inter se, vt prius dictum est. Pari ratione in triangulo D A C externus angulus E D C ęqualis est duobus internis, & oppositis C, & D A C, qui pariter ęquales sunt inter se. Ergo totus angulus B D C ęqualis est quatuor angulis c prop. 18. lib. 1.



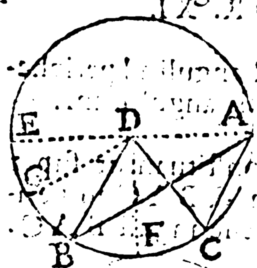
B,

B, DAB, DAC, & C: sed duo anguli B, & C simul æqua-les sunt duobus reliquis, idest angulo BAC. Ergo angulus BDC duplus est anguli BAC. Quod erat secundum.

Tertiò cadat ADE extra angulum BDC, & secet periphe-

d prop. 8. lib. 1. riam in E. Postea secetur d angulus BDC bifariam à recta DF. & angulus EDB bifariam à recta DG. Iam angulis BDG, & EDG ęqualibus addantur ęquales anguli BDF, & CDF. angulus GDF erit ęqualis angulis EDG, & CDF simul sumptis: cùmque hi quatuor anguli sint ęquales toti angulo EDC. Ergo angulus GDF semissis est anguli EDC. Et quo-

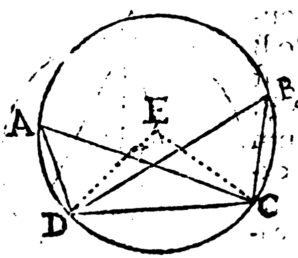
e prop. 18. lib. 1. niam e in triangulo CDA externus angulus EDC ęqualis est angulis DAC, & DCA inter se ęqualibus, erit semissis illius, idest angulus GDF, ęqualis angulo DAC. Rursus quia in triangulo ADB externus angulus EDB æqualis est angulis DAB, & DBA æqualibus, erit semissis illius, idest angulus GDB, ęqualis angulo DAB. Si ergo ab æqualibus angulis GDF, & DAC tollantur ęquales anguli GDB, & DAB, erunt residui BDF, & BAC ęquales inter se: Estque BDF semissis ipsius BDC. Ergo angulus BDC duplus est anguli BAC. Quod erat ostendendum.



PROPOS. XIV. THEOR. XII.

Eucl. 21. III.

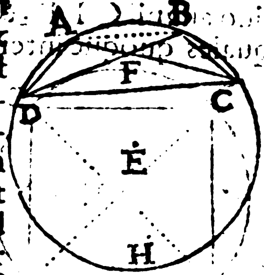
In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli inter se sunt ęquales. Et duo anguli ęquales subtensi ab eadem recta linea, ad easdem partes constituti, sunt in eodem circuli segmento.



In circulo, cuius centrum E, existant duo anguli A, & B in segmento DABC. Dico eos esse æquales. Sit primò segmentum semicirculo maius; & à centro E coniungantur rectę DE, & CE. Quoniam a angulus E ad

a prop. 13. huius. centrum duplus est tam ipsius anguli A, quàm anguli B ad peripheriam; cùm omnes eandem peripheriam DC pro basi habeant. Ergo anguli A, & B inter se sunt ęquales.

Secundò

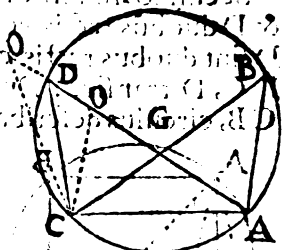


Secundò sit segmentum D A B C, aut semicirculus, aut minor semicirculo; & coniungatur recta A B. Manifestum est segmentum A D H B maius esse semicirculo; & ideo (ex prima parte huius propositionis) duo anguli A D F, & B C F in maiori segmento existentes, æquales sunt inter se: & sunt b pariter duo anguli ad verticem B F C, & A F D æquales inter se. Ergo c in triangulis A D F, & B F C tertius angulus D A F æqualis erit reliquo angulo C B F.

b Coroll. prop. 5. lib. 1.

c Coroll. prop 32. lib. 1.

Tertiò sint duo anguli A B C, & A D C æquales inter se, ad easdem partes, subtensi ab eadē recta A C; & circulus describatur, d cuius peripheria transeat per puncta B, C, & A, cuius centrum sit G. Ostendendum modò est punctum D in eadem segmenti A B C peripheria reperiri. Si hoc verum non est, transeat, si fieri potest, per punctum O vltra, vel citra D. Manifestum est duos angulos A B C, & A O C in eodem segmento A B O C reperiri; e ideoque æquales esse inter se: erat autem ex hypothesi angulus C D A æqualis eidem angulo B. Ergo duo anguli A D C, & A O C æquales erunt inter se, externus interno, & opposito in triangulo C O D, quod f est absurdum. Non ergo peripheria circuli A B C transit vltra, vel citra punctum D. Quare præcisè per D punctum transibit. Quod erat ostendendum.



d Schol. propos. 5. huius.

e ex prima parte huius.

f Coroll. 1. prop 8. lib. 1.

PROPOS. XV. THEOR. XIII.

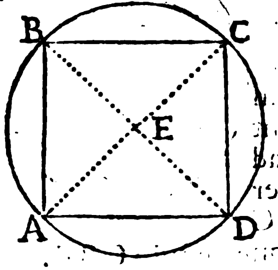
Eucl. 22. III.

Quadrilaterorum in circulo descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales. Et, si in quadrilatero anguli oppositi duobus rectis æquales fuerint, circulus per quatuor puncta quadrilateri transibit.

In circulo, cuius centrum E, inscriptum sit quadrilaterum quodlibet A B C D. Dico duos angulos oppositos A B C, & A D C duobus rectis æquales esse. Ductis diametris quadrilateri A C, & B D: erunt a duo anguli A B D, & A C D in eodem segmento A B C D æquales inter se. Similiter erunt duo

a pre huius.

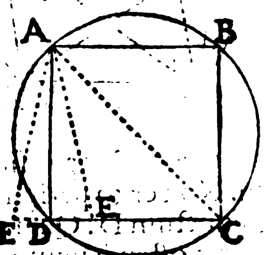
duo anguli C B D, & C A D in eodem segmento C B A D æquales quoque inter se. Ergo duo anguli A B D, & C B D, idest totus angulus A B C æqualis erit duobus angulis A C D, & C A D simul. Ergo addito communi angulo C D A, erunt in quadrilatero duo anguli oppositi A B C, & C D A simul, æquales tribus angulis A C D, C A D, & C D A simul sumptis; sed *b* hi tres vnius trianguli æquales sunt duobus rectis: Ergo duo oppositi A B C, & C D A duobus rectis æquales sunt. Eodem modo ostendentur duo anguli oppositi B A D, & B C D duobus rectis æquales. Patet ergo prima pars.



b prop. 18. lib. 1.

Secundò sint in quadrilatero A B C D anguli oppositi B, & D duobus rectis æquales; pariterque anguli B A D, & B C D sint duobus rectis æquales. Dico circulum per puncta A, B, C, D transire. Ducta diametro C A circa triangulum A C B, circulus describatur; *c* quem dico necessariò transire per punctum D. Si enim hoc verum non est, transeat, si fieri potest, per punctum E vltra, vel citra D; & coniungatur recta A E. Quoniam quadrilaterum A B C E circulo inscribitur: Ergo (ex prima parte huius) duo anguli E, & B, erunt duobus rectis æquales: erant autem ex hypothesi anguli B, & D duobus rectis æquales. Ergo hi duo illis duobus æquales erũt; & ablato communi angulo B, erit angulus E æqualis angulo D, quod est falsum, & contra coroll. 1. propos. 18. lib. 1. Non ergo peripheria circuli transit per punctum E vltra, vel citra D. Quare per puncta A, B, C, D transibit. Quod erat, &c.

c Sch. prop. 1. huius.



PROPOS. XVI. THEOR. XIV.

Eucl. 26. III.

In circulis æqualibus anguli æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti, insistunt æqualibus peripherijs.

In circulis æqualibus, quorum centra G, & H, sint primò anguli ad centrum G, & D H F æquales. Dico peripherias A I C, & D K F, (quæ sunt eorum bases) æquales esse inter se.

Quo-

Quoniam circuli æquales sunt; Ergo a quatuor radij A G, C G, D H, & F H sunt æquales; ponuntur autem anguli G, & D H F æquales: Ergo bases b A C, & D F; nec nõ omnes anguli supra bases triangulorum isoscelium A C G, & D F H æquales erunt. c Iam intelligatur circulus vnà cum triangulo A C G superponi triangulo D H F, ita vt punctum G super H, & recta A G super H D cadat, & angulus G super angulum H, cadent d necessariò duo puncta A, & C super D, & F, propter æqualitatem tum laterum, tum angulorum in ipsis triangulis isoscelibus æqualibus. His positis, necesse est peripheriam A I C cadere præcisè super peripheriam D K F. Nam si caderet supra, vel infra, aut partim supra, partim infra ipsam, vt in D N F; tunc, ducta à centro H recta H K N, secante vtramque peripheriam in punctis K, & N; quia H K æqualis est radio H D; pariterque H N æqualis est H D, quia e sunt radij circulorum æqualium. Ergo H K, & H N æquales sunt inter se, pars, & totum, quod est impossibile. Non ergo peripheria A I C cadit supra, vel infra peripheriam D K F. Quare sibi congruant necesse est; ideoque æquales erunt inter se. quod erat primo loco ostendendum.

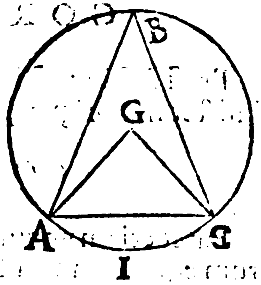
a Axio. huius.

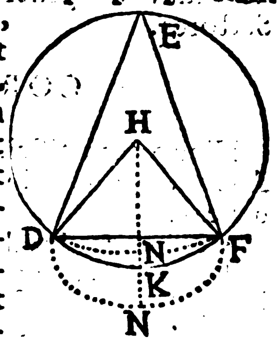
b prop. 4. lib. 1.

c prop. 6. lib. 1.

d Axio 9. lib. 1.

e ax. huius.





Sint secundò anguli ad peripheriam B, & E æquales. Dico eos insistere super æquales peripherias A I C, & D K F. Ducantur radij A G, & G C, D H, & H F. Quoniam d angulus G ad centrum duplus est anguli B: pariterque angulus D H F æqualis est duplo anguli E; suntque duo anguli B æquales duobus angulis E. Ergo anguli G, & D H F æquales sunt inter se, & sunt ad centrum; Ergo peripheriæ A I C, & D K F æquales sunt inter se (ex prima parte). Quapropter si anguli B, & E æquales fuerint, &c. Quod erat ostendendum.

d prop. 13. huius.

COROLLARIVM I.

Patet etiam in eodem circulo angulos æquales, siue ad centrũ, siue ad peripheriã positos, insistere peripherijs æqualibus.

L CO-

COROLLARIVM II.

Et, si dicti anguli ad peripheriam fuerint inæquales, maior insistet maiori peripheriæ.

COROLLARIVM III.

Patet etiam angulos æquales ad centrum duorum circulorum ęqualium vnà cum peripherijs subtensis comprehendere figuras ęquales. Vocentur illę Sectores.

Nam ex eo, quod anguli G, & H ad centrum positi sunt æquales inter se, ostensæ fuerunt figuræ G A I C, & H D K F sibi mutuò congruere, & ideo ęquales erunt. Quę vocentur Sectores.

COROLLARIVM IV.

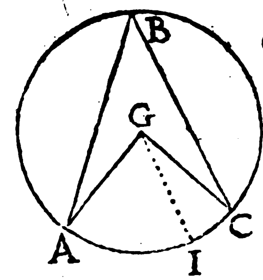
Hinc patet artificium, quo modo cuilibet datæ peripheriæ A C altera ei æqualis in eodem, siue ęquali circulo abscindi debeat.

e prop. 24. lib. 1. Si enim angulo ad centrum A G C ęqualis efficiatur e angulus D H F, erit peripheria abscissa D F æqualis peripherię A C.

Eucl. 27. III.

PROPOS. XVII. THEOR. XV.

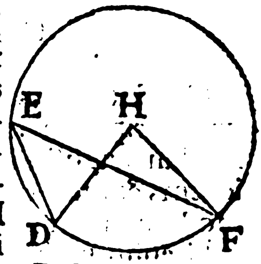
In circulis ęqualibus anguli, qui ęqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se ęquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti fuerint.



a prop. 24. lib. 1. b prop. 16. huius.

In circulis ęqualibus, quorum centra G, & H, super ęquales peripherias A C, & D F insistant primò anguli H, & A G C. Dico eos esse ęquales. Si enim hoc verum non est. Sit angulus A G C maior, vel minor angulo D H F. Et fiat a angulus A G I ęqualis angulo H. erunt b igitur peripherię A I, & D F ęquales inter se; erat autem peripheria A C ęqualis eidem D F. Ergo peripherię A C, & A I ęquales sunt

sunt inter se, pars, & totum, quod est absurdum. Non ergo anguli A G C, & H inæquales sunt. Ergo patet, &c. Insistant deinde anguli A B C, & E, ad peripherias constituti, basibus A C, & D F æqualibus. Dico eos angulos esse equales. Quoniam propter æqualitatem peripheriarum A C, & D F anguli ad centra G, & H equales sunt inter se (ex prima parte); hi verò dupli c sunt angulorum ad peripherias B, & E. Ergo B, & E equales sunt inter se. Quod erat, &c. c prop. 13. huius.



COROLLARIVM. I.

Similiter, si in eodem circulo peripheriæ æquales fuerint, erunt anguli insistentes equales.

COROLLARIVM II.

Et si anguli ad centrum inequales fuerint in eodem, vel æqualibus circulis erit peripheria maior, quę est basis anguli maioris. Et si peripherię inæquales fuerint, erit angulus ille, qui maiori peripheriæ insistit maior reliquo. Patet hoc ex demonstratione primę partis huius propositionis. Nam ex eo, quod angulus A G C positus fuit maior angulo D H F conclusimus peripheriam A C ipsa A I, seu D F, fuisse maiorem.

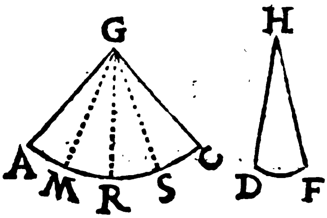
COROLLARIVM III.

Constat etiam, quòd duo anguli equales, ad circunferentiam eiusdem circuli, existunt in segmentis equalibus. Et contra, si in segmentis equalibus eiusdem circuli existant, erunt anguli equales inter se. Nam d anguli equales insistunt peripherijs equalibus; & propterea residuę peripherię totius circuli, equales inter se erunt; & ideò segmenta ipsa circuli equalia erunt. E contra quando segmenta sunt equalia in eodem circulo, & complementa totius peripherię eiusdem circuli equalia erunt; & ideò e anguli, ad peripheriam ijs insistentes, equales erunt; qui nimirum existunt in segmentis equalibus. d prop. 26. huius. e prop. 27. huius.

COROLLARIVM IV.

Conſtat etiam, quòd, ſi in eodem, vel æqualibus circulis, vna peripheria aliquoties reliquam metiatur, atque ipſis inſiſtant anguli ad centrum, vel ſectores; minor angulus maiorem, & minor ſector maiorem ęquè metietur, quemadmodum minor peripheria maiorem metitur.

Si enim peripheria D F aliquoties metiatur ipſam A C, verbi gratia quater, atque à punctis diuiſionum M, R, S ad centrũ coniungantur rectæ lineæ, erunt omnes f anguli A G M, M G R, R G S, S G C, vel g ſectores æquales tum inter ſe, cùm ipſi angulo, vel ſectori D H F; quandoquidem inſiſtunt peripherijs æqualibus. Et propterea angulus D H F toties metietur angulum A G C, vel ſector ſectorem, quoties peripheria D F metitur peripheriam A C.



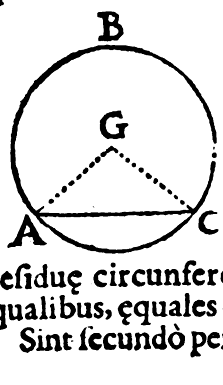
f prop. 17. huius.
g Coroll. 3 prop. 6. huius.

PROPOS. XVIII. THEOR. XVI.

Eucl. 28. & 29. III.

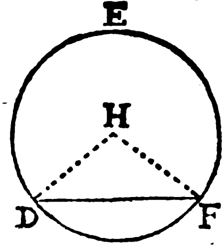
In circulis æqualibus ęquales rectæ lineæ ęquales peripherias auferunt, maiorem quidem maior, minorem verò minor. Et ęquales peripherias ęquales rectę lineę ſubtendunt.

In circulis ęqualibus, quorum centra G, & H, ſint rectæ æquales A C, & D F. Dico maiorem peripheriam A B C æqualem eſſe maiori D E F, & minorem A C ęqualem minori D F. Ductis enim radijs A G, G C, D H, & F H, erunt duo latera circa angulum G æqualia duobus lateribus circa angulum H, ſingula ſingulis, cùm ſint radij ęqualium circulorum; ſuntque baſes A C, & D F poſitæ æquales. Igitur a anguli G, & H æquales erunt, & peripheriæ b A C & D F, quibus inſiſtunt, ęquales quoque. Vnde reſiduę circunferentię A B C & D E F, ablatę ex circulis ęqualibus, ęquales quoque erunt inter ſe. Quod erat primum.



a prop. 7. lib. 1.
b prop. 16. huius.

Sint ſecundò peripheriæ A B C, & D E F æquales, ſiue peripheriæripherię A C, & D F æquales. Dico rectas A C, & D F ęquales esse. Facta eadem construtione; quoniam peripheriæ A C, & D F equales sunt: Ergo c anguli insistentes G, & H ęquales erunt; suntque latera circa angulos G, & H ęqualia (cùm sint radij circulorum ęqualium). Ergo d bases A C, & D F ęquales erunt. Quod erat secundum. Quapropter, &c.



c prop. 17. huius.

d prop. 4. lib. 1.

COROLLARIVM

Patet etiam, quòd si rectę ęquales ductę fuerint in eodem circulo ęquales peripherias auferent, & è contra.

SCHOLIVM.

Et, si rectę lineę fuerint inęquales, maior auferet maiorem peripheriam, & è contra; si cę sumantur peripheriæ, quę semicirculo maiores non sunt.

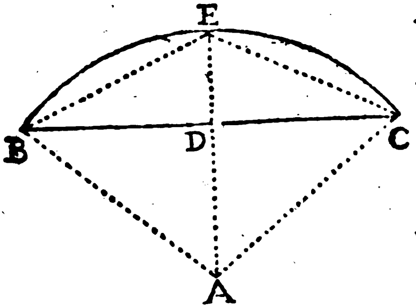
Sit recta A C maior, quàm D F. Dico peripheriarũ semicirculo minorum A C maiorem eße peripheria D F. Quoniam latera circa angulos G, & H ęqualia sunt, nempe radij eiusdem, vel ęqualium circulorum, & basis A C maior est base D F. Ergo e angulus G maior est angulo H, f & peripheria A C maior peripheria D F, &c.

e Schol. pro. pos 6. huius. f cor 2. prop. 17. huius.

PROPOS. XIX. THEOR. XVII.

Si à circuli centro ad terminos ipsius segmenti lineæ rectę ducantur, & linea recta, à centro ducta, secuerit bifariam, aut tantummodo angulum ad centrum, aut rectam peripheriam, & angulum subtendentem, vel solummodo angulos, quos facit ad subtensam, vel certè solum peripheriam segmenti: erunt pariter reliqua omnia bifariam secta.

Sit circuli segmentum B E C, cuius centrum A; Ducantur rectę A B, A C; Et primò recta A D E ex centro secet angulum B A C bifariam. Dico tam rectam B C, quàm angulos, supra B C factos à recta A D, quàm peripheriam B C, secari quoque bifariam. Quoniam in triangulis A B D, A C D circa



ca ęquales angulos verticales ad A, radij A B, A C ęquales sunt, & A D communis; Ergo *a* bases B D, C D æquales sunt, & anguli B D A, C D A pariter æquales sunt. Postea quoniam anguli ad centrum B A E, C A E insistunt peripherijs B E, & C E. Ergo *b* hę ęquales sūt inter se.

a prop. 4. lib. 1.

b Coroll. 2. prop. 16. huius.

Secundò secet recta A E subtensam B C bifariam in D. Dico reliqua omnia vera esse. Quoniam in triangulis B A D, C A D latera B A, C A ęqualia sunt, & A D latus commune & bases B D, C D positę sunt ęquales: Ergo *c* anguli B A D, C A D ęquales erunt; sed quando angulus ad centrum A secatur bifariam, (ex prima parte huius) etiam anguli ad D sunt æquales, & peripherię B E, E C ęquales sunt. Ergo quando B C secatur bifariam, reliqua omnia vera sunt.

c prop. 7. lib. 1.

Tertiò faciat A D super B C angulos ęquales B D A, C D A. Dico reliqua omnia vera esse. Quoniam recta A D (ex centro ducta) secat aliam B C ad angulos ęquales, seu rectos. Ergo *d* B C secatur bifariam in D; Sed (ex secunda parte huius) quando B C secatur bifariam, reliqua pariter bifariam secantur. Ergo si anguli ad D diuiduntur bifariam, erunt quoque reliqua secta bifariam

d prop. 3. huius.

Quartò secet A E peripheriam B C bifariam in E. Dico reliqua omnia vera esse. Quoniam peripherię B E, C E ęquales ponuntur: Ergo *e* anguli ad centrum, illis insistentes, sunt ęquales; & (ex prima parte huius) recta B C bifariam secatur, & anguli B D A, C D A ęquales sunt. Quare, &c.

e Coroll. 1. prop. 17. huius.

Eucl. 30. III.

COROLLARIVM.

Hinc patet, qua arte quęlibet circuli peripheria secari possit bifariam. Nam *f* si recta ex centro secet angulum ad centrum bifariam, aut rectam *g* B C, aut *h* angulos ad D; semper peripherię *k* B E, C E ęquales erunt.

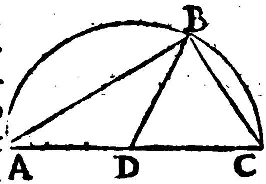
f prop. 8. lib. 1
g prop. 9. lib. 1.
h prop. 11. lib. 1.
k prop. 19. huius.

PROPOS. XX. THEOR. XVIII.

Eucl. 31. III

In semicirculo angulus rectus est; qui autem in maiori segmento

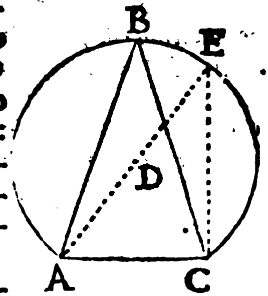
mento acutus, qui verò in minori segmento obtusus est. Et circa angulum rectum circuli segmentum est semicirculus, & circa acutum angulum maius segmentum est, & circa obtusum est segmentum minus.



In circulo A B C, cuius centrum D, sit primò semicirculus A B C, & in eo angulus A B C. Dico eũ esse rectum. coniungatur B D. Quoniã in triangulo A D B duo latera A D, & B D ęqualia sunt, cùm sint radij circuli: Ergo *a* anguli DAB, & DBA ęquales sunt inter se. Eadẽ ratione in triangulo B D C duo anguli D C B, & D B C ęquales erunt. Ergo duo anguli B A D, & B C D, simul, ęquales sunt duobus angulis A B D & C B D, idest integro angulo A B C; suntque *b* tres anguli trianguli A B C ęquales duobus rectis. Ergo angulus A B C semissis erit duorum rectorum. ideoque rectus erit.

a prop. 6. lib. 1.

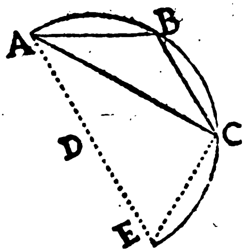
b prop. 18. lib. 1.



Secundò sit (in altera figura) in segmento maiore A B C angulus B. Dico eum esse acutum. Ducta diametro A D E, & coniuncta C E, erit in semicirculo angulus A C E rectus (ex prima parte): Ergo *c* A E C acutus erit; estque *d* angulus B equalis angulo E, cùm sint in eodem segmento. Ergo angulus A B C acutus erit.

c Corol. 3. prop. 18. lib. 1.

d prop. 14. huius.



In tertia figura, sit in minori segmento C A B angulus B. Dico eum esse obtusum. ducta diametro A D E, & iuncta C E, erit angulus A C E rectus (ex prima parte); & *e* A E C acutus, *f* suntque duo anguli oppositi E & B in quadrilatero A B C E, circulo inscripto, ęquales duobus rectis. Ergo *g* angulus B obtusus erit.

e Coroll. 3. prop. 18. lib. 1.

f prop. 15. huius.

g prop. 12. lib 1.

Quartò sit angulus A B C rectus, constitutus in segmento C A B. Dico eum esse semicirculum. Nam, si hoc verum non est, erit segmentum maius, aut minus; ideoque angulus A B C erit obtusus, vel acutus (ex secunda, & tertia parte huius) quod est contra hypothesin. Non ergo segmentum est maius, vel minus. vnde semicirculus erit.

Quin-

Quintò sit angulus B acutus. Dico segmentum A B C minus esse. Nam, si hoc verum non est, erit, aut semicirculus, aut segmentum minus, ideoque angulus B erit aut rectus, aut obtusus, quod est contra hypothesin. Non ergo. &c.

Sextò sit angulus B obtusus. Dico segmentum A B C minus esse. Nam, si hoc verum non est, erit semicirculus, aut segmentum maius. ideoque angulus B erit rectus, vel acutus, quod repugnat hypothesi. Quapropter, &c.

COROLLARIVM.

Colligitur ex demonstratione primæ partis huius propositionis, angulum trianguli, qui reliquis duobus angulis æqualis est, rectum esse.

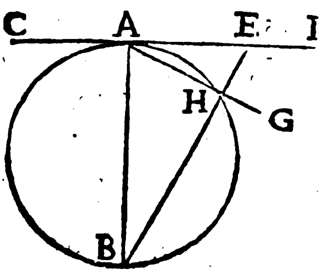
SCHOLIVM.

In hac propositione reperitur Porisma adulterinum, quod quidem superadditum esse propositioni Euclidis, constabit ex scholio sequentis propositionis. Habet enim quod Angulus maioris segmenti recto quidem maior est; minoris autem segmẽti angulus minor est recto. *Et quoniam, vt dicetur, angulus minimè effici potest à linea recta, & aliqua curua; propterea hæc postrema verba reyci omnino debent ab hac propositione: nisi quis velit mensuram anguli segmenti aliter considerare.*

PROPOS. XXI. THEOR. XIX.

Eucl. 16. III.

Recta linea, quę ab extremitate diametri cuiuslibet circuli ad angulos rectos ducitur, extra circulum cadet, & in locum inter ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altèra recta linea non cadet.



In circulo A B H, cuius diameter A B, ab eius extremo puncto A ducatur a C A D perpendicularis ad rectam lineam A B. Dico C A D cadere extra circulum; atque in locum à tangente D A, & peripheria comprehensum, rectam lineam duci non posse. Ducatur à puncto quolibet E, sumpto in recta linea A D ad alterum

a prop. 10. lib. 1.

rum extremum diametri B, recta linea E B, secans peripheriam in H. Et quoniam *b* rectarum B A, B H in circulo ductarum, maxima est diameter B A. Ergo recta linea B A maior est, quàm B H. Et quia in triangulo B A E rectus est angulus B A E. Ergo *c* reliquus angulus A E B est acutus; & ideo minor recto. Quare *d* latus B E, subtendens maiorem angulum, maius erit latere B A; erat autem B A maior, quàm B H. Igitur B E maior erit, quàm B H; estque punctum H in circuli peripheria. Ergo punctum E extra circulũ cadit; & sic quodlibet aliud prçter punctum A. Igitur tota recta linea A D extra circulum cadit. *b prop. 11. huius.* *c Coroll. 3. prop. 18. lib. 1.* *d prop. 20. lib. 1.*

Postea à puncto A contactus ducatur quçlibet recta linea A G infra tangentem; & fiat *e* angulus A B H çqualis angulo D A G. Quia duo anguli A B H, & D A G sunt equales, addito communi angulo B A H; duobus angulis B A G, & G A D, qui rectum angulum B A D constituunt, çquales erunt duo anguli H B A, & B A H simul sumpti. Quare hi duo çquales sunt vni recto angulo; & ideo *f* conueniunt rectæ lineç B H, A H, & *g* efficiunt reliquum angulum A H B rectum, *h* qui in semicirculo erit; & ideo recta G A circulum secat in punctis H, & A. & propterea recta linea H A intra circulum cadit. eadem ratione quçlibet alia recta linea, infra tangentem ad punctum A ducta, necessariò circulum secabit. Quare duci non potest recta linea in locum à tangente, & peripheria comprehensum. Quod erat, &c. *e prop. 24. lib. 1.* *f prop. 29. lib. 1.* *g Coroll. prop. 20. huius.* *h prop. 26. huius.*

COROLLARIVM I.

Patet rectam lineam ab extremitate diametri, perpendiculariter ductam ad circuli diametrum, circulum ipsum tangere; quia ostensum est cadere extra circulum, & propterea eum non secabit.

COROLLARIVM II.

Patet etiam, qua arte per quodlibet punctum, in circunferentia circuli datum, tangens recta linea duci debeat. Si enim ex puncto A dato ducatur diameter A B, & super hanc agatur *i* perpendiculariter, A E, erit ducta A E circulum tangens. *i prop. 10. lib. 1.*

SCHOLIVM.

Prꝫter ea, quꝫ exposita sunt in hac propositione, adduntur in posteriori eius parte duo Porismata, quꝫ re vera à Proclo, aut Theone, aut ab alio superaddita fuerunt, vt Franciscus Vieta censet; hꝫc autem cùm à Mathematicis magni nominis reijciantur, & contra ab alijs mordicùs retinenda esse contendatur; operꝫ pretium erit dicta Porismata exponere, & alia, quꝫ ab eis deducuntur; & postea rationes propter quas negligi debeant, adducere.

Habet ergo vulgata propositio Euclidis hꝫc verba. Et semicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior est; reliquus autem minor. *Quoniam ostensum est quamlibet rectam lineam A H, infra tangentem A E ductam, cadere necessariò intra circulum, erit angulus acutus rectilineus H A B minor angulo ex diametro B A, & peripheria A H comprehenso; ideoque angulus semicirculi H A B maior erit quolibet angulo acuto rectilineo. Et è contra angulus à tangente E A, & peripheria A H comprehensus, minor erit quolibet angulo acuto rectilineo.*

Ab his porismatibus deducunt Proclus Cardanus, & alij theoremata aliqua, quorum primum est.

I.

Angulus contingentiæ potest continuè, & infinitè augeri; angulus verò rectilineus minui: & tamen augmentum illius, quantumcumque sit, minus semper erit decremento huius.

II.

Reperiri non potest angulus rectilineus æqualis mixto angulo dato.

III.

Angulus comprehensus à duabus peripherijs circulorum æqualium potest esse æqualis alicui angulo rectilineo.

IV.

Transitur à minori ad maius, scilicet ab angulo acuto rectilineo ad angulum rectum; vel contra per omnia media; & non transitur per æquale, scilicet per angulum æqualem angulo semicirculi.

Hꝫc

Hęc sententia prius à Peletario in dubium redacta est, sed rationibus haud firmis, vt optime Clauius animaduertit. Postmodum Franciscus Vieta, insignis Geometra, assentitur quidem sententię Peletarij, sed firmioribus rationibus eam confirmat; quę videri possunt lib. VIII. variorum Vietę cap. XIII. at eędem à Ioanne Camillo Glorioso, in secunda decade suarum exercitationum, examinatę sunt. Postea Galileus pręceptor noster in epistola, ad Gloriosum missa, solidè redarguit omnes Gloriosi contradictiones, quę omnia videri possunt in decade tertia eiusdem Gloriosi. in 16. prop. lib. 3. Eucl.

Ego verò postquam rationes, pro vtraque parte adductas, diligentiùs perpendi, in hanc sententiam deueni: Consectarium illud, quod non sine ratione à Proclo superadditum fuisse Vieta censet, demonstratum non esse; quod nisi aliter constaret, certè ex dubitationibus pręclarissimorum virorum Vietę, & Galilei elicitur. Nam Geometricę demõstrationes eo nomine celebrantur, quod dubitandi locum omnino tollant, & assensum auditoris violenter extorqueant. Qua enim ratione dubitari posset, an diuerticulum contingentię esset angulus minor quouis acuto rectilineo, si hoc ab Euclide seu à Proclo demonstratum fuisset? Et si res attentiùs consideretur, ita se habere comperiemus. Nam in summa Euclides nihil aliud demonstrauit, nisi quod in locum inter circuli peripheriam, & tangentem interceptum (vtitur nomine loci, non anguli) recta linea duci non potest; & hoc quidem verum est. At postmodum, quod diuerticulum contingentię sit angulus minor quolibet acuto angulo rectilineo, nunquam verè; & euidenter deduci potest; nisi prius ostendatur spatium prędictum à tangente, & circuli peripheria contentum esse angulum; quod quidem nec Euclides ostendit, neque forsan ostendi potest; cumq; in demonstrationibus nihil, quod sit dubium, aut quod ab aduersario negari possit, assumi debeat; eo quod pręmissę demonstrationum debent esse notissimę; ideo dictum porisma non erit demonstratum.

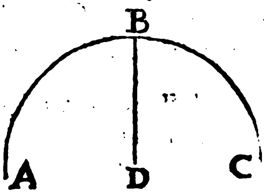
Et ne quis putet supplementum hoc ab aliquo Expositorum superadditum fuisse, inspiciat XVI. Propos. lib. III. Euclidis, ab eis demonstratam, videbit gratis assumi diuerticulum prędictum, angulum esse. Clauius tantummodo, in disputatione aduersus Peletarium, auctoritate Procli, & rationibus, ostendere conatur definitionem anguli plani accomodari posse etiam diuerticulo contingentię; sed irrito conatu, vt ostendam.

Exprimitur anguli plani natura in eius definitionę cum his passionibus: quòd sit duarum linearum, in plano se mutuò tãgentium, & non in directum iacentium, alterius ad alteram inclinatio. *Iuxta receptam sententiam, si hęc definitio generica est, & competit nedùm angulis rectilineis, sed etiam curuilineis, & mixtis. Sensus eius talis est: si duę lineę siue rectę, siue curuę, siue vna recta, & altera curua, se tan-*

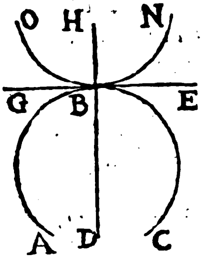
gant in vno puncto, & non sint in directum positę, constituent certam quandam inclinationem, quę angulus vocatur.

Et siquidem duę lineę curuę angulum planum constituere possunt. Igitur quotiescunq; se se tangunt in vno puncto nō, sunt in directū, & ad inuicem inclinantur, atque spatium amplectuntur, angulum constituent: sed duę circunferentię eiusdem circuli A B, B C se se tangunt in puncto B, & insuper non sunt in directum positę, ex Procli sententia. ait enim, prorsus fieri non potest, vt in directo orbiculares iaceant; *immo superuacaneam iudicat particulam illam,* in directum iacere: siquidem alterius ad alteram inclinatio angulum efficit. *Denique eędem lineę A B, & C B ad inuicem inclinantur, & inflectuntur (aliás in directum iacerent), comprehenduntque spatium, quod mensurari, ac diuidi potest: estque talis inclinatio maior inclinatione vnius anguli recti, sed minor inclinatione duorum rectorum. Ergo circuli peripheria in quolibet eius puncto B angulum A B C constituit, quod absurdum esse ipsimet aduersarij censent.*

lib. 1. c. 11. comm. 10.



At si circunferentia A B C, tota in directum constituta credatur, vt Clauius def. 8. lib. 1. contendit, ducatur tangens E B; hęc quidem cadit super lineam A B C, non quidem intra concauitatem, sed ad partes conuexitatis eius; efficit verò recta linea, super aliam lineam eleuata, duos angulos, qui sunt deinceps ad easdem partes, ad quas eleuatur. Ergo recta linea B E cum peripheria conuexa efficit duos angulos C B E, & A B E extra circulum; & nullo modo recta B E inclinata erit cum concaua peripheria A B, eo quod illa eleuatur ad partes conuexitatis. His positis duę repugnantię sequuntur: prima est, quòd inclinatio conuexæ peripherię A B cum tangente B E constituit angulum ęqualem angulo recto E B H, & recto H B G, & mixto G B A, simul sumptis; sed hi tres maiores sunt duobus rectis. Ergo angulus contentus à conuexa A B, & tangente B E maior est duobus rectis, quod est inauditum in Geometria: Secunda est, quòd recta E B efficit angulum A B E ad partes concauitatis, qui maior est quolibet obtuso rectilineo; eo quod anguli, qui fieri possunt super tangentem G E ad partes D ęquales sunt duobus rectis. Quare duo anguli A B G, & A B E ęquales sunt duobus rectis; estque contingentiæ angulus A B G minor quolibet acuto rectilineo. Ergo angulus A B E maior erit quolibet obtuso angulo rectilineo. Sed si curua C B non concedatur inclinata ad curuam A B, multo minus recta linea E B, extra ipsam posita, inclinata erit ad curuam A B; &



pro-

propterea A B E angulus non erit (cùm angulus in inclinatione consistat); & prius ostensus fuit angulus quolibet obtuso maior, quod impossibile est. Non igitur curuilinei, aut mixti veri sunt anguli. Et re vera mirum est Inuentorem horum mirabilium angulorum, postquam adnotauit angulum contingentię minorem esse quolibet acuto rectilineo, & angulum semicirculi maximum omnium acutorum rectilineorum, tertium, & quartum miraculum tacuisse; nimirum angulum à tangente E B, & opposita peripheria conuexa B A contentum, duobus rectis maiorem esse; atque angulum à tangente E B, & concaua peripheria A B comprehensum, maiorem esse quolibet obtuso angulo rectilineo. At ego ex hac dissimulatione conijcio percepisse auctorem ipsum curuam circuli peripheriam A B cum tangente B E in directum continuatam esse; quod rationi, & naturę valdè consentaneum est. Ducta enim circuli peripheria N B O ęquali peripheriæ circuli A B C, & tangente eam in B. manifestum est angulum contingentię N B E ęqualem esse angulo A B G; & additis communiter duobus angulis A B D, & D B E, erunt tres anguli N B E, E B D, & D B A, idest duo anguli N B D, & D B A, simul sumpti, ęquales tribus angulis G B A, A B D, D B E, idest duobus angulis rectis G B D, D B E, simul sumptis. Quare ad punctum B rectę lineæ D B conueniunt duę lineę A B, N B; non ad easdem partes ductæ, quę cum illa efficiunt duos angulos, deinceps æquales duobus rectis; & propterea, si fieri potest, vt duę lineę curuę continuentur directè absque fractione, & inclinatione, k necessariò lineę A B, & B N in directum erunt continuatę; cùmque duę curuæ A B, & B C sese in directum continuari concessæ sint, cur eadem linea curua A B cum intermedia recta tangente B E non dicetur in directum constituta, dum in puncto B illę lineę non franguntur, neque inflectuntur? Nonne concipi potest punctum fluere itinere curuo, & postea dirigere suum cursum absque vlla fractione, aut sectione? Nonne lege naturę pila B in peripheria rotę, vel fundę A B reuoluta, impetum acquirit circularem A B, & idemmet circularis impetus postea continuatur, & dirigitur per rectam tangentem B E? Certum est ergo curuam peripheriam B A in directum continuari non minus cum tangente B E, quàm cum peripherijs B N, aut B C; & propterea sicuti non est inclinata peripheria A B cum peripheria N B, vel cum C B, ita neque inclinata erit peripheria A B cum tangente B E: ideoque peripheria C B, & tangens E B, neque ad inuicem inclinatę erunt; eo quod super aliquam lineam A B E quęlibet linea eleuata duos angulos deinceps efficere debet, aut nullum. Cùmque linea curua C B cum curua A B, neque inclinationem, neque angulum efficiat, nulla ratione spatium contingentiæ C B E, quod ei deinceps est, inclinatio, aut angulus erit. Quod erat probandum.

k prop 13. lib. 1.

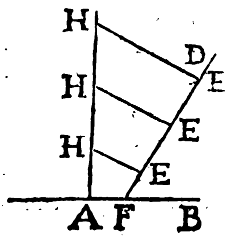
Postremò animaduertendum est Inclinationem solummodo essentiam

anguli

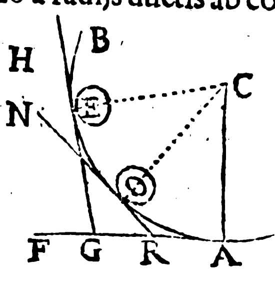
anguli constituere. Et quia datus angulus certa quedam quantitas est, debet hęc determinari per certam, & determinatam inclinationem, ita vt quęlibet inclinatio, maior illa, efficiat angulum maiorem, & quęlibet minor inclinatio minorem angulum constituat. Cùm ergo queratur an diuerticulum contingentię sit angulus; considerandum est an in diuerticulo contingentię aliqua certa, & determinata inclinatio reperiatur; pro qua indagine hęc premittuntur.

Primò, si duę rectæ lineę non fuerint inter se parallelę, vna earum in omnibus eius punctis ad alteram habebit vnam, & eandem inclinationem, quę ęqualis est angulo contento à perpendicularibus, super easdem rectas lineas cadentibus.

Sint duę rectę lineæ A B, & D E, non parallelę inter se, ideoque productæ concurrent alicubi, vt in F, & efficient angulum D F B. Et si à
l prop.10. lib. 1. *quolibet puncto E rectę D F l eleuetur perpendicularis E H, atque à quolibet puncto A rectę F A eleuetur perpendicularis A H. Quia duo anguli recti A, & E, vnà cum angulo A F E, interni, & ad easdem partes, minores sunt quatuor rectis. Ergo m perpendiculares A H, & E H con-*
m Schol. prop 29.l.1 *uenient, vt in H. Ostendendum modò est quemlibet angulum A H E ęqualem esse angulo D F B inclinationis rectæ lineę D E, in quolibet eius*
n Schol.2. prop.18.l.1 *puncto E, cum recta A B. Quoniam n quatuor anguli quadrilateri F A H E ęquales sunt quatuor rectis; & duo anguli A, & E recti sunt. Ergo duo anguli A F E, A H E ęquales sunt duobus rectis. Sed o duo anguli dein-*
o prop.13. lib.1. *ceps D F B, & D F A ęquales quoque sunt duobus rectis. Ergo illi istis æquales sunt, & ablato communi angulo A F E, crit quilibet angulus A H E æqualis D F B. Quare vna, & eadem est inclinatio rectæ lineę D E in omnibus eius punctis cum recta A B; & hæc æqualis est angulo, à perpendicularibus contento. Quod erat ostendendum.*



Secūdò inclinatio circularis peripherię, in aliquo determinato eius puncto cū recta, circulū tangente: ęqualis est angulo à radijs ductis ab eodē puncto, & à contactu comprehenso.



Sit circulus A E B, cuius centrum C, erectus ad planum horizontis, in quo intelligatur ducta recta, contingens circulum A F in puncto infimo A: sitque pariter in plano inclinato recta E G, circulum contingens in puncto E; atque à punctis A, & E ducantur radij A C, E C. Dico angulum A C E æqualem esse inclinationi peripheriæ circularis

B E

B E in ipso puncto E cum tangente A F. Intelligatur pila E, in puncto circumferentiæ E collocata: manifestum est (ex elementis mechanicis) pilam E impetum, atque momentum exercere pro mensura inclinationis illius lineę, per quam descendere conatur: sed siue pila E sustineatur à circuli peripheria in puncto E, siue sustineatur à plano inclinato H G eundem impetum, ac momentum habet. propterea inclinatio peripheriæ circularis in puncto E eadem omninò est cum inclinatione rectę tangentis H G; & propterea inclinatio circularis peripherię in puncto E cum ipsa tangente, seu horizontali A F, est illa, quę determinatur ab angulo H G F. Sed ex pręcedenti angulus H G F æqualis est angulo A C E, à radijs perpendicularibus contento. Igitur inclinatio peripheriæ circularis B E in eius puncto E cum tangente A F ęqualis est angulo à radijs, ductis à puncto E, & à contactu A, contento. Simili ratione ostendetur, quod inclinatio eiusdem peripherię circularis B A in quolibet alio eius puncto O æqualis est angulo O C A. Quare patet propositum.

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est circuli peripheriam cum tangente efficere non vnicam, sed infinitas inclinationes; scilicet tot inclinationes, quot sunt puncta peripherię; eo quod radius A C cum radijs ductis à singulis punctis peripheriæ B E A: angulos semper inæquales efficiet; quibus ęquales sunt inclinationes eiusdem peripherię in singulis eius punctis cum tangente A F.

Deducitur ergo maxima diuersitas inter verum angulum rectilineum, & diuerticulum contingentiæ. Nam in illo vna linea in singulis eius punctis eandem inclinationem cum reliqua recta efficit; at in contactus diuerticulo circuli peripheria tot inclinationes cum tangente efficit, quot sunt peripheriæ puncta.

Modò quia ad anguli constitutionem vnica, certa, & determinata inclinatio requiritur. Ergo diuerticulum contingentiæ, habens infinitas inclinationes, angulus non erit: nisi ex infinitis postrema inclinatio acutissima statuatur pro eius mensura; at postrema inclinatio reperiri nequit, nisi in puncto contactus; quandoquidem quælibet alia habet post se infinitas inclinationes minores, & maiores, & punctum contactus cum recta linea, circulum tangente, angulum non efficit; cum angulus sit inclinatio duarum linearum; non autem esse potest inclinatio lineæ, & vnius puncti. Nec concipi potest, qua ratione punctum contactus, in ipsamet tangente existens, inclinationem efficiat; neque sententia Apollonij refragatur, qui, vt ait Proclus, censet angulum esse primum sub *lib. 2. c. 11.* puncto interuallum: pariterque angulum esse superficiei in *comm. 8.*

vno

vno puncto sub linea refracta collectionem: & oportere esse aliquod interuallum primum sub continentium linearum inclinatione. *Est enim impossibile, vt punctum peripherię, quod immediatè sequitur contactum efficiat angulum cum recta tangente; quandoquidem duo puncta, vel tria, vel alia quęlibet multitudo finita punctorum contiguorum, longitudinem linearem minimè efficere possunt. Et insuper singula illa puncta post contactum habent diuersas, & inequales inclinationes. Quare impossibile est, vt recta linea cum linea curua, vel duę curuę inclinationem vnicam certam, & determinatam constituant; propterea angulum planum non efficient. Quapropter demonstratum non erit diuerticulum contingentię esse angulum, & minorem quolibet acuto rectilineo. Vt fuerat propositum.*

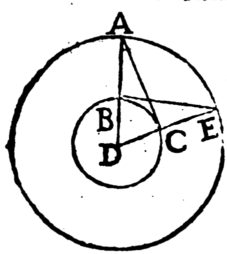
Eucl. 17. III.

PROPOS. XXII. PROBL. III.

A dato puncto, extra circulum posito, rectam lineam ducere, quę datum circulum tangat.

Ex puncto externo A ducenda est recta linea, tangens circulum B C, cuius centrum D. Ducatur recta A D, secans circulum in B; deinde centro D, interuallo D A, describatur circulus A E, & [a] ex B educatur B E perpendicularis ad A D, secans circulum maiorem in E, & ducta recta D E, secante circulum minorem in C, connectatur recta A C. Dico A C tangere circulum B C. Quoniam duo latera E D, & B D trianguli B D E ęqualia sunt duobus lateribus D A, & D C triãguli C D A vtrunque vtrique, cùm sint radij circulorum ęqualium; & angulus D communis est. Ergo [b] anguli D B E & D C A sunt inter se ęquales estque D B E factus rectus. Quare D C A rectus quoque erit. [c] ideoque C A tanget circulum B C. Quare, &c.

a prop. 10. lib. 1.



b prop. 4. lib. 1.

c Corol. 1. prop 21. huius.

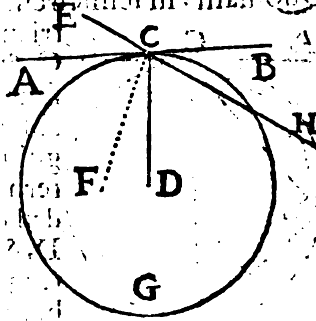
Eucl. 18 & 19. III.

PROPOS. XXIII. THEOR. XX.

Si circulum tangat aliqua linea recta, erit, quę à centro ad contactum ducitur, perpendicularis ad tangentem. Et si ad punctum contactus perpendicularis excitetur, per centrum circuli transibit.

Recta

Recta A B tangat circulum C G, cuius centrum D, in puncto C, & iungatur recta C D. Dico primò rectam C D perpendicularem esse ad A B. Si hoc verum non est, ducatur a à puncto C super C D perpendicularis E H. Manifestum b est rectam E H circulum tangere, & propterea c A B circulum secabit, quod est contra hypothesin. Quare C D ad ipsam A B est perpendicularis. Quod erat primum.



a prop. 16. lib. 3.
b Coroll. 1. prop. 21. huius.
c prop. 21. huius.

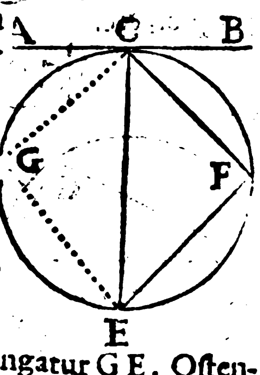
Sit secundò C D perpendicularis ad tangentē A B in puncto C contactus eius. Dico centrum circuli in C D reperiri. Si enim hoc verum non est, sit F centrum circuli extra lineam C D, & iungatur F C. Patet, ex prima perte huius, F C perpendicularem fore super A B. Quare duo anguli F C B, & D C B recti erunt; ideoque æquales, pars, & totum, quod est impossibile. Non ergo centrum F, extra lineam C D, reperiri potest. Quapropter, &c.

PROPOS. XXIV. THEOR. XXI.

Eucl. 32. III.

In circulo angulus, à tangente, & secante contentus, ęqualis, est angulo, in alterno segmento constituto. Et si angulus in alterno segmento positus ęqualis fuerit ei, qui à secante, & incidente in circuli peripheriam, continetur, incidens recta circulum tanget.

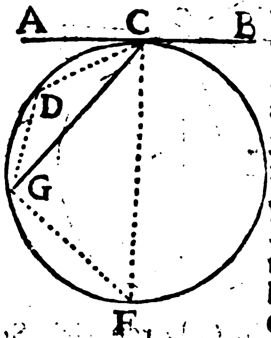
Circulum C G E tangat recta A B in puncto C, à quo recta C E primò per centrum ducatur. Dico angulum A C E ęqualem esse angulo F in alterno segmento; & angulum B C E ęqualem esse angulo C G E. Quoniam a vterque angulus A C E, & B C E rectus est b suntq; anguli F, & C G E in semicirculis quoque recti. Ergo angulus A C E ęqualis est angulo F; & angulus B C E ęqualis est angulo C G E.



a prop. 23. huius.
b prop. 20. huius.

Transeat secundò recta C G non per centrum, & diameter C E ducatur, & iungatur G E. Ostendendendum est angulum A C G equalem esse angulo C F G, in alterno segmento, & angulum B C G equalem angulo D. Quoniam *c* in semicirculo angulus C G E rectus est. Ergo *d* in

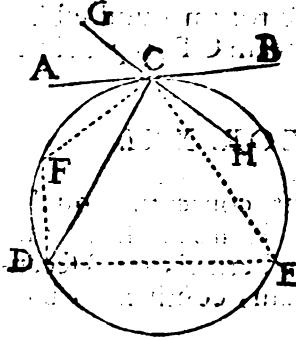
c prop. 20. huius.
d prop. 18. lib 1
e prop. 23. huius.
f prop. 15. huius.
g prop. 12. lib. 1.



triangulo C G E duo reliqui anguli G E C, & G C E vni recto equales erunt, idest sunt equales angulo *e* recto A C E. Ergo ablato communi angulo G C E, erit angulus A C G equalis angulo C F G in alterno segmento. Postea *f* quonia in quadrilatero C D G E duo anguli oppositi D, & E duobus rectis equales sunt; pariterque *g* duo anguli A C G, & B C G duobus rectis equales: erant autem anguli A C G, & C F G inter se equales. Ergo residui anguli B C G, & D aequales inter se erunt.

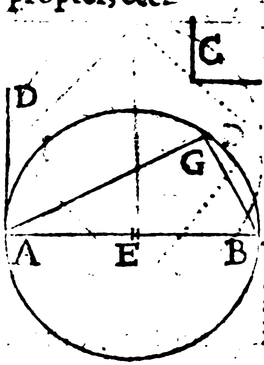
Tertiò ab eodem puncto C peripherie C D E ducantur recte, C D quidem secans circulum, & A B in eum incidens; sitque angulus A C D equalis angulo E, in alterno segmento. Dico A B circulum contingere. Quoniam, si hoc verum non est, ducatur *g* G H, tangens circulum in C. Ergo *h* angulus G C D equalis erit angulo E in alterno segmento: erat autem angulus A C D equalis eidem angulo E. Ergo anguli A C D, & G C D equales sunt inter se, pars, & totum, quod est impossibile. Non ergo alia recta G H circulum tanget. Quare A B solummodo tangens erit. Quapropter, &c.

g Coroll. 2. prop. 21. huius.
h ex prima parte huius.



PROPOS. XXV. PROBL. IV.

Eucl. 33. III.



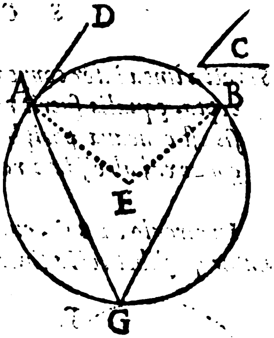
Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum equalem dato angulo.

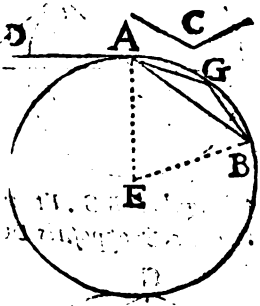
Super data recta A B, describendum est segmentum circuli, quod capiat angulum equalem dato angulo C, *a* Fiat angulus D A B equalis angulo C; & si A B perpendicularis est super A D, *b* secetur illa

a prop. 24. lib 1.
b prop. 9. lib. 1.

illa bifariam in E. Si verò non est perpendicularis C, erigatur A E perpendicularis super A D, eritque angulus E A B acutus, eo quod est differentia anguli B A D à recto; & fiat d angulus A B E ęqualis angulo B A E acuto. Concurrent e ergo A E, & B E in pũcto E, & f erunt ęquales inter se. Ergo circulus, centro E, interuallo E A descriptus, transibit per B, & g ipsum tãget recta D A, cũ perpendicularis sit ad radium A E. Ducantur à quolibet puncto G, segmenti A G B, duæ rectæ G A, & G B. Ostendendum est angulum A G B, in dicto segmento constitutum, æqualem esse dato angulo C. Quoniam h angulo D A B à tangente, & secante comprehenso æqualis est angulus G in alterno segmento; sed eidem angulo D A B æqualis erat angulus C. Ergo anguli G, & C ęquales inter se sunt. Descripsimus ergo segmentum A G B, in quo angulus G æqualis est dato angulo C. quod erat, &c.

c prop. 10. lib. 1.
d prop. 24. lib. 1.
e prop. 29. lib. 1.
f prop. 20. lib. 1.
g Coroll. 1. prop. 21. huius.
h prop. 24. huius.



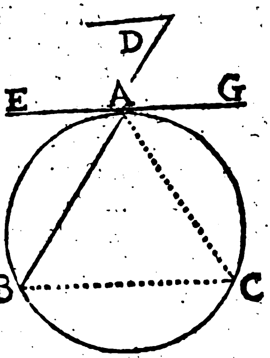


PROPOS. XXVI. PROBL. V.

Eucl. 34. III.

A dato circulo segmentum abscindere, capiens angulum æqualem dato angulo.

Sit datus angulus D, & circulus A B C, à quo abscindi debet segmentum, quod capiat angulum ęqualem angulo D. Ducatur a E G, tangens circulum in A; Fiat b postea angulus E A B ęqualis angulo D; & à quolibet puncto C, peripheriæ A C B, duæ rectæ C A, & C B ducantur. Ostendendum est angulum C ęqualem esse angulo D. Quoniam c angulo E A B ęqualis est angulus C in alterno segmento: estque eidem angulo E A B ex constructione, ęqualis angulus D. Ergo angulus C ęqualis est



a Coroll. 2. prop 21. huius.
b prop. 24. lib. 1.
c prop 24. huius.

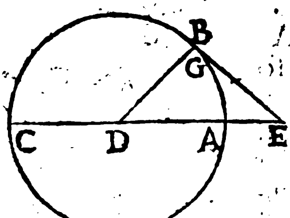
angulo D. Secuimus ergo segmentum A C B, in quo angulus C ęqualis est dato angulo D. Quod erat faciendum, &c.

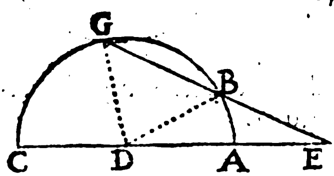
Ex Snellio.

SCHOLIVM.

Si recta linea inter conuexam circuli peripheriam, & diametrum intercepta, ęqualis fuerit radio circuli: erit angulus ad centrum, cuius basis est concaua peripheria, triplus anguli ad centrum, cuius basis est conuexa, ab eisdem rectis intercepta.

In circulo A B C, cuius centrum D, & diameter A C, ducta supponatur quęlibet recta linea E B G, tangens, vel secans circulum in B, G: hac tamen lege, vt segmentum B E æquale sit radio circuli A D. Dico angulum C D G triplum esse anguli A D B. coniungantur radij D B, & D G. Quoniam recta E B posita est æqualis radio A D, seu D B. Ergo a anguli E, & B D E æquales sunt. Eadem ratione in secundo casu anguli D B G, & D G B ęquales erunt, quia subtenduntur radijs D G, D B in triangulo D B G. Et quia b externus angulus C D G æqualis est duobus internis, & oppositis D G E, & E: estq; angulus D G E, seu D B G ci ęqualis, duobus angulis inter se ęqualibus E, B D E, pariter æqualis (in c primo casu), quia rectus est angulus D B E, & (in d secundo) quia angulus G B D externus est in triangulo B E D. Quare angulus C D G æqualis est duplo anguli E vnà cum angulo B D E; & e est angulus B D E ęqualis angulo E. Ergo angulus C D G æqualis est triplo anguli B D E. Quod erat ostendendum.





a prop. 6. lib. 1.

b prop. 18. lib. 1.

c ex prop. 21. huius.

d prop. 18. lib. 1.

e prop. 6. lib. 1.

Conuersum huius propositionis verum etiam est. Si enim angulus C D G triplus fuerit anguli B D A, & iungatur recta G B, secans diametrum C A in E. Dico rectam E B æqualem esse circuli radio A D. quia angulus externus f C D G æqualis est angulis G, & E, atque angulus G ęqualis est duobus angulis B D E, & E. Ergo duplum anguli E, & angulus B D E, simul sumpti, æquales sunt triplo anguli B D E. Et propterea angulus E æqualis est angulo B D E; ideoque g recta E B ęqualis est radio circuli B D. quod erat ostendendum.

f prop. 18. lib. 1.

g prop. 20. lib. 1.

Hinc constat, quòd, si per aliquod problema Geometricum, duci posset à quolibet puncto G recta linea E B æqualis radio A D inter diametrum, & conuexam circuli peripheriam, posset quęlibet peripheria, & quilibet angulus trifariam diuidi.

PRO-

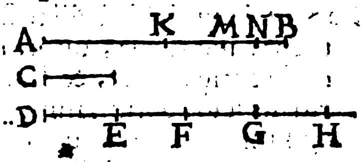
PROPOS. XXVII. THEOR. XXII.

Eucl. 1. X.

Si fuerint duę lineæ inęquales, & ex maiore auferatur eius semissis, & à residuo rursus tollatur eius semissis, & hoc repetatur semper: relinquetur tandem aliqua linea, quę minor erit proposita minore linea.

Sint duę lineę, A B maior, & C minor. Dico, si ex maiore, atque ex eius residuis semper medietates tollantur, relinqui tandem lineam minorem, quàm C. Multiplicetur C toties, quousque efficiatur D H maior, quàm A B; & distribuatur D H in suas partes D E, E F, F G, & G H ęquales ipsi C. Postea ex a A B tollatur eius semissis A K, & à reliqua K B tollatur pariter eius semissis K M, & hoc semper repetatur, quousque portiones A K, K M, M N, & N B, in ipsa A B sectę, totidem sint, quot sunt partes alterius D H; quod fieri posse certum est, cùm continuum semper diuidi possit. Ostendendum est postremam portionem N B minorem esse ipsa C. Quoniam ex minore A B tollitur eius dimidium A K, & ex maiori D H tollitur D E minus, quàm eius dimidium: erit reliqua K B minor, quàm reliqua E H. Et quia rursus ex minore K B tollitur eius dimidium K M; at ex maiore E H tollitur E F non maior, quàm dimidium eius. Ergo residua M B minor erit, quàm residua F H. Tandem ex minore M B tollitur eius dimidium M N; at ex maiore F H tollitur F G non maior, quàm dimidium eius, & sic semper. Ergo tandem postremum residuum N B minus erit, quàm G H, seu C, quod illi ęquale est. Quare patet propositum.

a prop. 9. lib. 1.



COROLLARIVM. I.

Patet, quòd, si ex maiore A B tollatur A K magis, quàm eius dimidium, & ex residua K B rursus tollatur magis, quam eius dimidium, & hoc semper repetatur, tandem relinquetur aliqua linea, quę minor erit quacunque proposita linea C.

CO-

COROLLARIVM II.

Constat, quòd, si ex maiore linea A B tollatur segmentum maius A K, & relinquatur minus K B, & ex hoc rursus tollatur maius segmentum K M, & relinquatur minus, & hoc semper repetatur; tandem relinquetur aliqua linea, quę minor erit quacunque proposita.

SCHOLIVM.

Hęc propositio, quę de lineis passionem supradictam concludit, valet etiam, si loco linearum sumantur quęlibet duę magnitudines, dummodo sint eiusdem speciei; idest si quęlibet earum multiplicata reliquam excedere possit.

PROPOS. XXVIII. PROBL. VI.

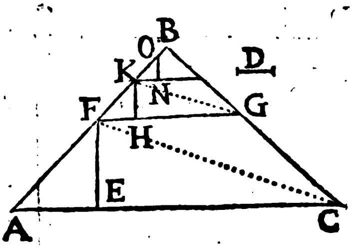
Latus trianguli isoscelij rectanguli secari potest in duo segmenta inęqualia, quorum minus segmentum ęquale sit differentię lateris, & hypothenusę eiusdem trianguli; & rursus segmentum minus eodem modo secari potest, vt eius minus segmentum ęquale sit differentię pręcedentium segmentorum; & sic semper; quousque postremum segmentum minus sit quacunque data recta linea.

Sit triangulum isoscelium A B C, rectangulum in B, & quęlibet recta linea D, cuiuscunque paruitatis. Debet secari latus A B, vt proponitur. diuidatur *a* bifariam angulus A C B à recta linea C F, quę secet rectam A B in F; atque *b* à puncto F ducatur F E perpendicularis ad A C, secans eam in E; extendaturque *c* recta F G parallela ipsi A C, secans B C in G. Et quoniam propter *d* parallelas est angulus B G F ęqualis angulo C; atque angulus B F G æqualis angulo A, suntque *e* anguli A, & C ęquales ad basim isoscelij A B C. Ergo etiam anguli B F G, & B G F ęquales sunt, ideoque *f* latera B G, B F ęqualia sunt, & triangulum B F G est isosceles. Postea quia in triangulis C E F, & C B F, angulus B C F, æqualis est angulo E C F, & duo anguli recti B, & E æquales sunt, & latus C F est commune, oppositum angulis rectis B, & E; Ergo *g* C B æqualis est C E, atque B F ęqualis est E F.

a prop. 8. lib. 1
b prop. 11. lib. 1.
c Coroll. prop 16. l 1
d prop. 15. lib. 1.
e prop. 6. lib 1.
f prop. 20. lib. 1.
g prop. 25. lib. 1.

Cùm-

Cùmque in triangulis F B G, & F E A sint duo anguli B, & E recti, & anguli B G F, & A æquales, quibus opponuntur latera æqualia F B, & F E. Igitur h A F æqualis est F G, atque A E æqualis ipsi G B, seu ei æquali F B. Estque in triangulo A E F latus A F (subtendens rectum, & ideo maximum angulum A E F) maius, quàm A E. Igitur A F maius est, quàm F B. Quare minus segmentum B F æquale est ipsi E A, differentiæ lateris B C, & hypothenusæ A C eiusdem trianguli A B C.



h prop. 25. lib. 1.

i prop. 19. lib. 1.

Secundò. k ducta recta G K, secante angulum G bifariam, & ducta l K H perpendiculari ad F G, secante eam in H, erit vt prius minus segmentum K B æquale F H, differentiæ ipsarum B G, & G F; estque B G æqualis B F, & F G æqualis A F. Ergo K B, minus segmentum totius F B, æquale est differentiæ præcedentium segmentorum A F, & F B. Et quoniam continuum semper diuisibile est, poterit denuò secari K B in O, vt B O sit minus segmentum, & sit æquale differentiæ ipsarum F K, K B, & sic semper. Cùmque sint duæ rectæ lineæ A B, & D, & ex maiori A B auferatur maius segmentum, idest magis, quàm eius dimidium; & ex residuo F B auferatur F K magis, quàm eius dimidium; atque ex K B tollatur K O magis, quàm eius dimidium; & sic semper. Ergo m postremum segmentum O B minus erit quacunque data recta linea D. & omnia minora segmenta ablata, sunt differentiæ præcedentium segmentorum. Factum est ergo Problema.

k prop. 8. lib. 1.

l prop. 11. lib. 1.

m Corol. 1. prop 27. huius.

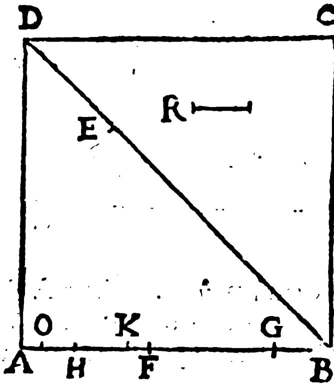
PROPOS. XXIX. THEOR. XXIII.

Eucl. 116. X.

Nulla recta linea, quæ metitur latus quadrati, mensurare potest diametrum eius. Vocentur latus, & diameter quadrati, rectæ lineæ Incommensurabiles inter se.

Sit quadratum A B C D, cuius diameter D B, & recta linea R mensuret latus A B ipsius quadrati A C; sitque R quælibet ex innumerabilibus rectis lineis, quæ metiri possunt ipsam A B. Dico rectam R nunquam mensurare diametrum B D. Si enim hoc verum non est, mensuret etiam recta R diametrum

metrum



metrum B D. Et quia a in quadrato A C angulus A rectus est, & duo latera D A, & A B sunt ęqualia, erit triangulum B A D isoscelium, rectangulum. Quare facta b B E æquali ipsi A B secari c potest latus A B in F, vt sit minus segmentum A F æquale D E, differentię duarum A B, & D B: pariterque, facta F G ęquali A F, secari potest A F in H, vt sit minus segmentum A H ęquale G B, differentię ipsarum A F, & F B; & facta H K ęquali A H, denuo secari potest A H in O, vt sit segmentum A O ęquale K F, differentiæ ipsarum A H, & H F, & hoc semper fieri potest, quousque postremum segmentum, quod sit A O minus sit quacunque data recta R. Et quoniam ponitur recta R mensura ipsius A B, atque alterius D B; estque E B æqualis A B. Ergo recta R mensurat totam D B, & ablatam B E. Quare d recta R mensurabit quoque residuam differentiam D E: estque A F æqualis ipsi D E. Igitur R metitur ipsam A F; mensurabat autem prius totam A B. Ergo e eadem R mensurabit Residuam F B, atque ipsam A F; & ideo etiam earum differentiam G B, seu A H (huic æqualem) mensurabit; sed etiam A F metiebatur eadem R. Igitur mensurabit quoque residuam H F; atque mensurabat pariter ipsam A H. Quare R metitur earum differentiam K F; & ideo ei æqualem A O. Et propterea f recta R æqualis, aut minor erit, quam A O (maior enim non potest mensurare minorem); quod est impossibile. Facta enim fuit recta A O minor, quam R. Non ergo reperiri potest aliqua recta R, quantulacunque illa sit, quæ metiatur diametrum B D, & latus A B, eiusdem quadrati A C, quod, &c. vocentur rectæ lineæ A B, & D B inter se Incommensurabiles.

a prop. 34. lib. 1.

b prop. 3. lib 1.

c prop. 28. huius.

d Ax. 6. l. 1.

e Ax. 6. l. 1

f Def 13. lib. 1.

PROPOS. XXX. THEOR. XXIV.

Si fuerint duę rectę lineę incommensurabiles; erunt spatia parallelogramma, vel triangula super ipsas descripta, ęquè alta inter se, incommensurabilia.

Sint

Sint duę rectę lineę A B, & BC incommensurabiles, quę sint bases, eiusdem altitudinis parallelogrammorum R, & S, vel triangulorum. Dico parallelogramma, vel triangula R, & S inter se esse incommensurabilia. Si enim hoc verum nō est, habeant spatia R, & S aliquam communem mensuram, si fieri potest, quę ponatur esse X; & quoties X metitur spatium R, in *a* tot partes inter se ęquales A G, G H, H K, K B distribuatur recta linea A B: & quoties X metitur spatium S, in tot partes ęquales B M, M O, O C distribuatur recta B C, & à punctis G, H, K, M, O *b* ducantur parallelę, efficientes parallelogramma in primo casu, aut conuenientes in eodem puncto D, efficientes triangula, vt in secundo casu: erunt *c* parallelogramma A G D, G H D, H K D, K B D inter se, aut triāgula *d* ęqualia; eo quod bases eorum sunt ęquales, & inter easdem parallelas existunt. Et similiter erunt parallelogramma C O D, O M D, M B D inter se, aut triangula ęqualia inter se. Et quoniam X toties mensurat spatium R, quoties K B mensurat basim B A; & quoties K B mensurat basim B A, toties spatium K B D mensurat spatium R (comparando semper parallelogramma inter se, aut triangula inter se). Ergo X, & spatium K B D ęquè metiuntur spatium R; ideoque spatia X, & K B D æqualia inter se sunt, cùm sint ęqualia cuilibet parti earum, in quæ resoluitur spatium R. Eadem ratione spatium M B D ęquale erit spatio X. Quare duo spatia K B D, & M B D æqualia erunt inter se, cùm sint æqualia ipsi X; & sunt eiusdem altitudinis. Ergo eorum bases K B, & B M æquales sunt inter se (nam si inæquales essent, pariter *e* parallelogramma, vel *f* triangula K B D, & M B D inęqualia essent, quod est contra hypothesin); sed K B metitur A B, & B M mensurat ipsam B C. Ergo duæ rectæ A B, & B C inter se commensurabiles sunt; cùm ab æqualibus K B, & B M, seu eadem K B mensurentur, quod est contra hypothesin. Positæ enim fuerunt A B, & B C incommensurabiles.

a prop. 28. lib. 1.

b Coroll. prop. 16. lib. 1.

c prop. 3. lib. 1.

d prop. 31. lib. 1.

e Coroll. prop. 11. l. x

f Coroll. 1. prop. 32. lib. 1.

rabiles. Non ergo ſpatia R, & S habere poſſunt aliquam communem menſuram; ideoque incommenſurabilia ſunt. Quod erat propoſitum.

COROLLARIVM.

Patet ex demonſtratione huius propoſitionis poſſe diuidi quodlibet parallelogrammum, aut quodlibet triangulum in partes ęquales, quotcunque iuſſerit quiſpiam.

SCHOLIVM.

Sicuti oſtenſum eſt lineas rectas, & ſpatia, triangula, vel parallelogramma eſſe poſſe incõmenſurabilia, ita oſtendemus poſtea omnes quantitates continuas, eiuſdem generis, incommenſurabiles inter ſe eſſe poſſe. Debent tamen ex hac ſerie excludi Numeri; eo quod in numeris diuidendo poteſt deueniri ad minimum in eius genere, ſcilicet ad vnitatem; hoc autem in quantitate continua minimè locum habet, quia ſemper diuiſibilis eſt; & ſic non datur minimum in eius genere, quod poſſit eſſe menſura communis duarum quantitatum continuarum.

Finis Libri ſecundi.

LIBER TERTIVS.

Eucl. lib. A.

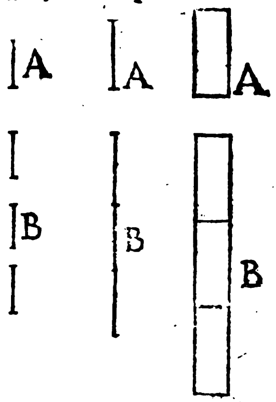
Postquam in superioribus libris ostensæ sunt principes figurarum planarum passiones, vt possint aliæ arcanę earundem figuratum propietates declarari, debent prius considerari quantitatum comparationes, quæ constituunt quantitatis speciem, ab alijs quantitatibus notis, diuersam. Harum ergo comparationum tractatio generica habetur in hoc tertio libro: Speculatio quidem non minus pulchra, & vtilis, quàm miris difficultatibus inuoluta, in qua Antiqui valde defecerunt, vt postea ostendetur; & propterea necesse est, vt vniuersa à fundamentis restituatur, initio sumpto à definitionibus.

DEFINITIONES.

I.

Pars dicitur minor quantitas maioris quantitatis, cùm minor aliquoties metitur maiorem.

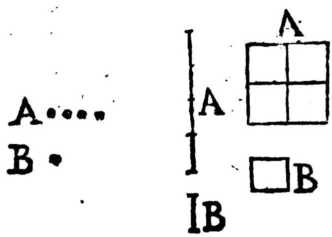
Quoniam in isto libro tractatio instituenda est de cōparationibus quantitatum, quoad quantitatē pertinet, idest quoad ęqualitatē, & inęqualitatem earum. Manifestum est quātitates, quę æquales, vel inæquales inter se dici nequeunt, comparabiles non esse; vt linea cum superficie, aut numerus cum corpore, vel motus cum pondere comparari non potest; propterea quod nec ęqualis, nec maior, aut minor altèr alterius dici potest, cùm sint diuersorum generum: duę verò lineæ inter se comparari possunt, cùm sint eiusdem generis; & sic duo numeri, duo motus, duę superficies, &c. & inter omnes hęc est prima comparatio duarum quarumlibet quantitatum inter se. Diciturque illa quantitas propriè Pars alterius quantitatis, quę aliquoties mensurat illam quantitatem; si verò eam non metiatur, & sit minor illa: appellabitur portio, vel segmentum eius. Itaque antecedens quantitas A pars erit consequentis



quantitatis B, si A aliquoties ipsam B metiatur; vt bis, ter, quater, decies, centies, &c. Et denominatio cuiuslibet partis determinatur à multitudine partium, contentarum in consequenti, quarum quęlibet ęqualis est antecedenti. Vt si B contineat tres partes ęquales ipsi A, nomen à ternario designabitur, & dicetur A tertia pars ipsius B, & sic de reliquis.

II.

Multiplex autem dicitur maior quantitas minoris quantitatis, cùm maior à minore mensuratur.

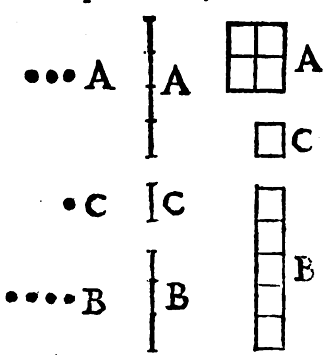


Vt antecedens quantitas A multiplex est consequentis B, quando B aliquoties ipsam A metitur; vel quando A multoties ipsam B continet, vt bis, ter, decies, &c. diciturque A ipsius B dupla, tripla, quadrupla, &c. si toties B ipsam A mensurat.

III.

Partes dicitur quantitas maior, siue minor, alterius quantitatis, cùm reperiri potest tertia quantitas, quæ illarum sit communis mensura.

Quotiescunque fuerint duę quantitates A, & B, atque tertia quantitas C aliquoties mensuret antecedentem A; nec non ipsamet C aliquoties metiatur consequentem B: tunc antecedens A partes erit consequentis B, siue A fuerit maior, aut ęqualis, vel minor, quàm B; quę partes numerantur à multitudine partium, contentarum in antecedente, & denominantur à multitudine partium, contentarum in consequente. Vt, si C ter contineatur in A, & quater in B, dicetur A tres quartę partes ipsius B. Et, si C quater contineatur in A, & ter in B, dicetur A quatuor partes tertię ipsius B. At si C quinquies contineatur in B, & quater in A dicetur A quatuor partes quintę ipsius B, & sic de reliquis.



IV.

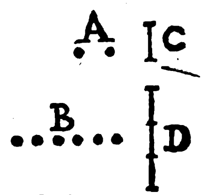
IV.

Eadem pars dicitur prima quantitas secundæ, ac est tertia quartæ quantitatis; cùm prima toties secundam metitur, quoties tertia quartam.

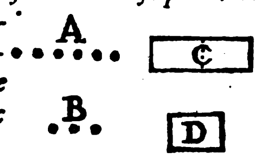
V.

Et ęquè multiplex dicitur prima quantitas secundę, vt est tertia quartę; cùm prima, & tertia ęquè mensurantur à secunda, & quarta.

Prius comparauimus vnicam quantitatem antecedentem cum vnica consequente: Modò comparantur duę antecedentes cum duabus consequentibus. Et possunt esse duę primę eiusdem, aut non eiusdem generis, cum duabus postremis; vt prima, & secunda possunt esse lineę, atque duę reliquę, scilicet tertia, & quarta, possunt quidem esse lineę, & etiam superficies, aut numeri, vel corpora, vel pondera, aut motus. Et siquidem prima quantitas A comparatur cum secunda B, & tertia C comparatur cum quarta D, atque antecedens A toties metitur consequentem B, quoties reliqua antecedens C mensurat reliquam consequentem D: Dicetur prima A eadem pars secundę C, quàm tertia C pars est quartę quãtitatis D. Itaque, si vtræque antecedentes quater mensurent vtrasque consequentes, dicetur tam A ipsius B, quàm C alterius D, quarta pars: &, si septies eas mensurent, dicentur antecedentes suarum consequentium septima pars, & sic in reliquis mensuris.



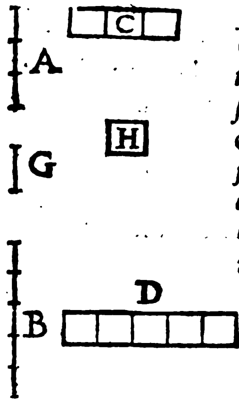
E contra, si antecedens A toties mensuretur à sua consequente B, quoties C mensuratur à sua consequẽte D, dicetur prima A ipsius B ęquè multiplex, ac est tertia quantitas C multiplex quartę D.



VI.

Eędem partes dicitur prima quantitas secundę, quemadmodum est tertia partes quartę quantitatis, cùm duę quęlibet quantitates ęquè metiuntur primam, & tertiam; pariterque ęquè mensurent secundam, & quartam.

Vt si fuerint quatuor quantitates A, B, C, D, quarum antecedentes, scilicet prima A, & tertia C ęquè mensurentur à quibuslibet quantitatibus G, & H; pariterque duę consequentes, scilicet secunda B, & quarta D ęquè mensurentur ab eisdem mensuris G, & H, dicetur prima A ipsius secun-



secundę B eędem partes, quemadmodum est tertia C partes quartę quantitatis D. Vel potius quando tam numeratores inter se, quàm denominatores sunt inter se æquales: tunc prima ipsius secundæ, & tertia ipsius quartę eędem partes erunt. Vt si A fuerit tres quintæ partes ipsius B, sicuti C est tres quintæ partes ipsius D; vel si tam A ipsius B, quàm C alterius D fuerint nouem quintę partes, & sic in reliquis mensuris; tunc dicetur A ipsius B, atque C alterius D eędem partes.

VII.

Si antecedens quantitas fuerit multiplex, aut pars, partesue consequentis, vocetur comparatio primę cum secunda Proportio commensurabilis; diceturque prima ad secundam, proportionem mensurabilem habere. At si nulla alia quantitas, mensurabilem proportionem habens ad consequentem, esse potest ęqualis antecedenti, sed semper maior, aut minor est illa; dicetur antecedens ad consequentem habere proportionem non mensurabilem.

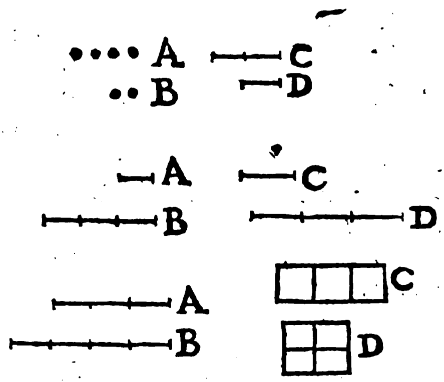
Agimus iam de noua specie quantitatis, quæ licet sit diuersa à reliquis quantitatibus notis, nihilominùs in eisdem omnibus inuoluitur. Et primò certum est duas quantitates, inter se commensurabiles, habere aliquā certam, & determinatam habitudinem, secundum quam prima quantitas (quæ antecedens dicitur) determinato numero multiplex est secundæ quantitatis, seu consequentis, idest tot vices continet consequentem; vel prima talis pars est secundę, aut prima tot, & tales partes est secundę; vt si prima tripla sit secundæ, vel quarta pars fuerit secundę, aut tres quartę partes fuerit secundę: tunc talis respectus antecedentis ad consequentem vocatur Proportio, seu Ratio mensurabilis. At duę quātitates inter se incommensurabiles eiusdem generis, vt sunt latus, & diameter quadrati, habent etiam suum respectum, qui dignoscitur per hanc passionem, quòd quęlibet linea, ex infinitis alijs, quę partes sit diametri ipsius quadrati, maior, aut minor, nunquam autem ęqualis est lateri eiusdem quadrati. Et talis respectus ineffabilis per numeros, vocatur Proportio non mensurabilis; estque nihilominùs hæc proportio, seu respectus vnicus, & determinatus in natura, ita vt quęlibet alia linea maior, aut minor latere eiusdem quadrati, non habeat ad eius diametrum eam proportionem, quam habet latus. Quo modo verò determinatio quantitatis

tatis

tatis proportionis non mensurabilis reperiri possit, postea docebitur.

VIII.

Si quatuor quantitatum (eiusdem generis, siue non) prima ipsius secundę, & tertia quartę ęquè multiplices fuerint, vel eadem pars, aut eędem partes: vocetur commensurabilis proportio quantitatis primę ad secundam eadem, vel similis proportioni quantitatis tertię ad quartam; & huiusmodi quatuor quantitates vocentur proportionales commensurabiles.

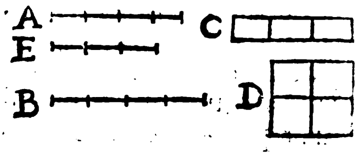


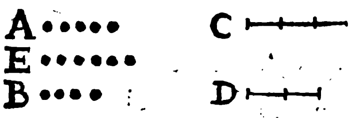
Vt si quatuor quantitatum A, B, C, D, duę A, B fuerint vnius generis, & C, D alterius, vel omnes sint eiusdem generis; & prima antecedens quantitas A ipsius secundę consequentis B sit tam multiplex, quàm tertia antecedens C est multiplex alterius consequentis quartę D; vel A eadem pars sit ipsius B, veluti C pars est alterius D; aut A eędem partes fuerit ipsius B, quemadmodum C partes est alterius D: tunc commensurabilis proportio quam antecedens A habet ad consequentem B, eadem, vel similis erit proportioni alterius antecedentis C ad suam consequentem D. Et quatuor quantitates A, B, C, D, habentes dictas conditiones, vocentur proportionales commensurabiles.

IX.

Si verò quantitas prima maior fuerit illa quantitate, quę ad secundam, eandem rationem commensurabilem habet, quam tertia habet ad quartam: vocetur proportio quantitatis primę ad secundam maior commensurabili proportione quantitatis tertię ad quartam. Et, si prima minor fuerit quantitate illa, quę ad secundam eandem rationem commensurabilem, quam tertia habet ad quartam: vocetur proportio quantitatis primę ad secundam minor proportione commensurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem.

Vt, si fuerint quatuor quantitates A, B, C, D, siue A, & B fuerint vnius generis, & C, D alterius, siue omnes eiusdem generis; & tertia C ad quartam D habeat quamlibet proportionem commensurabilem: (Sit exempli gratia C tres quartę partes ipsius D); & aliqua quantitas E sit minor, quàm prima A; sitque E ad secundam B in eadem proportione commensurabili, quam tertia C habet ad quartam D, idest, si E quoque fuerit tres quartę partes ipsius B: Tunc prima A (maior existens, quàm E) erit maior, quàm opus est, vt ad secundam B eandem rationem commensurabilem habeat, quàm tertia C habet ad quartam D. His positis, vocetur proportio quantitatis A ad B maior illa proportione commensurabili, quam tertia C habet ad quartam D. Si verò E (maior existens, quàm A) fuerit ad B in eadem proportione commensurabili, quam C habet ad D: vocabitur proportio primę quantitatis A ad secundam B minor proportione commensurabili, quam tertia C habet ad quartam D.





X.

Et, si quatuor quantitatum (eiusdem generis, siue non) antecedentes fuerint incommensurabiles conseqentibus; & proportio quantitatis primę ad secundam maior fuerit atque proportio quantitatis tertię ad quartam minor sit eadem tertia commensurabili proportione: Vocetur proportio quantitatis primę ad secundam maior illa incommensurabili proportione, quam tertia habet ad quartam quantitatem.

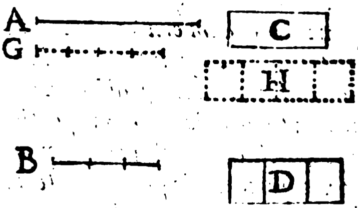
XI.

Si verò in eisdem quantitatibus incommensurabilibus proportio primę quantitatis ad secundam fuerit minor & proportio quantitatis tertię ad quartam maior sit, eadem tertia commensurabili proportione: tunc vocabitur proportio quantitatis primę ad secundam minor illa incommensurabili proportione, quam tertia habet ad quartam.

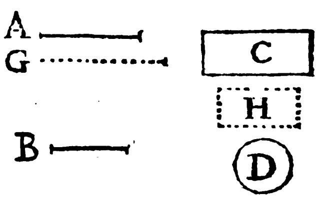
Vt, si fuerint quatuor quantitates A, B, C, D; siue A, & B fuerint vnius generis, & C, D alterius; siue omnes sint eiusdem generis; atque

A ipsi

A ipsi B, nec non C ipsi D incommensurabiles sint: & reperiri possit tertia quędam proportio commensurabilis, quęlibet ex infinitis, quę proponi possunt (quę licet inter duos separatos terminos supponi possit, nihilominus commoditatis gratia concipi potest inter vnicum terminum separatum H, & quartum terminum D); Sitque proportio ipsius A ad B maior cōmensurabili proportione, quam habet H ad D; nec non proportio tertię C ad quartam D sit minor eadem commensurabili proportione, quam habet H ad D: Tunc vocabitur proportio quantitatis primæ A ad secundam B maior illa incommensurabili proportione, quam tertia C habet ad quartam D. Vt autem verificetur, quòd proportio primę ad secundam B sit maior commensurabili illa proportione, quam H habet ad D, poni debet alia quantitas G, quæ ad B habeat eandem commensurabilem proportionem, quam H habet ad D. & necesse est, ex nona definitione, vt prima A maior sit, quàm G; sic enim A maior erit illa quantitate, quę habet ad secundam B eandem proportionem commensurabilem, quam H habet ad D. Simili modo, vt verificetur, quòd proportio tertiæ quantitatis C ad quartam D sit minor eadem commensurabili proportione, quam H habet ad D, necesse est, vt H sit maior, quàm C. Quare quotiescunque proportio primæ A ad secundam B conceditur maior proportione incommensurabili, quam tertia C habet ad quartam D: debet etiam concedi ex vi huius definitionis, quòd duę alię quantitates reperiri possunt, vt sunt G & H, quæ habeant eandem proportionem commensurabilem ad consequentes B & D, ita vt G minor sit, quàm A; at H maior sit quàm D. Et è conuerso, quando hæ conditiones verificari possunt, scilicet si duæ alię quantitates G & H assignari possunt, eandem commensurabilem rationem habentes ad consequentes B & D, quarum G minor sit, quàm A, & H maior sit, quàm C: tunc vocabitur proportio primæ A ad secundā B, Maior incommensurabili illa proportione, quam tertia C habet ad quartam quantitatem D.



Si verò in eisdem incommensurabilibus quantitatibus proportio primę A ad secundam B minor fuerit tertia quadam commensurabili proportione, quam H habet ad D: Sed proportio tertiæ C ad quartam D maior sit eadem commensurabili proportione ipsius H ad D: tunc quidem proportio primę A ad secundam B vocabitur Mi-



nor incommensurabili illa proportione, quam tertia C habet ad quartam D. Et similiter reperiri poterit altera quantitas, vt G, quæ sit ad secundam B in eadem commensurabili proportione, quam H habet ad D; & sit ipsa G maior, quàm prima A; & H minor, quàm tertia C.

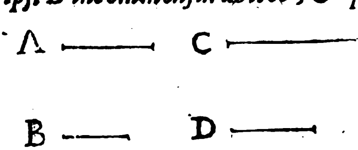
Vt verò definitio generalis fiat pro quantitatibus commensurabilibus, & incommensurabilibus, hoc modo dicemus: si proportio quantitatis primæ ad secundam maior fuerit; at proportio quantitatis tertiæ ad quartam non sit maior eadem commensurabili proportione: tunc proportio quantitatis primæ ad secundam vocetur maior proportione illa, quam tertia habet ad quartam (Nam tunc proportio magnitudinis tertię ad quartam eadem erit, vel minor tertia illa proportione commensurabili. Et si proportio quantitatis primę ad secundam minor fuerit; sed proportio quantitatis tertię ad quartam non sit minor eadem commensurabili proportione (sic enim proportio tertię ad quartam eadem, aut maior esse potest eadem illa commensurabili proportione): tunc vocabitur proportio quantitatis primæ ad secundam minor illa proportione, quam habet tertia quantitas ad quartam. Sic enim comprehenduntur tam proportiones commensurabiles, quàm incommensurabiles.

XII.

At in eisdem incommensurabilibus quatuor quantitatibus, si proportio quantitatis primę ad secundam non fuerit maior, neque minor ea proportione incõmensurabili, quam tertia habet ad quartam quantitatem: vocetur incommensurabilis proportio quantitatis primę ad secundam eadem, vel similis proportioni, quam tertia habet ad quartam quantitatem. Et huiusmodi quatuor quantitates vocentur proportionales incommensurabiles.

Def 10. Def. 11.

Positis eisdem quantitatibus A, B, C, & D; sint A ipsi B, nec non C ipsi D incommensurabiles; & quia supra declaratum est, quando prima A habet maiorem, vel minorem proportionem ad secundam B, quàm tertia C habet ad quartam D. Si ergo proportio ipsius A ad B non est maior, neque minor ea proportione incommensurabili, quam C habet ad D: vocabitur proportio incommensurabilis primæ A ad secundam B, eadem, vel similis proportioni quantitatis tertię C ad quartam D. Et huiusmodi quatuor quantitates A, B, C, D dicentur proportionales incommensurabiles.



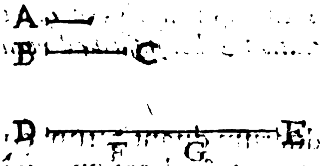
AXIO-

AXIOMATA.

I.

Si prima quantitas secundam metiatur, secunda verò tertiam mensuret; prima quoque tertiam metietur.

Vt si quantitas A mensuret secundam B C, & B C mensuret tertiam D E. Manifestum est primam A mensurare quoque tertiam D E. Nam diuisa D E in partes D F, F G, G E, quæ singulæ æquales sint ipsi B C; cùm A mensuret ipsam B C, mensurabit quoque eadem A singulas partes D F, F G, G E; ideoque a ipsa A totam D E ex dictis partibus constantem, mensurabit. a Axio. 6. lib. 1



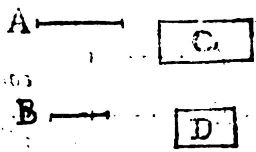
II.

Tribus quantitatibus propositis, quam proportionem habet prima ad secundam, habebit tertia ad aliquam aliam quantitatem eiusdem generis.

III.

Et quam proportionem habet prima ad secundam, habebit aliqua alia quantitas eiusdem generis ad tertiam.

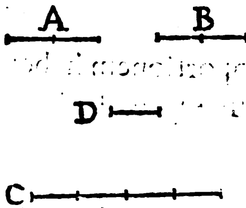
Vt, si data sit aliqua proportio quantitatis A ad B. Manifestum est tertiam quantitatem C habere ad aliquam aliam quantitatem eiusdem generis, D eandem proportionem, quam A habet ad B. Licet enim ignoretur interdum quænam sit illa quantitas quarta, certum est eam reperiri in natura. Nam cuiuslibet datæ quantitatis C datur quoque dupla eius, tripla, quadrupla, & quælibet alia multiplex illius. Similiter datur in natura semissis ipsius C, nam tota C ex duabus eius medietatibus conflatur: Pari ratione datur eiusdem C tertia pars, quarta, & quælibet alia eius pars: Vnde eiusdem partes omnes in natura existent. Quare existente proportione data ipsius A ad B commensurabili, dubitandum non est ipsam C ad aliquam aliam habere posse eandem proportionem, quam habet A ad B. At si proportio A ad B fuerit incommensurabilis, vt diametri ad latus quadrati, cùm dentur omnes proportiones commensurabiles, scilicet infinitæ maiores, & infinitæ minores



illa, non repugnat quin detur etiam eadem incommensurabilis proportio inter terminum C, & aliquem alium eiusdem generis; qui erit latus alterius quadrati, cuius diameter est C. Animaduertendum tamen est in numeris hoc non semper verificari, nisi fracti adhibeantur. Nam ternarius ad nullum numerum integrum habebit proportionem duplam, aut quintuplam: Ternarius enim diuidi nequit in duas, aut quinque partes aequales, nisi eius vnitates subdiuidantur: & tunc semissis ternarij erit tres semisses vnitatis, & quinta pars ternarij erit tres quintae partes vnitatis: & hoc sufficit ad veritatem Axiomatis stabiliendam.

IV.

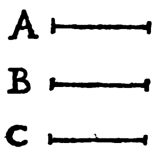
Si duarum quantitatum ęqualium vna partes fuerit alicuius tertiæ: & altera quoque eędem partes erit eiusdem tertię, ac erat prima.



Nam, si duę quantitates A, & B aequales fuerint, & A ipsius C partes fuerit, quarum communis mensura sit D: erit necessario D eadem pars alterius B, quae erat ipsius A; eo quod A & B aequales ponuntur; ideoque B ipsius C eędem partes erit, quae A partes est eiusdem C.

V.

Duæ proportiones in tribus paucissimis terminis contineri, aut continuari possunt: si nimirum vnus sit consequens, aut antecedens communis; vel si vnus sit antecedens vnius proportionis, & consequens alterius.



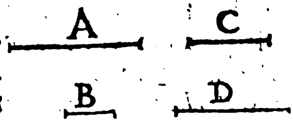
Vt duae proportiones A ad B, atque C ad B continentur in tribus terminis; eritque B secunda, & quarta. Pari modo in duabus proportionibus A ad B, atque A ad C erit A prima, & tertia. Tandem duę proportiones A ad B, & B ad C continuantur in tribus terminis A, B, C, estque B secunda respectu primę A, & tertia respectu quartę C.

VI.

Si quatuor quantitatum prima maior fuerit, quàm secunda, sed tertia non sit maior, quàm quarta: habebit prima ad secundam maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam.

Nam,

Nam, existente *A* maiore, quàm *B*; *C* verò non maiore ipsa *D*, proportio a quantitatis prima ad secundam maior erit commensurabili proportione æqualitatis; cùm prima *A* maior sit secunda *B*: at proportio tertiæ *C* ad quartam *D* non erit maior eadem commensurabili proportione æqualitatis; cùm tertia ponatur non maior quarta. Vnde patet (ex definitione decima) *A* ad *B* maiorem proportionem habere, quàm *C* ad *D*. a def. 9. huius.



Liber quintus elementorum Euclidis adeò difficilis, & imperceptibilis vnicuique videtur, vt meritò dubitari possit aliquid in eo desiderari. Cętera enim opera Euclidis ita clarè, & euidenter percipiuntur, vt ne vmbram quidem difficultatis relinquant, sicuti puritas scientiæ demonstratiuę exigit. Qua ergo ratione fieri posset, vt omnes, in hoc opere de proportionibus, tanquam in scopulum incidentes, hærerent perplexi, & dubij, nisi aliquid non ritè, aut non clarè expositum in principijs assumptis, aut in progressu reperiretur? Nec defuerunt quamplurimi, qui hanc pręcipuam Geometrię partem restituere conati sint, sed infructuosè, vt mox ostendam.

Multifariam definiuit Euclides proportionalitatem, in libro quinto duplici modo, & aliter in septimo. In quinto enim (vbi agit de proportionibus in communi, scilicet de eis, quæ in quibuscunque magnitudinibus reperiuntur, tam commensurabilibus, quàm incommensurabilibus, vt omnes confitentur) dixit tertia definitione: proportionem esse duarum magnitudinum eiusdem generis, *scilicet quæ possunt multiplicatæ se se mutuò superare*, habitudinem quandam seu respectum secundum quantitatem. *Postea in quarta definitione addit* proportionalitatem esse proportionum similitudinem. *Deinde in sexta dixit*: in eadem proportione magnitudines dicuntur esse, prima ad secundam, & tertia ad quartam: cùm primę, & tertię ęquè multiplicia à secundę, & quartę ęquè multiplicibus (qualiscunque sit hęc multiplicatio) vtrunque ab vtroque, vel vna deficiunt, vel vna excedunt, vel vna ęqualia sunt, si ea sumantur, quę inter se respondent. *Et in octaua addidit*: cùm verò ęquè multiplicium multiplex primę magnitudinis excesserit multiplicem secundę; at multiplex tertię non excesserit multiplicem quartę: tunc primam ad secundam habere maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam.

Hisce definitionibus adductis, non quieuit Euclides, sed libri VII. definit. 20. agens de quadam specie quantitatis, scilicet de numero, hanc aliam attulit definitionem proportionalitatis: Numeri proportionales

tionales sunt, cùm primus secundi, & tertius quarti ęquè multiplex est, vel eadem pars, vel eędem partes.

Eadem ergo res, eodem nomine proportionalitatis signata, tribus modis ab Euclide definitur, adhibitis tribus passionibus diuersis inter se. Et quoniam, vt dictum est, Definitio, quæ est principium Scientiæ, debet exponi per passionem omnium notissimam, & primam earum, quæ subiecto definito conueniunt: cùmque tres dictæ passiones non possint esse omnium notissimę, & primæ; necessariò aliquæ ex eis, si non omnes, superfluę, aut adulterinæ, aut prauę erunt. Hoc autem satis declaratur ab ipsomet Euclide, qui in lib. V. attulit vniuersalem definitionem, comprehendentem etiam commensurabiles quantitates, & propterea comprehendet etiam numeros, qui quantitates inter se commensurabiles sunt: Ergo si definitiones lib. V. declarantur per passiones euidentissimas, & primas, idest, si sunt principia Scientiæ, aptissimæ erunt ad declarandam proportionalitatem numericam. Quare aut superfluus fuit Euclides, quando nouam definitionem proportionalitatis numericæ in lib. VII. attulit; aut non omnino sufficientes, aut perfectas esse definitiones lib. V. iudicauit.

Similiter in lib. V. definit. 4. exposuit proportionalium naturam per similitudinem respectus, quo ad quantitatem pertinet; at si hæc passio est omnium notissima, & prima (qualis debet esse illa, quę definitionem scientificam constituit): Quare propositiones lib. V. per hanc definitionem non demonstrauit? Et si libuit eas demonstrare per passionem ęquè multiplicium: quare non ostendit Euclides, quòd magnitudines, quarum æquè multiplicia habent illam proprietatem, habeant similes respectus, seu habitudines, vt iure meritò proportionales appellari possint? Vel è contra, quare non demonstrauit, quòd magnitudines, habentes respectum similem, necessariò habent illam passionem æquè multiplicium, sine qua demonstratione omnes propositiones lib. V. euidenter ostensæ non erunt? Quare ne prestantissimo Geometrę imperitia logices immeritò tribuatur, dicendum est definitiones tertiam, & quartam adulterinas, & appositititas esse. Et sanè cùm video propositiones lib. V. demonstratas fuisse ab Euclide per proprietatem ęquè multiplicium sextæ definitionis, persuaderi non possum eundem Euclidem 3. & 4. definitiones in eodem libro apposuisse, quę superfluę omnino sunt, & ordinem perturbant. Nam in prima definitione quid sit pars declarat. In secunda, quæ sint magnitudines aliarum multiplices, & æquè multiplices. Tertio loco, in 5. definitione, declarat proprietatem, per quam antecedens magnitudo, comparata consequenti, dicitur habere rationem, seu proportionem; cùm scilicet quęlibet multiplex antecedentis, ęxcedit, ęqualis est, aut deficit à quacunque multiplice consequentis. *Quarto loco*

ait,

ait, in 6. def. Dicuntur in eadem ratione esse prima ad secundā, vt tertia ad quartam, cùm quęlibet ęquè multiplicia antecedentium à quibuscunque ęquè multiplicibus cōsequentium vtrunque ab vtroque vnà deficiunt, vel vnà ęqualia sunt, vel vnà excedunt. *Et in his duabus postremis definitionibus, quid sit proportio, & quid sit proportionalitas apertè declaratur, ex quibus omnes propositiones lib. V. ostendauntur, nunquam facta mentione definitionis tertię, aut quartę.*

Verisimile etiam est definitiones 4. & 6. duas distinctas non esse, & separatas; sed constituere vnicam tantùm, & continuari debere, vt sensus sit: Magnitudines proportionales sunt illę, quę habent similes respectus: & tunc respectus similes inter se dicuntur, cùm ęquè multiplices earum habent dictam conditionem: *& sic non est opus, vt ostendatur, quod magnitudines habentes similes respectus, habeant conditionem sextæ definitionis, nec è contra. nam hoc in definitione suppositum fuerat nominę proportionalitatis significari debere.*

Hanc sextam definitionem, Euclidisque methodum primus omnium improbauit Anettus filius Ioseph, qui epistolam edidit de proportione, & proportionalitate (vt refert Campanus). Successit post alios Ioannes Baptista Benedictus, & post eum alij plures viri docti, & prestantissimi, qui apertè pronunciant propositiones lib. V. minimè demonstratas esse; cùm originem trahant ab ignoto, & obscuro principio, scilicet à definitione 6. quæ principium scientiæ esse nequit, cùm sit theorema demonstrabile, & non sine maxima difficultate: & censent recipi debere quartam definitionem, à qua euidentiùs declaratur natura proportionalitatis, per similitudinem respectus, ex qua passione clarè percipitur, quòd magnitudines ęquales ad eandem magnitudinem habent eandem proportionem; quia ad eam habent eundem respectum, seu habitudinem, & è cōtra: Tariterque quòd inęqualium maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor; propterea quod respectus ille maior est isto, & contra. *in commento defin. 16. lib. V. Eucl.*

Similiter deducunt, quòd proportiones, quę sunt eædem vni tertię, eędem quoque sunt inter se; cùm respectus similes vni tertio, inter se quoque similes sint. Pari modo aiunt se euidenter percipere, quòd si duæ proportiones fuerint similes inter se, quarum vna maior fuerit tertia quadam proportione: erit reliqua etiam maior. Itaque putant Euclidis propositiones 7. 8. 9. 10. 11. 13. esse euidentissima pronunciata lumine naturę cognita, ex quibus in duobus theorematibus demonstratiuè ostendunt vera esse ea, quę in definitionibus 6. & 8. supponit Euclides. Et postea inuersiones, permutationes, compositiones, diuisiones proportionum,

num, & reliquos modos argumentandi in proportionalibus, ex dictis theorematibus deducunt. At ego huic sententię acquiescere non possum; eo quod fundamentum eius, quòd nimirum 4. definit. lib. V. Euclidis (solitariè sumpta) sit bona, & scientifica, mihi stabile non videtur, vt mox ostendam. Quęlibet res in mente pręconcepta non potest declarari, & exponi absque vocabulis, significantibus illam rem; propterea pro tali declaratione inepta erunt vocabula ambigua, confusa, & non expressiua. Nam ab his auditores non percipient mentem pręceptoris; &, si non percipitur significatus orationis, quo modo sciri potest an ea, quæ proferuntur vera sint, vel falsa, & an competant alicui subiecto? Et propterea ignota omnino erunt. Iam passio adhibita in definitione proportionalitatis, quę est similitudo respectuum, quo ad quantitatem pertinet, *si exponitur vocabulis ambiguis, & obscuris, cùm non declaret euidenter quid proportionales sint, & quare distinguantur à cęteris rebus, erit ignota; & propterea non erit bona definitio, idest non poterit esse principium scientię; quandoquidem ne dùm certam, & euidentem cognitionem non affert, sed potius incertitudinem, & ignorantiam.*

Videndum modò est, an voces, quibus passio proportionalium exponitur in dicta definitione quarta, sint ambiguę, an verò notę, & euidentissimæ significationis: Pro qua inquisitione animaduertendum est, quòd vocabula illa, quorum significatus simplex est, non ęquiuocus, vsu receptus, & vt talis ab omnibus percipitur absque hæsitatione, acceptantur in scientijs mathematicis, nec indigent declaratione; vt sunt hæc vocabula: Totum, Portio, Aequale, Maius, Minus, Excessus, Defectus, & alia quamplurima, quorum germanam significationem nemo est, qui non intelligat: Reliqua verò vocabula, quę non sunt huius generis non admittuntur in mathematicis, nisi prius expressè declaretur quid nam per illa significari velimus, vt æquiuocationes omnino tollantur. Dico iam, quòd voces istę: similitudo respectuum, quo ad quantitatem pertinet, *non sunt prioris generis. Nam Euclides ipse vocem similitudinis declarauit in tertio libro dum ait:* circulorum segmenta similia esse, quando anguli in segmentis ęquales sunt. *Et in lib. VI. aliter eam exposuit, dum ait:* triangula, & polygona sunt similia, quando sunt ęquiangula, & circa angulos ęquales latera sunt proportionalia. *Similiter in lib. XI.* solida similia esse *dixit*, quę ex paribus multitudinibus polygonorum similium cōtinentur; atque conos, & cylindros similes inter se esse, quorum axes, ęquè inclinati ad bases, proportionales sunt diametris basiū. *Quare manifestum est vocem similitudinis esse ambiguę significationis; & ideò sensus horū verborum;* similitudo respectuum, quo ad quantitatem

titatem pertinet, *erit confusæ significationis; propterea quod similia vocantur ea, quæ in aliquo conueniunt, idest, quæ habent aliquam identitatem. Nam similem habitudinem, quo ad quantitatem, idest quo ad mensuram, habere dicuntur duo magna comparata cum duobus paruis; eandem enim comparationem, seu respectum maioritatis habent ambæ antecedentes ad suas consequentes. Pari modo conuenientiam, & identitatem habent respectus duarum magnitudinum paruarum, si comparentur cum duabus quantitatibus magnis. Illi enim respectus similes sunt in minoritate.*

Non secus duæ magnitudines similem respectum inæqualitatis ad duas alias habere possunt: quando prima maior est secunda, & tertia minor est quarta. tunc enim similitudo respectuum seruatur in eo, quòd ambæ antecedentes inæqualitatis respectum habent ad suas consequentes. Ita etiam duo excedentia ad duo deficientia, si excessus æquales fuerint, vel ambo dupli, vel ambo tripli, &c. similem respectum, quo ad quantitatem, habebunt. nam conueniunt in excessus, vel defectus æqualitate; neque dici potest æqualia inter se similia non esse: & ideò æqualitas excessus, vel defectus, indicat respectus esse omnino similes.

Dubitandum ergo non est voces, quibus proprietas proportionalium exprimitur habere amplissimum, ambiguum, & multiplicem significatum. Quapropter definitio quarta proportionalitatis erit omnino imperfecta. Nam, si quæram quid nam demonstrari debeat, vt concedatur quatuor magnitudines esse proportionales, & non habere inæquales proportiones? dicent, quod respectus, seu habitudo, quoad quantitatem pertinet, magnitudinis primæ ad secundam demonstrari debet similis respectui, quo tertia refertur ad quartam. Sed rursus insto: quando, & quomodo respectus ille est similis isti? An quando, prima magnitudo maior est secunda, pariterque tertia maior est quarta? An quando prima minor est secunda, & tertia quoque minor est quarta? An si prima maior est secunda; tertia verò minor est quarta? Vel cùm excessus ambarum antecedentium supra consequentes æquales sunt inter se, aut potius, cùm ambarum antecedentium defectus à consequentibus æquales fuerint? In his enim omnibus similes sunt respectus, aut in excedentia, aut in deficientia, aut in æqualitate, vel in æquali mensura excessuum, vel defectuum Neque negari potest esse tales respectus, seu habitudines, quo ad quantitatem pertinet: Scimus tamen huiusmodi habitudines non esse proportionales. Ergo si quæratur tantummodo similitudo habitudinum, vel respectuum, quo ad quantitatem pertinet, affirmare possem magnitudines esse proportionales, quando non sunt; & negare possem alias esse proportionales, quando re vera sunt. Hæc autem erit illa tam exaggerata certitudo scientiæ, an incertitudo, & ignorantia?

Q Sed

Sed dicet aliquis exponi debere hanc definitionem 4. ex mente eiusdem Euclidis in alio loco expressa. Nam in 20. definitione lib. VII. dicuntur esse quatuor numeri proportionales, quando antecedentes sunt æquè multiplices, vel eadem pars, aut eedem partes consequentium. Quis non videt has habitudines, seu respectus esse omnino similes inter se? Ergo eodem modo reliquæ omnes magnitudines debent habere respectus similes inter se, vt iure meritò proportionales sint.

Mitto, quòd non propterea excusatur obscuritas definitionis quartę lib. V. Deinde notandum est solummodo in magnitudinibus commensurabilibus percipi posse similitudinem respectuum: At in magnitudinibus incommensurabilibus, quando antecedentes non possunt esse multiplices, neque pars, neque partes consequentium, qua euidentia, immo qua notitia quis animaduertet in illa infinitate partium, similitudinem respectus, seu habitudinis? Quapropter si nulla cogitatione percipi potest euidenter quid nam sit illud, per quod respectus primę magnitudinis ad secundam sit similis respectui tertię magnitudinis ad quartam est impossibile, vt prędicta definitio 4. absque alia superaddita declaratione sit bona, & principium scientię.

Neque admitti potest sententia prestantissimi neoterici Auctoris, qui censet, quamquam expressè, & euidenter declarari nequeat, quid nam sit illud, per quod vna proportio est similis alteri, sufficere tantùm, vt vna concedatur similis alteri, & denique admittatur in natura dari proportionalitatem. At inquam ego, quomodo possum hoc concedere, si non percipio quidnam proportionalitas sit? Et quomodo distinguere possum quando vna habitudo, quo ad quantitatem pertinet, est similis, vel non, alteri, si hucusque tradita non est passio prima, & euidenter cognita, per quam similes respectus dignosci possint? Et tandem quomodo concedere possum reperiri in natura respectus similes, quo ad quantitatem pertinet, si horum verborum germanam significationem non percipio? Quare si ignoro, an in natura dentur magnitudines proportionales multo minus scio cui subiecto certè, & euidēter passio proportionalitatis conueniat: Et quomodo distinguere possum magnitudines, quæ certè absque hæsitatione sunt proportionales ab ÿs, quę proportionales non sunt? Quare nullo pacto sciri potest an duæ æquales ad eandem magnitudinem habeant eandem proportionem; neque, quòd maior ad eandem habeat maiorem proportionem, quàm minor; & similiter ea omnia, quæ in propositionibus 9. 10. 11. & 13. continentur ignota erunt. Et propterea inter euidentissima axiomata connumerari nulla ratione possunt. Nam iuxta precepta bonæ logices axiomata exponunt euidentissimam, & perceptibilem passionem alicuius subiecti, cuius nomen receptum iam est. Et hic obiter notandum est, quod propositio septima Euclidis rationabilius,

vt

vt definitio, quàm vt axioma afferri poterat, dicendo habitudines, quibus duæ magnitudines æquales eidem comparantur, vocentur similes, & proportionales. Sed nihil ex tali definitione colligi potuisset, vt considcranti patebit. Vanus est ergo labor clarissimi huius auctoris in suo acutissimo lib. V. de proportionibus, qui facta hac suppositione, quòd nimirum dentur in natura magnitudines proportionales, quę scilicet habent similes respectus, quo ad quantitatem pertinet, assumit propositiones 7. 8. 9. 10. 11. & 13. Euclidis, vt per se notas, & vt axiomata. Deinde in duobus triangulis æquè altis probat basim vnius non esse maiorem, neque minorem, quam opus est, vt ad basim alterius eandem proportionem habeat, quam triangulum ad triangulum: quod ostendit ex dictis pronunciatis, more antiquorũ per deductionem ad inconueniens, mediante cõmensurab li proportione triãgulorum, & basium commensurabilium. sed prędictus progressus videtur obscurus, & imperfectus: nã tradita non est definitio proportionalium, per aliquam primam, & euidenter cognitã passionem; quandoquidem similitudo respectuum, quo ad quantitatem pertinet ambigua, & obscura est; & ideò ignoratur an in natura dentur proportionales, & multo magis ignoratur, quando prima magnitudo est maior, aut minor, quàm opus est, vt ad secundam habeat eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam. Secundò imperfectus est eius progressus, quia permutationes, compositiones, diuisiones, & reliqui modi argumentandi proportionalitatis ostenduntur solummodo de lineis, & triangulis: & ipse gratis assumit idem valere in reliquis quantitatibus, scilicet solidis, angulis, numeris, motibus, &c.

Igitur si liber V. Euclidis imperfectus est, non erit talis propter rationes ab Anetto, & ab eius fautoribus adductas: neque correctiones ab ipsis excogitatę huic defectui opportunæ sunt: alia enim est causa, longè diuersa, imperfectionis prędicti voluminis, quę vltimo loco in medium adducetur.

Accedo ad Clauium, qui in Comm. lib. V. post. 8. definitionem quærit, cur Euclides quatuor magnitudines proportionales & non proportionales per earum ęquè multiplices definiuit. *Respondet* 6. & 8. definitiones esse impositiones nominum ad placitum; & ideo queri non debet quare sic, vel aliter proportionales magnitudines Euclides definiuit, sed sufficit, vt in progressu demonstrationis, definitum de definitione, & è contra, non affirmetur, nisi demonstratiuè ostendatur definitionem traditam subiecto definito competere. *Et postea subiungit*; sed quanquam hęc responsio vera sit, ac propria; tamen quia non videtur colligi posse, verè magnitudines, quarum ęquè multiplicia habent illam conditionem, esse proportionales, &

non proportionales, etiam si eas solùm velit Euclides appellare proportionales; propterea explicandum est accuratius, &c.

Sed hęc verba ritè intelligi debent: nam si nomen proportionalitatis solummodo illis magnitudinibus, habentibus talem conditionem æquè multiplicium, impositum est, & non alijs; quo modo dubitari potest an eędem magnitudines sint verè proportionales? Quare longè diuersa mihi videtur intentio oculatissimi Clauij. Existimo enim considerare voluisse methodum, quâ bonæ definitiones quæri debent. Et re vera si ageretur in definitione de nomine imponendo tantùm, certum est, quòd non debet reddi ratio, quare hoc nomine potiùs, quàm alio aliqua res definiatur, & nominetur. At, quia etiam tractari debet de electione proprietatis rei definiendæ, quę non casu, neque arbitrariè sumi debet, sed certis rationibus, ac legibus, conuenienter quęri potest, quare in definitione adhibetur potius hęc, quàm alia proprietas. Nam, si re vera non sit eius proprietas, aut non sit notissima omnium, aut non sit expressa verbis significantibus, non habebit vsum in scientia, & non erit principium demonstrationis. Ergo, sicuti non potest quis petere quarę in definit. 6. Euclides imposuit illis magnitudinibus nomen Proportionalium, ita benè Clauius quęrere posset quare Euclides in tali definitione elegit proprietatem illam æquè multiplicium potiùs, quàm aliam.

Huic dubitationi respondet, quòd, si omnes magnitudines essent inter se commensurabiles, nihil aliud pręter 20. propos. lib. VII. desiderari posset; at quia definit. 6. lib. V. complecti voluit etiam incommensurabiles magnitudines, quę illum respectum mutuum perceptibilem minimè habere possunt; cùm altera alterius, neque multiplex neque pars, neque partes esse possit; propterea excogitauit Euclides proprietatem quandam, quę magnitudinibus proportionalibus commensurabilibus certè competit, *& fuit hęc*, Quod nimirum ipsarum ęquè multiplices haberent illam conditionem excessus, vel ęqualitatis, vel defectus.

Sed huiusmodi ratiocinium potius coniecturam, quàm necessitatem inducere videtur. Nam, licet proprietas tradita in 6. definit. lib. V. sit aliquid, quod certum sit conuenire magnitudinibus proportionalibus inter se commensurabilibus, (vt ipsemet Clauius ostendit in illis suis quatuor propositionibus) non dicentur iure optimo quatuor incommensurabiles magnitudines, etiam proportionales, si ipsis idem demonstretur conuenire; propterea quod, vt aliqua proprietas sit vniuersalis, non sufficit, vt solum ostendatur conuenire vni particularium, nisi etiam demonstretur conuenire reliquis omnibus particularibus sub vniuersali contentis; quod ostendi potest tali exemplo. Si quis quæreret vniuersalem passionem competen-

petentem cuilibet triangulo, & putaret esse proprietatē cuiuslibet trianguli habere duos angulos, quorum quilibet tertia pars sit duorum rectorum. Hic iam ostendere posset quod prædicta proprietas competit triangulis ęquilateris: neque hac de causa absque alia demonstratione concludere poterit, quòd reliquę species triangulorum, vt sunt ambligonij, & oxigonij, habent duos angulos, quorum quilibet tertia pars est duorum rectorum.

Non igitur certè affirmari potest, quòd proprietas illa æquè multiplicium certè competat magnitudinibus proportionalibus inter se incommensurabilibus, non alia de causa, nisi quia ostensum est commensurabilibus proportionalibus certè competere æquè multiplicium proprietatem.

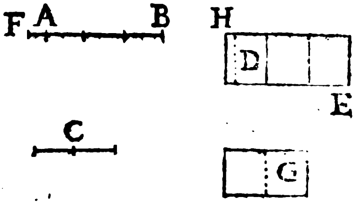
Huiusmodi difficultates oriri mihi videntur ex præconcepta opinione, quòd dentur quatuor magnitudines incommensurabiles inter se, quarum habitudines, seu respectus eandem naturam habeant, quam magnitudines proportionales inter se commensurabiles habent. Et quia in 20. definit. lib. VII. affertur proprietas prima, & euidentissima, qua declaratur natura proportionalium commensurabilium, ex eo, quod antecedentes sunt ęquè multiplices consequentium, vel eadem pars, vel sunt eædem partes; ex qua euidentissima passione distinguuntur proportionales à non proportionalibus; & sic percipitur, quòd antecedentes possunt esse vnà maiores, aut vnà minores consequentibus; at eius conuersum non verificatur. Non enim, si ambę antecedentes excedunt suas consequentes, aut deficiunt ab eis, erunt proportionales: potest enim esse prima dupla ipsius secundæ, & tertia quintupla ipsius quartæ, nec propterea erunt proportionales; quandoquidem ęquè multiplices non sunt; & sic dicendum est de reliquis. Pari modò percipitur, quòd excessus antecedentium, siue defectus possunt esse æquales inter se, & etiam inæquales, & multoties incomparabiles; quando nimirum duæ quantitates sunt vnius generis, & aliæ duę alterius generis. At in magnitudinibus incommensurabilibus, in quibus neque multiplicitas, neque identitas partis, aut partium reperiri potest, omnes iam dictę proprietates in eis haud conspici possunt. Nam in illa ineffabili congerie partium, seu potius infinitate, incommensurabilium magnitudinum, non possunt eius proprietates comprehendi: Voluit nihilominus Euclides venari proprietatem competentem prędictis magnitudinibus proportionalibus inter se incommensurabilibus; & hæc exposita fuit in sexta definitione: sed re vera dici non potest, quòd assignata proprietas naturam rei definitę declaret, & distinguat à qualibet alia; imo rem difficilem obscuriorem reddit. Primò enim ignoratur, an in natura reperiri possint quatuor quantitates, habentes talem passionem, quòd nimirum infinitę æquè multiplices antecedentium, si comparentur cum infinitis ęquè multiplicibus consequentium, debeant vnà excedere, vel vnà æquari, aut defi-

deficere ab illis. Secundò infinitæ illę comparationes comprehendi non possunt; & ideò hęc passio non erit euidentissima, qualis debet esse illa quæ principium scientiæ constituit. Tertiò licet hypotheticè concedatur, adhuc ignotum est quidnam ex ambage illa infinitarum comparationum colligi debeat. Nam nec ipse Clauius expeditè, & lumine naturę colligere potuit ex passione æquè multiplicium in magnitudinibus commensurabilibus proportionalitatem; sed coactus fuit hoc demonstrare in suis illis quatuor propositionibus. Sed quomodo erit notissima illa passio, quæ absque demonstratione acceptari non potest in magnitudinibus commensurabilibus? & quę insufficiens iudicata fuit ab ipsomet Euclide, quando proportionalitatem commensurabilem iterum lib. VII. definiuit. Certum ergo est obscuram, & difficilem esse proprietatem proportionalium definitionis sextę; propterea quod nedùm euidenter naturam proportionalium incommensurabilium non declarat, vt 20. definit. VII. facit, sed rursus (quod mirum est) neque manifestat ea, quæ de re ipsa definienda præcognoscebamus. Nam ex eo, quod quatuor magnitudinum ęquè multiplices habent illam conditionem excessus, vel defectus, minimè percipitur quando, & quo modo, si antecedentes vnà excedant, aut deficiant à suis consequentibus, sint proportionales; neque si excessus sint inter se æquales, nec ne. Nec denum hęc minima cognitio ex dicta proprietate colligi potest, quòd scilicet: si quatuor magnitudines sint proportionales, cùm prima excedit secundam, necessariò tertia magnitudo quartam superare debet; quod Clauius confitetur in 16. propos. lib. V. elemẽtorum.

Quis ergo dicet sextam definitionem esse bonam, & principium scientiæ, si tam obscuram affert cognitionem, & imperfectam? Videndum modò est in qua parte huius definitionis defectus lateat. Et quia in nomine ipso proportionalitatis defectus nullo pacto reperiri potest, vt dictum est; Remanet ergo, vt in proprietate definita peccatum lateat. Sed in proprietate tria considerari possunt; quòd sit possibilis, & competat subiecto definito: secundò vt sit exposita vocibus clarè aliquid significantibus; Tertiò vt sit proprietas prima, & omnium notissima, quę illi subiecto competunt. Primum dici non potest, quia magnitudines, quarum æquè multiplices habent dictam conditionem re vera sunt res definitę; vt postea ostendetur. Neque secundum, nam verba sextę definitionis exponunt absque ambiguitate quæ sit talis proprietas. Remanet ergo, vt proprietas illa non sit notissima, prima omnium, quę illi subiecto competunt. Et re vera alia proprietas incommensurabilium notior reperiri potest, quæ naturam proportionalium, & ea omnia, quę ex 20. propo. lib. VII. primo intuitu patent manifestissimè declarat; quod minimè dici potest de proprietate ęquè multiplicium tradita ab Euclide, vt dictum est.

Quod

Quod autem alia proprietas magnitudinum proportionalium notior reperiri possit apertè percipiet is, qui attentè definitiones superiùs expositas considerauerit. Nam si fuerint quatuor magnitudines commensurabiles A B, C, H E, & G, atque prima A B sit ipsius secundæ C quælibet partes: ponatur A B sesquialtera ipsius C; pariterque H E ponatur sesquialtera ipsius G: erunt iam ex octaua nostra definitione quatuor prædictæ quantitates inter se proportionales; eò quod prima ipsius secundæ eędem partes est, quæ tertia est partes quartæ; & propterea respectus, quo prima A B refertur ad secundam C, similis est respectui, quo tertia H E refertur ad quartam G. Intelligatur postea quælibet particula F A addita ipsi A B, ita vt consurgat tota F B, aut commensurabilis, aut non, ipsi C. Manifestum est ipsam F B maiorem esse quàm opus est, vt sit sesquilatera ipsius C. Et propterea F B maior erit, quàm necesse est, vt sit ipsius C eędem partes, quàm est H E alterius G. Vnde proportio F B ad C maior erit proportione ipsius H E ad G, & hęc omnia conspicua sunt ex 20. definit. lib. VII. Euclidis, quę supra relata fuit. Deinde ex tertia quantitate H E auferatur quęlibet particula H D, cuiuscunque paruitatis, ita vt residuum D E incommensurabile sit ipsi G. Manifestum est ipsam D E minorem esse, quàm sesquilatera alterius G; & ideò facili negotio quilibet percipiet, quòd respectus, quo D E refertur ad G minor est illo, quo H E refertur ad eandem G, idest minor est respectu, quo A B refertur ad C; sed erit respectus, quo F B refertur ad C maior illo, quo eadem A B refertur ad eandem C. Nemo ergo negabit maiore respectu F B referri ad C, quàm D E ad G. Quapropter si fuerint quatuor quantitates F B prima, C secunda, D E tertia, & G quarta, (licet F B ipsi C, atque D E ipsi G incommensurabiles sint) dubitandum non est primam ad secundam maiorem proportionem habere, quàm tertia habet ad quartam, ex eo quod proportio quantitatis primæ F B ad secundam C maior est tertia quadam commensurabili proportione, quam H E habet ad G; sed proportio tertiæ quantitatis D E ad quartam D minor est eadem comensurabili proportione, quam H E habet ad G. Et hæc erit proprietas à qua natura rei definitæ apertè declaratur, & distinguitur à qualibet alia. Ergo æquali euidentia in magnitudinibus commensurabilibus percipitur, quando vna proportio maior est alia, ac dignoscitur, in hisce magnitudinibus incommensurabilibus, per dictam proprietatem à me excogitatam. Si ergo euidentissima, & omnium prima iudicatur passio illa, qua inæqualitas proportionum, in magnitudinibus commensurabi-



libus

libus declaratur ex 20. definit. lib. VII. pariter prima, & euidentissima erit hæc noua passio magnitudinum incommensurabilium, non proportionalium. Vtræque enim per excessus, aut defectus proportionalium commensurabilium declarantur; qui quidem perceptibiles omnino sunt, & possibiles, neque procedunt per ambages illas infinitarum æquè multiplicium; sed primo intuitu absque vllo ratiocinio percipi, & admitti possunt.

Iam ex dicta proprietate non proportionalium incommensurabilium, à me definita deduci potest, quòd, si prima magnitudo excesserit secundam, & tertia non superauerit quartam, (vt in apposito exemplo patet) prima ad secundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia habet ad quartam. Nam facilè percipitur, quòd aliqua quantitas maior, quàm tertia, aut ipsamet tertia, esse potest æqualis quartę: Ponebatur autem prima maior secunda. Igitur proportio primę ad secundam maior erit commensurabili proportione ęqualitatis; at proportio tertię ad quartam non est maior eadem ęqualitatis proportione. Rursus patet conuersum huius propositionis falsum esse; scilicet, si prima ad secundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam, non est necesse, vt prima secundam excedat, at tertia non superet quartam. Nam ex primo exemplo percipi potest, quòd tertia proportio commensurabilis potest esse multiplicitatis, vt decupla, & prima potest esse maior, quàm decupla secundę; at tertia minor, quàm decupla, & maior, quàm octupla ipsius quartę; licet duæ antecedentes F B, & D E simul, excedant, aut vna deficiant à suis consequentibus C, & G. Simili modo alię cognitiones proportionalium in magnitudinibus incommensurabilibus percipi possunt eadem facilitate, qua comprehenduntur reperiri posse in magnitudinibus commensurabilibus.

Tandem sicuti natura proportionalium commensurabilium, pari euidentia declarari potuisset per proprietatem affirmatiuam, ac negatiuam, dicendo: si prima magnitudo ad secundam non habuerit maiorem, neque minorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam: vocentur commensurabiles illę quantitates proportionales. quia quando respectus, quo prima refertur ad secundam non est maior, neque minor illo respectu, quo tertia comparatur quartę, necessariò illi respectus similes & ęquales erunt inter se. & sic quando prima ipsius secundę non est maior, neque minor, quàm opus est, vt eadem partes sit, quæ tertia partes est quartę, necessariò ambę antecedentes erunt eędem partes consequentium; & definitio proportionalium commensurabilium tam per affirmationem, quàm per negationem proprietatis exponi posset. Nam vtroque modo exponitur quid sit proportionalitas, & quare distinguatur à non proportionalibus, scilicet percipitur quando vna proportio similis est alteri, &

quare

quare differunt à proportionibus inæqualibus.

Simili modo postquam in magnitudinibus incommensurabilibus euidenter percipitur quando, & quare vna proportio maior est alia, aut minor, dici poterit: si prima magnitudo ad secundam non habuerit maiorem neque minorem proportionem incommensurabilem, quàm tertia habet ad quartam: vocentur illę Proportionales. Et re vera, si hic afferri posset proprietas affirmatiua esset eligenda; at quia hoc fieri nequit, recipi debet illa, quanquam negatiua, dummodo sit euidenter cognita. Non enim insolens est, vt negatiuæ proprietates definiantur: Euclides enim per negationem punctum, & lineas parallelas definiuit. Vnde nihil refert an proprietas sit negatiua, vel affirmatiua; sed sufficit, vt euidenter exponat naturam rei definitę, id quod hęc mea definitio perfectè exequitur.

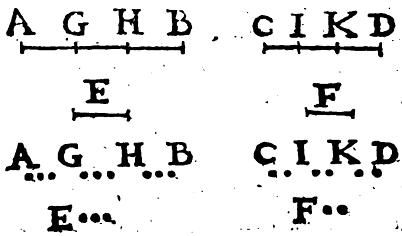
Iam ex hac euidentissima definitione ignotæ illæ proprietates definitionum sextę, & octauę Euclidis demonstrari possunt. Et quia percepi duplici forma librum quintum Euclidis restitui posse: primò si tantummodo proprietates definitionum sextæ, & octauæ cum suis conuersis demonstratę fuissent, relictis omnibus propositionibus V. lib. vt ab Euclide traditæ sunt; aut si nulla mentione facta illarum definitionum, omnia hac noua methodo exposuissem. & licet hoc ne dum ob nouitatem, sed etiam propter euidentiam methodi non iniucundum fore perciperem, nolui tamen definitiones illas Euclidis ommittere; tum quia in elementis vsu receptæ sunt, cùm etiam quia ab alijs, & pręcipuè ab Archimede in suis demonstrationibus adhibentur. Quare mediam viam elegi: Nam omnes proprietates proportionalium non per æquè multiplices tradidi, & etiam passiones æquè multiplicium demonstraui: & sic puto hanc pręcipuam Geometrię partem hactenus dubiam, & imperceptibilem me restituisse nisi fortè me fallat, vel propriarum rerum propensio, vel amicorum summa nobilitate, ac doctrina præstantium, plausus, quibus cum in vniuersa Sicilia, Romę, Neapoli, Genuę, ac Florentiæ quindecim ab hinc annis ipsam communicaui:

PROPOS. I. THEOR. I.

Si duę quantitates duarum quantitatum fuerint ęquè multiplices, erunt viciſſim vnà ęquales, aut vnà maiores, aut minores.

Sint quatuor quantitates, siue magnitudines, siue numeri A B, E, C D, & F, omnes eiusdem generis, & sit A B tam multiplex ipsius E, quàm C D est multiplex alterius F; sitque pri-

R mò

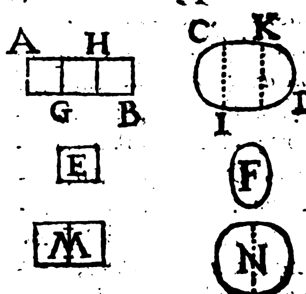


mò E ęqualis F. Dico A B ipsi C D equalem esse. intelligantur A B, & C D diuisę in suas partes. Manifestum [a] est tot partes A G, G H, & H B contineri in A B, singulę equales ipsi E, quot partes C I, I K, & K D continentur in C D, singulę equales eidem F. Ergo A G, & C I cū sint ęquales ęqualibus E, & F. inter se quoq; ęquales erunt. paritérq; G H, I K, nec non H B, & K D ęquales erunt inter se. Iam si ęqualibus A G, C I addantur ęquales G H, I K: erunt [b] totę A H, & C K ęquales inter se; Et si eisdem rursus ęquales H B, & K D addantur, erunt totę A B, & C D ęquales inter se. Quare quando E ęqualis est F: etiam A B. ęqualis est ipsi C D.

a Def. 5. huius.

b Ax. 2. lib. 1.

Sit secundò E maior, quàm F. Dico A B maiorem esse, quā C D. Diuisis ęquè multiplicibus, vt prius: erit A G maior, quàm C I, eo quod illa maiori E, hęc verò minori F ęqualis est. Pari ratione G H maior erit, quam I K, & H B maior, quàm K D. Iam, si maiori A G maior G H addatur, & minori C I minor I K coniungatur, & rursus eisdem eodem ordine alię partes inęquales superaddantur, erit tota A B maior, quàm C D.



Tertio sit E minor, quàm F. Dico A B minorem esse, quàm C D. Quia E minor est, quàm F. Ergo F maior erit, quàm E; ideoque [c] C D etiam maior erit, quàm A B.

c Ex prima parte.

Quartò sit A B æqualis C D. Dico E æqualem esse ipsi F. Si hoc verum non est: erit E maior, aut minor, quàm F. Ergo, ex secunda, & tertia parte huius, A B maior, aut minor erit, quàm C D, quod est contra hypothesin. Ergo E ipsi F æqualis est.

Quintò sit A B maior, quàm C D. Dico E maiorem esse, quàm F. Sin minus, erit E æqualis, aut minor, quàm F. Vnde, ex prima, & tertia parte huius, A B æqualis erit, aut minor quàm C D, quod est contra hypothesin. Quare E maior est, quàm F. Vnde patet propositum.

CO-

COROLLARIVM.

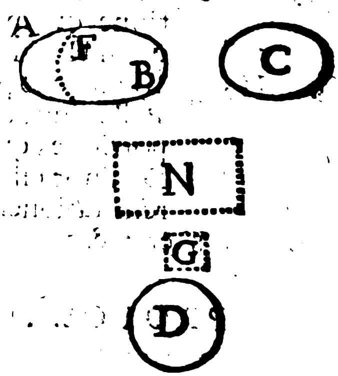
Patet, quòd si duę quantitates fuerint duarum quantitatum eędem partes, erunt viciſſim vnà maiores, aut vnà minores, vel vnà ęquales.

Nam, si ponantur M, & N ęquè multiplices earundem E, & F: erunt *d* A B ipſius M, atque C D ipſius N eędem partes; *d Def. 6. huius.* & sicuti *e* E maior, vel minor, aut ęqualis eſt ipſi F; ſic pariter M maior, vel minor, aut ęqualis erit ipſi N; nec non A B eodem modo maior, vel minor, aut ęqualis erit ipſi C D. *e prop. 1. huius.*

PROPOS. II. THEOR. II. *Euci. 8. V.*

Inęqualium quantitatum maior ad eandem maiorem proportionem habet, quàm minor. Et eadem ad minorem maiorem proportionem habebit, quàm ad maiorem inęqualium.

Sint duę quantitates A B maior, C minor, & quęlibet tertia D eiuſdem generis. Dico primò A B ad D maiorem rationem habere quàm C ad eandem D. Ex maiore A B intelligatur *a* ablata F B ęqualis ipſi C, reſidua erit A F; Intelligaturq; ſecta *a Schol. propos. 27. l. 1.* D bifariã, & bifariã ſucceſſiuè, quouſq; reperiatur eius pars G, quę minor ſit, quàm A F (quod fieri poſſe conſtat licet in numeris multoties fracti adhiberi debeant): poſtea ſumatur G ſemel, aut bis, vel ter, & ſic vlterius, quouſque conſurgat N, ex G compoſita, quę proximè maior ſit, quàm F B, ſcilicet exceſſus ipſius N ſuprà F B non ſit maior, quàm vna eius particula G: cùmque G minor ſit, quàm A F: erit exceſſus ipſius N ſupra F B minor, quàm A F; & ideo N minor erit, quàm A B, ſed maior, quàm F B, ſeu maior, quàm C (cùm C, & F B ęquales ſint). Vnde erunt quatuor quantitates A B prima, D ſecunda, C tertia, & D quarta (concipitur *b Def 9.* enim D, vt ſecunda, & vt quarta). Eſtque *b* proportio quanti- *huius.*



A 2 F 8 B. C 8

N 9 G 1 $\frac{1}{2}$

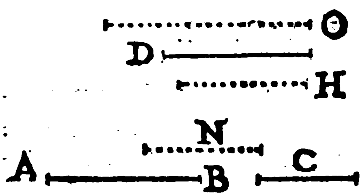
D 6

tatis primę A B ad secundam D maior illa commensurabili proportione, quam habet N ad eandem D (eo quod A B maior est, quàm N); atque c proportio quantitatis tertię C ad quartam D minor est eadem commensurabili proportione, quam habet N ad D(cùm C. sit minor, quàm N) Ergo d quantitas A B ad D maiorem proportionem habet, quàm C ad D.

c Def. 9. huius.

d Def. 10. huius.

Secundò dico eandem D ad minorem C habere maiorem proportionem, quàm ad A B. vt prius, fiat N partes ipsius D, ita vt sit minor quàm A B, sed maior, quàm C; & intelligantur O quidem ipsius A B, atque H ipsius C eędem partes, quæ D partes est ipsius N. Et e quia N minor est, quàm A B, erit D minor, quàm O: pariterque quia N maior est, quàm C, erit D maior, quàm H. Quapropter erunt quatuor quantitates, prima D, secunda C, tertia D (concipitur enim D, vt prima, & vt tertia), & quarta A B; f estque proportio primę D ad secundam C maior commensurabili illa proportione, quam habet H ad C siue O ad A B (eo quod H minor, quàm D; g est ad C, vt O ad A B); atque h proportio tertię D ad quartam A B minor est eadem commensurabili proportione, quam habet O ad A B (eo quod D minor est, quam O). Ergo i D ad C maiorem rationem habet, quàm D ad A B. Quod erat, &c.



e Corol. Prop. 1. huius.

O 6 $\frac{2}{3}$ D 6

N 9 H 5 $\frac{1}{3}$

A 10 B C 8

f Def. 9. huius.

g Def. 8. huius

h Def. 9. huius

i Def. 10. huius.

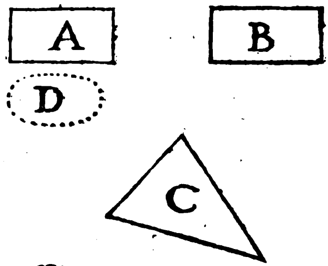
PROPOS. III. THEOR. III.

Eucl. 7. V.

Aequales quantitates ad eandem habent eandem proportionem, & eadem ad ęquales.

Sint quantitates eiusdem generis A, B, & C; & A sit ęqualis B. Dico A ad C esse, vt B ad C. si enim hoc verum non est, aliqua a quantitas reperietur in natura maior, vel minor quàm

a Ax. 3. huius.



quàm A, quę ad C habeat eandem rationem, quam B habet ad eandem C. Intelligatur illa esse, seu vocari D. Et quia D, & A inęquales ponuntur, estque B ęqualis A; Ergo D maior, aut minor est, quàm B; & ideo b D maiorem, aut minorem proportionem habebit ad C, quàm B habet ad eandem C, quod est impossibile: Posita enim fuit D ad C, vt B ad eandem C. Non ergo alia quantitas maior, aut minor, quàm A, erit ad C, vt B ad C; ideoque ipsamet A ad C erit, vt B ad C.

b prop. 2. huius.

Secundò dico C ad A, atque ad B eandem proportionem habere. Si enim hoc verum non est, quam c rationem habet C ad B habebit C ad aliquam aliam quantitatem D. Et quia D, & A inæquales conceduntur, & est B ęqualis A: Ergo D maior, aut minor est, quam B; & ideò d C ad B maiorem, aut minorem rationem habebit, quàm C habeat ad D, quod est impossibile. Posita enim fuit C ad B, atque ad D in eadem ratione. Non ergo C ad maiorem, vel minorem, quàm A, eandem rationem habet, quàm C ad B; ideoque C ad ipsam A eandem proportionem habet, quam ad B. Quare patet propositum.

A 25. B 25.

D...

C 47.

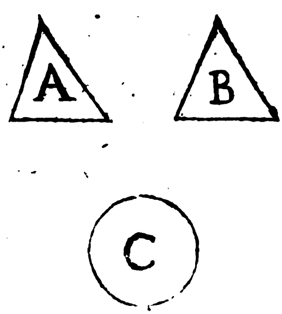
c Ax. 2. huius.

d prop. 2. huius.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Eucl. 9. V.

Quæ ad eandem quantitatem eãdem proportionem habent, æquales sunt inter se. Et ad quas eadem quantitas eandem proportionẽ habet, eæ quoque inter se sunt ęquales.



Sint tres quantitates A, B, & C; & primò A ad C eandem proportionem habeat, quam B ad eandem C. Dico A ipsi B æqualem esse. Si enim A non est ęqualis ipsi B, erit aut maior, aut minor eadem. Ergo a A ad C maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm B ad eandem C; quod est contra hypothesin. Non ergo A maior est, aut minor, quàm B: vnde æqualis erit ipsi.

a prop. 2. huius.

Habeat

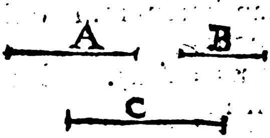
Habeat secundò eadem C ad A eandem proportionem, quàm ad B. Dico pariter A æqualem esse ipsi B. Si enim A non est æqualis B: erit aut maior, aut minor eadem. Quare eadem *b* C ad A minorem, aut maiorem proportionem habebit, quàm ad B, quod est contra hypothesin. Non ergo A maior, aut minor est, quàm B. Quare necessariò æqualis erit illi. Quod erat ostendendum.

b prop. 2. huius.

Eucl 10. V.

PROPOS. V. THEOR. V.

Ad eandem quātitatem rationem habentium, quę maiorem rationem habet, illa maior est. Et ad quam eadem maiorem rationem habet, illa minor est.



Habeat primò A ad C maiorem rationem, quàm B ad eandem C. Dico A maiorem esse ipsa B. Nam, si hoc verum non est, erit A, aut ęqualis, aut minor, quàm B; & ideò A *a* eandem, aut *b* minorem rationem habebit ad C, quàm habeat B ad eandem C. quę sunt falsa, & contra hypothesin. Non ergo A ęqualis, aut minor est, quam B. Quare necesse est A ipsa B maiorem esse.

a prop. 3. huius.
b prop. 2. huius.

Secundo eadem C habeat ad B maiorem proportionem, quàm ad A. Dico B ipsa A minorem esse. Nam, si hoc verum non est, erit B, aut ęqualis, aut maior, quàm A; & ideò C ad B *c* eandem, aut *d* minorem proportionem habebit, quam ad A, quę sunt contra hypothesin. Non ergo B ęqualis, aut maior est ipsa A. Quare minor erit illa. Quę erant ostendenda.

c prop. 3. huius.
d prop. 2. huius.

Eucl 13. V.

PROPOS. VI. THEOR. VI.

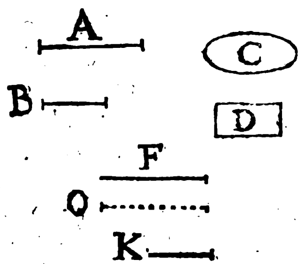
Si duę proportiones similes fuerint inter se, & vna illarum maior, aut minor fuerit aliqua tertia proportione: erit quoque reliqua maior, aut minor eadem.

Sit A ad B, vt C ad D, & quęlibet alia proportio F ad K: Et primò A ad B habeat maiorem rationem, quàm F ad K. Dico C ad D maiorem proportionem quoque habere, quàm F ad K. Quoniam A ad B maiorem rationem habet, quàm F ad K. Ergo *a* proportio A ad B maior erit aliqua commensurabili

a Def. 10. huius.

rabili

rabili proportione, quę ponatur esse O ad K; At proportio F ad K erit non maior eadem commensurabili ratione, eiusdem O ad K, Dico iam, quod proportio C ad D maior est commensurabili proportione O ad K. Nam, si fieri potest, sit proportio C ad D non maior eadem ratione commensurabili O ad K; cùmq; proportio A ad B maior sit eadem commensurabili proportione O ad K. Igitur b A ad B maiorem proportionē habet, quàm C ad D, quod est contra hypothesin. Non ergò proportio C ad D esse potest non maior ratione cōmensurabili O ad K; ideoque maior erit illa; estque proportio F ad K non maior eadem commensurabili ratione O ad K. Igitur c C ad D maiorē proportionem habebit, quàm F ad K.



b Def. 10. huius.

c Def. 10. huius.

Secundò quando A ad B minorem rationem habet, quàm F ad K: pari modo ostendetur, quòd proportio C ad D minor est commensurabili ratione O ad K, dum proportio F ad K non minor est eadem ratione commensurabili O ad K. Vnde C ad D minorem rationem habebit, quam F habet ad K. Quæ erant ostendenda.

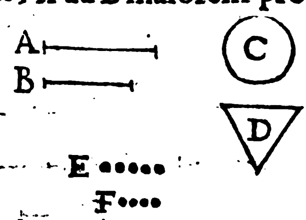
A 7 C 14
B 6 D 12
F 10
O 9
K 6

PROPOS. VII. THEOR. VII.

Eucl. 11. V

Proportiones, quæ sunt eędem vni tertię, sunt eædem quoque inter se.

Sit proportio quantitatis A ad B eadem, quæ C ad D; & pariter E ad F sit, vt C ad D. Dico esse A ad B, vt E ad F. Si hoc verum non est, habeat, si fieri potest, A ad B maiorem proportionem, aut minorem, quàm E habet ad F. Et quia proportio E ad F eadem supposita est, quę C ad D; & proportio E ad F maior, aut minor concessa est proportione magnitudinis A ad B. Ergo a C ad D maiorem, aut minorem proportionem habebit, quàm A ad B, quod est contra hypothesim. Erat enim C ad D, vt A ad B. Non ergo A ad B maiorem, aut



a prop. 6. huius.

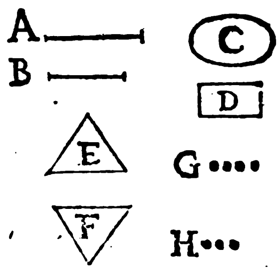
aut minorem proportionem habere poteſt, quàm E ad F; & ideo A ad B erit, vt E ad F. Quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

Conſtat ex duabus hiſce propoſitionibus, quod duę proportiones inter ſe ſimiles, vnà maiores, aut vnà minores, vel ambę eędem erunt duabus alijs proportionibus inter ſe ſimilibus. Poſita G ad H, vt E ad F, quoniam duę ſimiles rationes A ad B, & C ad D oſtenſę b ſunt vnà maiores, aut vnà minores, vel c ambę eędem rationi E ad F; atque duę ſimiles rationes E ad F, & G ad H ſunt vnà maiores, aut vnà minores, vel ambę eędem rationi C ad D. Ergo quando ratio A ad B maior eſt ratione E ad F, etiam proportio C ad D maior erit proportione G ad H. Et quando proportio A ad B minor eſt proportione E ad F, erit pariter proportio C ad D minor proportione G ad H: Atque cùm proportio A ad B eadem eſt proportioni E ad F, ſimiliter erit proportio C ad D eadem proportioni G ad H.

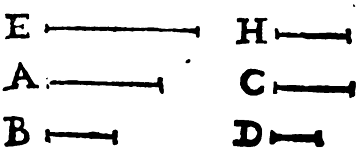
b prop. 6. huius.

c prop. 7. huius.



PROPOS. VIII. THEOR. VIII.

Si fuerint quatuor quantitates proportionales, & quinta ſit maior, quàm prima, & ſexta non maior, quàm tertia: erit quinta ad ſecundam in maiori proportione, quàm ſexta ad quartam: Et quinta ad ſextam in maiori proportione, quàm prima ad tertiam. Et, ſi quinta maior ſit ſecunda, & ſexta non maior quarta, erit prima ad quintam in minori proportione, quàm ſecunda ad ſextam.



Sit A ad B in eadem ratione, quam C habet ad D, & E ſit maior, quàm A, & H non ſit maior, quàm C, ideſt ſit H ęqualis, aut minor ipſa C. Dico primò E ad B maiorem proportionem habere, quàm H ad D. Quia a maior E ad B maiorem rationem

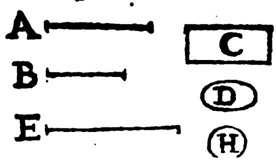
a prop. 2. huius.

nem habet, quàm minor A ad eandem B; eſtque C ad D, vt A ad B: Ergo *b* E ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D; ſed C ęqualis, aut maior eſt, quàm H. Igitur C ad *c* eandem D eandem, aut *d* maiorem rationem habet, quàm H ad D. Quare *e* proportio E ad B adhuc maior erit proportione H ad D.

Secundò dico E ad H maiorem proportionem habere, quã A ad C. Quoniam E maior eſt, quàm A. Ergo *f* E ad H maiorem rationẽ habebit, quàm A ad eandem H; eſtque H ęqualis, aut minor ipſa C. Igitur eadem A ad H *g* eandem, *h* aut maiorem rationem habet, quàm ad C. Et propterea *i* E ad H adhuc maiorem proportionem habebit, quàm A habet ad C.

E 7	H 27
A 6	C 30
B 5	D 25

Tertiò ſit E maior ſecunda B proportionalium, & H non ſit maior quàm D. Dico A ad E minorem proportionem habere, quàm C ad H. Quoniam E maior eſt, quàm B, at H non eſt maior, quàm D. Ergo *k* eadem A ad maiorem E habebit minorem proportionem, quàm ad B minorem; eſtque C ad D, vt A ad B. Igitur *l* A ad E minorem proportionem habet, quàm C ad D. Sed eadem C ad non maiorem H *m* eandem, aut *n* maiorem proportionem habet, quàm ad D. Igitur *o* proportio A ad E adhuc minor erit proportione C ad H. Vt propoſitum fuerat.



b prop. 6. huius. c prop. 3. huius. d prop. 2. huius. e prop. 6. huius. f prop. 2. huius. g prop. 3. huius. h prop. 2. huius. i prop. 6. huius. k prop. 2. huius. l prop. 6. huius. m prop. 3. huius. n prop. 2. huius. o prop. 6. huius.

PROPOS. IX. THEOR. IX.

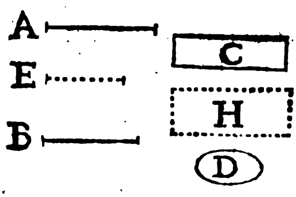
Eucl. Corol. prop. 4. lib. V.

Si prima quantitas ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam, erit ſecunda ad primam, vt quarta ad tertiam. Vocetur huiuſinodi argumentandi forma Inuerſio rationis.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico B ad A eandem rationem habere, quam D ad C. Si enim hoc verum non eſt, habebit B ad A maiorem, aut minorẽ proportionẽ, quàm D habet ad C; & ſi fieri poteſt, primò ſit proportio maior. Ergo *a* proportio B ad A maior erit; proportio verò D ad C non erit maior eadẽ proportione cõmenſurabili (quę ponatur eſſe quantitatis E ad A,

a Def. 10.

S atque



b Def. 8.

atque H ad C); & propterea B maior erit, quàm E, sed D non erit maior, quàm H. Et quoniam E ad A, atque H ad C in eadem sunt proportione commensurabili. *b* Igitur E ipsius A, atque H alterius C ęquè multiplices, vel eadem pars, aut eędem partes erunt; & è contra *c* A ipsius E, nec non C alterius H eadem pars, vel æquè multiplices, aut eędem partes erunt: & ideo *d* A ad E; atque C ad H in eadem proportione erunt; estque B maior, quàm E; at D non maior, quàm H. Igitur *e* A ad B proportionem minorem habet, quàm C habeat ad D, quod est absurdum. Supposita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter B ad A nō habet maiorem proportionem, quàm D ad C. Similiter ostendetur, quòd D ad C non habet maiorem proportionem, quàm B ad A; & ideo B ad A neque minorem proportionem habebit, quàm D ad C. Et propterea B ad A erit, vt D ad C. Quod erat ostendendum.

c Def. 4. 5. 6. huius.
d Def. 8. huius.
e prop. 8. huius.
f Def. 11. huius.

Pappi Alex. prop. 7. lib. VII.

COROLLARIVM.

Ex hac demonstratione colligitur, quòd, si prima ad secundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam: inuertendo secunda ad primam minorem rationem habebit, quàm quarta ad tertiam. Ex eo enim, quod proportio B ad A posita fuit maior, quàm D ad C, demonstrata fuit proportio A ad B minor proportione ipsius C ad D.

PROPOS. X. THEOR. X.

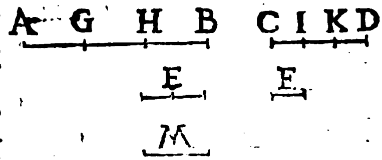
Si quatuor quantitatum eiusdem generis duę antecedentes duarum consequentium ęquè multiplices fuerint; & antecedens antecedentis tantùm, vel consequens consequentis tantùm multiplex fuerit: erunt vicissim proportionales.

Sint quatuor quantitates eiusdem generis, A B quidem ipsius E, & C D ipsius F æquè multiplices. Et primò sit E ipsius F multiplex. Dico A B ad C D esse, vt E ad F. Quoniam A B, & C D ipsarum E, & F ęquè multiplices sunt, sectis antecedentibus in suas partes, erunt *a* in A B tot partes A G, G H, & H B, singulæ ęquales ipsi E, quot sunt in C D partes C I,

a Def. 5. huius.

I K,

I K, & K D, singulæ equales ipsi F; ideoque, *b* quæ pars est F ipsius E eadem pars erit C I ipsius G A, & I K ipsi G H, & K D ipsius H B. Ergo *c* quoties F multiplicata equalis fit ipsi E, toties C I multiplicata equalis fit ipsi A G, & toties I K multiplicata efficitur equalis ipsi G H, nec non k D toties multiplicata efficitur equalis ipsi H B, & sic reliqua segmenta, si plura extiterint, quę totidem sunt in C D, quot in A B. Ergo quoties F multiplicata equalis fit ipsi E, toties ipsę C I, I k, k D, idest ipsa C D multiplicata efficitur æqualis ipsis A G, G H, H B, seu ipsi A B. Et propterea C D toties mensurat ipsam A B, quoties F metitur ipsam E. & ideo *d* A B ipsius C D tam multiplex est, quàm E ipsius F. Vt erat probandum.



b prop. 3. huius.

c Def. 4. huius.

d Def. . huius.

Secundò iisdem positis sit A B multiplex ipsius C D. Dico esse E ad F, vt A B ad C D. Fiat M ipsius F tam multiplex, quàm A B ipsius C D, estque pars C D multiplex ipsius F. Ergo *e* A B ad M est, vt C D ad F, erat autem, vt C D ad F, ita A B ad E. Ergo *f* eadem A B ad duas M, & E eandem rationem habet; ideoque *g* E, & M inter se equales sunt. Vnde *h* A B ipsius C D, & E ipsius F equè multiplices erunt. Quare &c.

e ex prima parte.

f prop. 7. huius.

g prop. 4. huius.

h prop. 3. huius.

PROPOS. XI. THEOR. XI.

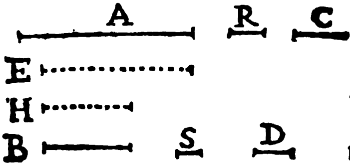
Eucl. 15. V.

Eiusdem generis partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione.

Sint A ipsius B, & C alterius D equè multiplices, & eiusdem generis. Dico A ad C esse, vt B ad D. Si enim hoc vèrum non est, habeat primò, si fieri potest, A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Ergo *a* proportio A ad C maior erit; proportio verò B ad D non erit maior eadem proportione commensurabili (quam intelligatur habere E ad C, atque H ad D; & ipsarum communes mensurę eędem sint R, & S). Quare A maior erit quàm E, at B non erit maior, quàm H. Et quoniam sunt C, D equales, vel equè multiplices ipsarum R, & S cum hę equè metiantur illas, & est C ipsius D multiplex. Ergo *b* R ipsius

a Def. 10. huius.

b prop. 10. huius.



ipsius S, & C ipsius D ęquè multiplices sunt. Rursus quia E, & H ęquales, vel ęquè multiplices sunt ipsarum R & S, & R est multiplex ipsius S. Ergo c E ipsius H tam multiplex est, quàm R ipsius S, seu d quàm C ipsius D: est verò A ipsius B tam multiplex, quàm C ipsius D: Ergo e E ipsius H tam multiplex est, quàm A est multiplex ipsius B; ideoque f sicuti E minor est, quàm A, ita H minor est, quàm B; sed concessa fuit H non minor, quàm B, quod est absurdum, Non ergo A ad C maiorem proportionem habet, quã B ad D. Eadem ratione ostendetur A ad C non habere minorem proportionem, quàm B ad D. Quare g A ad C erit, vt B ad D. Quod erat probandum.

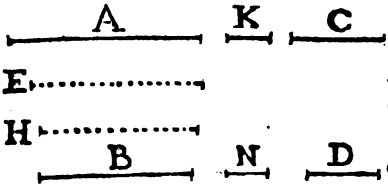
c prop. 10. huius.
d prop. 7. huius.
e prop. 7. huius.
f prop. 1. huius.
g Def. 12. huius.

Eucl. 16. V.

PROPOS. XII. THEOR. XII.

Si quatuor quantitates eiusdem generis proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt. Vocetur autem talis argumentandi forma Permutatio rationis.

Sit A ad B, vt C ad D; sintque omnes eiusdem generis. Dico esse A ad C, vt B ad D. Si enim hoc verum non est, habebit A ad C maiorem, aut minorem proportionem, quàm B ad D. Et primò sit proportio maior, si fieri potest. Ergo a proportio A ad C maior erit, proportio verò B ad D nõ erit maior, eadem proportione commensurabili (quam intelligatur habere E ad D, atque H ad D, & ipsarum communes mensurę eædem sint k, & N): quare A maior erit, quàm E, sed B non erit maior, quàm H; cùmque sit E ad D, vt H ad D. b Igitur maior erit proportio A ad B, quàm K ad H; sed c k ad N est, vt E ad H (cùm illę sint harum eædem mensurę) Ergo d A ad B maiorem proportionem habet, quàm k ad N; est verò e C ad D, vt k ad N (cùm hæ sint illarum eædem mensurę). Igitur A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod est absurdum. Supposita enim fuit A ad B, vt C ad D. Quapropter A ad C non habebit



a Def. 10. huius.
b prop. 8. huius.
c prop. 11. huius.
d prop. 6. huius.
e prop. 11. huius.
f prop. 6. huius.

bebit maiorem proportionem, quàm B ad D.

Similiter ostendetur, quòd B ad D non habet maiorē proportionem, quàm A ad C; & ideò A ad C, neq; minorem proportionem habebit, quā B ad D. Quare g A ad C eandem rationem habebit, quàm B habet ad D. Vt propositum fuerat. Vocetur hęc argumentandi forma permutatio rationis. g Def. 12. huius.

COROLLARIVM.

Pappi. 5. VII.

Deducitur ex hac demonstratione, quod si prima quantitas ad secundam habuerit maiorem rationem, quàm tertia habet ad quartam; permutando prima ad tertiam maiorem rationem habebit, quàm secunda ad quartam. Nam ex positione, quòd A ad C habet maiorem proportionem, quàm B ad D, consequitur, permutando, habere A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D.

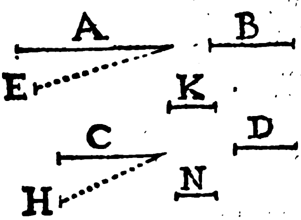
PROPOS. XIII. THEOR. XIII.

Eucl. 17.

Si coniunctę quantitates proportionales fuerint, hę quoque diuisę proportionales erunt. Vocetur huiusmodi argumentandi forma Diuisio terminorum rationis.

Sint A & B, simul sumptę, ad B, vt C & D, simul sumptę, ad D. Dico A ad B esse, vt C ad D. Si enim hoc verum non est habebit A ad B maiorem, aut minorem proportionem, quàm C habet ad D. Et sit primò proportio maior. a Ergo proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D non erit maior, eadem proportione commensurabili (quam habeat E ad B, atque H ad D; & ipsarum communes mensurę eędem sint K & N). Quare A maior erit, quàm E, sed C non erit maior, quàm H. Et quia E, & H ęquè mensurantur ab ipsis K, & N. Ergo b tot partes erunt in E, singulę ęquales K, quot sunt in H, singulę ęquales N. Rursus quia K, N ęquè metiuntur ipsas B, & D, tot c partes erunt in B, singulę ęquales K, quot sunt in D singulę ęquales N. Quapropter, si ęqualibus multitudinibus partium contentarum in E, & H addantur ęquales multitudines partium ipsarum B, & D: erunt in E B, simul sumptis, tot partes ęquales ipsi K, quot sunt partes in aggregato H, D contentæ, mensuratæque a b N; & ideò d E B erit eędem partes ipsius B, quam est H, D partes alte-

a Def. 10. huius.
b Def. 4. huius.
c Def. 4. huius.
d Def. 6. huius.



alterius D. Cùmque A maior concessa sit, quàm E, addita B communi: erit A B maior, quàm E B. Et quia C non maior cõcessa est, quàm H, addita D communi: erit C D non maior, quàm H D. Quare e E B ad B est, vt H D ad D, atque A B maior est, quàm E B, & C D non est maior, quàm H D. Ergo f A B ad B maiorem proportionem habebit, quàm C D ad D, quod est absurdum. Erat enim ex hypothesi A B ad B, vt C D ad D. Non ergo A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D. Similiter ostendetur, quòd C ad D non habet maiorem proportionem, quàm A ad B; & ideò A ad B neque minorem proportionem habebit, quàm C ad D. g Quapropter A ad B erit in eadem proportione, quam C habet ad D. Quod erat ostendendum.

e Def 8. huius.

f prop. 8. huius.

g Def. 12. huius.

Pappi 3. VII.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd, si prima ad secundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam, coniungendo habebunt prima & secunda, simul sumptæ, ad secundam maiorem proportionem, quàm tertia, & quarta, simul sumptæ, ad quartam. Ex eo enim, quod proportio A ad B posita fuit maior, quàm C ad D, demonstratum est A, & B habere maiorem proportionem ad B, quàm C, & D habent ad D.

Eucl. 18.

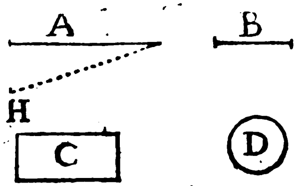
PROPOS. XIV. THEOR. XIV.

Si diuisę quantitates proportionales fuerint, hę quoque coniunctæ proportionales erunt. Vocetur hęc argumentatio Coniunctio terminorum rationis.

Sit A ad B, vt C ad D. Dico esse A, B, simul sumptas, ad B in eadem ratione, ac sunt C, D, simul sumptæ, ad D. Si hoc verum non est, aliqua alia quantitas H, B maior, vel minor, quàm A, B habebit ad ipsam B eandem rationem, quam C, D ad D. Ergo a diuidendo H ad B erit, vt C ad D; sed A maior, aut minor est, quàm H (eo quod H, B inęqualis erat ipsi

a prop. 13. huius.

ipsi A B, & tollitur B communis) Ergo *b* A ad B maiorem, *b prop. 12. huius.*
aut minorem, proportionem habet, quàm H ad eandem B;
erat autem C ad D, vt H ad B. Igitur *c* A ad B maiorem, aut *c prop. 6. huius.*
minorem proportionem habebit, quàm C habet ad D, quod est absurdum. Suppoſita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo aliqua quãtitas maior, vel minor, quàm A B eandem rationem habere poteſt ad B, quàm C D habet ad D; & ideò A, B ad B erit, vt C D ad D. quod erat probandum. Vocetur hæc argumentandi forma coniunctio terminorum rationis.



COROLLARIVM.

Campani 29. V.

Colligitur pariter, quòd, ſi quantitas prima cum ſecunda ad ſecundam habuerit maiorem proportionem, quàm tertia cum quarta ad quartam, diuidendo prima ad ſecundam maiorem proportionem habebit, quàm tertia ad quartam.

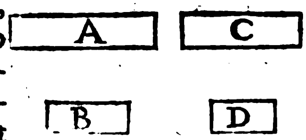
Conceſſum enim fuit, quod A, B ad B habeat maiorem proportionem, quàm C, D ad D; & demonſtratum *d* eſt A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. *d prop. 14. huius*

PROPOS. XV. THEOR. XV.

Eucl. 19. & 12. V.

Si quantitatum aggregata fuerint, vt ablatę portiones: erunt reſidua, vt aggregata. Et ſi portiones proportionales fuerint: aggregata eãdẽ rationem habebũt, quam portiones.

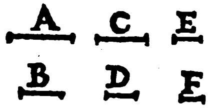
Sit primò aggregatum A, C ad aggregatum B, D, vt ablata portio C ad ablatam D. Dico reſiduum A ad reſiduum B eſſe vt A, C ad B D. Quoniam A C ad B, D eſt, vt C ad D. Ergo *a* permutando A, C ad C eſt, vt B, D ad D: Et diuidendo *b* A ad C erit vt B ad D: Et inuertendo *c* C ad A erit, vt D ad B; Et coniungendo *d* C A ad A erit vt D B ad B. Et iterum permutando *e* C, A ad D, B erit, vt A ad B. Quod erat primum.



a prop. 12. huius. b prop. 13. huius. c prop. 9. huius. d prop. 14. huius. e prop. 12. huius.

Secundò ſit A ad B, vt C ad D. Dico A, C ad B, D eſſe vt A ad B, vel vt C ad D. Quia A ad B eſt, vt C ad D, erit permutando *f* A ad C, vt B ad D: Et coniungendo *g* A C ad C vt B D ad D. Et iterum permutando *h* A C ad B D erit, vt C ad D,

f prop 12. huius. g prop 14. huius. h prop. 12. huius seu vt A ad B. Et si rursus sit E ad F, vt C ad D. Quia A C ad B D est, vt eadem C ad eandem D. Ergo



rursus erunt quatuor quantitates proportionales A C ad B D, vt E ad F; & ideo, vt prius A, C, E erunt ad B, D, F, vt E ad F, seu vt A ad B. Quod propositum fuerat.

COROLLARIVM I.

Colligitur ex prima parte huius demonstrationis, quòd, si aggregata ad ablata eandem proportionem habuerint, erunt aggregata ad residua in eadem ratione.

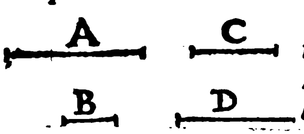
Nam concessum fuit A C ad C esse, vt B D ad D: Et deinde ostensum est A C ad A esse, vt B D ad B. Vocetur huiusmodi argumentandi forma Conuersio rationis.

SCHOLIVM.

Facili negotio ostendetur, quòd, si prima ad secundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam: habebit prima cum tertia, ad secundam cum quarta, maiorem proportionem, quàm tertia habet ad quartam; sed minorem, quàm prima habet ad secundam.

Quoniam A ad B, si habuerit maiorem proportionem, quàm C ad D, permutando i A ad C maiorem proportionem habebit, quàm B ad D: Et coniungendo k A C ad C maiorem proportionem habebit, quàm B D ad D: & iterum permutando l A, C ad B, D maiorem proportionem habebit, quàm C ad D.

i Coroll. prop 12. huius.
k Coroll. prop. 19. huius.
l Coroll. prop. 12. huius.
m Coroll. 9. prop huius.
n Coroll. prop. 13. huius.
o Coroll. prop. 12. huius.



Rursus quia prius habebat A ad C maiorem proportionem, quàm B ad D. Et inuertendo m C ad A minorem proportionem habebit, quàm D ad B: Et coniungendo n C, A ad A minorem proportionem habebit, quàm D B ad B: Et permutando o C A ad D B minorem proportionem habebit, quàm A ad B. Vt propositum fuerat.

COROLLARIVM II.

Colligitur, quòd, si totum ad totum maiorem rationem habuerit, quàm ablatum ad ablatum, erit totius ad totum minor proportio, quàm reliqui ad reliquum.

p Sch prop. 13. huius.

Habebat enim p A, C ad B, D maiorem proportionem, quàm

quàm C ad D; & demonstratum est A, C ad B, D habere minorem proportionem, quàm A ad B.

COROLLARIVM III.

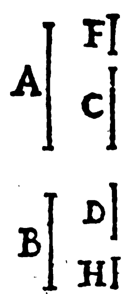
Deducitur pariter, quòd si totum ad ablatum maiorem rationem habuerit, quàm totum ad alterum ablatum: habebit, per conuersionem rationis, totum ad eius residuum, minorem proportionem, quàm aliud totum ad suum residuum. Fuit enim *q* A, C ad C in maiori proportione, quàm B D ad D; & demonstratum est A, C ad A minorem proportionem habere, quàm B D ad B. q *Schol. prop.15. huius.*

PROPOS. XVI. THEOR. XVI. *Eucl.25.V.*

Si quatuor quantitates eiusdem generis proportionales fuerint: maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

Sint quatuor quantitates eiusdem generis A ad B in eadem proportione, ac C ad D; sitque A omnium maxima, & D minima. Dico A & D; simul sumptas, maiores esse, quàm B & C simul. Ponatur F ęqualis excessui maximę A supra G, & H ęqualis excessui ipsius B supra minimã D. Patet C & F simul ęquales esse A, atque D & H simul, ęquales esse B. Et quoniam, vt A ad B, seu, vt totum F C ad totum H D, ita est C ad D ablatum ad ablatum. Ergo *a* residuum F ad residuum H erit, vt totum ad totum, scilicet, vt A ad B; sed quia A, vt maxima maior est, quàm B: erit quoque F maior, quàm H. (Nam si non maior esset, haberet *b* A ad B maiorem proportionem, quàm F ad H, quod est falsum: Ostensę enim fuerunt A, B, F, H, proportionales), si igitur inęqualibus F, & H addantur communiter ambę C, D simul, erit *c* summa quantitatum F, C, & D maior, quàm summa quantitatum H, D, & C: Sunt verò F, C, & D ęquales A, & D (cùm F C ostensa sit ęqualis A, & D sit communis); atque eadem ratione H, D, & C ęquales sunt B & C. Quare maxima A cum minima D maiores sunt, quàm B, C simul. Quod erat, &c.

a *prop.19. huius.*
b *Ax.6. huius.*
c *Ax.4.l.1.*



T CO-

Eucl. 14. V.

COROLLARIVM I.

Manifestum est, quòd, si quatuor quantitates proportionales fuerint, erunt directè, & vicissim vnà maiores, aut vnà æquales, aut vnà minores.

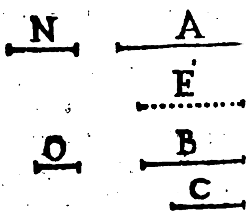
d prop. 16. huius.

Fuit enim A ad B, vt F ad H, & ostensum est, d quando A maior est, quàm B, non esse F ęqualem, aut minorem ipsa H, & contra. Igitur antecedentes A, & F erunt vnà maiores, aut vnà ęquales, aut vnà minores consequentibus B, & H.

e prop. 12. huius.

Rursus quia e vicissim A ad F est, vt B ad H. Igitur A, & B sunt vnà maiores, aut vnà ęquales, aut simul minores ipsis F, & H.

COROLLARIVM II.



Patet, si tres quantitates proportionales fuerint, esse duas extremas, simul sumptas, maiores, quàm duplum mediæ.

f prop. 16. huius.

Sit enim maxima A ad B, vt B ad C, & fiat E ęqualis B: erit A ad E, vt B ad C, ideoque f maxima A & minima C maiores erunt, quàm E, & B simul, idest maiores, quàm duplum mediæ B.

SCHOLIVM.

Si fuerint tres quantitates proportionales: excessus, quo maxima superat mediam, maior erit excessu mediæ supra minimam.

g prop. 15. huius.
h Coroll. 1. prop. 16. huius.

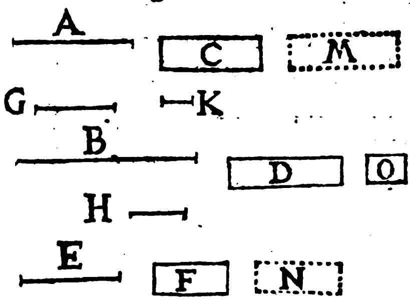
Sit maxima A ad B, vt B ad minimam C, Sitq; N excessus A supra B, atque O sit excessus B supra C. Dico N maiorem esse, quàm O. Nam, vt g totum A ad totum B, ita est B, ablatum ex A, ad C, ablatum ex B. Ergo N, residuum ipsius A, ad O, residuum alterius B, erit, vt totum A ad totum B, siue, vt maxima A ad mediam B. Et ideò h N maior erit, quàm O.

PROPOS. XVII. THEOR. XVII.

Si duabus similibus proportionibus commensurabilibus duę alię similes proportiones commensurabiles continuentur, termi-

termini priores ad posteriores erunt in eadem commensurabili proportione.

Sit A ad B in eadem commensurabili ratione, quam habet C ad D; atque B ad E sit in eadem commensurabili proportione, quam D habet ad F. Dico A ad E in eadem ratione commensurabili esse, in qua C ad F. Sit G communis mensura ipsarum A, B; atque H sit communis mensura duarum B, E; & intelligatur a K toties metiri ipsam G, quoties H ipsam B metitur. Ergo b permutando K toties metietur ipsam H, quoties G ipsam B mensurat; cùmque H mensuret ipsas B, & E: Igitur c K metitur ipsas B, & E. Rursus quia K metitur ipsam G, sed G mensurat ipsas A, B. Ergo d eadem K metitur, ne dùm ipsam E, sed etiã ipsas A, & B. Postea intelligatur e O, quę toties mensuret ipsam D, quoties K metitur B, atque M sit ad O, vt A ad K, pariterque N sit ad O, vt E ad K. Et quoniam A, & M æquè multiplices sunt ipsarum K & O, pariterque E, & N ęquè multiplices sunt earundem K, & O. Ergo f A ipsius E eędem partes est, ac M alterius N; suntque B, & D ęquè multiplices earundem K, & O: Igitur g A, & M eędem partes sunt ipsarum B, & D; sed C ad D erat, vt A ad B: Ergo h C, & M eędem partes sunt eiusdem D; ideoque i C ęqualis est M. Eodem modo ostendetur F ęqualis ipsi N. Quare k C ad F erit, vt M ad N; & ostensa fuit A ad E, vt M ad N. Igitur l A ad E erit, vt C ad F. Quod erat probandum.



a *Ax. 3. huius.*
b *prop. 10. huius.*
c *Ax. 1. huius.*
d *Ax. 1. huius.*
e *Ax. 3. huius.*
f *Def. 6. huius.*
g *Def. 6. huius.*
h *prop. 7. huius.*
i *prop. 4. huius.*
k *prop. 3. huius.*
l *prop. 7. huius. Eucl. 12. X.*

COROLLARIVM.

Deducitur ex demonstratione huius propositonis, quòd duę quantitates, quę vni tertię commensurabiles sunt, inter se quoque sunt commensurabiles.

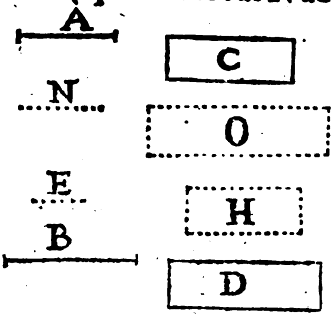
Nam A, & E eidem B commensurabiles positę fuerunt; eo quod G erat communis mensura ipsarum A, & B; nec non H erat communis mensura ipsarum B, & E: & ostensum m fuit K communi mensura extremas A, & E metiri.

m *prop. 17. huius.*

PROPOS. XVIII. THEOR. XVIII.

Si fuerint quatuor quantitates proportionales, habebunt antecedentes eandem rationem quoq; ad duas quantitates, eandem proportionem commensurabilem habentes, ad easdem consequentes.

Habeat A ad B eandem proportionem, quam C ad D, & habeat E ad B eandem proportionem commensurabilem, quam H habet ad D. Dico A ad E esse, vt C ad H. Si enim hoc verum non est habebit A ad E maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et sit primò proportio maior, si
a Def. 10. huius. fieri potest. a Ergo proportio A ad E maior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commensurabili (quam habeāt N ad E, atque O ad H); & ideo A maior



erit, quàm N, sed C non erit maior, quàm O. Et quoniam N ad E, atque O ad H sunt in eadem ratione commensurabili; pariterque E ad B, atque H ad D sunt in eadem proportione commensurabili.
b prop. 17. huius. Ergo b N ad B est in eadem proportione commensurabili, quam O habet ad D; estque A maior, quàm N, & C non maior, quàm O. Igi-
c prop. 8. huius. tur c A ad B maiorem proportionem habebit, quàm C ad D, quod est impossibile: Suppositę enim fuerunt A, B, C, D proportionales. Non ergo A ad E habebit maiorem proportionem, quàm C ad H. Similiter ostendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad E; & ideò A ad E
d Def 12. huius. neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H d Quarę A ad E est, vt C ad H. Quod erat probandum.

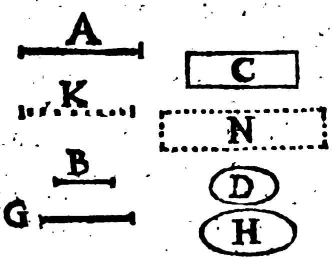
Eucl. 22. V.

PROPOS. XIX. THEOR. XIX.

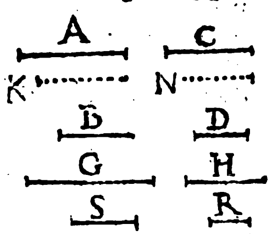
Si proportionibus similibus pares multitudines proportionum similium addantur ordinatè, erunt termini priores ad posteriores in eadem ratione. Vocetur talis argumentandi forma, compositio ordinata proportionum.

Sit proportio A ad B similis, vel eadem proportioni quantitatis C ad D, & ijs addantur alię proportiones similes, vt sit B ad G, vt D ad H. Ostendendum est proportionem A ad G, eandem esse, quæ ipsius C ad H. Si enim hoc verum non est, habebit A ad G maiorem, aut minorem proportionem, quàm C ad H. Et si fieri potest, sit primò proportio maior. Ergo a proportio A ad G maior erit, proportio verò C ad H non erit maior eadem proportione commensurabili (quam habeant K ad G, & N ad H); & ideo A maior erit quàm K, at C non erit maior, quàm N. Quoniam B ad G est, vt D ad H; atque K ad G eandem proportionem commensurabilem habet, quam N ad H. Ergo b vt B ad K, ita est D ad N; & inuertendo c K ad B erit, vt N ad D: estque A maior, quàm K, at C non maior, quàm N. Ergo d A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D, quod est absurdum. Supposita enim fuit A ad B, vt C ad D. Non ergo A ad G maiorem proportionem habet, quàm C ad H. Similiter ostendetur, quòd C ad H non habet maiorem proportionem, quàm A ad G; & ideo A ad G neque minorem proportionem habebit, quàm C ad H. & propterea e A ad G erit, vt C ad H. Et si rursus plures alię proportiones similes G ad S, & H ad R successiuè addantur, semper eodem modo considerando tres quantitates A, G, S, & tres alias C, H, R; vt prius ostendentur compositę proportiones A ad S, & C ad R, similes esse. vt fuit propositum.

a Def. 19. huius.
b prop. 18. huius.
c prop. 9. huius.
d prop. 8. huius.
e Def. 12. huius.



Vocetur huiusmodi argumentandi forma compositio ordinata proportionum. Et siquidem componentes proportiones continuatę A ad B, B ad G, & G ad S fuerint similes inter se: Vocetur proportio A ad G Duplicata proportionis A ad B, vel B ad G; atque proportio A ad S vocetur Triplicata vnius rationis A ad B, & Sesquialtera rationis A ad G, & sic successiuè. Si verò proportiones continuatę A ad B, & B ad G, & G ad S non fuerint eędem inter se: vocabitur absolutè proportio ipsius A ad S Composita ex intermedijs proportionibus A ad B, B ad G, & G ad S.



CO-

Eucl. 4. V.

COROLLARIVM I.

Si quatuor quantitates proportionales fuerint quælibet ęquè multiplices antecedentium ad quaslibet ęquè multiplices consequentium proportionales erunt.

Nam, si B ad G est, vt D ad H, & ijs aliæ proportiones similes addantur, vt sit A tam multiplex ipsius B, quàm C alterius D, atque G eadem pars sit ipsius S atque H alterius R. Ergo *f* erit A ad S, vt C ad R.

f prop. 19. huius.

COROLLARIVM II.

Ex hac demonstratione colligitur, quòd, si pares multitudines proportionum continuentur ordinatè: erit quæ ex maioribus componitur maior, quàm illa, quæ ex minoribus proportionibus composita est.

g prop. 19. huius.

Nam *g* proportio A ad B composita erit ex proportionibus A ad G, & G ad B; atque proportio C ad D composita erit ex proportionibus C ad H, & H ad D; & concessa fuit proportio A ad G maior proportione C ad H; & est inuertendo *h* G ad B, vt H ad D, fuitque ostensa proportio A ad B maior, quàm C ad D.

h prop. 9 huius.

COROLLARIVM III.

Deducitur etiam, quòd duplicatæ proportiones similium proportionum eędem quoq; vel similes sunt; & subduplicatę, seu medietates similium proportionum sunt quoque similes inter se; & idem dicendum est de quibuscunque alijs paribus multitudinibus continuè proportionalium.

Nam existentibus tam A, B, G continuè proportionalibus, quàm C, D, H, si supponatur A ad B esse, vt C ad D, cùm rationes B ad G, atque D ad H sint eędem proportionibus similibus A ad B, & C ad D, erunt ex hac propositione duplicatæ proportiones A ad G, & C ad H eędem quoque inter se. E contra, si supponatur A ad G esse, vt C ad H necessariò earum medietates, seu subduplicatæ proportiones A ad B, & C ad D similes erunt; aliàs duę proportiones similes A ad B, & B ad G vnà maiores, aut vnà minores duabus proportionibus similibus C ad D, & D ad H non componerent duplica-

plica-

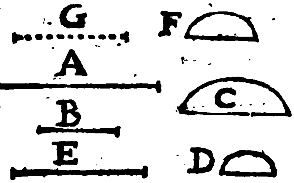
plicatam proportionem A ad G similem proportioni duplicatæ C ad H, vt in 2. Corol. huius propositionis ostensum est.

PROPOS. XX. THEOR. XX.

Eucl. 23. V

Si proportionibus similibus aliæ proportiones similes perturbatè addantur: erunt proportiones, ex paribus multitudinibus proportionum compositæ, similes quoque inter se. Vocetur autem hæc argumentandi forma Compositio perturbata proportionum.

Sit quantitas A ad B, vt C ad D, & his proportionibus similibus addantur duæ aliæ proportiones similes, sed ordine perturbato ita vt sit B ad E, sicut F ad C. Dico proportionem A ad E, compositam ex proportionibus A ad B & B ad E eandẽ esse, quæ ipsius F ad D; quæ nimirum composita est ex ijsdem proportionibus C ad D, & F ad C. Et quoniam quam proportionem habet B ad E, habebit aliqua a alia quantitas ad ipsam A licet illa sit ignota, tamen quia dari potest, supponatur esse G, seu vocetur G. Et quoniam G ad A est, vt B ad E; sed F ad C est, vt eadem B ad eandem E. Ergo b G ad A est, vt F ad C, & A ad B est, vt C ad D. Ergo c ex compositione ordinata erit G ad B, vt F ad D. Postea quia, vt G ad A, ita est B ad E. Ergo d permutando, vt G ad B, ita est A ad E: sed vt G ad B, sic fuit ostensa F ad D. Igitur, e vt A ad E, ita erit F ad D.



a Axio. 3. huius.

b prop. 9. huius.

c prop. 19. huius.

d prop. 12. huius.

e prop. 7. huius.

Si rursus plures aliæ proportiones similes E ad H, & K ad F successiuè addantur, semper eodem modo considerando tres qantitates A E, & H, & tres aliæ K, F, & D, vt prius ostendentur compositæ pro portiones A ad H, & k ad D similes esse inter se. Quod erat, &c.

A	6	K	24
B	3	F	12
E	4	C	16
H	2	D	8

COROLLARIVM.

Similiter proportio composita ex maioribus proportionibus

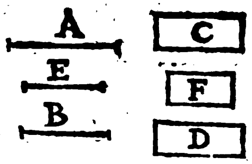
nibus perturbato ordine; erit maior, quàm illa, quæ ex totidem proportionibus minoribus componitur.

Nam compositę proportiones, siue ordinatè, vel perturbatè disponantur, eędem sunt inter se; & propterea, *f* si ordinata maior est aliqua alia, etiam perturbata proportio maior erit eadem proportione.

f Coroll. 2. prop 19. huius.

PROPOS. XXI. THEOR. XXI.

Si à proportionibus similibus auferantur proportiones similes, siue ordinatè, siue perturbatè: residuę proportiones, similes quoque erunt.



Sit proportio cuiuslibet quantitatis A ad B, vt C ad D; atque ab his proportionibus similibus, siue eisdem tollantur eędem proportiones, primò ordinatè, ita vt sit A ad E, vt C ad F. Dico residuas proportiones E ad B, & F ad D esse easdem. Quia *a* inuertendo, vt E ad A, ita est F ad C, & vt A ad B, ita est C ad D. Ergo componendo *b* ordinatè, vt E ad B, ita erit F ad D.

a prop. 9. huius.
b prop. 19. huius.

Tollantur secundò perturbatè proportiones eędem, ita vt sit A ad E, vt F ad D. Dico residuas proportiones E ad B, & C ad F esse easdem. Quoniam inuertendo *c* est, vt B ad A, ita D ad C, & vt A ad E, ita est F ad D; Ergo ex *d* compositione perturbata, vt B ad E, ita est F ad C; & inuertendo *e* vt E ad B, ita est C ad F. Quod erat ostendendum.

A	8	C	4
E	4	F	6
B	6	D	3

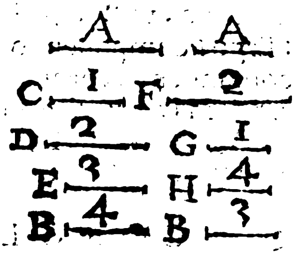
c prop. 19. huius.
d prop. 20. huius.
e prop. 9. huius.

COROLLARIVM I.

Ex tribus precedentibus propositionibus elicitur, si aliqua proportio composita fuerit ex aliquibus proportionibus, eam quoque componi ex ijsdem proportionibus, quocunque ordine positis.

Si enim

Si enim proportio A ad B, interpositis terminis C, D, & E, sit composita ex proportionibus 1, 2, 3, 4, eadem erit composita ex eisdem proportionibus, sed ordine perturbato 2, 1, 4, 3, interpositis alijs terminis F, G, & H. Nam, *f* vt A ad D, ita est A ad G; & rursus, *g* vt D ad B, ita est G ad B. Ergo *h* A ad B est, vt A ad B alterius ordinis.

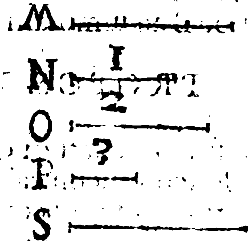


f prop. 20. huius.
g prop. 20. huius.
h prop. 19. huius.

COROLLARIVM II.

Patet etiam quamlibet proportionem propositam ex quotlibet proportionibus, excepta postrema, componi.

Nam quælibet proportio A ad B, interpositis quibuslibet terminis C, D, E, erit composita ex proportionibus A ad C, C ad D, D ad E, & E ad B. Et proportio M ad S componi quidem potest ex totidem proportionibus ex quot componitur A ad B; sed non omnes possunt esse eædem. Nam licet tres priores proportiones 1, 2, & 3 continuentur in quatuor terminis M, N, O, & P: tamen postrema proportio P ad S non erit necessariò eadem, quam habet E ad B, id est non erit 4.

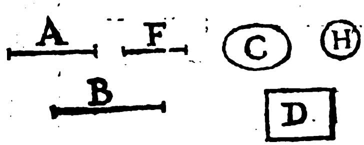


PROPOS. XXII. THEOR. XXII.

Eucl. 24. V.

Si duę quantitates ad duas consequentes habuerint eandẽ rationem, atq; duę alię ad easdem consequentes habeant etiã eandem rationem; habebunt antecedentes, simul sumptę, eandem rationem ad easdem consequentes.

Sit A ad B, vt C ad D, atq; F ad eandem B sit, vt H ad eandem D. Dico duas antecedentes A & F simul, habere ad B eandem rationem, quam duę C & H simul ad D. Quoniam vt F ad B, ita est H ad D. *a* Ergo in-



a prop. 9. huius.

inuertendo, vt B ad F, ita est D ad H; sed A ad B est, vt C ad D: Ergo b componendo ordinatè erit, vt A ad F, ita C ad H; & coniungendo c erunt A & F ad F, vt C & H ad H; sed F ad B erat, vt H ad D. Ergo d rursus, ex compositione ordinata, erunt A F simul, ad B, vt H C, simul sumptę, ad D. Quod erat ostendendum.

b prop. 19. huius.
c prop. 14. huius.
d prop. 19. huius.

COROLLARIVM.

Hinc patet, quod, si eędem duę antecedentes ad quatuor consequētes habeant eandem rationē: antecedentes ad consequentes non eiusdem proportionalitatis, simul sumptę, proportionem eandem habebunt.

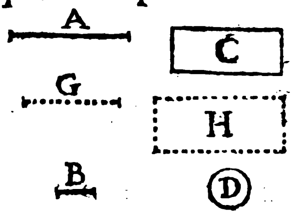
Nam ex eo, quod A ad B est, vt C ad D, nec non F ad B, vt H ad D: sequitur inuertendo, e quod B ad A est, vt D ad C; atque B ad F est, vt D ad H. Et similiter ex eo, quod summa A, F ad B est, vt summa C, H ad B. sequitur f inuertendo, quòd B ad summam A, F est, vt D ad summam C H.

e prop. 9. huius.
f prop. 9. huius.

PROPOS. XXIII. THEOR. XXIII.

Si fuerint quatuor quantitates, & quęlibet alię proportionales, commensurabiliter consequentibus, fuerint vnà maiores, aut simul ęquales, aut vnà minores antecedentibus ordinatè: erunt quatuor illę quantitates proportionales.

Sint quatuor quantitates, prima A, secunda B, tertia C, & quarta D; & insuper quinta G ad B eandem rationem commensurabilem habeat, quam sexta H ad D; sintque dictę commensurabiles proportiones, quęlibet ex infinitis, quę proponi possunt; & quotiescumque G est ęqualis primę A, sit pariter H ęqualis tertię C, & quoties G minor est, quàm A, sit pariter H minor, quàm C, & quotiescunque G maior est, quàm A reperiatur semper H maior, quàm C, & hoc semper verificetur in infinitis proportionalitatibus commensurabilibus. Dico primam A ad secundam B eandem proportionem habere, quam tertia C ad quartam D. Si hoc verum non est, habebit A ad B maiorem, aut minorem rationem quàm C ad D.



Et

Et sit primò proportio maior, si fieri potest. Ergo a proportio A ad B maior erit, proportio verò C ad D nō erit maior eadē proportione commensurabili (quā intelligatur habere G ad B, atque H ad D) eritq; A maior, quàm G, at C non erit maior, quā H. Quare duę quantitates G, & H eandem rationem cōmensurabilē habentes, ad duas consequētes B, & D non erunt vnà minores antecedētibus, quod est contra hypothesin. Nō ergo A ad B maiorem proportionem habet, quàm C ad D. Simili ratiocinio ostendetur C ad D non habere maiorem rationem, quàm A ad B; Vnde A ad B non habebit minorem proportionem, quàm C ad D; sed neque maiorem rationem habebat, vt ostensum est. Ergo b quatuor quantitates A, B, C, D, sunt proportionales. Quod erat ostendendum.

a Def. 10. huius.

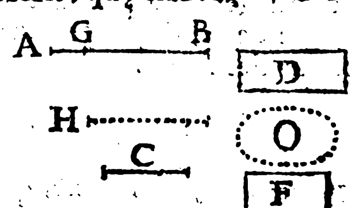
b Def. 12. huius.

PROPOS. XXIV. THEOR. XXIV.

Si fuerint quatuor quantitates, & duę alię proportionales consequentibus sint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus excessu, vel defectu à prima minori quocunque dato, erunt illę proportionales.

Sint quatuor quantitates A B, C, D, F, & duę alię H, & O quamlibet proportionem eandem habentes ad C, & F, sint vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus A B & D, ita vt excessus vel defectus ipsius H à prima A B minor sit quacunque assignabili quantitate ex infinitis, quę proponi possunt. Dico A B ad C esse in eadem ratione, ac D ad F. Si enim hoc verum non est, aliqua a alia quantitas maior, vel minor, quàm A B in natura reperiri poterit, quę habeat ad C eandem rationem, quam D habet ad F, & sit illa, vel vocetur G B, quę primò sit minor, quàm A B, deficiens ab ipsa quocunque defectu A G. Et quoniam H, & O proportionales ipsis C, & F supponuntur esse vnà minores antecedentibus A B, & D, ita vt defectus ipsius H à prima A B minor sit quacunque assignabili quantitate, poterit esse defectus ipsius H à prima A B minor, quàm A G; & ideo H maior erit, quàm G B, dum O minor supponitur, quam D; est verò G B ad C in eadem ratione, ac D ad F. Igitur b H ad C

a Axio. 3. huius.

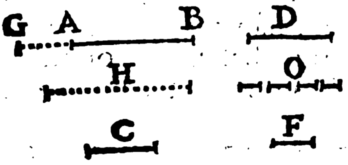


b prop. 8. huius.

ma-

maiorem proportionem habet, quam O ad F, quod est falsum: Supposita enim fuit H ad C, vt O ad F. Nulla ergo quantitas minor quàm A B eādem rationem habebit ad C, quam D habet ad F.

Secundò sit G B maior, quàm A B excessu quolibet G A. Et quia H, & O proportionales ipsis C & F, supponuntur vnà maiores antecedentibus excessu à prima minori quocunque dato G A; propterea erit H minor, quàm G B. Et, vt prius, ostendetur O ad F maiorem proportionem habere, quàm H ad C, quod est absurdum. Erant enim ex hypothesi H, & O proportionales ipsis C, & F. Nulla ergo quantitas maior, quàm A B, sicuti prius nulla minor, habebit eandem rationem ad C, quam D habet ad F. Igitur ipsamet A B ad C eandem proportionem habebit, quam D habet ad F. Quod erat propositum.



COROLLARIVM.

Constat, quòd, si fuerint quatuor quantitates, & quælibet aliæ ad consequentes, eandem proportionem habentes, sint vna maiores, aut vnà minores, aut vnà ęquales antecedentibus, erunt illæ proportionales.

Nam inter quaslibet, idest inter infinitas proportionales consequentibus, quę supponuntur esse vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, necessariò debent illæ comprehendi, quę differunt à prima excessu, aut defectu minore quocunque dato; & propterea c illę quatuor quantitates proportionales erunt.

c prop. 24. huius.

SCHOLIVM.

Præter hos modos venandi, an quatuor quantitates sint proportionales nec ne, datur hic alius, qui est valdè vsitatus apud Euclidem, & Archimedem.

Si quantitas maior, quàm prima excessu minore quouis assignabili, habuerit ad secundam maiorem proportionem, quàm tertia ad quartam, & quantitas minor, quàm prima, defectu minore quocunque assignabili, habuerit ad secundam minorem proportionem, quàm tertia ad quartam:

tam: erit prima ad secundam, vt tertia ad quartam. Quoniam quantitatis, habentis maiorem, aut minorem proportionem ad secundam, quam tertia ad quartam, excessus, aut defectus à prima supponitur minor quacunque assignabili quantitate ex infinitis, quæ proponi possunt; sed quælibet quantitas maior, quàm prima, aliquo excessu ipsam superat, qui minor erit aliqua assignabili quantitate. Ergo quælibet quantitas maior, quàm prima, habet maiorem proportionem ad secundam, quàm tertia habet ad quartam quantitatem; ideoque nulla quantitas maior, quàm prima, habebit ad secundam eandem rationem, quam tertia habet ad quartam.

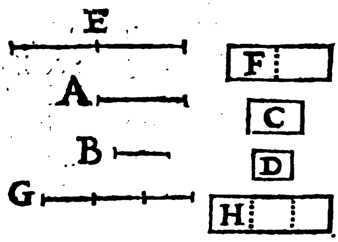
Similiter quælibet quantitas minor, quàm prima, deficit ab ea defectu minore aliqua assignabili quantitate; & propterea nulla quantitas minor, quàm prima, habebit ad secundam eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam. Cùm ergo d *aliqua quantitas reperiatur in natura, quæ sit ad secundam, vt tertia ad quartam, & illa non possit esse maior, nec minor, quàm prima, licet eiusdem generis sit. Igitur ipsamet prima ad secundam habebit eandem proportionem, quam tertia habet ad quartam.* d *Ax. 9. huius.*

PROPOS. XXV. THEOR. XXV.

Eucl. def. 8. lib. V.

Si æquè multiplicium quatuor quantitatum multiplex primę excesserit multiplicem secundę, at multiplex tertiæ non excesserit multiplicem quartæ: tunc prima ad secundam maiorem rationem habebit, quàm tertia ad quartam.

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & sumptis E, & F ęquè multiplicibus antecedentium A, & C, nec non sumptis G, & H æquè multiplicibus consequentium B, & D, sitque E multiplex primę maior, quàm G multiplex secundę; at F multiplex tertię non sit maior, quàm H multiplex quartæ. Dico A ad B maiorem proportionem habere, quàm C ad D. Quia E maior est, quàm G, & F non est maior, quam H: Ergo a E ad G maiorem proportionem habet, quàm F ad H; sed b A ad E est, vt C ad F, cùm sint illarum pars eadem: Ergo c A ad G maiorem rationem habet, quàm C ad H: Et rursus d G ad B est, vt H ad D, cùm sint harũ ęquè multiplices.



a Ax. 6. huius. b Def. 8. huius, c Coroll. 2. prop 19. huius. d Def 8. huius.

Igitur

e Coroll. 2. prop. 19. huius. Igitur e A ad B maiorem rationem habet, quàm C ad D. Quod erat ostendendum.

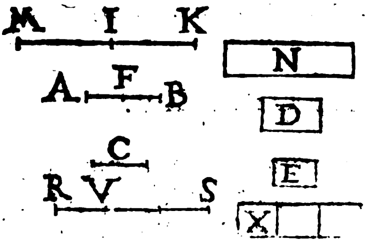
Eucl. conuers. def. 8. V.

PROPOS. XXVI. THEOR. XXVI.

Si prima quantitas ad secundam maiorem proportionem habuerit, quàm tertia ad quartam, reperiri possunt æquè multiplices antecedentium, atque aliæ æquè multiplices consequentium, quarum multiplex primæ excedat multiplicem secundæ, at multiplex tertiæ non excedat multiplicem quartæ.

Habeat A B ad C maiorem proportionem, quàm D ad E. Dico fieri posse, quod proponitur. Quoniam A B ad C maiorem rationem habet, quàm D ad E. Ergo a aliqua quantitas minor, quàm prima A B, eandem rationem habebit ad secundam C, quam tertia D ad quartam E: vocetur illa A F, & sumantur quantitatum A F, A B, & D æquè multiplices M I, M K & N, hac lege, vt K I, earum differentia, maior sit, quàm C. Postea sumantur æquè multiplices R S ipsius C, & X alterius E, hac tamen lege, vt R S sit minima omnium, excedentium ipsam M I, ita vt excessus sit minor, aut æqualis vni eius parti R V, seu C; ideoque excessus ipsius R S, supra M I erit minor, quàm I K, quæ maior facta est, quàm C: vnde M K maior erit, quàm R S, & M I minor eadem R S. Ostendendum modo est in hisce æquè multiplicibus, quòd dum M K maior est ipsa R S, ipsam N, aut æqualem, aut minorem esse ipsa X.

a prop. 5. huius.



Quoniam, vt A F ad C, ita est D ad E, & sumptæ sunt duæ M I, & N æquè multiplices ipsarum antecedentium A F, & D, nec non duæ R S & X æquè multiplices consequentium C, & E. Ergo b vt M I ad R S, ita est N ad X. Quare c sicut M I minor est, quàm R S, ita N minor erit, quàm X: fuit autem ostensa M K maior, quàm R S. Igitur quando M K maior est, quàm R S, non est N maior, quàm X. Quod erat propositum.

b Coroll. 1. prop. 19. huius.

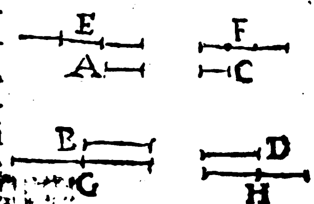
c Coroll. 1. prop. 16. huius.

PRO-

PROPOS. XXVII. THEOR. XXVII. *Eucl. def. 6. V.*

Si fuerint quatuor quantitates, & antecedentium æquè multiplicia ab æquè multiplicibus consequentium, qualiscunque sit hęc multiplicatio vtrunque ab vtroque, vel vnà deficiunt, vel vnà ęqualia sunt, vel vnà excedunt, si ea sumantur, quę inter se respondent: erunt illę quatuor quantitates proportionales.

Sint quatuor quantitates A, B, C, & D; & sint E & F quęcunque ęque multiplices antecedentium A & C ex infinitis ęquè multiplicibus, quę assignari possunt; nec non sint G, & H quęcunque ęquè multiplices, idest valeant pro infinitis alijs ęquè multiplicibus consequentium B & D; & quotiescunque E maior est, quàm G semper sit F maior, quàm H, & quotiescunque E ęqualis est ipsi G sit pariter F ęqualis ipsi H, & in quacunque multiplicatione E minor est, quàm G, semper fit F minor quàm H.



Dico A ad B eandem rationem habere, quàm C ad D. Si enim hoc verum non est, habebit A ad B, aut maiorem, aut minorem rationem, quàm C ad D: Et in quocunque *a* casu, si multiplex E excesserit ipsum G, aliquando F non excedet ipsam H, vel si F excedit ipsã H in aliqua multiplicatione, E non excedet ipsam G, quę sunt falsa, & contra hypothesin. Non ergo A ad B maiorem, aut minorem proportionem habere potest, quàm C ad D. Quare *b* A, B, C, & D erunt proportionales. Quod erat ostendendum. *a prop 26. huius.* *b Def. 12. huius.*

SCHOLIVM.

In his tribus propositionibus demonstratę sunt passiones illæ pulcherrimæ proportionalium, & non proportionalium, quæ inter definitiones positæ fuerunt ab Euclide. Et sicut hactenus admodum licentiosè inter principia receptę fuerunt hę propositiones, sic modò, vt theoremata iam demonstrata, poterunt tutè vsurpari in Geometria. Eas data opera in fine huius libri apponere volui, licet in eius principio post paucas propositiones demonstrari potuissent, tum quia methodus incępta perturbari non debebat, cùm etiam quia hic breuissimè, & facillimè absque

auxilio

auxilio plurium lemmatum demonstrari potuerunt. Sed interim animaduersione dignum est tres adductos modos inuestigandi proportionalitatem ferè idem velle: nam proportiones quantitatum incommensurabilium, cùm minimè exprimi possint per determinatas mensuras earundem partium, & æquè multiplicium; assequuntur tamen per ambages excessuum, & defectuum earundem partium, & æquè multiplicium.

Finis Libri tertij.

LI-

LIBER QVARTVS.

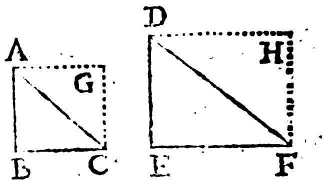
Eucl. lib. VI.

Postquam in tertio de proportionibus in genere egimus, modò considerantur proportiones linearum, triangulorum, & parallelogrammorum; Sed prius aliquę definitiones declarari debent.

DEFINITIONES.

I.

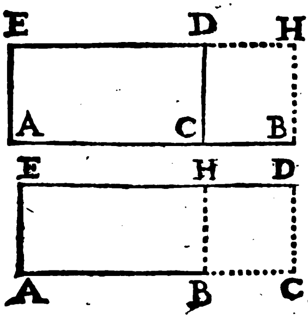
Reciproca triangula, vel parallelogramma sunt, cùm duo latera circa angulum vnius fuerint duo extrema, & duo latera circa angulum alterius figurę fuerint duo media quattuor proportionalium.



Vt duo triangula A B C, D E F, vel duo parallelogramma B G, E H erunt reciproca, si fuerit A B ad E D, vt F E ad C B: Hac enim ratione angulus B parallelogrammi B G, vel trianguli A B C continebitur à prima A B, & quarta C B; & angulus E parallelogrammi E H, vel trianguli D E F continebitur à secunda D E & tertia E F, quatuor proportionalium.

II.

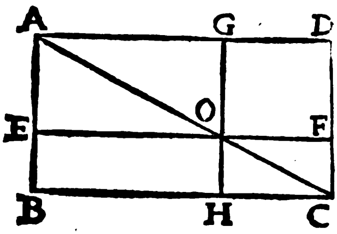
Parallelogrammorum secundum aliquam rectam lineam applicatorum illud deficere dicitur, quod non occupat totam lineam: Excedere verò quando occupat maiorem lineam rectam, quàm sit ea, secundum quam applicatur: Excessus verò, vel defectus dicitur pars, vel productio eiusdem applicati parallelogrammi, quod super defectum, aut excessum lineę suppositę descriptum est.



Vt parallelogrammum A D applicatum super rectam A B, dicitur deficiens, quando eius latus A C non occupat totam lineam A B. Et dicitur excedens, quando A C maius est, quàm A B. Diciturque defectus in primo casu, vel excessus in secundo, ipsum parallelogrammum C H.

III.

Si ab eodem puncto diametri parallelogrammi ductæ fuerint duæ rectę parallelæ lateribus ipsius: parallelogramma, quæ à diametro bissecantur, vocentur circa diametrum constituta, & duo illa parallelogramma, quę à diametro non bissecantur; vocentur parallelogramma complementi.



Vt si in parallelogrammo B D per punctum O, in eius diametro A C assumptum, ducantur duæ rectæ, H O G quidem parallela lateri D C, seu A B; atque F O E parallela lateri C B, vel D A: vocentur parallelogramma B D, H F, atque E G circa diametrum constituta; atque duo parallelogramma D O, & B O, quę à diametro non bissecantur: appellentur parallelogramma complementi.

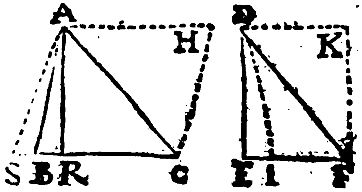
Eucl. 1. VI.

PROPOS. I. THEOR. I.

Triangula, & parallelogramma ęquè alta sunt inter se, vt bases. Et, si fuerint inter se vt bases, ęquales altitudines habebunt.

Sint primò duo triangula A B C, D E F ęquè alta, idest perpendiculares A R, D E à summitatibus A, D ad bases ductę, sint ęquales inter se. Dico triangulum A B C ad triangulum D E F habere eandem rationem, quam basis B C ad basim E
a prop. 28. F. Secetur a E F in quancunque multitudinem partium ęqua-
lib 1. lium, quarum vna sit E I, & in C B sumatur S C, quę sit quę-
b Def. 3. libet multiplex ipsius E I: erit b S C ipsius E F quælibet par-
lib. 3. tes, & coniungantur S A, I D. Quoniam c quoties basis E I
c Coroll. 3. prop. 32. l. 1 metitur basim E F, toties triangulum E I D metitur ęquè altum

tum triangulum D E F, & quoties d E I metitur C S, toties triangulum D E I, metitur ęquè altũ triãgulum A S C. e Ergo triangulũ A S C quęlibet & eędem partes est trianguli D E F, quẽadmodum SC est partes alterius E F. Sunt ergo quatuor magnitudines, prima B C, secunda E F, tertia triangulum A B C, quarta triangulũ D E F, & duæ alię, scilicet basis S C, & triangulum A S C sunt quęlibet, & eędem partes consequentium E F, & trianguli D E F, idest f ad eas habent quamlibet, & eandem rationem commensurabilem; & quoties S C est ęqualis primę B C, g necessariò triangulum A S C ęquale erit tertię, scilicet triangulo A B C; & quoties S C maior est, quàm B C, toties h A S C maius est, quàm A B C, & cùm S C minor est, quàm B C, semper A S C minus erit, quàm A B C. Ergò i prima B C ad secundam E F eandem rationem habet, quam tertia A B C triangulum, ad quartam magnitudinem, triangulum D E F. Quod erat ostendendum.

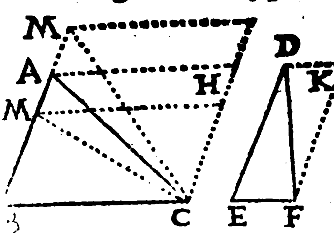


d Coroll. 3. prop. 32 l. 1
e Def. 6. lib. 3.
f Def. 8. l. 3
g prop. 32. lib. 1.
h Coroll. 1. prop 32. l. 1
i prop. 23. lib. 3.

Secundò sint parallelogramma B H, E K eiusdem altitudinis. Dico proportionalia esse basibus. Ductis diametris A C, D F; erunt triangula A B C, D E F ęquè alta; & ideo k inter se erunt, vt bases B C, E F; sed l vt triangulum A B C ad triangulum D E F, ita duplum ad duplum, idest m parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K. Ergo n parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K, erit vt basis B C ad basim E F. Vt erat probandum.

k ex prima parte huius
l prop. 11. lib. 3.
m prop. 26. lib. 1.
n prop. 7. lib. 3.

Tertio sit triangulum A B C ad triangulum D E F, vt basis B C ab basim E F. Dico altitudines triangulorum ęquales esse. Si hoc verum non est, ipsi D E F ęquè altum secetur triangulum M B C maius, aut minus, quàm A B C: Ergo o erit triangulum M B C ad triangulum D E F, vt basis B C ad basim E F; Erat autem, vt B C ad E F, ita A B C ad D E F. Ergo p triangula M B C, & A B C eandem rationem habent ad idem triangulum D E F; ideoque q M B C, & A B C equalia sunt, pars & totum, quod est impossibile. Non ergo alia altitudo, quàm ipsius triangu-



o ex prima parte huius prop.
p prop. 7. lib. 3.
q prop. 4. lib. 3.

li A B C çqualis eſt altitudini trianguli D E F: Vnde patet propoſitum.

Quartò parallelogrammum B H ad parallelogrammum E K ſit, vt baſis B C ad E F. Dico parallelogramma eſſe çquè alta. Quoniam parallelogramma B H, & E K ſunt inter ſe, vt baſes: Ergo r eorum dimidia triangula A B C, D E F (ſ quę ſunt, vt parallelogramma) t erunt quoque inter ſe, vt baſes; & ideo u triangula A B C, D E F erunt inter ſe çquè alta. Vnde parallelogramma B H F K çquè alta erunt. Quod erat oſtendendum.

r prop. 26. lib. 1.
ſ prop. 11. lib 3.
t prop. 7. l. 3
u ex tertia parte huius prop.
Eucl 39. 40. I.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur, quòd, ſi parallelogramma, vel triangula fuerint çqualia, & çquè alta: habebunt baſes çquales. Et, ſi çqualia fuerint triangula, vel parallelogramma inter ſe, & habeant baſes çquales, çquè alta erunt.

Nam ex prima, & ſecunda parte huius propoſitionis, quam proportionem çqualitatis habent çque alta parallelogramma, vel triangula, eandem habere debent baſes, & ideo baſes çquales erunt: at ex tertia, & quarta parte huius propoſitionis, parallelogramma, & triangula ſunt in eadem çqualitatis proportione, quam habent baſes; ideoque çquè alta erunt.

COROLLARIVM II.

Facilè etiam deducitur, quòd, ſi duo triangula, vel duo parallelogramma habuerint baſes çquales, erunt inter ſe, vt altitudines.

x prop. 32. lib 1.
z prop. 31. lib. 1.

Nam, ſi ſuper baſibus çqualibus fiant x triangula, z vel parallelogramma rectangula çqualia prioribus: erunt ſuper baſes çquales latera, perpendiculariter eleuata, çqualia altitudinibus priorum figurarum, ſi modò vſurpentur, vt baſes, quæ prius altitudines erant, atq; vſurpentur, vt altitudines, quę prius baſes çquales erant: priores figuræ transformatæ erunt in duas alias figuras æquè altas; & ideo y erunt inter ſe, vt baſes, ſcilicet, vt altitudines priorum figurarum.

y prop. 1. huius.

S C H O L I V M.

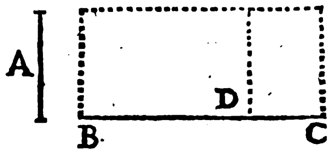
Deducitur ex hac propoſitione, quòd, ſi duo triangula, vel duo parallelo-

lelogramma super bases habuerint duo equalia latera, eleuata in angulis æqualibus, aut æqualibus duobus rectis: erunt triangula inter se, vel parallelogramma, vt bases.

Nam dicta a triangula, vel parallelogramma erunt æquè alta, b ideoque erunt, vt bases. a Schol. prop. 30. l. 1 b prop. 1. huius.

Facili negotio ex hac propositione deducuntur tres primæ propositiones, quæ in secundo libro satis prolixè demonstrauit Euclides.

Sit primò recta linea A insecta, & B C secta sit in D. Dico parallelogrammum rectangulum sub A, & B C comprehensum, (id est cuius basis est B C, altitudo A circa angulum rectum) æquale esse rectangulis parallelogrãmis sub A & B D, atque sub A & D C contentis. Eucl. 1. II.



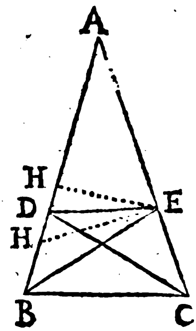
Quoniam hæc omnia parallelogramma rectangula sunt equè alta, cùm habeant communem altitudinem mensuratam à recta A. Ergo c erunt inter se, vt bases; sed bases B D, D C, simul sumptæ, æquales sunt basi B C. Ergo d rectangula ex B D in A, & ex D C in A, simul sumpta, æqualia sunt rectangulo ex basi B C in altitudine A ducto. Quod erat probandum. c prop. 1. huius, & prop. 22. lib 3. d Coroll. 1. prop. 16. l. 3

Secundò supponatur insecta A æqualis tota B C, erit eadem ratione, parallelogrammum ex A in B C, seu ex B C in C B, id est e quadratum ipsius B C, equale duobus rectangulis ex A, seu B C in B D, & ex B C in C D simul sumptis. Eucl. 2. II. e prop. 34. lib. 1.

Tertiò supponatur insecta A equalis segmento D C, erit rursus parallelogrammum ex A, seu D C in C B equale duobus rectangulis ex A, seu C D in B D, & ex D C in D C, seu f quadrato ipsius D C. Eucl. 3. II. f prop 34. lib. 1.

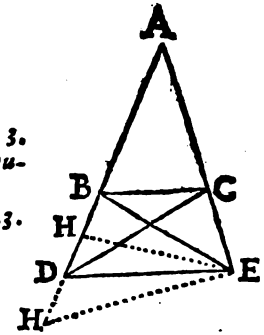
PROPOS. II. THEOR. II. Eucl. 2. VI

Recta linea parallela basi trianguli secat proportionaliter eius latera. Et recta, secans proportionaliter latera trianguli, parallela est eius basi.



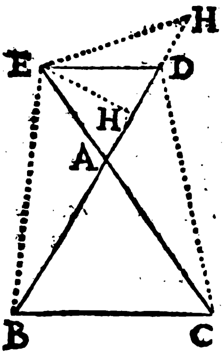
Sit triangulum A B C, & D E recta parallela basi B C secet eius latera in D, & E. Dico B D ad D A esse in eadem ratione, ac C E ad E A. Coniungantur rectæ D C, E B. Quoniam duo triangula D B E, E C D eandem basim D E habent, & sunt inter parallelas D E, B C. Ergò a equalia inter se sunt, & ideo b ad idem triangulum A D E eandem rationem habent: sed c triangulum B E D ad a prop. 32. lib. 1. b prop 3. lib 3. c prop. 1. huius.

trian-



d prop. 7. l. 3.
e prop. 1. huius.
f prop. 7. l. 3.

triangulum D E A eandem rationem habet, quam basis B D ad basim D A (eò quod perpendicularis, à puncto E super rectam A B, communis altitudo est triangulorum D E B, D E A). Ergo *d* triangulum D C E ad triangulum D A E est, vt B D ad D A. *e* Rursus cùm triangulum C D E ad triangulum E D A sit, vt basis C E ad basim E A, quia sunt eiusdem altitudinis. Ergo, *f* vt B D ad D A, ita est C E ad E A. Quod erat primò ostendendum.

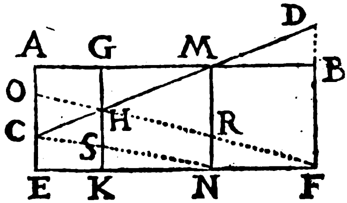


g coroll. prop. 16 lib. 1.
h ex prima parte huius.
i prop. 7. l. 3.
k prop. 14. lib. 3.
l coroll. prop. 15 l. 3.
m prop. 13. lib 3.
n prop. 4. l. 3.

Secundò sit B D ad D A, vt C E ad E A. Dico D E parallelam esse basi B C. Si hoc verum non est, sit *g* E H parallela basi B C; Ergo, *h* vt C E ad E A ita erit B H ad H A: erat autem, vt C E ad E A, ita B D ad D A; Ergo, *i* vt B H ad H A, ita est B D ad D A. Et componendo *k* in primo casu, & per conuersionem *l* rationis inuersam in secundo, at diuidendo *m* in tertio casu, erit B A ad A D, vt B A ad A H. Quare *n* A D, & A H ęquales erunt, pars, & totum, quod est absurdum. Non ergo E H, sed ipsa E D parallela est basi B C. Quod erat probandum.

S C H O L I V M.

Hinc deducitur, quòd rectę lineę quotcunque, secantur proportionaliter à lineis parallelis inter se. Rectæ lineę A B, C D, E F secentur à parallelis A E, G K, M N, D F. Dicò eas proportionaliter secari. Ducantur rectæ F H O, & C N, coniungentes bina puncta sectionum, & secantes reliquas parallelas in O, R, S.



o prop. 2. huius.

Quia in triangulo A M C recta G H parallela est basi A C. Ergo o vt A G ad G M, ita est C H ad H M: Similiter in triangulo C M N, vt C H ad H M, ita est C S ad S N: Et in triangulo C N E, vt C S ad S N, ita E K ad K N. p Ergo, vt C H ad H M, seu A G ad G M, ita est E K ad K N. Postea q vt G M ad M B, ita est H M ad M D; & in triangulo D H F, vt H M ad M D,

p prop. 7. l. 3
q prop. 2. huius.

ita

ita est H R ad R F, & ita K N ad N F in triangulo H F K. Ergo, r vt H M ad M D, seu G M ad M B, ita est K N ad N F. Quare patet propositum. r prop. 7. l. 3

COROLLARIVM.

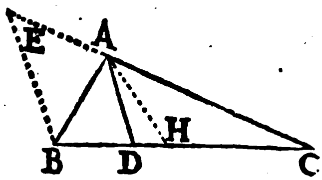
Constat ex secunda parte huius propositionis, quòd latera trianguli proportionalia sunt segmentis factis à parallela basi vsque ad verticem. Ostensum enim fuit B A ad A D esse, vt C A ad A E.

PROPOS. III. THEOR. III.

Eucl. 3. VI

Recta linea, secans bifariam angulum verticis trianguli, secabit basim in eadem ratione laterum, ita vt homologa sint conterminalia. Et, si basis segmenta dissecta sint in eadem ratione laterum, erit sectus bifariã angulus verticis.

In triangulo A B C recta A D efficiat angulos D A B, D A C æquales inter se. Dico B D ad D C esse, vt B A ad A C. Producta C A, vt fiat a E A ęqualis B A, & iungatur E B. Quoniam b anguli E, & A B E, oppositi lateribus æqualibus B A, E A sunt inter se æquales; Ergo c externus angulus C A B duplus est anguli A B E: sed angulus C A B duplus est etiam anguli D A B; Ergo duo anguli D A B & E B A (alterni) æquales sunt; & ideo d A D parallela est E B, basi trianguli C E B. Quare e B D ad D C est, vt E A, seu ei æqualis B A, ad A C. Vt erat probandum.



a prop. 3. l. 1
b prop. 6. l. 1
c prop. 18.
d prop. 16. lib. 1.
e prop. 2. huius.

Secundò sit B D ad D C, vt B A ad A C. Dico rectam D A secare bifariam angulum B A C. Si hoc verum non est, alia recta H A secet angulum B A C bifariam. Iam, g vt B A ad A C, ita erit B H ad H C: erat autem, vt B A ad A C, ita B D ad D C; Ergo h vt B H ad H C, ita est B D ad D C; & componendo i B C ad H C erit, vt B C ad C D; ideoque k C H & C D ęquales sunt, pars & totum, quod est absurdum. Non ergo aliqua alia recta pręter D A secat bifariam angulum C A B. Quod erat ostendendum.

f prop. 3. l. 3
g prima par. huius.
h prop. 7. lib. 3.
i prop. 14. lib. 3.
k prop. 4. lib. 3.

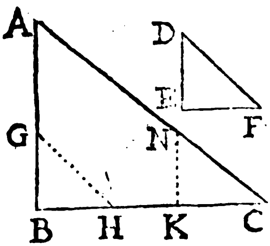
PRO-

Eucl 4. VI.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Triangulorum inter se ęquiangulorum proportionalia sunt latera, quę circum ęquales angulos: Et homologa sunt, quę equalibus angulis subtenduntur. Vocentur autem huiusmodi triangula Similia inter se.

In triangulis A B C, D E F sint duo anguli A, & D ęquales inter se; pariterque duo anguli B, & E ęquales; vnde *a* tertij anguli C, & F ęquales erunt, cùm sint complementa ad duos rectos in vtroque triangulo. Dico esse A B ad B C, vt D E ad E F, & B C ad C A, vt E F ad F D, atque C A ad A B, vt F D ad D E (hoc enim modo homologa latera, idest antecedentia proportionalitatis, subtendunt angulos ęquales). Secentur *b* G B ęqualis D E, & N C ęqualis D F; & ducantur *c* G H quidem parallela A C, atquè N K parallela A B. Quoniam eidem angulo A æqualis est D ex *d* hypothesi, & B G H propter parallelas G H, A C, ęqualis est eidem A. Ergo anguli B G H & D ęquales sunt, & erant ęquales anguli B & E, atque subiacentia latera G B, D E ęqualia erant. Ergo *e* B H ęqualis est E F. Eodem modo in triangulo N K C erit K C ęqualis E F. Postea quia G H parallela est A C. Ergo *f* A B ad B G erit, vt C B ad B H: & permutando *g* A B ad B C erit, vt G B ad B H; suntque G B, B H ęquales ipsis D E, E F. Ergo, *h* vt A B ad B C, ita est D E ad E F. Rursus *i* propter parallelas A B, N K erit B C ad C K, vt A C ad C N; & permutando *k* B C ad C A erit, vt K C ad C N, seu *l* vt E F ad F D (cùm hę equales sint illis); cùmque A B ad B C sit, vt D E ad E F, & B C ad C A sit, vt E F ad F D. Ergo, *m* ex compositione ordinata, erit A B ad A C, vt D E ad D F. Quod erat probandum.



a coroll. 10. prop. 18. l. 1
b prop. 3. lib. 1.
c corol. propos. 16 l. 1.
d prop. 15. lib. 1.
e prop. 25. lib 1.
f corol prop. 2. huius.
g prop. 12. lib. 3.
h prop 7 l. 3.
i corol. prop. 2. huius.
k prop. 12. lib. 3.
l prop. 3 l. 3
m prop. 19. lib. 3.

COROLLARIVM I.

Patet, si in duobus triangulis duo anguli ęquales fuerint duobus angulis, vterque vtrique, esse triangula similia. Nam *n* tres anguli vnius trianguli sunt ęquales tribus angu-

n coroll. 2. prop. 18. l. 1

lis

lis alterius; cùmque duo anguli vnius trianguli ſupponantur ęquales duobus angulis alterius, erit tertius angulus æqualis tertio. Et propterea triangula ſimilia erunt.

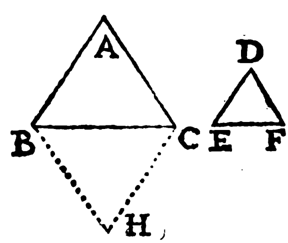
COROLLARIVM II.

Patet etiam in triangulis ęquiangulis latera vnius proportionalia eſſe lateribus alterius trianguli, ſingula ſingulis, quibus ęquales anguli opponuntur. Poſiti enim fuerunt anguli A, D ęquales, & B, E etiam ęquales, nec non C, F ęquales inter ſe; & vt latus A B ad D E, ita oſtenſum fuit A C ad D F, atque ita B C ad E F.

PROPOS. V. THEOR. V. *Eucl. 5. VI*

Si duo triangula latera proportionalia habuerint, erunt ęquiangula inter ſe.

In triangulis A B C, D E F ſit A B ad B C, vt D E ad E F, & B C ad C A ſit, vt E F ad F D, atque C A ad A B ſit, vt F D ad D E. Dico triangula eſſe ęquiangula. Fiat a angulus H B C ęqualis angulo E, & angulus H C B fiat ęqualis angulo F: Efficietur b ergo tertius angulus H ęqualis angulo D. Quare in triangulis ęquiangulis B C H, E F D erit c H B ad B C, vt D E ad E F; ſed A B ad B C erat, vt D E ad E F. d Ergo H B, & A B ad B C eandem rationem habent; ideoque e H B, & A B ęquales inter ſe ſunt. Eadem ratione H C æqualis erit A C; & eſt B C baſis communis. Ergo f anguli A, & H ęquales inter ſe erunt; erat autem angulus D ęqualis angulo H. Ergo duo anguli A, & D ęquales inter ſe ſunt. Eadem ratione anguli A B C, & E ęquales inter ſe erunt. Quare triangula A B C, D E F ęquiangula ſunt. Quod erat oſtēdendum.



a prop. 24. lib. 1.
b coroll. 10 prop 18. lib. 1.
c prop. 4. huius.
d prop. 7. lib. 3.
e prop. 9. lib. 3.
f prop. 7. l. 1

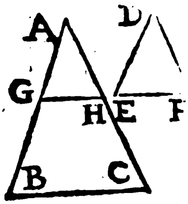
PROPOS. VI. THEOR. VI. *Eucl. 6. VI.*

Si duo triãgula vnum angulum vni angulo ęqualem habuerint, & circa ęquales angulos latera fuerint proportionalia; triangula erunt ſimilia.

In triangulis A B C, D E F sint anguli A & D æquales, & vt B A ad A C, ita sit D E ad D F. Dico triangula esse similia.

a prop. 3. lib. 1. b prop. 4. lib. 1. c prop. 3. lib. 3. d prop. 12. lib. 3. e prop 2. huius. f prop. 15. lib. 1. g coroll. 1. prop. 4. l. 4

Secetur *a* A G æqualis D E, & A H fiat æqualis D F, & coniungatur G H; cùmque anguli A, D æquales sint, erunt *b* duo triangula A G H, D E F æqualia, ęquiangula, & æquilatera inter se; Est verò B A ad A C, vt E D ad D F, seu *c* vt G A ad A H. (propter æqualitatem). Ergo *d* permutando B A ad A G erit, vt C A ad A H; ideoque *e* G H parallela erit ipsi A C: Vnde *f* angulus B æqualis erit angulo A G H. sed eidem angulo A G H ęqualis erat angulus E. Ergo anguli B, & E æquales inter se erunt: Erant autem prius anguli A, & D æquales. Ergo *g* triangula A B C, D E F inter se æquiangula, & *h* similia sunt. Quod erat ostendendum.



COROLLARIVM I.

h prop. 4. huius.

Patet, si in triangulo ducatur recta linea parallela basi, abscindere triangulum illi simile. Fuit enim G H parallela B C, & triangulum A G H ostensum fuit æquiangulum, ideoque *k* simile ipsi A B C.

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam si duo latera vnius trianguli proportionalia fuerint duobus lateribus alterius trianguli, & comprehendant dicta latera angulos æquales, esse triangula similia.

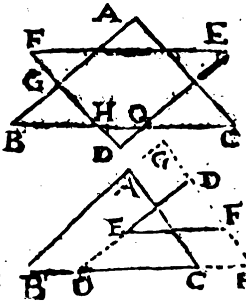
PROPOS. VII. THEOR. VII.

Eucl. 32. VI.

Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, ita vt homologa sint inter se parallela, & tendant duo priora ad easdem partes, ad quas tendunt posteriora latera, vel ad oppositas; erunt triangula similia, & bases parallelę, vel in directum positę. aut si tria latera tribus lateribus parallela fuerint singula singulis, erunt triangula similia.

In duobus triangulis A B C, & D E F sit primò B A ad A C, vt E D ad D F, sintque B A & D E ęquidistantes, pariterque ęquidistent A C, D F; atque tam A B, A C, quàm D E, &

D F procedant à punctis A, D versus easdem partes, aut A B,
A C versus vnam, & D E, D F versus oppositas. Dico trian-
gula A B C, & D E F similia esse, & bases B C, E F parallelas
esse, aut in directum positas. Quoniam duę rectę B A, & B C
secant vnam parallelarum A C, secabunt *a* quoque reliquam — a cor. prop.
D F, secent eam productam si opus est, in punctis G, & H: — 29. lib. 1.
Pariter C B, secans ipsam A B, secet quoque ei parallelam
D E in O. Et quia recta G H parallela est basi A C triãguli A B
C. Ergo *b* triangulum D G H ęquiangulum est triangulo B — b corol. 1.
A C; & ideo vt B A ad A C, ita erit B G ad G H. Rursus quia — prop. 6. hu-
D O parallela est G B basi trianguli H G B, erit, vt prius, O D — ius.
ad D H, vt B G ad G H; & propterea *c* O D ad D H erit, vt B — c prop. 7.
A ad A C; ponebatur autem E D ad D F, vt B A ad A C. Igi- — lib 3.
tur *d* O D ad D H erit, vt E D ad D F; suntque anguli O D H, — d prop. 7.
& E D F æquales ad *e* verticem, vel vnus & idem (propterea — lib. 3.
quod D E, O D in directum sunt, & sic D — e cor. prop.
F, H D, atque rectę D E, & D F tendunt — 5. lib. 1.
ad partes easdem, ad quas diriguntur duę rectę A B & A C, siue D O & D H, vel ad partes oppositas ex hypothesi). Ergo *f* duo triangula O D H, E D — f prop. 6.
F æquiangula sunt inter se, & habent la- — huius.
tera proportionalia; & ideo *g* basis E F — g prop. 2.
parallela est ipsi O H, seu B C; aut *h* in — huius. h cor. prop.
directum erunt positę, si se contingunt: — 17 lib. 1.
erat autem triangulum A B C æquian- — i prop 4.
gulum triangulo D O H. Ergo triangula A B C, & D E F æ- — huius.
quiangula sunt inter se, & ideo *i* similia.



Secundo sint A B, D E æquidistantes, pariterque A C, D F æquidistent, nec non B C, & E F sint parallelæ. Dico rursus triangula A B C, D E F esse similia. nam facta eadem constructione, ostendetur, vt prius, triangulum O D H simile triangulo B A C. Ducitur verò E F parallela ipsi O H basi — k coroll. 1.
trianguli D O H. Igitur *k* triangulum D E F ęquiangulum est — prop 6. hu-
ipsi triangulo D O H, siue triangulo A B C. Quod erat, &c. — ius.

COROLLARIVM I.

Constat, quòd, si duæ rectę, angulum continentes, parallelæ fuerint duabus alijs, & omnes tendant, & producantur ad easdem partes, vel postremę ad partes aduersas: erunt anguli, ab eis contenti, ęquales inter se. Ostensi enim fuerunt anguli A, & D ęquales inter se, ex eo, quod rectæ B A, & A C parallelæ erant ipsis E D, & D F.

COROLLARIVM II.

Et si duo anguli ęquales inter se fuerint, & singulę, circa singulos angulos, rectę lineę parallelę fuerint inter se, & vergant ad easdem partes: erunt reliquę rectę lineę parallelę inter se. Positis enim rectis A C, D F parallelis ostensi fuerunt anguli G, E D F ęquales; igitur quando etiam sunt anguli B A C, E D F ęquales, erunt duo anguli F D E, & G ęquales inter se; & ideo *l* A B, & D E parallelę erunt.

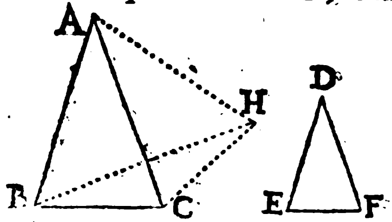
l prop. 16. lib. 1.

Eucl. 7. VII.

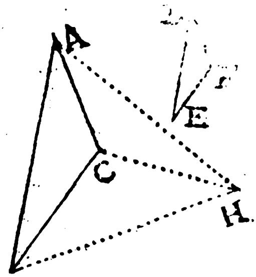
PROPOS. VIII. THEOR. VIII.

Si in duobus triangulis duo latera duobus lateribus proportionalia fuerint, & duo anguli, homologis lateribus oppositi, ęquales inter se; atque duo anguli, reliquis homologis oppositi, sint eiusdem speciei: erunt triangula similia inter se.

In triangulis A B C, & D E F sit A B ad A C in eadem ratione, atque E D ad D F; & sint anguli B, & E ęquales, qui nimirum opponuntur homologis A C, D F, atque duo anguli C & F, oppositi reliquis homologis sint eiusdem speciei, idest ambo sint acuti, aut ambo obtusi: Dico triangula A B C, & D E F similia esse. Fiat *a* angulus C A H ęqualis angulo D; seceturque *b* A H ęqualis A B, iunganturque rectę C H, & B H. Quoniam *c* æquales B A, & H A habent eandem rationem ad eandem A C, estque E D ad D F, vt B A ad A C: Ergo A H ad *d* A C est, vt E D ad D F; & sunt anguli C A H, & D ęquales: igitur *e* triangula A C H, & E D F sunt ęquiangula, & ideo anguli A H C, & E æquales sunt; pariterque anguli A C H, & F sunt inter se ęquales: Erant autem anguli A C B, & F eiusdem speciei: Ergo quan-



a prop. 24. lib. 1.
b prop. 3. lib. 1.
c prop. 3. lib. 3.
d prop. 7. lib. 3.
e prop. 6. huius.



quando angulus A C B est acutus, erit quoque angulus A C H acutus, & quando ille est obtusus, hic quoque obtusus erit, & propterea duo anguli A C B, & A C H, simul sumpti, aut minores erunt, aut maiores duobus rectis; & ideo *f* duæ rectę B C, & C H in directum non erunt, efficieturque triangulum B C H. Cumque duo anguli A B C, & A H C ęquales sint inter se, cùm sint ęquales eidem angulo E: *g* pariterque duo anguli A B H; & A H B sint ęquales (cùm latera A B, & A H ęqualia facta sint). Ergo compositi, vel differentiales anguli H B C, & B H C ęquales inter se erunt; & propterea *h* rectę B C, & H C ęquales erunt: sed facta fuerunt latera A B, & A H ęqualia, & A C est commune. Igitur *k* angulus B A C ęqualis est angulo H A C; sed eidem angulo H A C ęqualis erat angulus D. Ergo anguli B A C, & D ęquales sunt inter se. Et positi fuerunt anguli A B C, & E æquales. Igitur *l* triangula A B C, & D E F similia sunt. Quod erat ostendendum.

f prop. 15. lib. 1.
g prop. 6. lib. 1.
h prop. 20. lib. 1.
k prop. 7. lib. 1.
l Coroll. 1. prop. 4. huius.

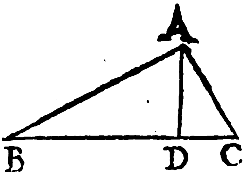
PROPOS. IX. THEOR. IX.

Euclid. 8. VI

Perpendicularis ab angulo recto trianguli rectanguli ad basim ducta, diuidit ipsum in duo triangula similia toti, & inter se, & est media proportionalis inter basis segmenta, & efficit vtrunque segmentum tertium proportionale totius basis, & lateris dicto segmento conterminalis.

In triangulo A B C sit angulus B A C rectus, & ab A cadat perpendicularis A D ad basim, secans eam in D. Dico triangula B A D, A C D & B C A similia esse inter se, & A D mediam proportionalem inter segmenta B D, & D C, atque C B ad B A esse, vt A B ad B D, pariterque tres B C, C A, D C esse proportionales. Quoniam in triangulis B A C, B D A angulus B est communis, & anguli recti B A C, B D A ęquales sunt. Ergo *a* tertius angulus C ęqualis est angulo B A D; ideoque *b* triangula B A C, B D A similia sunt, & circa communem angulum B latera C B ad B A erunt in eadem ratione, quam A B habet ad B D. Similiter in triangulis C A B, C D A angulus C est cõmunis, & duo recti C A B, C D A

a coroll. 10. prop. 18. l. 1.
b prop. 4. huius.



c cor. 1. prop. 4. huius.

d cor. 1 prop. 4 huius.

C D A sunt çquales. Ergo c triangula C A B, C D A similia sunt inter se, & B C ad C A est, vt A C ad C D. Tandem in triangulis B A D, A C D duo anguli B A D, & C æquales ostensi sunt, & duo anguli recti B D A, A D C çquales sunt. Ergo d triangula B A D, A C D similia quoque inter se sunt, & latera circa rectos angulos æquales proportionalia sunt: Ergo B D ad D A est, vt A D ad C D. Sic enim homologa subtendunt angulos çquales: & A D media est trium continuè proportionalium B D, D A, D C. Quare patet propositum.

SCHOLIVM.

Si à puncto intermedio datæ rectæ lineæ eleuata perpendicularis media proportionalis fuerit inter segmenta ipsius: tria puncta extrema in semicirculi peripheria existunt.

e prop. 25. lib 2.

f prop. 9. huius.

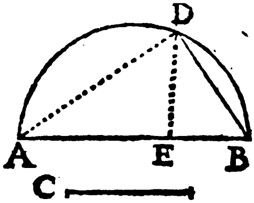
Sit perpendicularis A D media proportionalis inter B D, & D C. Dico per tria puncta B, A, C semicirculi peripheriam transire. Si enim hoc verum non est, e descripto semicirculo capiente angulum rectum, diametro B C, transeat citra, vel vltra punctum A, si fieri potest: vnde f perpendicularis ab angulo recto maior, vel minor, quàm A D, media proportionalis erit inter B D, & D C, quod est contra hypothesin. Non igitur semicirculi peripheria, diametro B C descripta, transit per aliud punctum, quàm per A.

Eucl. 11. 13. VI.

PROPOS. X. PROBL. I.

Duabus datis rectis lineis, tertiam, vel mediam proportionalem inuenire.

Sint datç duç rectæ A B, & C, ijs primò reperiri debet tertia proportionalis. Super maiori A B describatur semicirculus A D B, & in eo a accomodetur B D çqualis C minori & à puncto D cadat b perpendicularis D E, secans A B in E. Dico B E esse tertiam proportionalem quæsitam. Coniuncta recta A D, c erit angulus A D B in semicirculo rectus, & ab angulo recto ducitur perpendicularis D E ad basin trianguli rectanguli A D B. Ergo d vt A B ad B D, ita



a prop. 12. lib. 2.

b prop. 11. lib. 1.

c prop. 20. lib. 2.

d prop. 9. huius.

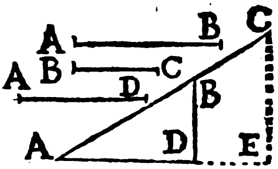
D, ita est D B, seu C ad B E; ideoque B E est tertia proportionalis quæsita. *e prop. 3. lib. 1.*

Secundò inter A B, & C reperiri debet media proportionalis. Ex diametro A B *e* secetur B E æqualis C, & *f* eleuetur perpendicularis E D, cōpleaturq; *g* triangulū rectangulū A D B: erunt, *h* vt prius, tres A B, B D, & B E, seu C, continuæ proportionales. Quare B D est media quæsita. Vt erat faciendū. *f prop. 10. lib 1.* *g prop. 20. lib. 2.* *h prop. 9. huius.*

PROPOS. XI. PROBL. II.

Eucl. 12. VI.

Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire.

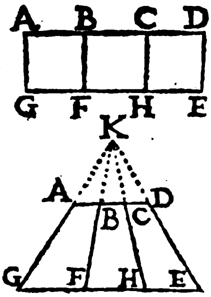


Datis tribus rectis A B, B C, & A D, debet reperiri quarta, ad quam A D eādem rationem habeat, quam A B habet ad B C. Continuentur in directum A B, B C, & D A efficiat quemlibet angulum cum C A, & iungatur recta B D, atque *a* C E fiat parallela ipsi B D, & secet rectam A D, extensam in E. Dico D E esse quæsitam. Quoniam in triangulo C A E ducta est B D parallela basi C E. Ergo, *b* vt A B ad B C, ita est A D ad D E. & hoc erat faciendum. *a Coroll. prop. 16. huius.* *b prop. 2. huius.*

PROPOS. XII. PROBL. III.

Eucl. 10. VI.

Datam rectam lineam secare secundum rationes datas.



Data recta linea G E secari debet secundum proportiones A B ad B C, & B C ad C D. Continuentur in directum rectæ lineę A B, B C, C D, *a* ponaturque ipsa A D parallela rectę G E; & à punctis A, D ad terminos G, & E coniungantur rectæ lineę A G, & D E. Quę primò sint parallelę inter se; & ducantur *b* rectæ B F, C H parallelæ ipsis A G, vel D E, secantes G E in F, & H. Patet *c* rectam G E sectam esse à parallelis in G, F, H, E in eisdem proportionibus, atque A B secatur. *a coroll. prop 11. l. 1.* *b coroll. prop. 16 l. 1.* *c schol. prop. 2. huius.*

Secundò A G, & D E concurrant in K, ducanturque à punctis

ctis B, C ad K recte lineę B K, C K, secantes G E in F & H. Et quia G F parallela est basi A B. Ergo d triangula A K B, & G K F similia sunt, ideoque vt B K ad F K ita est A B ad G F. Eadem ratione, vt eadem B K ad eandem F K, ita est B C ad F H; & ita etiam ostendetur C D ad H E. Quare e permutando, vt A B ad B C, ita erit G F ad F H, & vt B C ad C D, ita erit F H ad H E. Quare patet propositum.

d coroll. 1. prop. 6. huius.

e prop 12. lib. 5.

COROLLARIVM.

Constat ex secunda parte huius demonstrationis, quòd, si duæ parallelæ secentur à pluribus rectis lineis concurrentibus in vno puncto, sectę erunt illę parallelę proportionaliter.

SCHOLIVM.

Animaduertendum est tria hæc problemata adaptari posse spatijs rectilineis, si modo sint, vel efficiantur parallelogramma, vel triangula eiusdem altitudinis. Nam f parallelogramma, vel triangula ęquè alta sunt inter se, vt bases. Ergo quidquid dictum est de rectis lineis accomodari etiam potest basibus spatiorum ęqualium altitudinum; ideoque ipsis spatijs.

f prop. 1. huius.

Eucl. 23. VI.

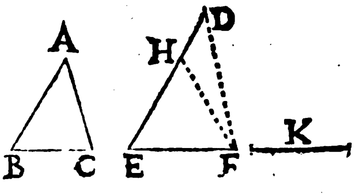
PROPOS. XIII. THEOR. X.

Si duo triangula, vel duo parallelogramma, habuerint vnum angulum vni angulo ęqualem, vel simul sumptos ęquales duobus rectis: habebunt rationem compositam ex rationibus laterum, quæ dictos angulos comprehendunt.

Sint duo triangula, vel parallelogramma A B C, & D E F quorum anguli B, & E æquales sint inter se, vel certè, simul sumpti, ęquales sint duobus rectis. Dico figuram A B C ad figuram D E F (comparando semper eas, quæ eiusdem speciei sunt, scilicet triangula inter se, aut parallelogramma inter se) habere proportionem compositam ex ratione lateris B C ad E F, & ex ratione lateris A B ad latus D E. Fiat a E F ad K, vt A B ad D E, & in latere eleuato D E secetur b E H ęqualis lateri elauato A B alterius figurę, & cõpleatur triangulum, vel parallelogrammum H E F. Quoniam duo triangula, vel duo paral-

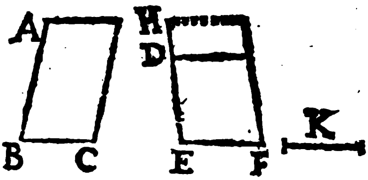
a prop. 11. huius.

b prop. 3. l. 1.



parallelogramma A B C, & H E F habent latera eleuata A B, H E ęqualia in angulis B, & E æqualibus, vel efficientibus summam duorum rectorum. Ergo c figura A B C ad eiusdem speciei figuram H E F eandem rationem habet, quam basis B C ad basim E F. Rursus d figura F H E ad eiusdem speciei figuram F D E est vt H E ad D E, cum perpendicularis ab F ad H E ducta cōmunis altitudo sit figurarum; est verò H E, seu e ei æqualis A B ad D E, vt E F ad K. Ergo f figura H E F ad figuram D E F est, vt E F ad K. Quare g ex compositione ordinata, vt prima figura A B C ad tertiam eiusdem speciei D E F, ita est prima recta B C ad tertiam K. Sed B C ad K habet proportionem compositam ex ratione B C ad E F, & ex ratione ipsius E F ad K; estque E F ad K, vt A B ad D E. Ergo h proportio figuræ A B C ad eiusdem speciei figuram D E F ex iisdem proportionibus laterum B C ad E F, atque A B ad D E componitur. Quod erat ostendendum.

c Sch. prop. 1. huius.
d prop. 1. huius.
e prop. 7. lib. 3.
f prop. 7. l. 3.
g prop. 19. lib. 3.



h prop. 19. lib. 3.

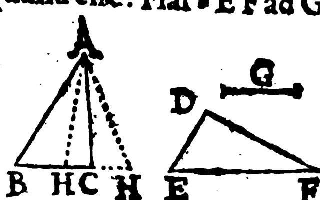
PROPOS. XIV. THEOR. XI.

Eucl. 14. VI.

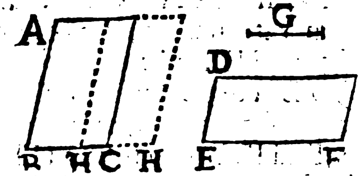
Si duo triangula, vel duo parallelogramma vnum angulum vni angulo ęqualem, vel ambos simul duobus rectis ęquales habuerint, atque circa dictos angulos habuerint latera reciprocè proportionalia, erunt æqualia inter se. Et si fuerint æqualia, habebunt latera circa dictos angulos reciprocè proportionalia.

Sint primò duo triangula, vel duo parallelogramma A B C, & D E F, quorum anguli B, & E æquales sint inter se vel, simul sumpti, æquales sint duobus rectis: & vt latus A B ad D E, ita sit F E ad C B (sic enim a figuræ A B C, & D E F sunt reciprocæ, cùm A B C contineatur à prima A B & quarta C B, atque D E F contineatur à secunda D E, & tertia E F quatuor rectarum proportionalium). Dico triangula A B C, & D E F inter se, vel parallelogramma æqualia esse. Fiat b E F ad G, vt A B ad D E. Quia E F ad B C est, vt A B ad D E; & vt A B ad D E, ita est E F ad G. Ergo c E F ad duas B C, & G eandem rationem habet; ideoque d B C, & G æquales sunt. Habet e verò B C ad G proportio-

a Def. 1. huius.
b prop. 12. huius.
c prop. 7. l. 3.
d prop. 4. lib. 3.
e prop. 19. lib. 3.



nem compositam ex ratione B C ad E F, & ex ratione, ipsius E F ad G, id est lateris A B ad latus D E: Igitur duę rationes



f prop. 19. 3.
g prop. 13. huius.

laterum, quæ angulos B, & E continēt, componunt f proportionem ęqualitatis B C ad G. Sed g proportio figurę A B C ad eiusdem speciei figuram D E F composita est ex ijsdem proportionibus laterum B C ad E F, & A B ad D E. Ergo h figura A B C ad eiusdem speciei figuram D E F habet eandem ęqualitatis proportionem, quam habet B C ad G. Quare patet propositum.

h prop. 7. lib. 3.

Sint secundò triangula A B C, & D E F inter se, vel parallelogramma ęqualia, & anguli B, & E sint æquales, vel efficientes summam duorum rectorum. Dico A B ad D E esse reciprocè, vt E F ad B C. Si hoc verum non est, vt A B ad D E, i ita fiat E F ad B H maiorem, aut minorem, quàm B C, & compleatur triangulum, vel parallelogrammum A B H. Et quia duę figurę A B H, & D E F eiusdem speciei habent latera reciprocè proportionalia circa angulos B, & E. Ergo k figura A B H ęqualis est figurę D E F; sed ex hypothesi figura A B C ęqualis erat ipsi D E F: Ergo figurę A B H & A B C ęquales sunt inter se, pars & totum, quod est impossibile. Non ergo E F ad maiorem, aut minorem, quàm B C, habere potest eandem rationem, quam A B ad D E; ideoque E F ad B C est reciprocè, vt A B ad D E. Quod erat ostendendum.

i prop. 11. huius.

k ex prima part. huius.

Eucl. 16. VI.

COROLLARIVM I.

Patet, si quatuor rectæ lineę proportionales fuerint, esse parallelogrammum rectangulum, sub extremis contentum, ęquale ei, quod sub medijs continetur. Et si duo parallelogramma rectangula ęqualia fuerint; erit vnum contentum ab extremis, alterum verò à medijs quatuor rectarum proportionalium. Nam duo parallelogramma rectangula, quorum vnum continetur à prima, & quarta; alterum verò à secunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium, habent circa angulos rectos ęquales latera reciprocè proportionalia. Ergo l sunt ęqualia inter se. Et si fuerint ęqualia, habebunt m latera circa rectos angulos reciprocè proportionalia; ideoque vnum continetur à prima, & quarta, alterum verò à secun-

l prop. 14. huius.
m prop. 14. huius.

secunda, & tertia quatuor rectarum proportionalium.

COROLLARIVM II.

Eucl. 17. VI.

Et, si tres rectæ lineę proportionales fuerint, rectangulum, sub extremis contentum, ęquale erit quadrato, à media descripto. Et si quadratum ęquale fuerit rectangulo, erit latus quadrati medium proportionale inter duo latera rectangulum continentia. Nam tres rectæ proportionales possunt effici quatuor proportionales, bis posita media proportionali; ideoque (vt in præcedenti corollario dictum est.) rectangulum, sub extremis contentum, ęquale erit ei, quod sub duabus medijs ęqualibus continetur, idest n quadrato medię proportionalis. Similiter existente quadrato ęquale rectangulo, continebitur quadratum à duabus medijs ęqualibus, idest ab vna media trium proportionalium.

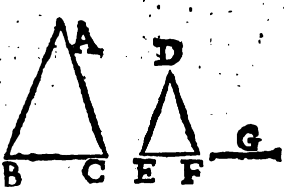
n prop. 34. lib. 1.

PROPOS. XV. THEOR. XII.

Eucl 19. VI.

Similia triangula, in duplicata ratione sunt laterum homologorum.

Sint duo triangula A B C, & D E F inter se similia, quorum anguli B, & E sint æquales, & latera homologa A B & D E, vel B C & E F. Dico triangulum A B C ad triangulum D E F, esse in duplicata proportione cuiuslibet lateris B C ad eius homologum E F. Fiat a E F ad G, vt A B ad D E. Quoniam propter similitudinē triangulorum A B C, & D E F est b A B ad D E, vt B C ad E F; sed vt A B ad D E, ita facta est E F ad G. Igitur, c vt B C ad E F, ita est E F ad G. Quare d B C ad G duplicatam proportionem habet eius, quam habet B C ad E F, seu A B ad D E. Est verò e proportio trianguli A B C ad ei equiangulum D E F, vt B C ad G (vt pote composita ex rationibus laterum B C ad E F, & E F ad G, seu A B ad D E). Igitur f triangulum A B C ad ei similem triangulum D E F duplicatam proportionem habet rationis cuiuslibet lateris homologi B C ad homologum E F. Quod erat ostendendum.



a prop. 11. huius.
b prop. 4. huius.
c prop. 7. l. 3
d prop. 19. lib. 3.
e prop. 13. huius.
f prop. 7. l. 3

COROLLARIVM.

Patet, si homologis lateribus duorum triangulorum, similium tertium proportionale reperiatur: esse, vt primum latus ad tertium proportionale, ita triangula inter se.

Eucl. 18. VI.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

Super data recta linea describere Polygonum dato polygono equiangulum, & habens circa angulos æquales latera proportionalia lateribus illius, ita vt data recta homologa sit dato lateri Polygoni. Vocentur huiusmodi polygona Similia inter se, & super datas rectas homologas similiter descripta.

Sit data quęlibet figura polygonia C D G, debet super data recta A B describi figura, cuius anguli singuli æquales sint singulis angulis figurę datę, & circa angulos ęquales latera sint proportionalia, ita vt A B homologa sit dato lateri D C. Ab angulo C ad singulos oppositos angulos figurę ducantur rectę C E, & C F, diuidentes figuram in triangula C D E, C E F, & C F G; postea fiat a angulus B A H ęqualis D C E, & H A K equalis fiat angulo E C F, atque angulus K A M fiat ęqualis angulo F C G, & sic vlterius, si plures extiterint; eritque totus angulus B A M ęqualis angulo D C G. Deinde, b vt D C ad C E ita fiat B A ad A H, & vt E C ad C F, ita fiat H A ad A K, atque vt F C ad C G, ita fiat K A ad A M, & sic vlterius, si opus est. Patet c ex compositione ordinata, esse B A ad A M. vt D C ad C G. Coniungantur tandem rectę B H, H K, & K M. Dico figuram A B M esse quęsitam. Quoniam circa angulos ęquales D C E, & B A H latera D C ad C E, & B A ad A H in eadem sunt ratione: Ergo d triangula D C E, & B A H similia sunt; pariterque triangula E C F, & H A K similia erunt, & sic etiam triangula F C G, K A M erunt similia. Quare e anguli C E D, A H B æquales sunt, & vt D E ad E C, ita est B H ad H A; pariterque anguli D, & B ęquales sunt, & vt C D ad D E, ita est A B ad B H. Rursus f propter similitudinem triangulorum E C F, & H A K anguli C E F, A H K ęquales sunt, & vt C E ad E F, ita est A H ad H K; erat autem prius, vt D E ad E C, ita B H ad

a prop. 24. lib. 1.

b prop. 11. huius.

c prop. 19. lib. 3.

d prop. 6. huius.

e prop. 4. huius.

f prop. 4. huius.

H A.

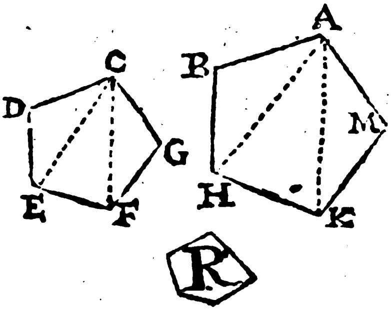
H A. Ergo g ex compositione ordinata, vt D E ad E F, ita erit B H ad H K; & sunt anguli D E C, B H A ęquales, pariterque anguli C E F, A H K æquales sunt ostensi. Ergo totus angulus D E F æqualis est toti angulo B H K; Eadem h ratione angulus G æqualis erit angulo M, & F G ad G C erit, vt K M ad M A, & erit angulus A K M æqualis angulo C F G, & A K ad K M erit, vt C F ad F G; at i propter similitudinem triangulorum circa angulos æquales E F C, & H K A, latera E F ad F C, & H k ad k A sunt proportionalia. Ergo k ex compositione ordinata H k ad k M erit vt E F ad F G. suntque toti anguli H k M, & E F G æquales inter se (nempe ex æqualibus compositi) et sic de cęteris, si plures extiterint. Quare omnes anguli figurę A B M æquales sunt omnibus angulis figurę C D G singuli singulis; & circa angulos ęquales latera sunt proportionalia, quorum homologa sunt datę rectę lineę A B, & C D. Quapropter factum est, quod fuerat propositum. Vocentur autem huiusmodi polygona A B M, & C D G similia inter se, & super homologa latera A B, & C D similiter descripta.

g prop. 19. lib. 3.

h prop. 4. huius.

i prop. 4. huius.

k prop. 19. lib. 3.



COROLLARIVM.

Eucl. 21. VI.

Facilè deducitur, quòd quę eidem retilineo sunt similia, & inter se similia sunt.

Nam, si eidem rectilineo C D E F fiāt l vel supponantur similia duo rectilinea A B M, & R, idest eidem æquiangula, & in eadem laterum ratione; erunt quoque duo rectilinea A B M, & R ęquiangula inter se, & m habentia circa angulos æquales latera proportionalia. Et propterea similia erunt inter se.

l prop. 16. huius.

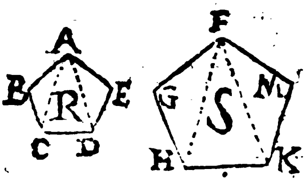
m prop. 7. lib. 3.

PROPOS. XVII. THEOR. XIII.

Similia Polygona in duplicata ratione sunt laterum homologorum.

Sint

Sint polygona similia R, & S, quorum homologa latera, sint A B, F G, vel B C; G H, &c. Et quia, *a* vt A B ad B C, ita est F G ad G H. Ergo *b* permutando, vt A B ad F G, ita est B C ad G H. Eadem ratione C D ad eius homologum H K erit, vt B C ad G H; & sic reliqua latera homologa proportionalia erunt. Vnde *c* eorum duplicatę proportiones eędem erũt. Dico figuram R ad figuram S habere rationem duplicatam lateris A B ad eius homologum F G. Ab angulis ęqualibus B A E, & G F M ad angulos ęquales oppositos coniungantur rectę lineę A C, A D, F H, F K, diuidentes figuras R, & S in ęquè multa triangula, eo quod *d* figuræ similes ęquè multa latera habent. Et quoniam circa angulos ęquales B, & G latera A B ad B C, & F G ad G H in eadem sunt ratione. *e* Ergo triangula A B C, & F G H similia sunt; ideoque anguli B C A, G H F ęquales sunt, & A C ad C B est, vt F H ad H G; Tandem *f* triangulum A B C ad ei simile triangulum F G H, habet duplicatam proportionem eius, quam habet latus A B, ad eius homologum F G. Eadem ratione quia circa ęquales angulos E, M latera sunt proportionalia, erit triangulum A E D ad ei simile F M K in duplicata proportione lateris D E ad eius homologum latus K M, seu duplicata lateris A B ad F G. Postea quia anguli B C D, G H K ęquales sunt, & ablati B C A & G H F æquales ostensi sunt; Ergo residui anguli A C D, & F H k ęquales sunt; & erat A C ad C B, vt F H ad H G, & B C ad C D est, vt G H ad H k. (propter similitudinem polygonorum). Ergo *g* ex compositione ordinata erit A C ad C D, vt F H ad H K; & comprehendunt angulos ęquales A C D, & F H k; Igitur *h* triangulum A C D simile est triangulo F H k, *i* & ad eum habet proportionem duplicatam eius, quam habet latus C D ad eius homologum H K, seu duplicatam lateris A B ad F G. Eadem ratione reliqua triangula, (si plura extiterint) erunt inter se in duplicata ratione lateris A B ad F G: ideoque *k* omnia triangula antecedentia, simul sumpta, ad omnia consequentia triangula simul, idest figura R ad S in eadem ratione erit, atque vnum triangulum A B C ad vnum F G H, seu habebit eandem duplicatam proportionem cuiuslibet lateris B C ad eius homologum G H. Quod erat ostendendum.



a prop. 16. huius.
b prop. 12 lib. 3.
c cor. 3. propos. 19. l. 3.
d prop. 16. huius.
e prop. 6. huius.
f prop. 15. huius.
g prop. 19. lib. 3.
h prop. 6. huius.
i prop. 15. huius.
k prop. 15. lib. 3.

CO-

COROLLARIVM I.

Constat ex demonstratione huius propositionis, quòd similia polygona distribui possunt in similia triangula, & numero æqualia, & homologa totis. Ostensa enim fuerunt in Polygono R triangula A B C, A C D, A D E similia triangulis F G H, F H k, F k M in figura S, quę numero ęqualia sunt, & quodlibet triangulum ad suum correspondens triãgulum esse vt R ad S.

COROLLARIVM II.

Patet etiam Polygona similia, quorum homologa latera sunt inter se ęqualia, esse quoque ęqualia inter se. Et è contra, si polygona similia fuerint ęqualia, esse latera homologa inter se ęqualia. Quia l cùm habeant duplicatam rationem homologorum laterum ęqualium, habebũt rationem ęqualitatis; cùm m duplicata ratio ęqualitatis efficiat proportionem ęqualitatis. l prop. 17. huius. m prop. 19. lib. 3.

COROLLARIVM III.

Similiter patet, quòd, si duorum similium polygonorum latera homologa habeant rationem, quam duo numeri habent, scilicet commensurabilem, siue non, erit primi polygoni ad secundum eadem proportio, quam habet quadratum lateris primi ad quadratum lateris secundi, vel vt latus primum ad tertium proportionale, aut vt prior numerus ad tertium proportionalem. Nam o proportio prioris termini ad tertium proportionalem duplicata est rationis termini primi ad secundum, vel secundi ad tertium, seu duplicata est rationis laterum homologorum, cuius proportionis laterum (ex hac propositione) duplicata quoque est ratio similium polygonorum, vel quadratorum, quæ, p cùm sint ęquiangula, & ęquilatera, erunt similia inter se. o prop. 19. lib. 3. p prop. 34. lib. 1.

PROPOS. XVIII. THEOR. XIV.

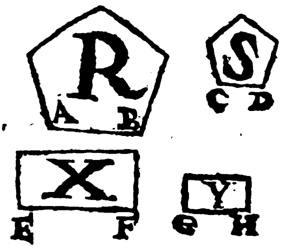
Eucl. 22. VI.

Si latera homologa quatuor figurarum similium proportionalia fuerint: rectilinea ipsa inter se proportionalia quoque

que

que erunt. Et si rectilinea similia fuerint proportionalia: erunt eorum latera homologa proportionalia quoque.

Sint duæ figurę R, & S similes inter se, pariterque duę figurę X, Y similes inter se: & sit primò A B, latus homologum figurę R, ad C D, latus homologum figurę S, in eadem ratione, quam E F, latus homologũ figurę X, habet ad latus homologum G H figurę Y. Dico figuram R ad S eandem rationem
a prop.17. huius.
habere, quam X ad figuram Y. Qoniam a figura R ad ei similem S duplicatam proportionem habet eius, quam habet latus A B ad eius homologum C D; pariterque proportio figurę X ad ei similem Y duplicata est eius, quam latus E F habet ad homologum G H.
b coroll.3. prop.19.l.3
Sunt b verò proportiones duplicatę ęqualium, vel earundem proportionum A B ad C D, atque E F ad G H eędem quoque, vel æquales.
c prop.8.l.3
Ergo c proportio figurę R ad S eadem est, quę figurę X ad Y. Quod erat primum.



Sit secundò figura R ad ei similem S, vt X ad ei similem figuram Y, sintque A B, C D, E F, & G H latera homologa. Dico A B ad C D esse, vt E F ad G H. Quoniam proportiones figurarum R ad ei similem S, & X ad ei similem Y sunt eędem,
d prop.17. huius.
seu ęquales, & sunt d duplicatę proportionum homologorum laterum.
e coroll.3. prop.19.l.3
Ergo e earum subduplicatæ, scilicet rationes laterum A B ad C D, atque E F ad G H eędem quoque sunt. Quare patet propositum.

COROLLARIVM I.

Hinc facile deducitur artificium (datis tribus figuris rectilineis, quarum duę similes inter se sint) inueniendi quartam proportionalem figuram similem reliquę. Si enim fuerint figuræ R, & S similes inter se, & quęlibet alia figura X;
f prop.12. huius.
& f vt A B latus prioris ad C D ei homologum latus alterius figurę, ita fiat E F latus figurę X ad latus G H:
g prop.16. huius.
postea g super G H fiat figura Y similis, & similiter posita ipsi X. Patet, vt R ad S, ita esse figuram X ad figuram Y.

CO-

COROLLARIVM II.

Manifestum est, quòd, si inter duas figuras similes interponatur media proportionalis figura, quę similis sit illis, erit eius latus medium quoque proportionale inter duo latera ei homologa extremarum figurarum, & è contra si latus figurę intermedię similium figurarum medium proportionale fuerit inter duo ei homologa latera extremarum; erit figura illa media proportionalis inter extremas. Nam [h] prima figura ad secundam ei similem, & secunda ad tertiam duplicatam proportionem habēt laterum homologorum; sed quādo [i] simplę proportiones eędem sunt, etiam eorum duplicatę proportiones eædem erunt, & contra. Ergo tam figura intermedia, quàm eius latus vicem antecedentis & consequentis obtinet. Et propterea medium proportionale erit inter extrema.

h prop. 17. huius.

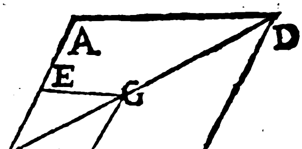
i coroll. 3. prop. 19. l. 3.

PROPOS. XIX. THEOR. XV.

Eucl. 24. 26. VI. & 43. I.

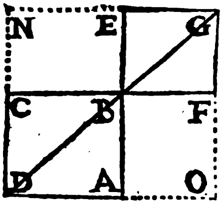
Parallelogramma circa ęquales angulos, atque circa communem diametrum constituta, latera in directum habentia, erunt inter se similia. Et si fuerint similia inter se, & habeant latera homologa in directum posita, consistent circa communem diametrum. Atque duo parallelogramma complementi ęqualia erunt inter se.

Duo parallelogramma A C, & E F constituta sint circa communem diametrum D B G, circa angulos ęquales A B C & E B F, atque habeant latera homologa A B, B E in directum posita, pariterque latera C B, B F in directum. Dico primùm parallelogramma A C, & E F similia esse. Quoniam recta E G parallela ipsi D A basi trianguli D B A, secat duo eius latera; Igitur [a] triāgulum A B D simile est triangulo E B G: Et propterea latera homologa A B ad B E atque D A ad E G, nec non D B ad B G in eadem ratione erunt. Simili ratione quia F G parallela est D C, basi trianguli C D B, erunt triangula C D B, G B F similia inter se, & vt prius latera homologa C B ad B F, atque D C ad G F



a coroll. 1. prop. 6. huius.

Aa in



in eadem ratione erunt eiusdem B D ad eandem B G. Ideoque *b* A B ad B E, A D ad E G, D C ad G F, atque C B ad B F in eadem ratione erunt. Quare permutando *c* A B ad B C erit vt E B ad B F circa angulos ęquales A B C, E B F; pariterque *d* circa angulos ęquales alternos, aut externum, & internum A & E, erit B A ad A D, vt B E ad E G, & sic reliqua omnia latera opposita. Quapropter *n* parallelogramma A C, & E F similia inter se erunt.

b prop. 7. lib. 3.
c prop. 12. lib. 3.
d prop. 25. lib. 1.
n prop. 16. huius.

Secundò sint parallelogramma A C, E F similia, & habeant latera homologa A B, B E in directum posita, & sic latera C B, & B F in directum; & ducantur diametri D B, & E G. Dico D B G vnam rectam esse. Quoniam in duobus triangulis D C B, B E G parallela sunt latera D C, & B E, cùm A B, B E in directum sint positę, & *e* A B parallela sit opposito lateri D C in parallelogrammo C A. Eadem ratione parallela sunt latera C B, & E G; suntque *f* anguli D C B, & B E G ęquales, propter similitudinem figurarum. Ergo *g* bases D B, B G parallelę sunt inter se; & *h* se tangunt in B. Ergo in directum sunt positæ.

e prop. 26. lib. 1.
f prop. 17. huius.
g prop. 7. huius.
h Cor. prop. 17. lib. 1.

Tertiò Dico parallelogramma complementi N B, & B O ęqualia esse inter se. Quoniam *i* circa angulos ęquales ad verticem E B C, & F B A latera sunt reciprocè proportionalia: Nam vt A B ad B E, ita ostensa est C B ad B F. Ergo *k* parallelogramma N B, & B O ęqualia sunt. Quæ erant ostendenda.

i Cor. prop. 5. lib 1.
k prop. 14. huius.

PROPOS. XX. PROBL. IV.

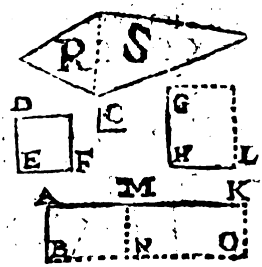
Eucl. 45. 1.

Ad datam rectam applicare parallelogrammum ęquale rectilineo dato, in dato angulo.

Sit figura rectilinea R S, & quęlibet recta data A B, angulus datus C. Debet ad rectam A B applicari parallelogrammum ęquale rectilineo R S in angulo C. Distribuatur rectilineum in triangula R & S, & fiat *a* parallelogrammum D E F ęquale triangulo R in angulo E ęquali ipsi C, pariterque fiat parallelogrammum G L æquale triangulo S, cuius angulus H ęqualis sit eidem angulo C: Postea *b* fiat angulus B A K ęqualis angulo C, &, *c* vt B A ad D E, ita fiat F E ad A M, & compleatur parallelogrammum A N: Similiter fiat, vt N M ad

a prop. 33. lib. 1.
b prop. 24 lib. 1.
c prop. 11. huius.

ad G H, ita L H ad M K, & compleatur parallelogrammum M O. Quoniam d duo parallelogramma A N, & D F circa angulos ęquales A, & E habent latera reciprocè proportionalia; igitur ęqualia sunt inter se; est verò triangulum R factum ęquale parallelogrammo D F. Igitur parallelogrammum A N ęquale est triãgulo R. Rursus e quia propter parallelas A B, M N est angulus externus K M N ęqualis interno, & opposito angulo A, estque angulus H æqualis angulo C, siue A. Igitur duo anguli H, & K M N ęquales sunt inter se; suntque circa hos angulos ęquales latera reciprocè proportionalia. Igitur f parallelogrammum G L, seu ei ęquale triangulum S erit ęquale parallelogrammo M O. Et propterea duo parallelogramma A N & M O, idest parallelogrammum K A B O æquale erit duobus triangulis R & S, siue rectilineo dato: Estque applicatum ad rectam A B in angulo ęquali ipsi dato C. Factum est ergo Problema.



d prop. 14. huius.

e prop. 15. lib. 1.

f prop. 14. huius.

COROLLARIVM.

Eucl. 44. I

Patet qua ratione ad datam rectam applicari debeat parallelogrammum ęquale triangulo dato, in dato angulo.

Applicatum g enim est ad rectam A B parallelogrammum A N ęquale triangulo R in angulo A ęquali angulo dato C.

g prop. 20. huius.

PROPOS. XXI. PROBL. V.

Eucl. 25. VI. & 14. II.

Datis duobus polygonis tertium describere, quod simile sit vni, & ęquale reliquo datorum.

Sint datę duę figurę rectilineę R, & S. Debet construi figura, quę ęqualis sit figuræ S, at similis sit figurę R. Super quolibet latere A B figurę R fiat a parallelogrammum A D ęquale spatio R in quolibet angulo B A C; & producta A B in E super B D in angulo E B D, qui b ęqualis erit interno, & opposito B A C, fiat c parallelogrammum B F ęquale spatio S. Patet parallelogramma A D, & B F esse inter easdem parallelas A E, C F. Postea inter duas rectas A B, & B E d fiat

a prop. 20. huius.

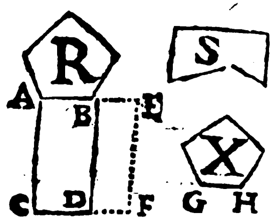
b prop. 15. lib. 1.

c prop. 20. huius.

d prop. 10. huius.

e prop. 16. huius. media proportionalis G H, super quam fiat e figura X similis ipsi R, ita vt G H sit latus homologum ipsi A B. Quoniam f prop. 17. huius. R & X sunt figurę similes, f habebit R ad X duplicatam rationem eius, quam habet latus A B ad eius homologum G H; sed g A B ad B E duplicatam rationem habet eius, quam habet A B ad mediam proportionalem G H. Ergo, h vt A B ad B E, ita est figura R ad figuram X; sed i parallelogrammum A D ad parallelogrammum B F est, vt basis A B ad basim B E (cùm sint inter easdem parallelas) Ergo k figura R ad figuram X est, vt parallelogrammum A D ad parallelogrammum B F; est verò parallelogrammum A D ęquale figurę R, & parallelogrammum B F ęquale spatio S. l Ergo figura R ad figuram X est, vt figura R ad figuram S; ideoque figura m X ęqualis est spatio S, & facta fuit figura X similis ipsi R. Quod erat faciendum.

g prop. 19. lib. 3.



h prop. 7. lib. 3.
i prop. 1. huius.
k prop. 5. lib. 3.
l prop. 3. lib. 3.
m prop. 4. lib. 3.

SCHOLIVM.

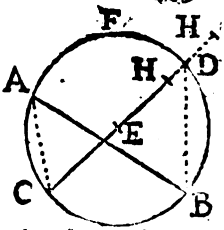
Patet, quòd propos. 14. lib. II. Euclidis pars est, & comprehenditur in hac vniuersalissima propositione. Ibi enim pręcipitur, vt quadratum efficiatur aequale cuilibet spatio rectilineo; hic verò siue R sit quadratum, siue Polygonum cuiuscunque speciei, describi potest figura X aequalis ipsi S, & similis alteri R.

Eucl. 35. 36. 37. III.

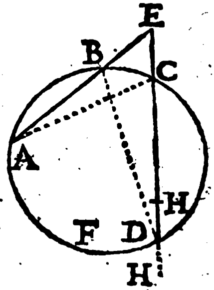
PROPOS. XXII. THEOR. XVII.

Si in circulo ductę fuerint duae rectę lineę, se secantes: parallelogrammum rectangulum, comprehensum sub segmentis vnius, ęquale erit ei, quod sub segmentis alterius continetur, rectangulo. Et si rectangula sub segmentis duarum rectarum, se secantium, ęqualia fuerint: circuli peripheria per quatuor terminos illarum transibit.

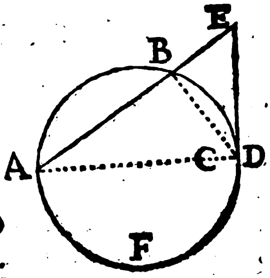
In circulo A B F duę rectę lineę ductae A E B, & D E C se secent in E (siue ambę secent circuli peripheriam in duobus pun-



punctis, vt in prima, & secunda figura, siue vna A E B eam secet in duobus punctis A & B, altera verò recta D E C tangat eandem peripheriam in vno puncto à signis D, & C expresso, vt in tertia figura: siue ambe circulum tangant, vt in quarta figura). Dico parallelogrammum rectangulum, contentum sub vnius segmentis A E, & E B, ęquale esse rectangulo, sub alterius segmentis D E, & E C contento. Coniungantur rectæ A C, D B. Quoniam duo anguli E D B, & E A C, ęquales sunt, quia aut a sunt in eodem segmento C F B, vt in prima, & secunda figura, aut b angulus E D B continetur à tangente E D, & secante B D, reliquus verò angulus E A C in alterno segmēto B F C existit, vt in tertia figura, aut c ambo anguli à tangentibus, & eadem secante contenti, æquales sunt ei, qui in alterno segmento B F C effici potest, vt in quarta figura; suntque anguli d A E C, & D E B ęquales ad verticem, vel vnus, & idem. e Ergo duo triangula A E C, & D E B similia sunt; & ideo, vt A E ad E C, ita est D E ad E B. Quapropter f parallelogramum rectangulum, sub prima, & quarta proportionalium contentum, idest rectangulum A E B, æquale erit rectangulo D E C, quod à secūda, & tertia continetur.

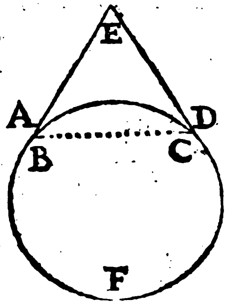


a prop. 14. lib. 2.
b prop. 24. lib. 2.
c prop. 24. lib. 2.



d cor. prop. 5. l. 1.
e cor. 1. propos 4 huius
f cor. 1 propos 14. huius.

Secundo duę rectę A E B, & D E C, se secantes in E, efficiant rectangula A E B, & D E C ęqualia inter se; & per tria puncta A, C, B ducatur g circuli peripheria. Dico eam transire per punctum D. Si enim hoc verum non est, transeat per H citra, vel vltra punctum D. Ergo h rectangulum H E C ęquale erit rectangulo A E B; sed erat rectangulum D E C ęquale eidem rectangulo A E B. Quare rectangula H E C, & D E C ęqualia sunt inter se, pars, & totum; quod est impossibile. Non ergo circuli peripheria A C B transit per punctum H. Quapropter per puncta A, B, C, D transibit. Vt erat propositum.



g Sch. prop. 1. l. 2.
h ex prima part. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Manifestum est in primo casu, si A B fuerit diameter circuli, & C D perpendicularis ad A B, esse quadratum perpendicularis D E çquale rectangulo A E B, sub segmentis diametri contento. Nam [i] diameter A B secat perpendicularem C D bifariam in E; ideoque [k] quadratum D E çquale erit rectangulo D E C: sed ex hac propositione rectangulum A E B çquale est rectangulo D E C. Ergo quadratum ipsius D E çquale est parallelogrammo rectangulo A E B.

i prop. 2. l. 2.
k prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM II.

Constat in tertio casu, quod rectangulum A E B, sub segmentis secantis contentum, çquale est quadrato tangentis E D. Quia signa C, D exprimunt vnum punctum contactus; & ideo [l] rectangulum C E D çquale est quadrato vnius çqualium E D, vel E C.

l prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM III.

Similiter constat in quarto casu, quod quadrata tangentium A E, & E D ab eodem puncto cadentium çqualia sunt, & tangentes A E, & E D çquales sunt, etiam; eo quod signa A, B vnum punctum contactus exprimunt, & sic C, D. Quare rectangula [m] A E B, & C E D çqualia sunt quadratis A E, & D E; & propterea (ex coroll. 2. prop. 17. huius) tangentes A E, D E çquales erunt.

m prop. 34. lib. 1.

COROLLARIVM IV.

Patet etiam, quod si quadratum E D çquale fuerit rectangulo A E B, necessariò E D tanget circulum in D; eo quod recta E D non incidit in peripheriam circuli per A, B, & punctum C, seu D descripti, nisi in vno puncto tãtùm, quod [n] à signis D, C exprimitur. Quare [o] E D non secat, sed tangit circulum.

n ex secunda parte huius propos.
o cor. prop. 4. l. 2.

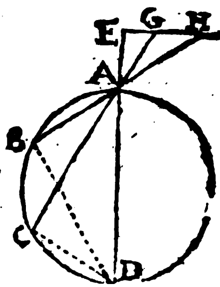
CO-

COROLLARIVM V.

Similiter constat ab eodem puncto externo non plures, quàm duas rectas, tangentes circulum, duci posse; eo p quod ab externo puncto E duæ rectæ tantummodo æquales inter se duci possunt. p prop. 6. lib. 2.

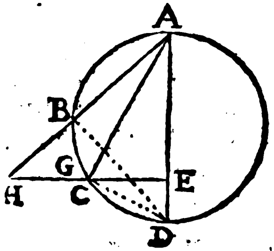
COROLLARIVM VI.

Patet etiam, quòd, si à puncto, extra circulum posito, duæ rectæ ęquales in circulum incidant, quarum vna sit tangens, altera quoque tangens erit.



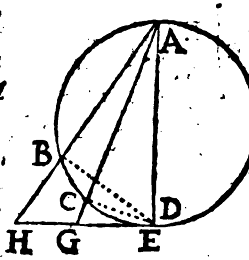
SCHOLIVM.

Si per verticem diametri circuli quotcunque rectæ lineæ ducantur, secantes circuli peripheriam, & rectam ad diametrum perpendicularem: erunt omnia rectangula, contenta sub segmentis cuiuslibet ductarum inter summitatē, & peripheriam, atq; perpendicularem interceptis, æqualia inter se.

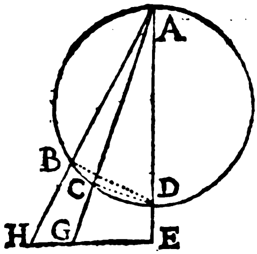


In circulo A B C, cuius diameter D A E ducatur a H E perpendicularis ad diametrum D A, eam secans in E; & per verticem A ducantur quotcunque rectę lineæ B A H, C A G, D A E, secantes circuli peripheriam in B, C, D, & perpendicularem in H, G, E. Dico rectangula D A E, C A G, & B A H æqualia esse inter se. Coniungantur rectę B D, & C D. Quoniam duo anguli E A G, & D A C ad verticem b æquales sunt, aut vnum angulum efficiunt; pariterque angulus rectus E ęqualis est angulo D C A in c semicirculo recto. d Ergo duo triangula G A E, D A C similia sunt; ideoque D A ad A C est, vt G A ad A E. Quare e rectangulum C A G, sub intermedijs proportionalium contentum, æquale erit rectangulo D A E, sub extremis comprehenso. Eadem ratione triangula E A H, & B A D similia erunt, & f rectangulum

a prop. 10. lib. 1.
b cor. prop. 5. l. 1.
c prop. 20. lib. 2.
d coroll. 1. prop. 4. huius
e coroll. 1. prop 14. huius.
f cor. 1. prop. 14. huius.



B A H

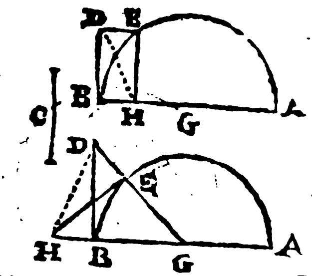


B A H æquale erit rectangulo D A E. Et propterea omnia rectangula B A H, C A G, & D A E æqualia erunt inter se. Quod erat probandum.

PROPOS. XXIII. PROBL. VI.

Datis duabus rectis lineis, in altera earum punctum intra, aut extra reperire, quod efficiat duo segmenta, inter quæ reliqua sit media proportionalis. Oportet autem medietatem rectæ lineæ, intra quam punctum signari debet, non minorem esse reliqua.

Sint duæ rectæ lineæ A B, & C debet reperiri punctum intra rectam lineam A B, vt in primo casu, vel extra eam in directum vt in secundo, ita vt recta linea C sit media proportionalis inter facta segmenta; sed in primo casu oportet, vt semissis ipsius A B non minor sit, quã C. Super diametro A E B
a prop. 10. lib. 1. fiat circulus A E B, cuius centrum G; & a à termino B ducatur B D perpendicularis ad A B, seceturque b B D æqualis ipsi
b prop. 3. lib. 1. C. Postea à termino D (in primo casu) ducatur c recta linea
c cor. prop. 16. lib. 1. D E parallela ipsi A B, quæ non cadet extra circulum, eo quod semissis ipsius A B, idest radius, seu altitudo semicirculi A B supponitur æqualis, aut maior quã C, seu quã perpẽdicularis B D; & propterea DE tanget, aut secabit circulũ in E: at in secũdo casu coniungatur recta D G ad centrum circuli, secans
d prop. 3. lib. 1. peripheriam eius in E. Deinde d secetur recta B H æqualis ipsi D E, coniunganturque rectæ E H, D H. Quoniam in duobus triangulis E D H, & B H D facta sunt duo latera B H, & D E



æqualia, atque latus H D est commune, & anguli comprehensi E D H, & B H D æquales sunt inter se,
e prop. 29. lib. 1. (eò quod in primo casu e sunt alterni in parallelis D E, & B A; in secundo verò casu f sunt ad basim trian-
f prop. 6. lib. 1. guli isoscelij DG H; propterea quod radijs æqualibus G B, G E adduntur
g prop. 4. lib. 1. æquales B H, E D). Igitur g basis E H æqualis est B D, seu C; pariterque angulus D E H æqualis
h prop. 12. lib. 1. est angulo D B H recto; ideoque h H E perpendicularis est ad

D E;

DE; & propterea in primo casu i EH secat perpendiculariter quoque diametrum BA æquidistantem ipsi DE; at in secundo casu k HE continget circulum in puncto E. Igitur l parallelogrammum rectangulum AHB æquale est quadrato rectæ lineæ HE; & ideo m HE, seu ei æqualis C media proportionalis erit inter segmenta AH, & HB. Vt propositum fuerat.

i prop 15. lib. 1. k coroll. 1. prop 21. l. 2. l ior 1. & 2. prop 22. huius. m coroll. 2. prop. 14. huius.

COROLLARIVM I.

Si datæ fuerint duæ rectæ lineæ, quarum vna sit media, reliqua verò æqualis sit aggregato extremarum trium proportionalium; vtraque extrema reperiri potest ex primo casu huius propositionis.

COROLLARIVM II.

Constat etiam, quòd data recta linea secari potest, vt rectangulum sub eius segmentis contentum æquale sit dato quadrato; sed oportet, vt latus dati quadrati non sit maius, quàm semissis datæ rectæ lineæ. Nam in primo casu huius propositionis posita fuit C non maior, quam semissis AB; & factum fuit rectangulum AHB æquale quadrato ipsius C.

COROLLARIVM III.

Patet, quòd, si duarum linearum rectarum vna sit media, reliqua vero sit differentia extremarum trium proportionalium; vtraque extrema reperiri potest ex secundo casu huius propositionis.

COROLLARIVM IV.

Constat etiam, quòd data recta linea produci potest, vt rectangulum, excedens sub producta, & eius productione contentum, æquale sit cuilibet dato quadrato. Factum enim fuit rectangulum AHB æquale quadrato cuiuslibet rectæ C datæ, in secundo casu huius propositionis.

PROPOS. XXIV. PROBL. VII.

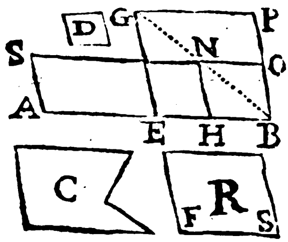
Eucl. 28. 29. VI.

Ad datam rectam lineam dato rectilineo spatio, æquale pa-

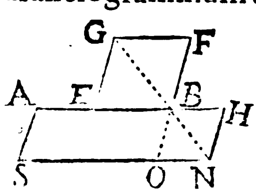
 ralle-

rallelogrammum applicare deficiens, aut excedens parallelogrammo, quod simile sit alteri dato: oportet autem quando parallelogrammum deficiens applicandum est, datum spatium maius non esse parallelogrammo, super dimidia descripto, quod simile sit parallelogrammo dato.

Sit datum quodlibet spatium rectilineum C, & parallelogrammum D, atque recta linea A B; & super eius medietate E B fiat *a* parallelogrammum E F simile ipsi D. Debet ad rectam A B applicari parallelogrammum æquale spatio C, & deficiens (in primo casu), aut excedens (in secundo casu) parallelogrammo, quod simile sit ipsi D: sed necesse est, in primo casu, vt spatium C non sit maius parallelogrammo E F. Fiat *b* parallelogrammum R simile ipsi E F, & æquale spatio C, sitque K S eius latus homologum ipsi E B: Et quia in



primo casu, ponitur spatium C, seu ei æquale parallelogrammum R non maius parallelogrammo E F. *c* Ergo latus K S æquale, aut minus erit latere ei homologo E B, scilicet medietate ipsius A B. Quare recta A B *d* secari potest in H, sicuti in secundo casu *e* produci potest, vt rectangulum A H B æquale sit quadrato rectæ K S. Postea à puncto H ducatur *f* H N parallela ipsi F B, quæ secabitur *g* à G B diametro parallelogrammi in N, & per N ducatur *h* O N S parallela ipsi A B, extendaturque quousque conueniat *i* cum A S, parallela ipsi B O F, in S. Et quoniam *k* quadratum ex H B ad rectangulum B H A est, vt B H ad H A (cùm habeant communem altitudinem H B); estque *l* parallelogrammum H O ad parallelogrammum S H, vt basis B H ad basim H A. *m* Ergo



parallelogrammum H O ad parallelogrammum S H est, vt quadratum ex B H ad rectangulum B H A, seu *n* ad ei æquale quadratum rectæ K S. Est autem parallelogrammum E F ad parallelogrammum H O, ei *o* simile circa diametrum communem G B N, vt *p* quadratum ex E B ad quadratum ex B H. *q* Ergo ex compositione ordinata parallelogrammum E F ad parallelogrammum S H est, vt quadratum ex E B ad quadratum rectæ K S; sed, *r* vt quadratum ex E B ad qua-

a prop. 16. huius.
b prop. 21. huius.
c coroll. 2. prop. 17. huius.
d coroll. 2. prop. 23. huius.
e coroll. 4. prop 23. huius.
f cor. prop. 16. huius.
g cor. prop. 29. lib. 1.
h cor. prop. 16. lib. 1.
i cor prop. 29 lib. 1.
k prop 1. huius.
l prop. 1. huius.
m prop. 7. lib. 3.
n prop. 3. 3.
o prop. 19. huius.
p prop. 18. huius.
q prop. 19. lib. 3.
r prop. 18. huius.

quadratum rectę K S, ita est parallelogrammum E F ad parallelogrammum R, seu s ad huic ęquale spatium C. t Igitur parallelogrammum E F eandem rationem habet ad parallelogrammum S H, atque ad spatium C; ideoque u applicatum parallelogrammum S H ęquale est spatio dato C; x atque deficit in primo casu, & excedit in secundo in figura H O, quę similis est ipsi E F, seu z parallelogrammo dato D. Quod erat faciendum.

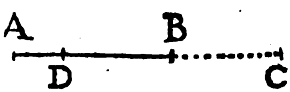
s prop. 3 l. 3
t prop 7 l. 3
u prop. 4. lib. 5.
x Def 2. huius.
z cor prop. 16 huius.

PROPOS. XXV. PROBL. XIII.

Eucl. 11. II & 30. VI.

Propositam rectam lineam terminatam secare in duo segmenta, quorum vnum medium proportionale sit inter totam, & reliquum segmentum. Vocetur autem recta, sic secta, secundum extremam, & mediam rationem diuisa.

Data recta A B secari debet, vt proponitur. a producatur recta A B in C, vt ipsa A B sit media proportionalis inter productam A C, eiusque productionem B C; secetur que b B D ęqualis B C: erit C A ad A B vt A B ad B C, seu c ad ei ęqualem B D: & diuidendo d C B, seu e ei æqualis D B ad B A erit, vt A D ad D B; & propterea segmentum B D erit medium proportionale inter totam A B reliquumque eius segmentum A D. Quod erat faciendum. Vocetur recta A B hac ratione secta in D, diuisa secundum mediam & extremam rationem.



a prop. 23. huius
b prop 3. lib. 1.
c prop. 3. lib. 3.
d prop 13. lib. 3.
e prop. 3. lib. 3.

COROLLARIVM.

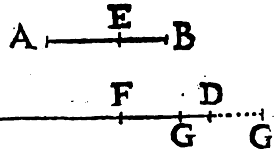
Patet, quòd si recta linea secta fuerit extrema, & media ratione, atq; ex maiori eius segmento detrahatur segmentum minus: erit maius segmentum sectum extrema, & media ratione, cuius segmentum maius est illa, quę prioris lineę minus segmentum erat. facta enim fuit tota C A ad A B, vt A B ad B C. & ideo ex hac propositione recta A C secta erit in B extrema, & media ratione, cuius minus segmentum erit B C: postea secta fuit B D æqualis ipsi B C; & ostensa fuit recta A B secta extrema & media ratione in D.

Pappi 54. V.

PROPOS. XXVI. THEOR. XVIII.

Si duarum rectarum linearum, in eadem ratione diuiſarum, vna ſit ſecta extrema & media ratione; altera quoque ſimiliter ſecta erit. Et ſi duę rectę, ſingulę ſectę fuerint extrema, & media ratione ambę in eiſdem rationibus ſectę erunt.

Sit A B ſecta in E extrema, & media ratione, cuius maius ſegmentum A E; & vt B A ad A E, ita ſit D C ad C F. Dico C D in F ſectam quoque eſſe extrema, & media ratione.



Quoniam B A ad A E eſt, vt D C ad C F: Ergo diuidendo *a* B E ad E A, eſt vt D F ad F C; & inuertendo *b* erit A E ad E B, vt C F ad F D. Et quia A B ſecta eſt in E extrema, & media ratione: Ergo *c* A E ad E B eſt, vt B A ad A E; ſed vt B A ad A E, ita erat D C ad C F. *d* Ergo D C ad C F eſt, vt A E ad E B; fuit autem, vt A E ad E B, ita C F ad F D: Ergo, *e* vt D C ad C F, ita eſt C F ad F D. ideoque C D in F ſecatur extrema, & media ratione.

a prop. 13. lib. 3.
b prop. 9. lib. 3.
c prop 25. huius.
d prop 7. lib. 3.
e prop. 7. l. 3

Secundò ſint ſectę duę rectę A B; & C D ambę extrema, & media ratione in E, & F. Dico eas ſecari proportionaliter. Si hoc verum non eſt, ſit C G (maior, vel minor, quam D C) ad C F, vt B A ad A E. Ergo, vt dictum *f* eſt, ſicuti A B in E, ita erit G C in F ſecta extrema, & media ratione; ideoque *g* rectangulum F G C æquale erit quadrato mediæ proportionalis C F; ſed ex hypotheſi C F erat media proportionalis inter F D, & C D. Ergo *h* parallelogrammum rectangulum F D C ęquale eſt quadrato eiuſdem C F. Quare parallerogramma rectangula F G C; & F D C ęqualia inter ſe erunt, pars, & totum, quod eſt impoſſibile. Non ergo aliqua G C maior, vel minor, quàm D C habere poteſt ad C F eandem rationem, quam B A ad A E, ideoque ipſamet D C ad C F erit, vt B A ad A E. Et diuidendo *i* B E ad E A erit, vt D F ad F C, & *k* inuertendo A E ad E B erit, vt C F ad F D. Quare patet propoſitum.

f prim. par. huius.
g coroll. 2. prop. 14. huius.
h coroll. 2. prop. 14. huius.
i prop. 13. l. 3
k prop. 9. l. 3

CO-

COROLLARIVM.

Eucl. 5. XIII.

Ex his duabus propositionibus deducitur, quòd, si alicui rectę lineę secundum extremam, & mediam rationem diuisę, addatur recta ęqualis maiori segmento: composita linea secundum extremam, & mediam rationem secatur, & maius segmentum est, quæ à principio recta linea. nam in propositione 25. secta fuit A B in D extrema, & media ratione, & addita B C æquali maiori segmento B D, erat B D, seu ei æqualis C B ad B A vt A D ad D B: vnde tam A B in D, quàm C A in B in eadem ratione secantur; & propterea ex hac 26. propositione recta C A in B extremo, & media ratione secabitur, sicuti A B in D extrema, & media ratione secta erat.

Finis Libri quarti.

LIBER QVINTVS.

Eucl. lib. IV. 11. & resid. VI.

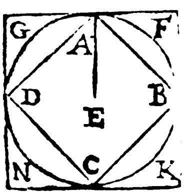
DEFINITIONES.

I.

Figura rectilinea inscribi in circulo dicitur, cùm singuli eius anguli tangunt circuli peripheriam. Et circunscribi dicitur circulo, cùm singula figurę latera tangunt circuli peripheriam.

II.

E contra circulus inscribi dicitur in figura rectilinea, cùm circuli peripheria tangit singula latera figurę. Et circunscribi dicitur, cùm circuli peripheria tangit omnes angulos figurę.



Vt rectilinea figura A B C D dicitur inscripta circulo, cuius radius A E, quando singuli anguli A, B, C, D tangunt peripheriam circuli. Et figura F N dicitur circunscripta eidem, quando singula eius latera F G, G N, N K, K F tangunt peripheriam circuli in punctis B, C, D, A.

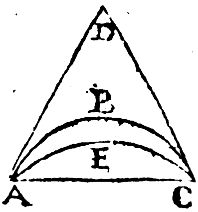
E contra ijsdem positis circulus, radij E A, erit inscriptus in figura F G N K, & circunscriptus figuræ A B C D.

Archimedis de sphera, & cyl. l. 1.

AXIOMA.

Si à terminis rectę lineę, subtendentis arcum alicuius circuli, ducantur duę rectę lineę, concurrentes extra circulum, & totę extra ipsum positæ, vel simili modo ducatur vna curua linea: erunt lineæ cōprehendentes maiores peripheria comprehensa; subtensa verò recta linea minor erit eadem peripheria, seu curua.

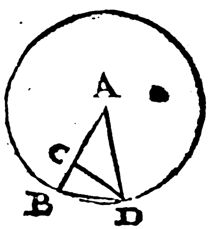
Sit enim circuli peripheria A E C, subtensa verò recta A C, & curua A B C, atque duæ tangentes circulum A D, C D, concurrentes in D, & extra circulum cadentes. Manifestum est rectam A C minorē esse peripheria A E C, nec non curua A B C, cū recta sit omnium breuissima: & A E C minorem esse quàm A B C, & A B C minorem esse, quàm A D C. eo quod A E C minùs recedit à rectitudine, quàm A B C, & hęc minùs, quàm A D C.



PROPOS. I. PROBL. I.

Ad datam rectam lineam, atque ad eius punctum, angulum describere, qui quinta pars sit quatuor rectorum.

Ad datam rectam A B, atque ad eius punctum B angulus effici debet, qui sit quinta pars quatuor rectorum. Secetur a recta linea A B extrema, & media ratione in C, cuius maius segmentum sit A C; & centro A, interuallo A B circulus B D describatur, in quo applicetur, b recta B D ęqualis maiori segmento A C. Dico angulum A B D esse quæsitum. Iungantur rectę A D, & C D. Quoniam c tres rectæ B A, A C, & C B proportionales sūt, & est B D ęqualis A C, atq; radius A D ęqualis A B. Ergo in triangulis A B D, & D B C circa d ęquales angulos A D B, & B, subtensos à radijs æqualibus, est A B, seu ei æqualis A D ad D B, vt D B ad B C. Quare e angulus C D B æqualis est angulo A; & est A C ad C B, vt B A ad A C, seu vt A D ad D B: Ergo f angulus A D B, seu ei ęqualis B, duplus est anguli C D B, seu anguli A. Ergo qualium partium angulus A est vna, erit B duæ partes, & D pariter duę. Quare anguli A, B, & D, simul sumpti, (qui g ęquales sunt duobus angulis rectis) æquales erunt quinque angulis, quorum quilibet ęqualis est ipsi A; ideoque angulus A quinta pars erit duorum rectorum. Sed quam proportionem duplam habet angulus B ad angulum A, eandem habent quatuor recti ad duos rectos: Et permutando h angulus B ad quatuor rectos erit, vt angulus A ad duos rectos; sed angulus A quinta pars est duorum rectorum. Ergo i angulus B quinta pars est quatuor rectorum. Vt erat propositum.



a prop. 25. lib. 4.
b prop. 12. lib 2.
c prop. 25. lib. 4.
d prop. 6. lib. 1.
e prop. 6. lib. 4.
f prop. 3. lib. 4.
g prop. 18. lib. 1.
h prop. 12. lib. 3.
i Def 8. l. 3

CO-

Eucl. 10. IV

COROLLARIVM.

Hinc patet, qua ratione triangulum Isoscelium constitui debeat, in quo quilibet angulorum ad basim duplus sit anguli verticalis.

PROPOS. II. PROBL. II.

Angulum reperire, qui sit quintadecima pars quatuor rectorum.

a prop. 24. lib. 1.

b prop. 12. lib. 3.

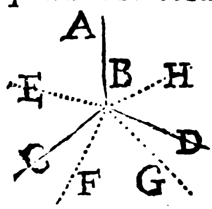
c Coroll. 5. prop 18. lib. 1.

d prop. 24. lib 1.

e coroll. 2. prop. 13. l 1.

f prop. 10. huius.

Effici debet angulus, qui sit vna pars, earum qualium quatuor recti in quindecim partes ęquales diuidũtur. Fiat *a* angulus A B C duplus vnius anguli trianguli ęquilateri. Et quia, vt duo recti ad quatuor rectos, ita est angulus vnius trianguli ęquilateri ad angulum A B C, vtręque enim rationes sunt, subduplę; & permutando, *b* vt duo recti ad vnum angulum trianguli ęquilateri, ita sunt quatuor recti ad angulum A B C: est *c* vero vnus angulus trianguli æquilateri tertia pars duorum rectorum: Ergo angulus A B C tertia pars est quatuor rectorum. Fiat rursus angulus C B D tertia pars quatuor rectorum, idest *d* æqualis ipsi A B C. Et quia *e* anguli omnes A B C, C B D, & D B A circa punctum B æquales sunt quatuor rectis, suntq; duo anguli A B C, C B D duę tertię partes quatuor rectorũ, ergo reliquus angulus ABD tertia pars quoque erit quatuor rectorũ. Postea fiant *f* anguli



A B E, E B F, F B G, G B H qui singuli æquales sint quintæ parti quatuor rectorum: erit, vt antea, quintus angulus H B A ęqualis prioribus, & quinta pars quatuor rectorum. Et quoniã angulus A B F æqualis est angulo A B G, cum vterq; ęqualis sit duabus quintis quatuor rectorum: Suntque duo anguli A B C, & A B D æquales quoque. Ergo residui anguli C B F, & D B G ęquales erunt. Deinde quia ab ęqualibus angulis A C B, & C B D auferuntur ęquales anguli A B E, & F B G: Ergo residuus angulus E B C ęqualis est duobus residuis angulis C B F, & G B D; sunt verò ostensi anguli C B F, & G B D ęquales inter se. Ergo angulus E B C duplus est anguli C B F; & totus angulus E B F triplus est anguli C B F. Eadem ratione tam angulus A B E, quàm

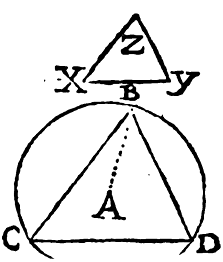
quàm A B H, quàm H B G, & quàm F B G ęqualis est triplo anguli C B F. Quare omnes anguli F B E, E B A, A B H, H B G, G B F, simul sumpti, quinquies summam trium angulorum ęqualium vni C B F, ideſt decies & quinquies angulum C B F continebunt. Et propterea angulus C B F, decies & quinquies sumptus, ęquatur angulis omnibus circa punctum B, ideſt g quatuor rectis. Quod erat faciendum. g coroll. 2. prop. 13. l. 1

PROPOS. III. PROBL. III.

Eucl. 2. 6. 11. 15. 16. IV.

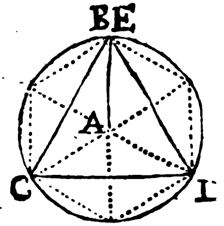
Intra datum circulum triangulum dato triangulo æquiangulum, & polygonum ęquilaterum, & ęquiangulum trium, quatuor, quinque, & quindecim laterum, & quodlibet aliud, quod ex continua duplicatione laterum eorundem polygonorum consurgit, inscribere. Vocentur autem huiusmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ: figuræ Regulares.

In circulo B C D, cuius radius A B inscribendæ sunt figurę imperatæ. Et primò triangulum, quod sit æquiangulum dato triangulo Z X Y. Abscindatur a circuli segmentum B D C, capiens angulum æqualem ipsi angulo Y, & iungatur recta B C, & in opposita parte abscindatur b segmentum B C D, capiens angulum æqualem angulo X, & coniungantur rectæ B D, & C D. Patet angulum D ęqualem esse angulo Y, & angulum C æqualem esse ipsi X; ideoque c triangulum inscriptum circulo B C D ęquiangulum erit triangulo dato Z X Y. a poop. 26. lib. 2. b prop. 26. lib. 2. c coroll. 1. prop. 4. l. 4.

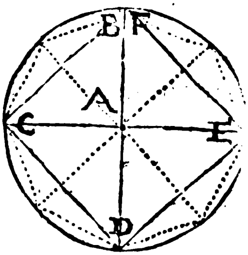


Secundò pro triangulo æquilatero, & æquiangulo diuidentur, (vt in præcedenti factum eſt) omnes anguli ad centrum, ideſt quator recti, in tres angulos B A C, C A D, & D A B qui singuli sint æquales tertiæ parti quatuor rectorum; pro quadrato verò fiant d quatuor anguli ad centrum B A C, C A D, D A E, & E A B, singuli ęquales quartę parti quatuor rectorum, seu recti; Atque pro pentagono fiant quinque anguli B A C, C A D, D A E, E A F, & F A B, singuli ęquales quintę parti quatuor rectorum; Tandem pro quintidecagono ad centrum fiant quindecim anguli B A C, C A D, D A E, E A F, &c. singuli æquales decimæquintæ d prop. 10. lib. 1. e prop. 1. huius. f prop. 2. huius.

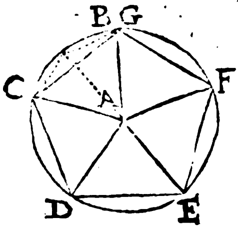
 parti



parti quatuor rectorum. Manifestum est in qualibet ex his diuisionibus angulos circa centrum distribui in partes equales. At in omnibus producantur radij A B, A C, A D, &c. vsque ad circuli peripheriam in punctis B, C, D, &c. & coniungantur rectę BC, C D, D E, &c. quousque compleantur figuræ. Ostendendum est omnia prædicta polygona esse ęquilatera, & ęquiangula. Quoniam omnes anguli B A C, C A D, &c. verticales ad centrum A ęquales facti sunt, & radij omnes sunt pariter ęquales. Ergo *g* omnia triangula isoscelia B A C, C A D, D A E, &c. sunt similiter ęqualia, ęquè alta, & ęquiangula inter se, & eorum bases B C, C D, D E, &c. ęquales erunt. Quare figura B C D E F &c. ęquilatera erit. Et quia anguli omnes ad bases isoscelium, vt sunt B C A. A C D, C D A, A D E, &c. ęquales ostensi sunt: Ergo bini binis ęquales erunt; ideoque angulus B C D ęqualis erit angulo C D E, & sic reliqui omnes. Quare quęlibet figura B C D E &c. circulo inscripta, ęquiangula est, & æquilatera.

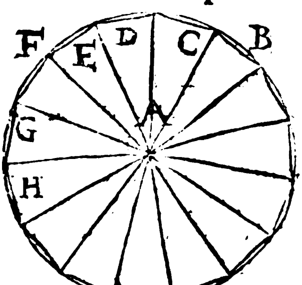


g prop. 4. lib. 1.



h prop. 8. lib. 1.

Postea patet, quod si in qualibet ex dictis figuris diuidantur omnes *h* anguli ad centrum bifariam, & rursus bifariam, & sic vlterius, atque in peripheria circuli rectæ, subtendentes æquales angulos ad centrum, ducantur quousque figuræ compleantur, descriptæ erunt aliæ figuræ æquilateræ, & æquiangulæ; & sic in triangulo æquilatero ex bibartita diuisione trium angulorum B A C, C A D, D A B consurget figura hexagona, secundò figura duodecim laterum, tertiò figura viginti quatuor laterũ, & sic vlterius. In quadrato verò ex bipartita diuisione angulorum ad centrũ cõsurgit figura octo laterum, postea sexdecim, postea duorum & triginta, &c. At in pentagono consurgit primò figura decem laterum, postea viginti, postea



postea quadraginta laterum,&c. Tandem in quintidecagono consurgit figura triginta laterum, postea sexaginta, &c. quæ omnes, vt prius ostendentur æquilateræ, & æquiangulæ, vt est imperatum. Vocentur autem huiusmodi figuræ æquilateræ, & æquiangulæ, Regulares figuræ.

COROLLARIVM I.

Manifestum est rectas lineas omnes, quæ ducuntur à centro circuli ad angulos polygoni regularis, circulo inscripti, æquales esse inter se, & bifariam secare angulos figuræ; eo quod radij sunt eiusdem circuli.

COROLLARIVM II.

Rursus rectę omnes, quæ à circuli centro perpendiculariter ad latera polygoni ducuntur, ęquales sunt inter se; eo quod in circulo polygoni latera, ęqualia inter se, i distant ęqualiter à centro; & propterea centrum circuli erit quoque centrum polygoni inscripti. Vocentur autem huiusmodi perpendiculares Radij figurę regularis.

i prop. 10. lib. 2.

COROLLARIVM III.

Constat etiam polygonum regulare distribui in tot triangula isosceli a æquiangula, & æquilatera inter se, verticem habentia in centro circuli quot sunt polygoni latera.

COROLLARIVM IV.

Manifestum est etiam quodlibet polygonum ęquilaterum, circulo inscriptum, esse quoque ęquiangulum. Nam k latera ęqualia auferunt peripherias ęquales ideoque, l subtendunt angulos ęquales ad centrum & propterea, vt in hac propositione dictum est, efficiunt figuram ęquiangulam.

k coroll. 1. prop 18. l. 2.
l coroll. 1. prop. 17. lib. 2.

SCHOLIVM.

Facilè deducitur, quòd latus hexagoni regularis æquale est radio circuli, in quo figura in cripta est. Nam hexagonum diuiditur m *in sex triangula isoscelia, verticem habentia in centro circuli, & figuræ, & est quilibet*

m coroll. 3. huius prop.

libet angulus ad centrum tertia pars duorum rectorum: eo quod sex ęquales anguli ad centrum quatuor rectis sunt aequales. Ergo n *reliqui duo anguli ad basim cuiuslibet trianguli isoscelis aequales sunt duabus tertijs duorum rectorum. Et propterea* o *quilibet eorum tertia pars erit duorum rectorum. Quare triangulum quodlibet eorum, in quae distribuitur hexagonum est ęquiangulum; ideoque* p *ęquilaterum erit. & propterea latus trianguli, seu circuli radius, aequalis erit basi, seu lateri hexagoni.*

n prop. 18. lib 1.
o prop. 6. lib. 1.
p prop. 20. lib. 1.

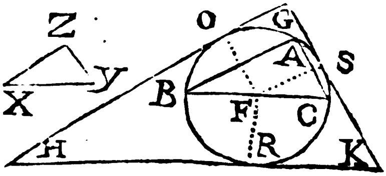
Notandum est non esse adhuc repertam artem describendi intra circulum polygonum regulare cuiuscunque multitudinis laterum, vt heptagoni, nonecagoni, vndecagoni, &c. & propterea vocabimus polygona regularia, superius exposita (breuitatis gratia): Polygona regularia notae descriptionis.

Eucl. 7.12. IV.

PROPOS. IV. PROBL. IV.

Circulo dato triangulum dato triangulo aequiangulum, & quodlibet polygonum regulare notę descriptionis circunscribere.

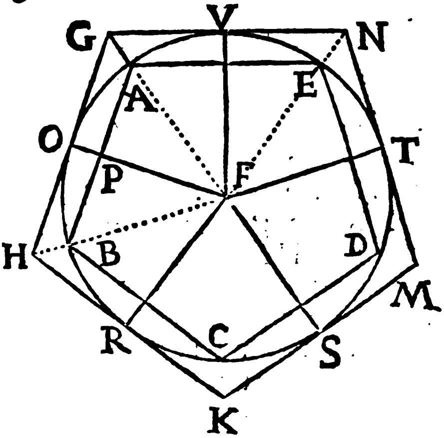
Sit datus circulus A B C, cuius centrum F. debet circa ipsum describi triangulum aequiāgulum dato triangulo Z X Y, & quodlibet polygonum regulare notę descriptionis. Inscribatur a triangulum A B C ęquiangulum ipsi triangulo Z X Y, aut polygonum tot laterum, quot petuntur; & à centro F ducantur b perpendiculares F O, F R, F S, &c. super latera A B, B C, &c. quę secent peripheriam in punctis O, R, S, &c. & per hęc puncta ducantur c circulum tangentes, H G, G K &c. quousque compleantur figurę circunscriptę; cumq; eisdem tangentibus d perpendiculares sint ijdem radij, e ergo A B, & G H parallelae erunt, pariterque B C, H K, & sic reliquae ęquidistabunt: ideoque f efficient angulum G H K ęqualem angulo A B C. Et similiter angulus G ostendetur ęqualis angulo A, & angulus K ęqualis ostendetur angulo C, & sic reliqui. Quare triangulum, circunscriptum circulo G H K, ęquiangulum est triangulo dato Z X Y, & figura circunscripta G H K N ęquiangula est; cùm eius anguli ęquales sint angulis figurę regularis inscriptae A B C E.



a prop. 3. huius.
b prop. 11. lib. 1.
c Coroll 2. prop 21. lib 2.
d prop. 23. lib 2.
e prop. 16. lib. 1.
f cor 1. prop. 7 l. 4.

Postea in polygonis, ductis rectis F G, & F A, quia in triangulis

gulis G O F, & V G F duo g latera G O, & G V æqualia sunt, cùm sint latera ęqualium quadratorum ex tangentibus, ab eodem puncto ductis, & radij F O, F V, inter se ęquales, atque latus F G commune: Ergo h anguli O G F, & V G F sunt inter se ęquales; Sed i recta F A diuidit quoque bifariam figurę inscriptę angulum B A E, & est angulus B A E ęqualis ostensus angulo H G N: Ergo eorum semisses, scilicet anguli H G F, & B A F ęquales sunt; estque H G parallela ipsi B A; Ergo k G F parallela est ipsi A F, & conueniunt in F: l Ergo vna & eadem recta linea est F A G, ex centro per angulos vtriusque figuræ transiens. Eadem ratione rectę lineę erunt F B H, F C K, F D M, & F E N, quę à centro per angulos vtriusque figurę extenduntur. Deinde quia B A parallela est H G, basi trianguli H F G: Ergo m A B ad G H est, vt B F ad F H. Eadem ratione B C ad H K est, vt eadem B F ad eandem F H; ideoque, n vt B A ad H G, ita est B C ad H K: & sunt antecedentes B A, & B C ęquales in polygono inscripto regulari. Ergo o & consequentes H G & H K ęquales sunt inter se. Eadem ratione reliqua latera K M, M N, N G ęqualia erunt inter se, & ipsis G H, H K. Quare figura G H K N ęquilatera est; sed prius erat ęquiangula. Ergo p figura circunscripta G H K N regularis est. Quod erat faciendum.



g coroll. 3. prop. 22. l. 4
h prop. 7. lib. 1.
i coroll. 1. prop. 3. huius.
k coroll. 2. prop. 7 l. 4.
l cor. prop. 17. l. 1.
m coroll. 1. prop. 6. l. 4.
n prop. 7. l. 3
o coroll. 1. prop. 16. l. 3
p prop. 3. huius.

COROLLARIVM I.

Patet etiam, quòd rectę omnes extensę à centro circuli ad angulos figurę regularis circunscriptę, diuidunt angulos figurę bifariam. Ostensum enim fuit rectam F G secare angulum figurę H G N bifariam.

CO-

COROLLARIVM II.

Patet, quod, si omnes anguli ad centrum circuli, vel eius peripheria distributa fuerit in quotlibet partes ęquales ternario plures, & rectę puncta diuisionum coniungentes, intra circulum ducantur, nec non rectę circulum tangentes parallelę rectis coniunctis producantur: descripta erunt duo polygona regularia parium laterum similia inter se, alterum circunscriptum, alterum verò circulo inscriptum. Eritque circunscriptum ad inscriptum, vt quadratum radij vnius ad quadratum radij alterius: & vt quadratum rectę lineę ex centro, vsque ad angulum circunscriptę figurę ad quadratum radij circuli. Ductę enim fuerunt in hac propositione tangentes G H, H K, &c. parallelę lateribus A B, B C, &c. & ostensa fuit figura G H M ęquiangula figurę A B C D, & latera circa angulos ęquales in eadem proportione ęqualitatis; & rursus latus H G ad A B fuit, vt G F ad circuli radium F A, vel vt radius O F ad radium F P. Et propterea s super his lateribus proporttionalibus erunt figurę similes, & similiter positę G H K M ad A B C D, in eadem ratione, quam habet quadratum ex F G ad quadratum radij F A, vel vt quadratum ex O F ad quadratum ex F P. Vocentur autem huiusmodi figurę (breuitatis gratia) circulo adscriptę.

s prop. 18. lib. 4.

SCHOLIVM.

Duo polygona regularia parium laterum similia sunt inter se.

Habeant duo polygona regularia A B D, & G H N ęquales multitudines laterum. Dico polygona esse inter se similia. Quia t omnes anguli interni, tam polygoni A B D, quàm polygoni G H N sunt aequales tot binis rectis (demptis quatuor) quot sunt eius latera: Suntque ex hypothesi tot latera in vno, quot in altero polygono. Ergo u omnes anguli polygoni A B D, simul sumpti: ęquales sunt omnibus angulis polygoni G H N, simul sumptis: summę verò praedictorum angulorum, in vnoquoque polygono regulari distributae sunt in angulos aequales (cùm regulare polygonum sit ęquiangulum): Ergo quilibet angulus A polygoni A B D ęqualis est cuilibet angulo G polygoni G H N. Cumque circa praedictos angulos ęquales latera habeant eandem rationem ęqualitatis (cùm regulare polygonum sit ęquilaterum). Ergo x polygona regularia A B D, G H N similia inter se sunt.

t Schol. 2. prop. 8. l. 1.

u coroll. 9. prop. 18 l. 1

x prop. 16. lib. 4.

PRO-

PROPOS. V. PROBL. V.

Eucl 9.14. IV.

Circa quodlibet polygonum regulare circulum describere.

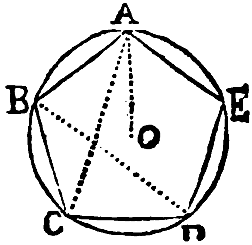
Sit quodlibet polygonum regulare A B D. Debet circa ipsum describi circulus. Ducta recta A C, circa triangulum A B C, describatur a circulus, cuius centrum O; & coniungatur recta linea B D. Et quia in duobus triangulis A B C, & D C B duo latera A B, & D C ęqualia sunt, cùm sint latera regularis figuræ, & latus B C est commune, atque anguli A B C & D C B ęquales sunt inter se: Ergo b anguli B A C, & C D B æquales sunt inter se, & insistunt super eadem recta B C, ad easdem partes constituti: Ergo c circunferentia circuli, cuius centrum O, per tria puncta A, B & C ducta, transibit quoque per quartum punctum D. Eadem ratione peripheria circuli, cuius centrum O, quę transit per tria puncta B, C & D, transibit quoq; per punctum E, & sic per reliqua. Quare d circulus, radio O A descriptus, circunscriptus erit polygono A B C D E. Quod erat faciendum.

a Sch prop. 1. lib. 2.

b prop. 4. lib. 1.

c prop. 14. lib. 2.

d Def 2. huius.



COROLLARIVM.

Patet idem punctum O esse centrum circuli, & polygoni regularis, in eo inscripti, punctum intermedium ęquè remotum ab omnibus angulis eius.

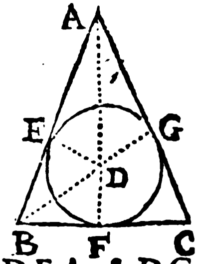
PROPOS. VI. PROBL. VI.

Eucl. 4. 8. 13 IV.

Intra triangulum, & intra quodlibet polygonum regulare circulum inscribere.

Sit quodlibet triangulum, aut polygonum regulare A BC. Debet inscribi circulus in his figuris. Et primò in triangulo secentur a anguli A, & B bifariam à rectis A D, & B D, quæ con-

a prop. 8. l. 1



b prop. 11. lib. 1.

concurrent intra triangulum, vt in D, b à quo cadant perpendiculares D E, D F, & D G super trianguli latera. Quoniam in triangulis D B F, & D B E duo anguli ad B ęquales facti sunt, & duo anguli ad E & F sunt recti ęquales quoque, atque latus D B est commune, &

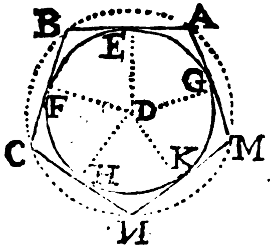
c prop. 25. lib. 1.

oppositum rectis angulis: Ergo c D F æqualis est ipsi D E. Eadem ratione in triangulis D E A, & D G A, erunt latera D G, & D E ęqualia inter se. Quare ęquales erunt tres perpendiculares D F, D E, & D G inter se, quę sunt distantię puncti D à lateribus trianguli.

d prop. 5. huius.

e prop. 10. lib. 2.

Secundò in polygono regulari circumscribatur d circulus, cuius centrum D. Et quia in circulo A B N rectæ lineæ applicatę A B, B C, C N, &c. sunt inter se ęquales: ergo e ęqualiter distant à centro D; ideoque ductę perpendiculares D G, D E, D F, &c. ęquales erunt inter se, vt æquales erant in triangulo.



f prop. 23. lib. 2.

Et centro D radio D E, descripto circulo E F G, transibit necessariò per puncta F, G, &c. & continget f latera figurarum in punctis E, F, G, &c. eo quod radij D E, D F, D G, &c. perpendiculares sunt ad latera A B, B C, &c.

g Def. 6. huius.

Quare g circulus E F G inscriptus est figuræ A B C. Quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Patet idem punctum D esse centrum circuli, atque punctum æquè remotum à lateribus polygoni regularis circulo inscripti.

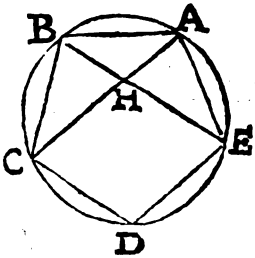
PROPOS. VII. THEOR. I.

Eucl 8. XIII.

In pentagono regulari duæ rectę lineæ subtendentes angulos figurę se mutuò secant extrema, & media ratione; & maiora illarum segmenta ęqualia erunt pentagoni lateri.

Sit pentagonum regulare A B D, & duę rectæ lineæ A C, B E subtendant angulos figurę A B C & B A E, & se secent in H. Dico tam C A, quàm E B secari in H extrema, & media ratione, & earum maiora segmenta C H, & E H æqualia esse cuili-

cuilibet lateri pentagoni B A. Describatur a circulus A B D circa pentagonum. Quoniam b in quadrilatero B E D C, circulo inscripto duo oppositi anguli C B E, & D, simul sumpti, ęquales sunt duobus rectis: estque c angulus B C D ęqualis angulo D in regulari pentagono: Ergo duo anguli E B C, & B C D, simul sumpti, ęquales sunt duobus rectis; ideoque d duę rectę B E, & C D sunt inter se parallelę. Eadem ratione C A, & D E parallelę sunt. Quare e C H E D parallelogrammum erit, in quo latera opposita C H, & D E ęqualia erunt, & sic H E ipsi C D, vel cuilibet B A ęquale erit. Postea quia anguli B A C, & A E B, insistunt peripherijs æqualibus B C, & A B: ergo f anguli B A C, & A E B ęquales sunt; estque angulus A B E communis: Ergo g triangula E B A, & A B H similia sunt; ideoque E B ad B A erit, vt A B ad B H: fuit autem ostensa H E ęqualis ipsi B A. Ergo h tota B E ad H E est, vt H E ad H B; ideoque i B E secta est in H extrema, & media ratione, cuius maius segmentum H E ęquale est ipsi B A lateri pentagoni. idem concludetur de subtensa C A. Quare patet propositum.

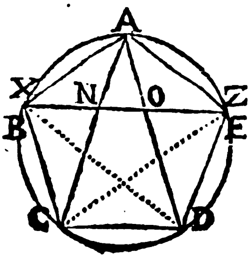


a prop. 5. huius.
b prop. 15. lib. 2.
c prop. 3. huius.
d prop. 16. lib. 1.
e prop. 26. lib. 1.
f corell. 1. prop. 17. lib. 2.
g corell. 1. prop. 4. lib. 4.
h prop. 3. & 7. l. 3.
i prop. 25. lib. 4.

S C H O L I V M.

Si in pentagono tres rectę, angulos subtendentes, ęquales fuerint, & intermedia secuerit collaterales extrema, & media ratione, quarum maiora segmenta ad easdem partes æqualia sint basi, atque vtrinque relinquat portiones ęquales: erit tale pentagonum regulare.

In pentagono A B C D E sint tres subtensę C A, B E, A D æquales, & subtensa B E secet A C, A D in N, O extrema & media ratione, vt maiora segmenta C N, D O ęqualia sint C D, atque E O, B N sint ęquales. Dico pentagonum A B D regulare esse. Quoniam in triangulo A C D a Isosceleio propter ęqualitatem laterum A C, A D est basis C D ęqualis maiori segmento C N lateris A C extrema, & media ratione diuisi. Ergo, vt in propositione prima huius ostensum est, erit angulus A C D duplus anguli verticalis C A D. Eadem ratione angulus A D C duplus erit anguli C A D. Circunscribatur b iam circulus triangulo A C D, & c secentur anguli A C D, A D C bifariam à rectis C Z, D X, quæ secent



a prop. 6. lib. 1.
b Sch. prop. 1. l. 2.
c prop. 8. lib. 1.

 peri-

peripheria in punctis Z, X; & coniungantur rectæ A X, X C, D Z, Z A, & X Z, patet angulos C A D, C D X, X D A, A C Z, Z C D ad peripheriam circuli æquales esse, & d corol. 1 prop. 16. l. 2. *ideo d peripheriæ abscissæ, & e rectæ subtensæ æquales erunt: vnde f pentagonum A X C D Z regulare erit, g & subtensa X Z æqualis erit ipsis A C, A D, ideoque ipsi B E; h secabitque subtensas A C, A D, & vicissim ab eis secabitur extrema, & media ratione, & maiora segmenta æqualia erunt ipsi C D, & inter se; & i ideo minora segmenta X N, O Z æqualia erunt; sed ex hypothesi B E similiter secabat easdem subtensas A C, A D in N, O. Ergo X Z transit per puncta N, O; & propterea ablata portione N O communiter ab æqualibus B E, X Z erunt duæ residuæ B N, O E æquales duabus residuis X N, O Z simul sumptis, & B N semissis priorum æqualis erit X N semissi posteriorum: quare punctum B cadet in X. Et eadem ratione punctum E cadet in Z: vnde figuræ A B D E, & A X D Z sibi mutuò congruent; & ideo figura A B C D E regularis quoque erit. Quod erat, &c.*

e cor. prop. 18 l. 2. f cor. 4. prop. 3. huius. g cor. prop. 18. lib. 2. h prop. 7. huius. i prop. 26. l. 4 & cor. 1. prop. 16. l. 3

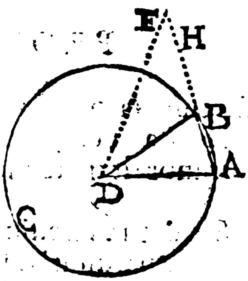
Eucl. 9. XIII.

PROPOS. VIII. THEOR. II.

Si figurarum regularium eodem circulo inscriptarum lateri hexagoni addatur, vel tollatur, latus decagoni: efficietur recta linea extrema, & media ratione secta, maiusque compositę segmentum erit hexagoni latus, & maius segmentum diminutę erit latus decagoni.

In circulo A B C sit recta linea A B latus decagoni regularis, & ei in directum addatur B E ęqualis radio eiusdem circuli, & proinde a ęqualis lateri hexagoni regularis eidem circulo incriptibilis. Dico rectam A E secari in B extrema, & media ratione, cuius maius segmentum erit E B. Ducantur rectę ex centro D A, D B, & D E. Quoniam b angulus ad centrum A D B, cui subtenditur A B latus decagoni regularis, decima pars est quatuor rectorum, siue quinta pars duorum rectorum; suntque c tres anguli trianguli isoscelij A D B ęquales duobus rectis: Ergo quilibet angulus D B A ad basim ęqualis est duabus quintis duorum rectorum; & propterea angulus D B A duplus est anguli A D B. sed d angulus A B D externus in triangulo D B E ęqualis est duobus internis, & oppositis angulis B D E, & E (qui e sunt ęquales, cùm subtensa latera E B, D B ęqualia sint, facta enim fuit E B ęqualis radio circuli). Ergo angulus A B D duplus est anguli E, vti prius duplus erat anguli A D B & propterea anguli E, & B D A æquales inter se sunt,

a Scb. prop. 3. huius. b prop. 3. huius. c prop. 18. lib. 1. d prop. 18. lib 1. e prop. 6. l. 1



sunt, & est angulus A communis: f Ergo duo triangula E D A, & D B A similia sunt, ideoque E A ad A D est, vt D A ad A B; estque E B ęqualis radio D A: Ergo sicut prius A D, ita nunc E B media proportionalis erit inter E A, & B A; propptereaque g E A secta erit in B extrema, & media ratione, cuius maius segmentum erit E B latus hexagoni, & B A minus segmentum latus decagoni regularium in eodem circulo inscriptorum.

f cor. 1. prop. 4. lib. 4.

g prop. 25. lib. 4.

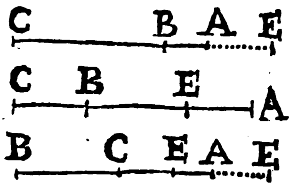
Secundò ex latere hexagoni E B, siue ex radio circuli auferatur recta B H ęqualis ipsi B A lateri decagoni eiusdem circuli. Dico E B secari in H extrema, & media ratione, cuius maius segmentum erit B H latus decagoni. Nam ex E B maiori segmento ipsius E A, sectæ extrema, & media ratione, tollitur B H segmento minori B A ęqualis. Ergo h ipsa B E secatur quoque extrema, & media ratione, cuius segmentum maius erit B H. Quod erat ostendendum.

h cor. prop. 25. l. 4.

SCHOLIVM.

Si lineę rectæ diuisę extrema, & media ratione fuerit maius segmentum latus hexagoni, erit reliquum segmentum latus decagoni regularium, ab eodem circulo comprehensorum; & si minus segmentum fuerit latus decagoni, erit reliquum latus hexagoni: Et si maius segmentum fuerit latus decagoni, erit tota latus hexagoni.

Sit recta C A B secta extrema, & media ratione. Et primò C B segmentum maius sit latus hexagoni: Secundò C B segmentum minus sit latus decagoni: Tertiò B C segmentum maius sit latus decagoni. Dicò in primo casu B A esse latus decagoni; in secundo verò, & tertio B A erit latus hexagoni. Si hoc verum non est sit B E latus decagoni in primo casu, & latus hexagoni in secundo, & tertio casu: erit recta i C B E secta extrema, & media ratione; sed ex hypothesi C B A secatur extrema, & media ratione: k Ergo ambæ secantur in eadem ratione: ideoque C B ad B E erit, vt C B ad B A. Quare l B E, & B A ęquales sunt, pars & totum; quod est impossibile. Quare patet propositum.



i prop. 8. huius.

k prop. 26. lib. 4.

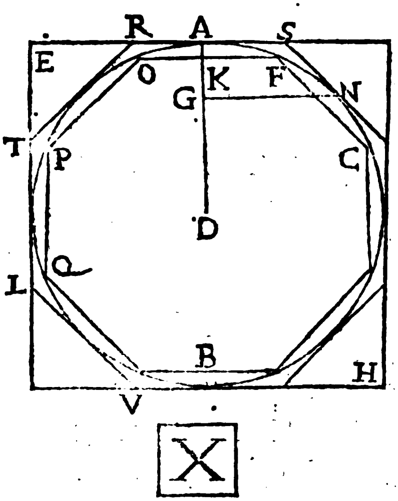
l prop. 4. l. 3

PROPOS. IX. PROBL. VII.

Archim. prop. 2. l. 1. de sphær. & cylindro.

Circulo dato adſcribere duas figuras regulares inter ſe ſimiles, ita vt circunſcriptę, vel inſcriptæ differentia à circulo minor ſit quacunque magnitudine propoſita.

Sit datus circulus A B C, & quęlibet ſuperficies X cuiuſcunque paruitatis. Debent circulo adſcribi imperatę figurę. Circunſcribatur *a* circulo A B C quadratum E H, & ad contactum A coniungatur radius D A; & vt factum *b* quadratum ęquale ſpatio X vna cum quadrato E H eſt ad quadratum E H, ita *c* fiat quadratum radij A D ad quadratum rectæ lineę D G, & ducatur *d* à puncto G recta G N perpendicularis ad diametrum, ſecans peripheriam in N, ſeceturque *e* ſemicirculi peripheria A C B bifariam, & rurſus bifariam, & ſic ſemper, quouſque *f* arcus A F minor ſit, quàm A N; Et ſecetur *g* arcus A O ęqualis A F, coniunganturque recta F O, quę *h* ſecabitur à radio A D in K bifariam, & perpendiculariter. Et quia tres rectę S A, F K, N G perpendiculares ſunt ad radium D A, erunt *i* inter ſe parallelę: cadit verò punctum F inter extremas parallelas A S, G N, eo quod arcus N A maior eſt, quã F A: Ergo punctum K cadit inter puncta A, & G; & proptęrea recta D K maior erit, quàm D G; & ſicut A F metitur ſemiperipheriam A F B, ita *k* O F duplum ipſius A F metietur totam circuli peripheriam. Diſtribuatur iam tota circuli peripheria in partes C F, F O, O P, P Q, &c. inter ſe ęquales; & coniungantur rectæ lineę C F, F O, O P, P Q, &c. atque *l* ijs parallelę ducantur tangentes S R, R S, T L, &c. quouſque compleantur figurę *m* regulares ſimiles, circunſcripta S R T V, inſcripta verò C F O P B. Patet figuram S R T V ad figuram C F O P B eſſe, vt quadratum radij illius D A ad quadratum radij D K huius;



a prop. 4. huius.
b prop. 21. l. 4
c cor. 1. prop. 18. l. 4.
d prop. 10. l. 1.
e cor. prop. 19. l. 2.
f ſch. prop. 27. l. 2.
g cor. 4. prop. 16. l. 2.
h prop. 19. l. 2.
i prop. 14. l. 1.
k Ax. 1. l. 3.
l cor. prop. 16. l. 1.
m coroll. 2. Prop. 4. huius.

huius; sed *n* idem quadratum ex D A ad quadratum ex maiori D K minorem rationem habet, quàm ad quadratum ex minori D G, & vt quadratum ex D A ad quadratum ex D G, ita erat summa spatij X, & quadrati E H ad quadratum E H: Ergo *o* figura S R T V ad figuram C F O P B minorem proportionem habet, quàm summa spatij X & quadrati E H ad quadratum E H; Et diuidendo *p* differentia figurarum S R T V, & C F O B, ad figuram C F O B minorem proportionem habet, quàm spatium X habet ad quadratum E H; habet *q* verò idem spatium X ad inscriptam figuram C F O B maiorem proportionem, quàm ad circunscriptum quadratum E H, (cùm hoc maius sit illo): Ergo differentia figurarum S R T V, & C F O B ad figuram C F O B minorem proportionem habet, quàm spatium X ad eandem figuram inscriptam C F O B; & propterea *r* differentia figurarum S R T V, & C F O B minor erit spatio X. Cùmque *s* circulus A B C maior sit figura inscripta C F O B, & minor figura circunscripta S R T V: erit excessus figurę circunscriptę supra circulum, vel defectus figurę inscriptę ab eodem circulo, minor, quàm sit differentia figurę circunscriptę S R T V, & inscriptę C F O B; Sed differentia harum figurarum adscriptarum minor ostensa est magnitudine X. Igitur differentia circunscriptę figurę S R T V, vel inscriptę C F O B ab eodem circulo A B C, minor est quacunque magnitudine proposita X. Quod erat faciendum.

n prop. 2. l. 3.
o prop. 6. l. 3.
p cor prop. 14. l. 3.
q prop. 2. l. 3.
r prop. 5. l. 3
s Axio. huius.

PROPOS. X. THEOR. III.

Eucl. 1. XII.

Quę in circulis polygona similia, siue circunscripta inter se, siue inscripta inter se, sunt in duplicata ratione radiorum.

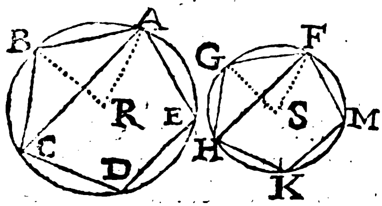
Sint duo polygona similia A B D, & F G K inscripta, siue circunscripta circulis, quorum centra R, & S. Dico inscripta inter se, siuè circunscripta inter se habere proportionem duplicatam radiorum eorundem circulorum. Et primò in inscriptis ducantur rectę A C, H F subtendentes angulos æquales B & G, & coniungantur radij R A, R B, S F, & S G. Quoniam circa angulos æquales B, & G latera A B ad B C, & F G ad G H sunt proportionalia (propter similitudinem figurarum. Ergo *a* triangula A B C, & F G H similia sunt, ideoque anguli A C B, & F H G ęquales sunt; sed *b* anguli ad centrum

a prop. 6. lib. 4.
b prop. 13. lib. 2.

R, &

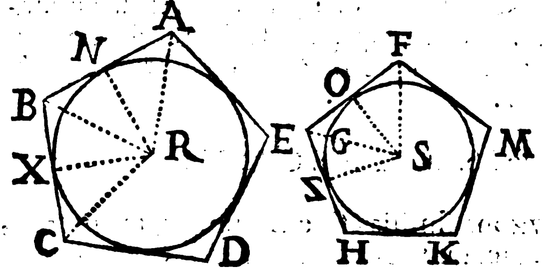
R, & S dupli sunt angulorum ad peripheriam A C B, & F H G: Ergo anguli R, & S ęquales sunt, & circa eos latera, seu radij circuli sunt in eadem ratione ęqualitatis. Ergo *c* triangula A B R, & F G S similia sunt; propterea que, *d* vt A B ad G F, ita erit radius A R ad F S: & *e* eorum duplicatę proportiones eędem quoque erunt: habet *f* verò polygonum A B D ad polygonum F G K duplicatam rationem lateris A B ad eius homologum F G. Ergo *g* proportio polygoni A B D ad polygonum F G K duplicata est proportionis radij A R ad radium F S.

c prop. 6. l. 4
d cor. 2. p. 4. l.
e cor. 3. prop. 19 l. 3.
f prop. 17. lib. 4.
g prop. 7. l. 3



Secundo in figuris circunscriptis ab angulis ęqualibus A, & F, atque ab ęqualibus B, & G ad centra iungantur rectę A R, F S, B R, G S, & ad contactus N, O, X, Z radij coniungantur N R, O S, X R, Z S. Quoniam *h* duę B N, B X ęquales sunt; cum sint latera ęqualium quadratorum ex tangentibus ab eodem puncto ductis, & duo radij N R, X R ęquales quoque, atque R B communis: Ergo *i* in duobus triangulis B N R, & B X R sunt duo anguli R B N, & R B X ęquales, ideoque angulus R B N semissis erit anguli A B C. Eadē ratione angulus R A N semissis erit anguli B A E: pariterque in reliqua figura angulus S G O semissis anguli polygoni F G H; nec non angulus S F O semissis erit anguli G F M. Et quoniam duo anguli R A N, & S F O ęquales sunt, cùm sint semisses angulorum ęqualium B A E, & G F M; & *k* sunt duo anguli recti ad N, & O ęquales. Ergo *l* duo triangula A N R, & F O S similia sunt, ideoque *m* A N ad F O erit, vt N R ad O S. Eadem ratione duo triangula B N R, & G O S similia erunt, ideoque *n* B N ad G O erit, vt eadem N R ad eandem O S: Quapropter *o* duę A N, & N B simul ad duas F O, & O G, idest latus A B ad F G: erit vt radius N R ad radium O S, *p* & eorum duplicatę proportiones eędem quoque erunt. Quare, vt prius, polygonum A B D ad polygonum F G K habebit pro-

h coroll. 3. prop 22. l. 4
i prop 7. l. 1



k prop. 23. l. 2.
l cor 1 prop. 4 l 4.
m coroll 2 prop. 4. l. 4
n coroll 2. prop. 4. l. 4.
o prop. 15. l. 3.
p coroll. 3. prop. 19 l. 3.

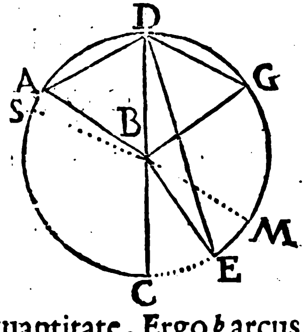
proportionem duplicatam eius, quam habet radius N R ad radium O S. Quod erat propositum..

PROPOS. XI. THEOR. IV.

Eucl. 33. VI.

In eodem, vel ęqualibus circulis anguli ad centrum; siue ad peripherias, & sectores eandem rationem habent cum peripherijs, quibus insistunt.

In eodem, vel in circulis ęqualibus sint primò duo anguli ad centrum A B C, & E B G, insistentes peripherijs A C, & E G. Dico eandem rationem habere arcum A C ad E G, quam habet angulus A B C ad angulum E B G. Secetur [a] arcus E G bifariam, & rursus bifariam, & sic successiuè subdiuidantur arcus intercepti [b] quousque perueniatur ad arcum E M, qui minor sit quocunque arcu assignabili; Et [c] in arcu C A sumatur arcus C S multiplex ipsius E M, ita vt eius excessus, vel defectus S A ab ipsa A C sit ęqualis, aut minor, quàm EM, & ideo minor quacunque data magnitudine; Et coniungantur radij B M, B S. Quoniam [d] quoties arcus E M metitur arcum E G, toties angulus E B M mensurat angulum E B G; pariterque quoties arcus E M mensurat arcum C S, toties angulus E B M mensurat angulum S B C: Igitur [e] arcus S C eædē partes erit arcus E G, quemadmodū angulus S B C est partes anguli E B G. Et [f] quoniam, si arcus S C ęqualis est ipsi A C, necessariò angulus S B C ęqualis est angulo A B C (Et tunc patet propositum). At si [g] arcus S C maior est, quam A C, necessariò angulus S B C, maiori peripherię insistens, erit maior, quàm angulus A B C; Et si arcus S C minor fuerit, quàm A C, erit angulus S B C minor angulo A B C. Quare sunt quatuor magnitudines arcus A C prima, at secunda est arcus E G; angulus A B C est tertia, & angulus E B G est quarta; & insuper duę aliæ magnitudines, scilicet arcus S C, & angulus S BC sunt eędem partes consequentium, idest ad eas habent eandem proportionem; & sunt vnà maiores, aut vnà minores antecedentibus, ita vt excessus, aut defectus à prima minor sit quacunque assignabili quantitate. Ergo [h] arcus



a cor. prop. 19. l. 2.
b schol. prop 2. l. 2.
c coroll. 4. prop. 16. l. 2.
d coroll. 4. prop. 17. l. 2.
e def. 6. l. 3.
f coroll. 1. prop. 17. l. 2.
g coroll 2. prop. 17. l. 2.
h prop. 24. l. 3.

A C

A C ad arcum E G est, vt angulus A B C ad angulum E B G; quod erat ostendendum.

Secundò sint ad peripheriam duo anguli A D C, & E D G insistentes peripherijs A C, & E G eiusdem, vel ęqualium circulorum. Dico angulum A D C ad angulum E D G esse, vt arcus A C est ad arcum E G. Fiant anguli ad centrum A B C,

i prop. 13. lib. 2 & E B G. Quia i angulus A D C semissis est anguli ad centrum A B C, & angulus E D G semissis est anguli E B G. Ergo, k

k prop. 11. lib. 3. vt angulus A B C ad angulum E B G, ita est angulus A D C ad angulum E D G; sed, vt angulus A B C ad angulum E B G, ita est peripheria A C ad peripheriam E G (ex prima parte

l prop. 7. lib. 3. huius) Ergo, l vt angulus A D C ad angulum E D G, ita est peripheria A C ad perpheriam E G. quod erat secundum.

Tertiò in eodē, vel ęqualibus circulis dico sectorem A B C ad sectorem E B G habere eandem rationem, quam arcus A C, quę est basis illius, ad arcum E G, quę est basis alterius sectoris. facta superiori constructione, ea omnia, quę dicta sunt

m Def 6. lib. 3. de angulis ad centrum intelligantur dicta de sectoribus. Quapropter m sector S B C erit eędē partes sectoris E B G, quemadmodum angulus S B C partes est anguli E B G, seu arcus S

n coroll 2. prop. 17 l. 2 C est partes arcus E G. Insuper n arcus S C arcu A C, atq; sector S B C sectore A B E vnà maiores, aut vnà minores erunt. Quare sunt quatuor magnitudines arcus A C, arcus E G, sector A B C, & sector E B G, atque duę alię scilicet arcus S C, & sector S B C sunt eędem partes consequentium, scilicet ipsius arcus E G, & sectoris E B G, quę denominantur à numero ex continua bipartitione consequentium orto, & sunt vnà excedentes, vel vnà deficientes à prima, & tertia, scilicet ab arcu A C, & à sectore A B C. estque excessus ipsius S C à prima

o prop. 24. lib. 3. A C, vel defectus minor quolibet dato. Ergo o arcus A C ad arcum E G eandem rationem habet, quam sector A B C ad sectorem E B G. Quod erat postremo loco ostendendum.

COROLLARIVM I.

p prop. 7. lib. 3. Patet in eodem, vel ęqualibus circulis sectores esse inter se, vt sunt anguli ad centrum, sectores continentes. p Nam ambę proportiones eędem sunt, proportioni, quam habent arcus, quibus insistunt.

CO-

COROLLARIVM II.

Manifeſtum quoque eſt, vt ſunt quatuor recti ad angulum in cētro circuli, ita eſſe totam circuli peripheriam ad arcum illi angulo ſubtenſum; & ita eſſe circulum ad ſectorem ab illo angulo contentum. Nam, vt angulus rectus in centro ad quemlibet angulum in centro, *q* ita eſt quarta pars peripheriç totius ad arcum ſubtēſum reliquo angulo, & *r* ita eſt quoque ſector, qui quarta pars eſt circuli ad ſectorem à reliquo angulo contentum. Et *ſ* antecedentium quadrupla ad eadem conſequentia proportionalia erunt, ſcilicet tota circuli peripheria ad arcum reliquo angulo ſubtenſum, & circulus totus ad ſectorem à reliquo angulo contentum eandem rationem habebunt, quam quatuor recti ad angulum ad centrum.

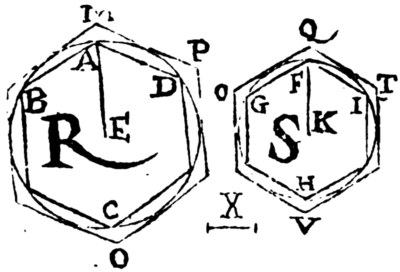
q *ex prima part. huius.*
r *tertia par. huius.*
ſ *coroll. 1. prop. 19. l. 5*

PROPOS. XII. THEOR. V.

Eucl. 12. XII.

Circuli inter ſe ſunt in duplicata ratione radiorum.

Sint duo circuli R & S, eorumque radij A E & F K, quorum tertius proportionalis ſit X. Dico circulum R ad circulum S habere duplicatam proportionē eius, quam habet radius A E ad radium F K, ſeu eandem, quam A E habet ad X. Adſcribantur *a* circulo R duo polygona regularia ſimilia A B C D, & M N O P, ita vt exceſſus figurç M N O P circūſcriptç ſupra circulū, & defectus figurç A B C D inſcriptç ab eodem circulo R minor ſit quacunque magnitudine propoſita; Poſtea *b* adſcribantur circulo S duç figurç F G H I, & Q O V T ſimiles ipſis figuris A B C D, & M N O P: erunt *c* ſimiles figurç circunſcriptç M N O P, & Q O V T inter ſe, nec non ſimiles figurç inſcriptæ A B C D, & F G H I inter ſe in duplicata ratione radij E A ad radium K F, ſeu *d* vt A E ad X. Et quoniam circulus S minor eſt polygono T O V ei circunſcripto. Ergo polygo-



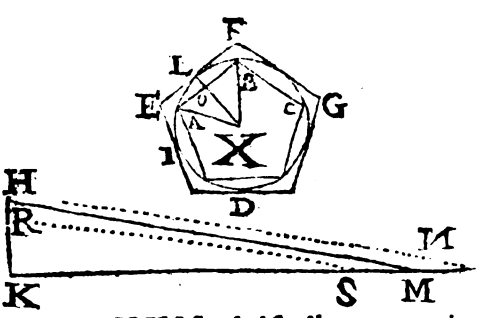
a *prop. 9. huius.*
b *coroll. 2. prop 4. huius*
c *prop. 10. huius.*
d *prop. 7. lib. 3.*

e prop. 2. l. 3. num e M N O ad circulum S maiorem proportionem habet, quàm ad polygonum T O V; habet verò polygonum M N O
f prop. 6. l. 3. ad polygonum Q O V eandem proportionem, quam A E ad X. Ergo f polygonum M N O, (idest quantitas excedens circulum R excessu minore quocunque dato) maiorem proportionem habet ad circulum S, quàm A E ad X. Similiter quia circulus S maior est polygono ei inscripto F G H; Ergo
g prop. 2. lib. 3. g polygonum A B C ad circulum S minorem proportionem habet, quàm ad polygonum F G H: Habet autem polygonum A B C ad polygonum F G H proportionem eandem,
h prop. 6. lib. 3. quam A E ad X. Ergo h polygonum inscriptum A B C (minor circulo R defectu minori quocunque dato) minorem proportionem habet ad circulum S, quàm A E ad X; ideo-
i schol. prop. 24. l. 3. que i circulus R ad circulum S eandem duplicatam proportionem habebit radij A E ad radium F K. Quod erat ostendendum.

PROPOS. XIII. THEOR. VI.

Archim. de circuli mensura prop. 1

Circulus æqualis est triangulo, cuius basis æqualis est peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio circuli.



Sit circulus X, cuius radius X B, & triãgulum H K M, cuius basis K M æqualis sit integræ peripheriẹ A B D, & altitudo, seu perpendicularis H K æqualis sit radio circuli X B. Dico circulum æqualem esse

a prop. 9. huius. triangulo H K M. Adscribantur a circulo X duo polygona regularia, & similia E F G extra, & A B C intra ipsum, ita vt differentia eorum à circulo minor sit quacunque magnitu-
b prop. 11. lib. 1. dine proposita. Postea b ducta X O perpendiculari à centro ad latus figuræ inscriptæ, & coniungantur rectæ X F, X E &
c prop. 3. lib. 1. X A, & c fiat K N ẹqualis perimetro circunscripti polygoni E F G I, & k S ẹqualis perimetro figurẹ A B C D, & R k æ-
d coroll. 3. prop. 3. huius. qualis perpendiculari X O, & coniungantur rectæ H N, & R S. Quoniam d polygonum regulare E F G I diuiditur in tot

trian

triangula iſoſcelia æqualia inter ſe, verticem in centro X habentia, quot ſunt eius latera: ſunt verò dicta triangula æquè alta, quia eorum altitudines ſunt radij æquales ipſi X L, ſeu H K. Ergo e polygonum E F G I eſt tam multiplex trianguli E X F, quàm perimeter eiuſdem polygoni eſt multiplex vnius lateris E F; ſed K N eſt æqualis perimetro E F G I dicti polygoni. Ergo, f vt K N ad E F, ita eſt polygonum E F G I ad triangulum E X F; ſed g triangulum K H N ad triangulum E F X (cùm habeant æquales altitudines, ſcilicet perpendiculares X L, & H k) eſt, vt baſis k N ad baſim E F. Ergo h polygonum E F G I, & triangulum H k N eandem rationem habent ad triangulum E X F, ideoque i illa æqualia ſunt inter ſe. Deinde k quia rectæ lineæ inflexæ I E L, extra circulum cadentes, maiores ſunt, quàm arcus I A L: Ergo perimeter figuræ F G I maior erit, quàm tota peripheria circuli X comprehenſi; ſed k N æqualis poſita fuit perimetro E F G I, & K M equalis peripherię circuli X. Ergo k N maior eſt, quàm k M. Sed triangula H k N, & H k M ſunt æquè alta. Ergo l triangulum H k N maius erit triangulo H k M, ſicuti polygonum E F G I maius eſt circulo X. Similiter oſtendetur polygonum A B C D ęquale triangulo R k S, m eo quod baſis K S ęqualis ponitur perimetro dicti polygoni, & altitudines R k, & X O ſunt etiam æquales; eſtque n perimeter polygoni A B C D inſcripti, ſeu ei æqualis k S minor peripheria circuli X, ſeu ei æquali k M, & altitudo R k, ſeu X O minor altitudine H k, ſeu radio X L. Ergo triangulum R k S minus eſt triangulo H k M, ſicuti polygonum A B C D minus eſt circulo X. Iam cùm polygonum F E G æquale ſit triangulo H k N, & triangulum H k N maius ſit triangulo H k M. Ergo circunſcripta figura F E G (quæ eſt maior circulo X exceſſu minori quocunque dato) eſt quoque maior triangulo H k M. Similiter cum figura A B D ęqualis ſit triangulo R k S, & triangulum R k S minus ſit triangulo H k M. Ergo inſcripta figura A B D (quæ minor eſt circulo X defectu minori quocunque dato) eſt quoque minor triangulo H k M. Et propterea o circulus X æqualis eſt triangulo H k M. Quod erat oſtendendum.

e d. f 5. l 3.
f prop. 3. l. 3
g prop 1. l. 4
h prop. 7. l. 3
i prop. 4. l. 3
k Ax. huius
l coroll. 1. prop 3 l. 1
m prop. 1. l. 4.
n Ax huius
o ſcho. prop. 24. l. 3

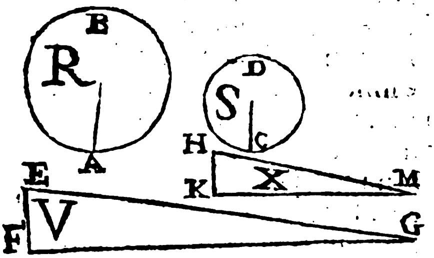
COROLLARIVM.

Patet triangulum, cuius baſis ęqualis ſit perimetro cuiuslibet figurę regularis, & altitudo æqualis ſit perpendiculari à centro figurę ad eius latus ductę ęquale esse eidem regulari figurę. Ostensum enim fuit triangulum H K N, habens dictas conditiones, æquale polygono regulari E F G I.

Pappi 11. lib. V.

PROPOS. XIV. THEOR. VII.

Peripherię inter se eandem rationem habent, quam radij eorundem circulorum.



Sint circuli R, & S, quorum radij R A, S C. Dico, vt radium R A ad radium S C, ita esse peripheriam A B A ad peripheriam C D C. Intelligatur triangulum V, cuius basis F G æqualis sit peripheriæ A B A, & altitudo E F æqualis sit radio R A. Similiter intelligatur triangulum X, cuius basis K M ęqualis sit peripherię C D C, & altitudo H K ęqualis sit radio S C. Patet *a* triangulum V ęqualem esse circulo R, atque triangulum X esse ęqualem circulo S, ideoque *b* triangulum V ad triangulum X erit, vt circulus R ad circulum S. Et quia circulus *c* R ad circulum S duplicatam rationem habet eius, quam habet radius R A ad radium S C: Ergo *d* triangulum V ad triangulum X duplicatam rationem habet eius, quam habet R A ad S C, seu *e* duplicatam rationem eius quam habet altitudo E F ad altitudinem H K (cùm R A, E F inter se, & S C, H K inter se ęquales factæ sint) cumque *f* proportio trianguli V ad triangulum X sit composita ex ratione lateris E F ad latus H K, & ex ratione basis F G ad basim K M, cùm sint circa angulos rectos F, K, ęquales: Ergo *g* proportio basis F G ad basim K M eadem est, quam E F habet ad H K, *h* seu quam R A habet ad S C. Estque F G ęqualis peripherię A B A, & K M ęqualis peripherię C D C. Ergo *i* peripheria A B A ad peripheriam C D C eandem rationem habet, quam radius R A ad radium S C. Vt erat propositum.

a prop. 13. huius
b prop. 3. lib. 3.
c prop. 12. huius
d prop. 7. lib. 3.
e prop 3. l. 3
f prop. 13. lib. 4.
g coroll. 3. prop. 19. l. 3
h prop. 3 l. 3
i prop. 7. l. 3

S C H O L I V M.

Si R, & S fuerint duo polygona regularia similia, constat, quod eorum perimetri

perimetri sunt proportionales rectis perpendicularibus ex centris ad eorum latera ductis. Hoc enim ex hac, & praecedenti demonstratione, atque eius corollario facilè concluditur.

PROPOS. XV. THEOR. VIII.

Pappi 13. lib. V.

Si duorum circulorum segmenta comprehendant angulos ęquales, erunt suis circulis proportionalia, & inter se rationem habebunt duplicatam subtensarum, vel radiorum, & eorum peripherię erunt inter se, vt subtensæ, vel vt Radij, Vocentur autem huiusmodi segmenta similia.

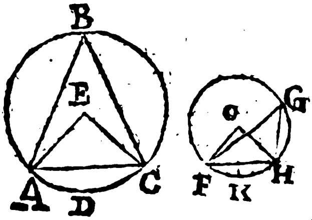
Sint duo circulorum segmenta A B C, & F G H, in quibus anguli B, & G sint æquales. Ductis radijs E A, E C, O F & O H. Dico segmentum A B C ad circulum A B C D esse, vt segmentum F G H ad circulum F G H K, & segmenta A B C, & F G H esse in duplicata ratione radiorum E A, & O F, vel subtensarum A C, & F H; & peripherias A B C, F G H esse, vt A C ad F H. Quoniam anguli B, & G ponuntur ęquales: Ergo *a* eorum dupli ad centrum E, & O æquales erunt, ideoque *b* quatuor recti ad angulos ęquales E, & O eandem rationem habebunt; sed, *c* vt quatuor recti ad angulum E, ita est circulus B A C ad sectorem A E C A, atque etiam, vt quatuor recti ad angulum O, ita est circulus G F H ad sectorem F O H F. Ergo, *d* vt circulus B A C ad sectorem A E C A ita erit circulus G F H ad sectorem F O H F: Et *e* permutando vt circulus A B D ad circulum F G K, ita erit sector A E C D ad sectorem F O H K: sed *f* circuli sunt inter se in duplicata ratione radiorum E A ad O F. Ergo *g* sectores in eadem duplicata ratione radij B A ad O F erunt. Sunt *h* verò triangula A E C, & F O H similia (cum sint isosceelia, & habeant verticales angulos E, & O ęquales): Ergo *i* triangulum E A C ad triangulum O F H duplicatam rationem habet eius, quam habet radius E A ad O F, vel subtensa A C ad F H. Quare, *k* vt sector E A D C ad sectorem O F K H, ita est triangulum E A C ad triangulum O F H: Vnde *l* residuum segmentum A C D ad segmentum F K H erit in eadem ratione sectorum, vel circulorum; & propterea *m* reliquum segmentum A B C ad segmentum F G H erit quoque in eadem ratione circuli A B D ad circulum F G H, *n* seu in duplicata proportione radij E A ad radium O F, vel subtensę A C ad subtensam F H.

a prop. 13. lib 2
b prop. 3. l. 3.
c coroll. 2. prop 11. huius.
d prop. 7. l. 3
e prop 12. lib. 3.
f prop 12. huius.
g prop. 7. l. 3
h prop. 4. l. 4
i prop. 15. l. 4.
k prop. 7. l. 3
l prop. 15. l. 5.
m prop 15. l. 5
n prop. 7. l. 3

Tan-

Tandem quoniam anguli ad centra A E C, & F O H ęquales sunt. Ergo *o* tota circuli peripheria A B C A est ad arcum A D C vt sunt quatuor recti ad angulum A E C, siue *p* ei æqualem angulum F O H: pariterque tota circuli peripheria F G H F ad arcum F K H est in eadem ratione, ac sunt quatuor recti ad angulum F O H. *q* Ergo vt circuli peripheria A B C A ad arcum A D C ita erit peripheria circuli F G H F ad arcum F K H. Et *r* permutando circuli peripheria A B D ad circuli peripheriam F G K est, vt arcus A D C ad arcum F K H, *s* ideoque residua peripheria A B C ad residuam F G H erit, vt tota ad totam; sed *t* tota peripheria A B D ad totam peripheriam F G K est, vt radius E A ad radium O F, siue vt subtensa A C ad subtensam F H (eo quod fuit A C ad F H, vt E A ad O F) Ergo *u* peripheria A B C ad peripheriam F G H est vt subtensa A C ad rectam subtensam F H, siue vt radius A E ad radium F O, vt fuit propositum. Vocentur autem segmenta A B C, & F G H capientia angulos ęquales B, & G inter se Similia.

o corol. 2. prop. 11 huius.
p prop. 3. l. 3
q prop. 7. l. 3
r prop. 12. l. 3.
s prop. 15. l. 3.
t prop. 14. huius.
u prop. 7. l. 3



COROLLARIVM.

Patet ex hac propositione, quod in circulis inęqualibus, vt sunt peripherię, quę sunt bases angulorum ęqualium ad centrum, siue ad peripheriam ita sunt circulorum integrę peripherię inter se. Insuper circuli sunt inter se, vt sectores ab æqualibus angulis comprehensi.

Ptol. Alm. l. 1. c. 9.

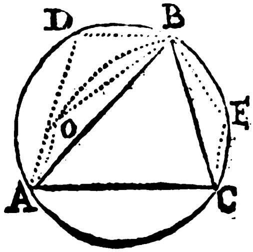
PROPOS. XVI. THEOR. IX.

In quolibet triangulo maior angulus ad minorem habet maiorem rationem, quàm latus maiori angulo oppositum ad latus oppositum angulo minori.

In triangulo A B C sit angulus C maior, & angulus A minor. Dico angulum C habere maiorem proportionem ad angulum A, quàm latus A B habet ad latus B C *a* Describatur circa triangulum circulus A B C, & secetur arcus B C vtcunque in E; Et *b* fiat arcus B D ęqualis B E; iunganturque rectę lineę

a sch. prop. 1 lib. 2.
b coroll. 4. prop. 16. l. 2

neç C E, B E, A D, B D. Et quia *c* arcus A D B, cui maior angulus C insistit, maior est, quàm B E C, & arcus B D, & B E sunt çquales: Ergo residuus arcus A D maior erit residuo arcu C E, & ideo *d* angulus A B D maior erit angulo C B E. Fiat *e* iã angulus A B O çqualis minori angulo E B C: Igitur angulus A B D maior erit angulo A B O, & ideo recta B O secabit rectam A D in puncto O, posito inter A, & D; & ideo punctum O erit intra circuli segmentum A D B. Describatur *f* iam per tria puncta A, O, & B circuli peripheria A O B, cadet illa intra segmentum A D B; Et quoniam in triangulis A O B, & C E B duo *g* anguli O A B, E C B çquales sunt (cùm peripherijs æqualibus B D, & B E insistant); pariterque duo anguli O B A, E B C sunt æquales: Ergo *h* reliqui anguli A O B, & C E B çquales erunt; propterea que *i* peripheria A O B ad peripheriam B E C erit, vt subtensa A B ad rectam lineam B C; est verò *k* arcus A D B maior, quàm arcus A O B, eo quod hic ab illo comprehenditur. Igitur *l* arcus A D B maiorem rationem habet ad eundem arcum B C, quàm arcus A O B; & ideo *m* arcus A D B ad arcum B E C maiorem rationem habebit, quam recta linea A B ad rectam B C. Et est *n* angulus B C A ad angulum B A C, vt arcus A D B ad arcum B E C. Ergo *o* angulus B C A maiorẽ rationem habet ad angulum B A C, quàm subtensa A B habeat ad rectam lineam subtensam B C. Quod erat ostendendum.



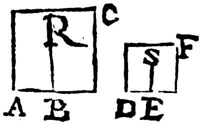
c cor. 2. prop. 16. l. 2.
d coroll. 2. prop. 17. l. 2.
e prop. 24. l. 1.
f schol. prop. 1. l. 2.
g coroll. 1. prop. 17. l. 2.
h coroll 10. prop. 18. l. 1.
i prop. 15. huius.
k Axio. 10. huius.
l prop. 2. l. 3
m prop. 6. l. 3.
n prop. 11. huius.
o prop. 6. lib. 3.

PROPOS. XVII. THEOR. X.

Inter duas figuras similes regulares, vel circulos, aut sectores similes, medium proportionale est triangulum, cuius altitudo çqualis est radio vnius, basis verò çqualis est perimetro alterius.

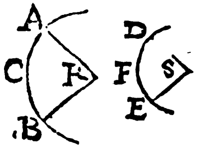
Sint duę quęlibet figurę regulares similes inter se, vel duo sectores similes, aut duo circuli R, & S, quorum radij R B, & S E; Sitq; triangulum rectangulũ G H M, cuius altitudo G H æqualis sit radio S E vnius figurę S, & basis H M çqualis sit B A C perimetro figurę R. Dico triangulum G H M medium proportionale esse inter figuras R, & S. *a* Fiat altitudo N H çqualis

a prop. 3. l. 1



b ex prop. 14. huius.

ęqualis radio R B, & basis HO ęqualis perimetro E D F, & iūgantur rectę N M, & G O. Quoniam in similibus figuris regularibus vel in sectoribus similibus, aut circulis R, & S, *b* vt radius R B ad radium S E, ita est perimeter A B C ad perimetrum D E F: estque N H ęqualis R B, & G H ęqualis S E; atque H M ęqualis perimetro A B C nec non H O æqualis D E F. *c* Ergo vt N H ad G H, ita est M H ad H O; sed *d* vt altitudo N H ad G H, ita est triangulū N H M ad G H M (cùm habeant eandem basim H M); &, *e* vt basis M H ad basim H O, seu *f* vt N H ad G H, ita est triangulum G HM ad triangulum G H O. Ergo triangulum G H M medium proportionale est inter duo triangula N H M, & G H O; est *g* verò triangulum rectangulum N H M æquale figuræ R, cùm contineatur à radio, & perimetro dictę figurę R: pariterque triangulum G H O est ęquale figuræ S: Igitur *h* vt figura R ad triangulum G H M, ita est triangulum G H M ad figuram S: & propterea triangulum G H M medium proportionale est inter figuras R, & S. Quod erat ostendendum.

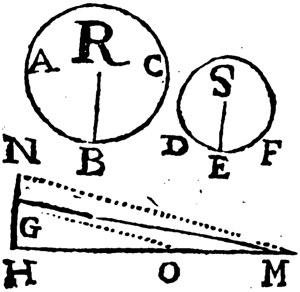


c prop. 3. l. 3

d cor. 2. prop. 1. l. 4.

e prop. 1. l. 4

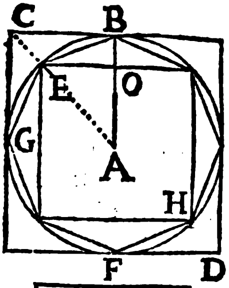
f prop 7. l. 3



g prop. 13. huius eius 9. coroll.

h prop. 3. l. 3

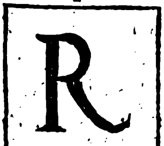
S C H O L I V M.



Hic demonstrari potest pulcherrimum theorema, cuius prima pars ex Snellio, secunda verò ex Galileo desumpta est. Inter figuras regulares circulo adscriptas, inscripta duplo laterum numero media proportionalis est. Et circulus medius proportionalis est inter duas regulares similes figuras, quarum vna sit circunscripta circulo; altera verò ei isoperimetra.

a coroll. 2. prop. 4. huius.

b prop 3. huius.



In circulo B G F primò a adscribantur duæ figuræ regulares similes C D, & E H, vt latera homologa sint parallela; & b sectis peripherijs intermedijs bifariam inscribatur figura regularis B E G F duplo laterum numero. Dico figuram regularem B E G F mediam proportionalem esse inter adscriptas figuras C D, & E H. Ducatur radius

radius A B, secans latera parallela adscriptarum figurarum perpendiculariter, & bifariam (vt in prop. 3. & 4. huius dictum est) in B, & O; coniungaturque recta A C, quæ, c vt dictum est, transibit per angulum E. Et quia d triangulum C E A ad triangulum æquè altum E B A est, vt basis C A ad basim E A; sed e polygonum C D ipsius trianguli C B A, atque polygonum B E G F ipsius trianguli E B A æquè multiplicia sunt. Igitur f polygonum C D ad B E G F est, vt C A ad radium circuli E A; sed g figura circunscripta C D ad inscriptam ei similem E H est, vt quadratum ex C A ad quadratum ex radio circuli E A; seu h in duplicata ratione lateris C A ad A E. Ergo i figura B E G F media proportionalis est inter figuras adscriptas C D, & E H.

c prop. 4. huius. d prop. 1. l. 4. e def 5 l. 3. f prop. 11. & 7. l. 3. g coroll. 2. prop. 4. huius. h prop. 17. lib. 4. i coroll. 3. prop. 19. l. 3

Secundò habeat polygonum regulare R perimetrum æqualem circunferentiæ circuli B G F, & sit R simile circunscripto polygono C D. Dico circulum B G F medium proportionalem esse inter figuras C D, & R. Quia figuræ regulares C D, & R sunt similes: erit k triangulũ rectangulũ à B A radio circuli, seu figuræ C D, & à perimetro figuræ R, seu circunferentia B G F ei æquali contentum, medium proportionale inter dictas figuras; sed l hoc triangulum æquale est circulo B G F. Ergo circulus B G F medius proportionalis est inter figuras C D, & R. Quod erat ostendendũ.

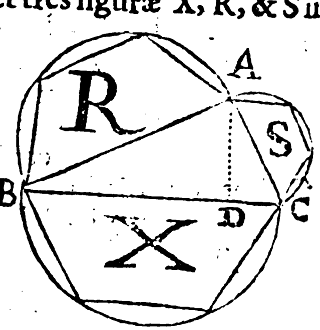
k prop. 17. huius. l prop. 13. huius.

PROPOS. XVIII. THEOR. XI.

Eucl. 47. l. 31. VI.

In triangulis rectangulis quælibet figura rectilinea, vel circularis super hypothenusa descripta æqualis est duabus figuris super lateribus, rectum angulum continentibus, descriptis, quæ illæ similes sint, & similiter positæ.

Sit triangulum A B C rectangulum in A, & super tribus eius lateribus describantur quælibet tres figuræ X, R, & S inter se similes, & similiter positæ, siue sint circuli, siue sectores, siue segmenta, siue zonæ, siue figuræ rectilineæ. Ostendendum est figuram X super hypothenusam B C descriptam æqualem esse duabus figuris R, & S illis similibus, & similiter descriptis super lateribus B A, & A C. Ducatur a ab angulo recto A perpendicularis A D super B C. Manifestum est b C B ad B D duplicatam rationem habere eius, quam habet C B ad



a prop. 11. lib. 1. b prop 9. l. 4. & prop. 19. l. 3.

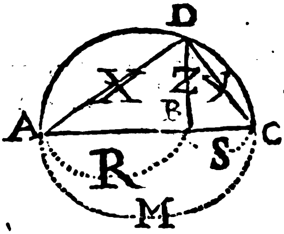
B A; pariterque B C ad C D duplicatam rationem habet eius, quam habet B C ad C A. Et quoniam c X ad R, cùm sint figuræ similes, & similiter positæ, duplicatam rationem habet lateris B C ad eius homologum B A: Ergo d X ad R est, vt C B ad B D. Eadem ratione figura X ad figuram S eandem rationem habebit, quam B C ad C D: Ergo e figura X ad duas figuras R, & S eandem rationem habebit, quam B C ad duas B D, & D C simul sumptas; sed B C æqualis est duabus B D, & D C. Ergo f figura X æqualis est duabus figuris R, & S simul sumptis. Quod erat ostendendum.

c prop. 17. l. 4
d coroll. 3. prop. 19. l. 3.
e cor prop. 22. l. 3.
f coroll 1. prop. 16. l. 3

PROPOS. XIX. THEOR. XII.

Si super duabus rectis lineis super earum aggregato, atque media proportionali inter eas describantur figuræ circulares, vel rectilineæ similes, & similiter positæ; erit figura ex aggregato æqualis aggregato ambarũ figurarum ex illis rectis cũ duplo figuræ ex media proportionali inter easdem.

Inter rectas lineas A B, B C sit media proportionalis D B, quæ perpendicularis sit ad eas in directum positas, & A B, B C, eorunque aggregatum A C, atque B D sint radij circulorum R, S, M, & Z, aut sectorum, aut zonarum similium, aut figurarum regularium, vel certè sint subtensæ, vel latera homologa figurarum circularium, vel rectilinearum similium.



Dico figuram M ex aggregato descriptam æqualem esse aggregato duarum figurarum R, & S, cum duplo figuræ Z. Super diametro A C describatur semicirculus A D C; & quia D B perpendicularis est ad A C, & est media proportionalis inter A B, & B C: Ergo a punctum D in peripheriam cadit; coniunganturque rectæ A D, & D C, super quas describantur figuræ X, & Y similes, & similiter positæ figuris R, S, M, & Z. Quoniam in triangulo A D C b rectangulo in D c quælibet figura M, super hypothenusa A C descripta, æqualis est duabus figuris illi similibus X, & Y super lateribus A D, & D C similiter descriptis; sed d in triangulo A B D rectangulo in B figura X super hypothenusa A D descripta æqualis est duabus figuris R, & Z illi similibus, & similiter

a schol prop. 9. l. 4.
b prop. 20. lib 2.
c prop. 18. huius.
d prop. 18. huius.

militer positis super lateribus A B, & D B: pariterque in triangulo D B C rectangulo in B figura Y super D C descripta æqualis est duabus figuris illi similibus S, & Z, & similiter positis super C B, & D B. Ergo figura M æqualis est figuris illi similibus, & similiter positis R, & S, & duplo figurę Z. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM I.

Manifestum est, quòd, si duę rectę lineę datę fuerint ęquales inter se: erit figura, super aggregato earum descripta, quadrupla figurę ex vna datarũ, quę sit illi similis, & similiter descripta. Nam, quando A B, & B C sunt inter se ęquales, erit B D, media proportionalis inter eas, ęqualis ipsi A B, vel B C, & propterea e figura Z ęqualis erit figuræ R, vel S. Vnde figurę R, S, cum duplo figurę Z simul sumptę, ęquales erunt quadruplo figurę R; est verò in hac propositione ostensa figura M ęqualis figuris R, S, & duplo figurę Z. Ergo figura M quadrupla est figurę R, vel S. e coroll. 2. prop. 17 l. 4

COROLLARIVM II. Eucl. 4. II.

Et, si duę figurę fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato ęquale duobus quadratis ex datis rectis, & duplo parallelogrammi rectanguli sub datis rectis contenti. Nam f quadrata sunt figurę similes, cum sint regulares: vnde ex hac propositione, quadratum M æquale erit duobus quadratis R, & S vnà cum duplo quadrati Z; sed g quadratum Z ęquale est rectangulo parallelogrammo A B C (eò quod perpendicularis B D media proportionalis est inter A B, & B C). Ergo quadratum M ex aggregato ęquale est duobus quadratis R, & S ex rectis datis vnà cum duplo rectanguli A B C sub rectis datis contenti. f prop. 3. huius. g coroll. 2. prop. 14. l. 4

COROLLARIVM III.

Et si dictę figurę fuerint circuli, sectores, aut rectilineę regulares similes, figura ex aggregato ęqualis erit duabus figuris ex datis rectis similibus illi vnà cum duplo trianguli rectanguli contenti à radio vnius, & perimetro alterius figurarũ ex datis rectis descriptarũ. Nam h triangulũ rectangulũ contentũ h prop. 17. huius.

à radio figurę S, & perimetro figurę R est medium proportionale inter figuras similes R, & S; est vero ¹ figura Z media proportionalis inter figuras R, S, eo quod A B, B D, B C proportionales sunt; atque figura M ęqualis est figuris R, & S vnà cum duplo figurę Z. Ergo figura M ęqualis est figuris R, & S illi similibus, vnà cum duplo trianguli rectanguli contenti à radio figurę S, & perimetro figurę R.

i coroll. 2. prop. 18. l. 4.

COROLLARIVM IV.

Tandem existentibus quibuscunque figuris similibus, & similiter positis super datis rectis, & earum aggregato descriptis: erunt duę figurę super datis rectis descriptę simul sumptę isoperimetrę figurę ex aggregato earundem. Nam, k vt radij, seu latera homologa, ita sunt inter se perimetri figurarum similium: estque figurę M latus A C ęquale lateribus, ei homologis A B, & B C figurarum R, & S. Ergo l perimeter figurę M ęqualis est perimetris figurarum R, & S.

k ex prop. 14. & 15. huius.

l coroll. 2. prop. 16. l. 3.

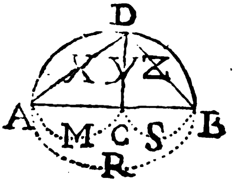
PROPOS. XX. THEOR. XIII.

Si super duabus rectis lineis, super earum differentia, atque super media proportionali, inter eas describantur figurę circulares, vel rectilineę similes, & similiter positæ: erit figura ex differentia ęqualis differētię duarum figurarum ex illis rectis à duplo figurę ex media proportionali inter easdem.

Sit recta A B maior, & B C minor, earumq; differentia A C, & in semicirculo A D B descripto super A B, eleuata sit perpendicularis C D, & ducta D B, atque super A B, B C, A C, B D, C D descriptę sint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę similes & similiter positę, vt in pręcedēti propositione factum est. Dico figuram M ex differentia A C descriptam, ęqualem esse differentiæ inter summam figurarum R, & S ex inæqualibus dercriptarū; & duplum figurę Z ex media a proportionali B D inter A B, & B C. Quoniam b figura R ex summa ipsarum A C, & C B ęqualis est summę figurarum S, M, & duplo figurę Y ex media proportionali inter A C, & C B. Ergo addita communi

a prop. 9. l. 4

b prop. 19. huius.



muni figura S: erunt figuræ R, & S, simul sumptę, ęquales figuræ M duplo figuræ Y, & duplo figuræ S, simul sumptis. Sed in c triangulo rectangulo B C D, duplum figurę Z ex hypothenusa ęquale est duplo figurę S vnà cum duplo figure Y. Igitur duę figurę R, & S, simul sumptę, ęquales sunt figurę M vnà cũ duplo figurę Z; & ablato cõmuniter duplo figurę Z: erit figura M ex differentia A C, ęqualis excessui duarũ figurarum R, & S supra duplũ figurę Z ex media proportionali inter A B, & B C. Quod erat ostendendum. c prop. 18. huius.

COROLLARIVM I. Eucl. 7. II.

Manifestum est, si dictę figurę fuerint quadrata, esse quadratum, super differentia datarum linearum descriptum, æquale differentię inter duo quadrata super eisdem lineis descripta, & duplum parallelogrammi rectanguli sub datis rectis lineis contenti.

Nam ex hac propositione quadratum M ęquale est excessui duorum ei similium quadratorum R, & S supra duplum quadrati Z; sed d quadratum Z æquale est rectangulo A B C (eo quod e D B media proportionalis est inter rectas A B, & B C propter perpendicularẽ D C). Ergo quadratum M ęquale est excessui quadratorum R, & S supra duplum rectanguli A B C. d coroll 2. prop. 14. l. 4 e prop. 9. l. 4

COROLLARIVM II.

Et, si dictę figurę fuerint circuli, sectores, aut rectilineę regulares similes: figura ex datarum linearum differentia ęqualis erit excessui duarum figurarum similium illis super datis lineis descriptarum supra duplum trianguli rectanguli contenti à radio vnius, & perimetro alterius figurarum ex datis rectis descriptarum.

Nam f triangulũ rectangulũ, contentum à radio figurę S, & perimetro figurę R, est mediũ proportionale inter figuras similes R, & S, & ideo g ęquale erit figurę Z. Et est figura M ęqualis differentię inter figuras R, S, & duplũ figurę Z ex media proportionali inter A B, & B C, ex hac propositione. Ergo figura M est æqualis excessui duarum figurarum R, S supra duplum trianguli rectanguli, contenti à radio figuræ S, & perimetro figuræ R. f prop 17. huius. g coroll 2. prop 18. l. & prop. 4. l. 3.

CO-

COROLLARIVM III.

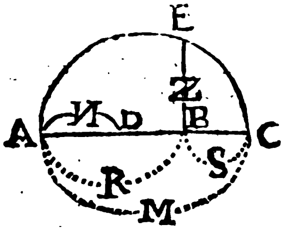
Tandem in quibuscunque figuris similibus, & similiter positis super datis rectis lineis, & earum differentia: erit perimeter figure maioris maior perimetro figuræ minoris, & excessus æqualis erit perimetro figuræ ex differentia datarum descriptę. Nam *b* perimeter figuræ R ex hypothenusa trianguli rectanguli A D B ęqualis est perimetris figurarum M, & S ex segmentis descriptarum. Quare excessus perimetri figuræ R maioris supra perimetrum minoris figurę S ęqualis est perimetro figurę M ex differentia datarum descriptæ.

b coroll. 4. prop. 19. huius.

PROPOS. XXI. THEOR. XIV.

Si super aggregato, & differentia duarum inæqualium rectarum linearum; atque super media proportionali inter eas describantur figurę circulares, vel rectilineę similes, & similiter positę: erit figura ex aggregato ęqualis figurę ex differentia vnà cum quadruplo figuræ ex media proportionali inter easdem.

Sit rursus recta linea A B maior, & B C minor, & sit B D æqualis minori B C; erit A C aggregatum, & differentia A D, sitque B E media proportionalis inter A B, & B C, & super eas descriptę sint figuræ circulares, vel rectilineę similes, & similiter positę R, S, M, N, & Z. Dico figuram M ex aggregato ęqualem esse figuræ N ex differentia, vnà cum quadruplo figuræ Z ex media proportionali inter A B, & B C. Quoniam *a* figura M ex aggregato ipsarum A B, & B C æqualis est figuris R, & S cum duplo figuræ Z; atque *b* duę figurę R, & S ęquales sunt figurę N ex differentia A D vnà cum duplo figurę Z. Ergo figura M ęqualis est figurę N, & quadruplo figurę Z, simul sumptis. Quod erat ostendendum.



a prop. 19. huius.

b prop. 20. huius.

CO-

COROLLARIVM I.
Eucl. 8. II.

Manifestum est, quòd, si dictæ figuræ fuerint quadrata, erit quadratum ex aggregato æquale quadrato ex differentia datarum linearum descripto, vnà cum quadruplo paralellogrāmi rectanguli sub inæqualibus rectis datis contenti. Nam quadrata R, S, N, M, & Z sunt figuræ similes; & ideo (ex hac propositione) quadratum M æquale erit quadrato N vnà cum quadruplo quadrati Z mediæ proportionalis B E inter inæquales rectas A B, & B C; estque c parallelogrammum rectangulum A B C æquale quadrato Z. Ergo quadratum M ęquale est quadrato N vnà cum quadruplo rectanguli A B C.

c Coroll. 2. prop. 14. l. 4.

COROLLARIVM II.

Et, si dictæ figurę fuerint circuli, sectores, aut rectilineæ regulares similes: erit figura ex aggregato ęqualis ei simili figuræ ex differentia datarum linearum descripta vnà cum quadruplo trianguli rectanguli, contenti à radio figurę ex vna datarum, & perimetro figurę ex altera datarum.

Nam d triangulum rectangulum, contentum à radio figurę S, & perimetro figurę R, est medium proportionale inter similes figuras R, & S, seu e ęquale est figurę Z ex media proportionali inter A B, B C: Sed figura M ęqualis est figuris N, & quadruplo Z. Ergo figura M ęqualis est figurę N vnà cum quadruplo trianguli rectanguli, contenti à radio figurę S, & perimetro figurę R.

d prop. 17. huius.

e Coroll. 2. prop. 18. lib. 4. & prop. 4 lib. 3.

COROLLARIVM III.

Tandem qualescunque sint figurę similes, & similiter positę R, S, M, N: erit excessus perimetri figurę M ex aggregato supra perimetrum figurę N ex differentia datarum linearum, ęqualis duplo perimetri minoris figurę S.

Nam f excessus perimetri figurę M supra perimetrum figurę R est perimeter figurę S; Et excessus perimetri figurę R supra perimetrum figurę N ęqualis est perimetro figurę super B D, siue super ei ęqualem B C descriptę; idest perimetro figurę S. Quare excessus perimetri figurę M supra perimetrum figurę N ęqualis est duplo perimetri figurę S.

f Coroll. 3. prop. 20. huius.

PRO-

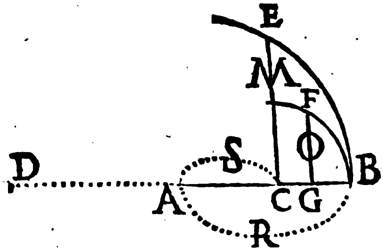
PROPOS. XXII. THEOR. XV.

Si super duas rectas lineas inęquales, atque super media proportionali inter aggregatum, differentiamque earundem, describantur figuræ circulares, vel rectilineę similes, & similiter positæ: erit differentia figurarum ex inęqualibus rectis lineis descriptarum ęqualis figuræ ex illa media proportionali descriptę.

a prop. 3. lib. 1
b prop. 10. l. 4.

Sint duæ rectæ A B maior, & eius portio A C, & a ipsi A C addatur D A æqualis maiori A B, erit D C summa, & C B differentia ipsarum A B, & A C; ponaturque b C E media proportionalis inter D C, & C B; & super A B, A C, C E descriptæ supponantur figuræ R, S, & M circulares, vel rectilineæ similes, & similiter positę. Dico excessum figuræ R supra figuram S equalem esse figuræ M, ex media proportionali C E. Secetur c C B bifariam in G; & d F G fiat media proportionalis inter A G, G B; & e super F G describatur figura O similis, & similiter posita ipsis R, S, & M. Quia f D B ad eius dimidiam A B est, vt C B ad eius subduplam B G: Ergo permutando g D B ad B C est, vt A B ad B G; h & diuidendo D C ad C B est, vt A G ad G B. Quare i earum subduplicatæ rationes E C ad C B, & F G ad G B eædem erunt (cum tres D C, C E, C B proportionales sint, pariterque tres A G, G F, G B sint proportionales). Et iterum k permutando E C ad F G erit, vt C B ad B G; est verò C B dupla ipsius G B: Igitur l E C dupla est ipsius F G. Et propterea m figura M quadrupla erit figurę O; cùmque n quadruplum figurę O ex media proportionali inter A G & G B sit excessus figurę R ex aggregato supra figuram S ex differentia earundem A G, & C B (cum C G ęqualis facta sit ipsi G B). Igitur figura M est excessus figurę R supra figuram S. Quod erat ostendendum.

c prop 9. l. 1
d prop. 10. lib. 4.
e prop. 16. lib. 4.
f def. 8. l. 3.



g prop. 12. l. 3.
h prop. 13. l. 3.
i coroll. 3. prop 19. l.
k prop. 12. l. 3.
l def. 8. l. 3.
m coroll 3. prop. 17. l. 4.
n prop. 21. huius.

CO-

COROLLARIVM.

Eucl. 5.6. II.

Manifestum est differentiam duorum quadratorum æqualem esse parallelogrammo rectangulo contento sub differentia, & aggregato laterum. Nam quadrata sunt figuræ similes; & ideo, ex hac propositione, excessus quadrati R supra quadratũ S æqualis est quadrato M ex E C media proportionali inter aggregatum D C, & differentiam C B eorundem laterum A B, A C descripto; sed quadrato o M æquale est parallelogrammum rectangulum D C B, cùm hoc ab extremis; (o coroll. 2. prop 14. l. 4.) illud verò ex media trium proportionalium D C, C E, C B facta sint. Ergo excessus quadrati R supra quadratum S æqualis est rectangulo sub C B differentia laterum, & sub D C aggregato eorundem B A, & A C contento.

SCHOLIVM.

Et, si dictæ figuræ fuerint circuli, sectores, aut rectilineæ regulares similes; erit differentia figurarum æqualis triangulo rectangulo contento à differentia radiorum, & ab aggregato ambituum earundem figurarum.

Super aggregato D C, & differentia C B ipsarum B A, A C descriptæ supponantur duæ figuræ N, & Q similes ipsis R, S, M. Et p quoniam ambitus figuræ N ex aggregato ipsarum D A, seu B A, & A C æqualis est aggregato ambituum figurarum R, & S; & radius figuræ Q ex differentia earundem B A, A C descriptæ æqualis est differentiæ radiorum figurarum R, & S, eo quod B A, A C, C B, aut sunt radij, aut latera homologa earundem figurarum q proportionalia radijs. Propterea triangulum rectangulum, contentum sub ambitu figuræ N, & radio figuræ Q, erit contentum sub aggregato ambituum, & differentia radiorum figurarum R, & S. At r triangulum rectangulum contentum à radio figuræ Q, & ambitu figuræ N æquale est figuræ M, cùm ambo media proportionalia sint inter similes figuras N, & Q. Et ex hac propositione est M excessus figuræ R supra figuram S. Ergo triangulum rectangulum contentum sub aggregato ambituum, & differentia radiorum figurarum R, & S æquale est differentiæ earundem figurarum R, & S.

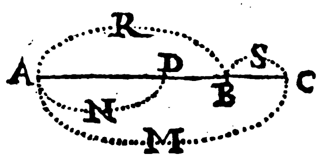
(p coroll. 4. prop. 19. huius.) (q prop 10. 15. & 17. huius.) (r prop. 17. huius.)

PROPOS. XXIII. THEOR. XVI.

Eu. l. 9. 10. 11.

Si super duabus rectis lineis inæqualibus, & earum aggregato, atque differentia descriptæ fuerint quælibet circulares, vel rectilineæ figuræ inter se similes, & similiter positæ: erunt duæ figuræ ex aggregato, & ex differentia, simul sumptæ, ęquales duplo figurarum ab inęqualibus lineis datis descriptarum.

Super duabus rectis lineis inæqualibus A B, & B C, & earum aggregato A C, earumque differentia A D sint descriptę quęlibet circulares, aut rectilineę inter se similes figurę, & similiter positę R, S, M, & N. Dico duas figuras M ex aggregato, & N ex differentia datarum, simul sumptas, ęquales esse duplo figurę R vnà cum duplo figurę S, ex datis lineis descriptarum. Quoniam *a* figura M ęqualis est figurę N vnà cum quadruplo spatij medij proportionalis inter R, & S: Ergo addita communiter figura N, erunt figurę M, & N ęquales sex spatijs, scilicet duplo figuræ N, & quadruplo medij proportionalis inter figuras R, & S; sunt *b* verò figurę R, & S ex inęqualibus rectis A B, B C descriptę ęquales figurę N ex differentia vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R, & S: Ergo duplum figuræ R, vnà cum duplo figurę S ęquale est iisdem sex spatijs, scilicet duplo figurę N vnà cum quadruplo medii proportionalis inter figuras R, & S. Quare figurę M, & N ex aggregato, & differentia descriptę ęquales sunt duplo figurę R vna cum duplo figurę S, quę ex inęqualibus datis rectis A B, & B C describuntur. Quod erat ostendendum.



a prop. 21. huius.

b prop. 20. huius.

Eucl. 4. XIII.

PROPOS. XXIV. THEOR. XVII.

Si super tota, & super segmentis rectę lineę extrema, ac media ratione diuisæ descriptæ fuerint figurę circulares, vel rectilineę similes inter se, & similiter positæ; quę ex tota, & minori segmento vtręque simul triplę sunt figurę ex maiori segmento descriptę. Et si duę figurę ex tota, & ex minori segmento triplę fuerint eius, quę ex maiori segmento describitur: erit tota recta linea secta extrema, ac media ratione.

Sit recta A B secta extrema, & media ratione in C, cuius segmentum maius A C: & descriptę sint super A B, A C, & C B tres

B tres circulares, aut rectilineę figurę R, M, & S inter se similes, & similiter positę. Dico figuram R ex tota, vna cum figura S, ex minori segmento, triplam esse figurę M ex maiori segmento descriptæ.

Quoniam super duas rectas inęquales A B, & B C, atque earum differentiam A C descriptę sunt tres figurę R, S & M similes, & similiter positę: Ergo a duę figurę R, & S super inęqualibus rectis A B, B C descriptę ęquales sunt figuræ M ex differentia A C, vnà cum duplo spatij medij proportionalis inter figuras R, & S: Estque b figura M media proportionalis inter figuras R, & S ei similes; propterea quod tres rectę A B, A C, C B proportionales sunt. Ergo figurę R, & S ęquales sunt triplo figuræ M. a prop. 20. huius. b coroll. 2. prop. 18. l. 4

Secundò sint figurę R, & S ex tota A B, & minori segmento C B, simul sumptæ, triplæ figuræ M illis simili, & similiter positę ex maiori segmento A C. Dico rectam A B sectam esse in C extrema, & media ratione. Quoniam c duę figurę R, & S ęquales sunt figuræ M, ex differentia, vna cum duplo medij proportionalis inter R, & S; erant autem duę figuræ R, & S ęquales triplo figurę M: Ergo triplum figuræ M ęquale est figuræ M, vnà cum duplo medij proportionalis inter figuras R, & S; & ablata communi figura M, erit duplum figuræ M ęquale duplo medij proportionalis inter figuras R, & S; ideoque figura M ęqualis erit spatio medio proportionali inter figuras ei similes R, & S. Quare d figurarum R, M, S tria homologa latera A B, A C, & C B proportionalia erunt, & e propterea recta A B secta erit in C extrema, & media ratione. Vt erat propositum. c prop. 20. huius. d coroll. 2. prop. 18. l. 4. e prop. 15. lib. 4.

PROPOS. XXV. THEOR. XVIII.

Eucl. 6. XIII.

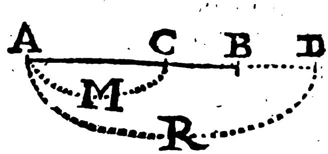
Si super aggregato totius & minoris segmenti, atque super maiori segmento rectę lineæ extrema, ac media ratione diuisæ, descriptę fuerint figurę circulares, vel rectilineę similes, & similiter positę, quę ex aggregato describitur figura quintupla est eius, quę ex maiori segmento describitur. Et si figura ex aggregato totius, & minoris segmenti descripta quintupla fuerit eius, quę ex segmẽto maiori describitur: erit tota recta linea diuisa extrema, & media ratione.

Sit recta linea A B secta extrema, & media ratione in C, cuius segmentum minus C B; producaturque B D ęqualis minori segmento C B; atque super A D aggregato duarum A B, & B C, atque super differentia earum, seu maiori segmento A C, factę sint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę R, & M inter se similes, & similiter positę. Dico figuram R quintuplam esse figurę M. Quoniam *a* figura R ex A D aggregato inęqualium rectarum A B, & B D, seu B C, ęqualis est figurę M ex A C illarum differentia vna cum quadruplo spatij medij proportionalis inter figuras super inęquales A B, & B C, quę similes sint, & similiter positę ipsis R, & M. Estque *b* figura M media proportionalis inter figuras ei similes super A B, & B C similiter descriptas (cùm recta A C media proportionalis sit posita inter A B, & B C). Ergo figura R quintupla est figurę M.

a prop. 21. huius.

b coroll 2. prop. 18. l. 4.

Secundò sit figura R super aggregato totius A B, & segmenti C B descripta, quintupla figurę M similis ipsi R, quę super earum differentia A C similiter describitur. Dico rectam A B sectam esse extrema, & media ratione in C, cuius minus segmentum erit C B. Quoniam *c* figura R ex aggregato descripta ęqualis est figurę M ex differentia, vna cum quadruplo spatii medii proportionalis inter figuras similes eis, & similiter positas super rectas A B, & B C; & ex hypothesi figura R ęqualis est quintuplo figurę M: Ergo quintuplũ figurę M ęquale est figurę M vnà cum quadruplo dicti spatii medii proportionalis; & ablata cõmuni figura M: erit quadruplũ figurę M ęquale quadruplo dicti spatii medii proportionalis; ideoq; figura M ęqualis erit spatio medio proportionali inter figuras ei similes super A B, & B C similiter descriptas; proptereaque *d* tres rectę B A, A C, & C B proportionales erunt; & *e* A B secta erit in C extrema, & media ratione. Quod erat ostendendum.



c prop. 21. huius.

d coroll. 2. prop. 18. l. 4.
e prop. 25. lib. 4.

PROPOS. XXVI. THEOR. XIX.

Eucl. 3. XIII.

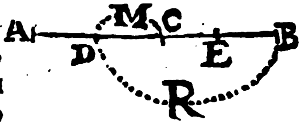
Si super aggregato minoris, & semissis maioris, atque super semisse maioris segmentorum eiusdem rectę lineę extrema, ac media ratione diuisę, descriptę fuerint duę circulares;

res, aut rectilineę figurę inter se similes, & similiter positę: quę ex aggregato describitur figura quintupla est eius, quę ex semisse maioris segmenti describitur. Et si figura ex aggregato minoris segmenti, & semisse maioris quintupla fuerit figurę, quę ex semisse maioris segmenti describitur: erit tota recta linea diuisa extrema, & media ratione.

Sit tota recta B A ad A C, vt A C ad minus segmentum C B; & secta sit A C bifariam in D; atque super B D aggregato segmenti minoris B C, & D C semisse maioris; nec non super D C semisse maioris descriptę supponantur quęlibet figure R, & M, circulares, vel rectilineę similes inter se, & similiter positę, Dico figuram R quintuplam esse figurę M. Secetur *a* C B bifariam in E. Et quia *b* D C ad C E est, vt A C duplum primę ad C B duplum secundę; & est A B secta in C extrema, & media ratione. Ergo *c* D E quoque in C secatur extrema, & media ratione, cuius segmentum minus erit C E. Cumque sint descriptę duę figurę similes, & similiter positę, R quidem super D B aggregato totius D E, & E B, seu E C minoris segmenti; atque figura M super maiori segmento D C. Ergo *d* figura R quintupla est figurę M. Quod erat primum.

a prop. 9. l. 1.
b prop. 11. l.
c prop. 26. l. 4.
d prop. 25. huius.

Secundò sit figura R, super D B aggregato segmenti minoris C B, & D C semissis descripta, quintupla figurę M illi simili super D C semisse maioris segmenti A C similiter descriptę. Dico rectam totam A B sectam esse in C extrema, & media ratione. Secta *e* C B bifariam in E. Quia figura R super aggregato totius D E, & minoris segmenti C E, seu E B descripta, quintupla ponitur figure M, simili priori super maiori segmento D C similiter descriptę. Ergo *f* recta D E in C secatur extrema, & media ratione; sed, *g* vt D C ad C E, ita est A C dupla primę ad C B duplam secundę. Ergo *h* recta A B quoque secatur in C extrema, & media ratione, cuius segmentum minus est C B. Quod erat ostendendum.



e prop. 9. l. 1
f prop. 25. huius.
g prop. 11. lib 3.
h prop. 26. lib. 4.

PROPOS. XXVII. THEOR. XX.

Eucl 1. XIII.

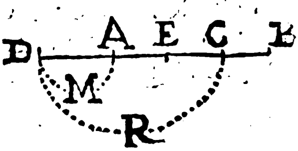
Si super aggregato semissis totius, eiusque segmenti maioris

atque,

atque super eadem semisse rectę lineę diuisę extrema, ac media ratione, descriptę sint duę quęlibet figurę circulares, vel rectilineę similes inter se, & similiter positę; quæ ex aggregato describitur figura, quintupla est eius, quę ex semisse totius describitur, figurę. Et, si figura ex aggregato semissis totius rectæ lineę, eiusq; segmēti maioris quintupla fuerit figurę ei simili, quę ex semisse totius similiter describitur: erit tota recta linea diuisa extrema, & media ratione.

Sit recta linea A B secta in C extrema, & media ratione, cuius segmentum maius A C; & producta sit A D equalis medietati totius A B; atque super D C aggregato segmenti maioris A C, & D A semisse totius; nec non super D A semisse totius descriptę supponantur duę figurę circulares, vel rectilineę R, & M similes inter se, & similiter positę. Dico figuram R ex aggregato quintuplam esse figurę M ex semisse totius descriptę. Secetur *a* A C bifariam in E, & quia *b* D A ad A E est, vt B A duplum primę ad A C duplum secundæ; *c* vel vt A C ad C B, cùm sit A B secta in C extrema, ac media ratione. Ergò *d* D E quoque in A extrema, ac media ratione secatur, cuius segmentum minus est A E. Cùmque duę figuræ similes, & similiter positę, R quidem descripta est super aggregato totius A E, eiusque minoris segmenti E C, vel A E; & figura M descripta est super eius maiori segmento D A. Ergo *e* figura R quintupla est figuræ M. Quod erat primum.

a prop. 9 l. 1
b prop. 11. lib. 3.
c prop. 25. lib. 4.
d prop. 26 lib. 4.
e prop. 25. huius.



Secundò figura R super D C aggregato ipsius D A semissis totius A B, & segmenti maioris A C descripta, quintupla sit figuræ M illi simili super D A semisse totius A B similiter descriptæ. Dico totam rectam lineam A B sectam esse in C extrema, & media ratione. Secetur *f* A C bifariam in E. Et quoniam figura R super D C aggregato totius D E, eiusque segmenti minoris E C, vel A E descripta, quintupla est figuræ M ei simili super differentia, vel maiori segmento D A descriptæ: Ergo *g* D E secatur in A extrema, & media ratione; sed, *h* vt D A ad A E, ita est B A dupla primæ ad A C duplam secundę. Ergo *i* similiter recta A B secatur in C extrema, & media ratione, cuius maius segmentum est A C. Quod erat ostendendum.

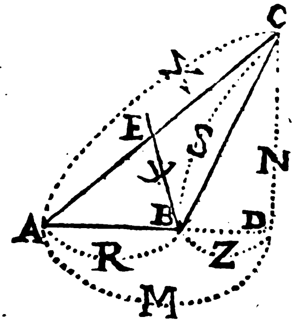
f prop. 9. l. 1
g prop. 25. huius.
h prop. 11. lib. 3.
i prop. 26. lib. 4.

PRO-

PROPOS. XXVIII. THEOR. XXI.

Si ſuper tribus lateribus trianguli ambligonij, atque ſuper media proportionali inter latus circa, angulum obtuſum, eiuſque productionem vſque ad perpendicularem ab oppoſito angulo cadentem, deſcribantur figuræ circulares, vel rectilineę ſimiles, & ſimiliter poſitæ: erit figura ex latere obtuſum angulum ſubtendente ęqualis ſummę figurarum ex lateribus obtuſum angulum ambientibus, vnà cum duplo figurę ex illa media proportionalî deſcriptę.

In triangulo A B C ſit angulus C B A obtuſus, & *a* ab angulo C ducta C D perpendiculari ſupra A B ſecante eam in D. Patet *b* perpēdicularem C D cadere extra triangulum ad partes acuti anguli C B D; & fiat *c* B E media proportionalis inter A B, & B D, & ſuper lateribus A C, B C, A B, B E, A D, B D, & C D deſcriptę ſint quęlibet figuræ circulares, vel rectilineę X, S, R, Y, M, Z, & N inter ſe ſimiles, & ſimiliter poſitæ. Dico figuram X ex latere ſubtendēte obtuſum angulum deſcriptam, æqualem eſſe duabus figuris R, & S ex lateribus continentibus angulum obtuſum, vnà cum duplo figuræ Y ex B E media proportionali inter A B, & B D. Quia in triangulo A D C rectus eſt angulus D. Ergo *d* figura X æqualis eſt duabus figuris M, & N; ſed figura *e* M ex A D aggregato rectarum A B, & B D æqualis eſt duabus figuris R, & Z ex eiſdem rectis deſcriptis, vnà cum duplo figuræ Y, ex media proportionali inter A B & B D. Ergo figura X æqualis eſt figuris R, Z, & N cum duplo figuræ Y: Sed *f* figura S ęqualis eſt duabus figuris Z, & N (propterea quod in triangulo C B D rectus eſt angulus D): Ergo figura X ęqualis eſt duabus figuris R, & S vna cum duplo figuræ Y ex media proportionali inter latus A B, & productionem eius B D vſque ad perpendicularem C D. Quod erat oſtendendum.



a prop. 11. lib 1.
b coroll. 8. prop. 18. l. 1
c prop. 10. l. 4.
d prop. 18. huius.
e prop. 19. huius.
f prop. 18. huius.

CO-

Eucl. 12. II.

COROLLARIVM I.

Manifestum est, si dictæ figuræ fuerint quadrata esse quadratum ex latere subtendente angulum obtusum ęquale duobus quadratis ex lateribus dictum obtusum angulum ambientibus, vnà cum duplo parallelogrammi rectanguli sub vno latere circa obtusum angulum, & sub eius productione vsque ad perpendicularem ab opposito angulo cadentem.

g coroll. 2. prop. 14. l. 4

Nam g parallelogramum rectangulum A B D æquale est quadrato Y ex B E media proportionali inter A B, & B D, estque quadratum X ęquale quadratis R, & S, & duplo quadrati Y (ex hac propositione, cum quadrata sint inter se similia): Ergo quadratum X ęquale est quadratis R, & S, & duplo rectanguli parallelogrammi A B D.

COROLLARIVM II.

Et si dictæ figuræ fuerint circuli, sectores, aut rectilineę regulares similes & similiter positę, erit figura ex latere subtendente angulum obtusum æqualis duabus figuris ex lateribus obtusum angulum ambientibus, vnà cum duplo trianguli rectanguli contenti sub radio figuræ ex latere circa angulum obtusum, & sub perimetro figurę ex productione eiusdem vsque ad perpendicularem ab opposito angulo cadentem, descriptę.

h prop 17. huius.

i coroll. 2. prop 18 l 4. & prop. 4. lib. 3.

Nam h triãgulum rectangulũ contentum sub radio figuræ R, & perimetro figurę Z est medium proportionale inter figuras regulares similes, vel circulos R, & Z, & ideo i ęquale est figurę Y, quę pariter media proportionalis est inter figuras R, & Z, cum latera A B, B E, & B D proportionalia sint. Quare figura X ęqualis erit figuris R, & S vna cum duplo trianguli rectanguli sub radio figurę R, & perimetro figuræ Z contenti.

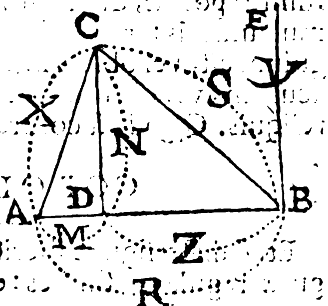
PROPOS. XXIX. THEOR. XXII.

Si super tribus lateribus cuiuslibet trianguli, atque super media proportionali inter latus circa angulum acutum, eiusque segmentum vsque ad perpendicularem ab opposito angulo cadentem, descriptę fuerint quęlibet figurę circulares, vel rectilineę similes inter se, & similiter positę; erit

figura

figura ex latere acutum angulum subtendente, æqualis excessui duarum figurarum ex lateribus eundem acutum angulum continentibus supra duplum figuræ ex illa media proportionali.

In triangulo A B C sit angulus B acutus; & super a latus A B acutum angulum continens cadat ab opposito angulo C perpendicularis C D, secans b latus A B ad partes acuti anguli in D; & c B E sit media proportionalis inter B A, & B D, & super A C, A B, B C, E B, A D, D B, & C D fiant figuræ quælibet X, R, S, M, Z, Y, & N circulares, vel rectilineæ similes, & similiter positæ. Dico figuram X ex latere subtendente angulum acutum B, æqualem esse excessui duarum figurarum R, & S ex lateribus acutum angulum continentibus supra duplum figuræ Y ex media proportionali E B. Quoniam d in triangulo A C D rectus est angulus D. Ergo figura X æqualis est figuris M, & N; & figura X cum duplo figuræ Y, erit æqualis figuris M, & N cum duplo figuræ Y; sed figuris R, Z æqualis est figura M ex differentia laterū A B, D B, cū duplo figuræ Y ex media proportionali. Ergo figura e X vnà cū duplo figuræ Y æquatur tribus figuris N, R, & Z; est verò f figura S æqualis figuris N, & Z (cum in triangulo C D B angulus D rectus sit). Igitur figura X vna cum duplo figuræ Y æqualis est duabus figuris R, & S, & ablato communiter duplo figuræ Y: erit figura X æqualis excessui figurarum R, & S supra duplum figuræ Y. Vt fuit propositum.



a prop. 11. l. 1.
b coroll 8. prop. 18. l. 1
c prop. 10. lib 4.
d prop. 18. huius.
e prop. 20. huius.
f prop. 18. huius.

COROLLARIUM I.

Eucl. 13. 11.

Manifestum est, si dictæ figuræ fuerint quadrata, esse quadratum lateris acutum angulum subtendentis æquale excessui duorum quadratorum laterum, acutum angulum continentium supra duplum parallelogrammi rectanguli sub vno latere circa angulum acutum, & sub eius segmēto ab eodem acuto angulo vsque ad perpendicularem ab opposito angulo cadentem, contenti. Nam g parallelogrammum rectangulum A B D æquale est quadrato Y ex media proportionali

g coroll 2. prop. 14. l 4.

inter A B, & B D. Ergo ex hac propositione defectus quadrati X æqualis est differentię duorum quadratorum R, & S à duplo parallelogrammi rectanguli A B D.

Eucl. 48. I.

COROLLARIVM II.

Patet ex his duabus propositionibus, quòd si super tribus lateribus trianguli descriptæ fuerint tres figurę similes, & similiter positæ, quarum vna æqualis fuerit reliquis duabus simul sumptis: triangulum erit rectangulum. Nam si acutangulum est, vel obtusangulum: erit figura ex latere angulum acutum, vel obtusum subtendente inęqualis duabus figuris reliquis. Quod est contra hypothesin.

COROLLARIVM III.

Et, si dictæ figuræ fuerint circuli, sectores, aut rectilineæ figuræ regulares similes: erit figura ex latere acutum angulum subtendente æqualis differentiæ duarum figurarum ex lateribus acutum angulum continentibus à duplo trianguli rectanguli contenti sub radio figuræ ex latere acutum angulum continente, & sub perimetro figuræ ex segmento eiusdem lateris ab angulo acuto vsque ad perpendicularem ab opposito angulo cadentem, descriptæ. Nam *h* triangulum rectangulum contentum sub radio figuræ R, & perimetro figuræ Z medium proportionale est inter figuras similes regulares, vel circulares R, & Z; ideoque *i* æquale erit figuræ Y. Quare figura X æqualis est differentiæ duarum figurarum R, & S à duplo trianguli rectãguli contenti à radio figuræ R, & perimetro figuræ Z.

h prop. 17. huius.

i coroll. 2. prop. 18. l. 4. & prop. 4. lib. 3.

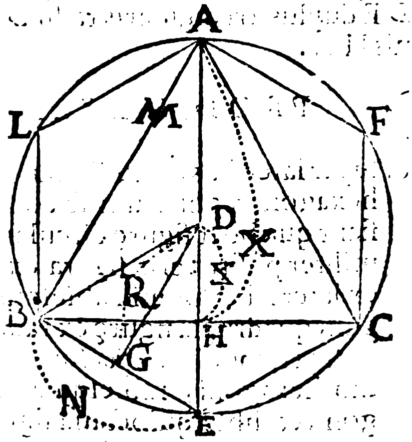
Eucl. 12. XIII.

PROPOS. XXX. THEOR. XXIII.

Si super lateribus, altitudinibus, & radijs trianguli, & hexagoni regularium ab eodem circulo comprehensorum descriptæ fuerint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ inter se similes, & similiter positæ: erit figura ex latere trianguli tripla figuræ ex latere hexagoni sesquitertia figuræ ex eius altitudine, & duodecupla figuræ radii eiusdem trianguli, ęqualis figuræ ex altitudine hexagoni, & quadrupla figuræ ex radio hexagoni descriptę.

In

In circulo, cuius radius D A inscripta sint triangulum A B C, & hexagonum A L B C regularia; & radius A D, qui *a* secat angulum B A C bifariam, secabit *b* quoque arcum B C in E, & subtensum latus B C bifariam, & perpendiculariter in H, & propterea A D E diameter erit; ducatur *c* postea D G perpendicularis super B E, iungaturque B D, & ponantur quęlibet figurę circulares, vel rectilineę similes, & similiter positę, M quidē super trianguli latere A B, N super hexagoni latere B E, X super trianguli altitudine A H, Z super trianguli radio D H, R super hexagoni radio D G. Dico figuram M ęqualem esse figuræ ex altitudine hexagoni, & quadruplam figuræ R, & triplam figurę N, & sesquitertiam figurę X, atque duodecuplam figurę Z. Quoniam duo *d* anguli E B A, A F B recti sūt in semicirculis E B A, & F A B. Ergo *e* A B erit distantia laterum A E, B E æquidistantium in hexagono, & ideo A B erit altitudo hexagoni. Postea quia *f* triangulum D B E æquilaterum est, erit *g* perpendicularis D G à vertice ad basim ęqualis perpendiculari B H semissi lateris B C, vel A B trianguli A B C, *h* & basis D E secta erit bifariā in H; estque radius A D ęqualis D E. Ergo A H altitudo trianguli tripla erit ipsius H E, vel D H radij triāguli, & *i* propterea qualium partium figura Z est vna, erit figura X partes nouem; atque figura N partes quatuor (eo quod B E latus hexagoni ęquale est radio circuli D E duplo ipsius D H). Rursus quia in triangulo A B E ab angulo *k* recto B perpendicularis B H secat basim A E in H; igitur *l* E A, B A, & A H proportionales sunt; & propterea *m* figura M ad X erit in duplicata ratione laterum, idest *n* vt E A ad A H, seu vt quatuor ad tria, vel vt duodecim ad nouem: est verò D G semissis ipsius A B; ergo *o* qualium figura M est duodecim, erit figura R tres partes, & earundē erat figura Z vna pars. Igitur figura M ex latere trianguli, & ex altitudine hexagoni, duodecupla est figurę Z, & tripla figurę N, & quadrupla figurę R, & sesquialtera figurę X. Quod erat ostendendum.



a coroll. 1. prop. 3. huius.
b prop. 19. l. 2.
c prop. 11. lib. 1.
d prop. 20. l. 2.
e prop. 14. l. 1.
f ex schol. pr. 1. huius.
g coroll. 1. prop. 1. l. 4.
h cor. prop. 2. l. 2.
i coroll. 3. prop. 17. l. 4
k prop. 20. l. 2.
l prop. 9 l. 4
m prop. 17. l. 4.
n prop. 19. l.
o coroll. 3. prop. 17. l. 4

COROLLARIVM.

Constat ex hac propositione, quòd circuli diameter sesquitertia est altitudinis trianguli, & quadrupla radij eius, & circuli radius est subsesquialter altitudinis inscripti trianguli regularis, & duplus radij eius. Ostensa enim fuit diameter A E sesquitertia ipsius A H, & quadrupla ipsius D H, atq; radius D E duplus triangularis radij D H, & subsesquialter altitudinis H A.

PROPOS. XXXI. THEOR. XXIV.

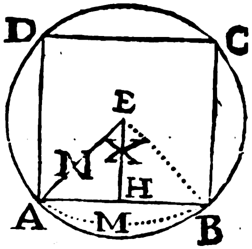
Si super lateribus altitudinibus, & radijs quadrati trianguli, & hexagoni regularium ab eodem circulo comprehensorum fiant quælibet figuræ circulares, aut rectilineæ similes, & similiter positæ: erit figura ex latere quadrati dupla figuræ ex latere hexagoni subsesquialtera figuræ ex latere trianguli, quadrupla figuræ ex radio quadrati, octupla figuræ ex radio trianguli, dupla supertripartiens tertias figuræ ex radio hexagoni, subsesquialtera figuræ altitudinis hexagoni, & subsesquioctaua figuræ altitudinis trianguli.

In circulo, cuius radius E A inscriptum sit quadratum A B C D, cuius radius E H, & descriptæ sint quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ similes, & similiter positæ, M quidem super quadrati latere A B, vel altitudine eius, X super radio E H, & N super circuli radio A E, & aliæ ijs similes figuræ super lateribus, radiis, & altitudinibus trianguli, & hexagoni in eodem circulo inscriptorum. Ostendendum est figuram M habere ad reliquas figuras proportiones expositas. Coniungatur recta E B. Quoniam *a* angulus A E B ad centrum quadrati rectus est, & cadit ab angulo recto perpendicularis E H super basim A B eam *b* diuidens in E bifariam, cum ex centro circuli ducatur. Ergo *c* recta E A media proportionalis est inter A B, A H; pariterque recta E H media proportionalis est inter æqualia segmenta B H, H A; & propterea E H æqualis erit semissi ipsius A B: vnde *d* figura M ex latere quadrati erit quadrupla figuræ X ex radio eiusdem; pariterque *e* figura M ad ei similem figuram N erit, vt B A ad eius subduplam A H; & propterea qualium partium figura M est octo, erit

a ex prop. 3. huius.
b prop. 2. l. 2
c prop. 9. l. 4
d coroll. 3. prop 17 l. 4
e coroll. 3. prop. 17. l. 4

figura

figura X partes duę, & figura N ex radio circuli, seu f ex latere inscripti hexagoni regularis, erit partes quatuor; sed g qualium figura ex latere hexagoni est quatuor partes, fuit figura ex eius altitudine duodecim, & figura ex eius radio tres partes, atq; earundem fuit figura lateris inscripti trianguli



f schol. prop. 3. huius.
g prop. 30. huius.

regularis duodecim partes, & figura ex eius altitudine partes nouem, & figura ex eius radio vna pars. Igitur figura M ex latere quadrati, seu ex eius altitudine quadrupla erit figuræ ex eius radio, dupla figuræ ex latere hexagoni, subsesquialtera figuræ altitudinis eius, dupla superbipartiens tertias figuræ ex radio eiusdem, atque subsesquialtera figuræ lateris trianguli, octupla figuræ radij eius, & subsesquioctaua figuræ ex altitudine eiusdem trianguli. Quæ erant ostendenda.

SCHOLIVM.

Latus inscripti quadrati medium proportionale est inter aggregatum lateris inscripti hexagoni & lateris inscripti decagoni, atque duplum lateris inscripti decagoni.

Nam h recta composita ex latere hexagoni, & latere decagoni in eodem circulo descriptorum secatur extrema, & media ratione, cuius maius segmentum est latus hexagoni. Ergo i parallelogrammum rectangulum sub aggregato lateris decagoni, & lateris hexagoni, & sub duplo lateris decagoni ęquale est duplo quadrati ex latere hexagoni. Sed ex hac propositione quadratum circulo inscriptum duplum est quadrati ex latere hexagoni. Ergo quadratum circulo inscriptum ęquale est rectangulo parallelogrammo contento sub aggregato laterum decagoni & hexagoni, & sub duplo lateris decagoni; ideoque k latus inscripti quadrati medium proportionale est inter aggregatum laterum decagoni, & hexagoni; atque duplum lateris decagoni.

h prop. 8. huius.
i coroll. 2. prop. 14. l. 4
k coroll. 2. prop. 14. l. 4.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXV.

Eucl. 10. XIII.

Si super lateribus pentagoni, hexagoni, & decagoni regularium ab eodem circulo comprehensorum fiant quęlibet figurę circulares, aut rectilineę similes, & similiter positę: erit figura ex latere pentagoni ęqualis duabus figuris simul sūptis ex latere hexagoni, & ex latere decagoni descriptis.

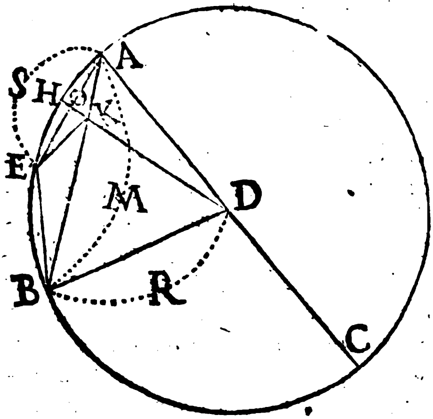
In

In circulo A C B sit A B latus inscripti pentagoni, E A latus inscripti decagoni regularium, & radius D B erit latus inscripti hexagoni; & super his lateribus descriptę sint quęlibet circulares, vel rectilineę figurę similes, & similiter positę, M quidem super A B, R super D B, & S super E A. Dico figuram M ęqualem esse duabus figuris R, & S simul sumptis.

a schol. prop. 3. huius.

Secetur b arcus A E subtensus à latere decagoni bifariã in H, sicuti c arcus A B in E sectus fuerat bifariam; eritque arcus A H quarta pars arcus A B, & tertia pars arcus B H, & iungatur radius D H secans d bifariam, & perpendiculariter latus decagoni in O, & A B in K: iunganturque E K, B E, & diameter A C. Quoniam in triangulis A O K, & E O K circa angulos rectos ęquales ad O sunt duo latera A O, & E O ęqualia, & O K commune. Ergo e angulus K E H ęqualis est angulo K A H, & f ęquales quoque sunt anguli E B A, & E A B, cum insistãt peripherijs ęqualibus E A, B E, ergo anguli A E K, A B E ęquales sunt, estq; angulus B A E cõmunis in triangulis B E A, E K A: Ergo g inter se sunt similia. Quare B A ad A E erit, vt E A ad A K, ideoque h figura M ad ei similem, & similiter positã figuram S erit vt B A ad A K. Rursus quia, vt arcus E A i decima pars est totius peripherię A B C A, ita arcus k A H semissis illius decima pars est semiperipheriæ A B C; & est arcus B H triplus arcus A H. Ergo qualium partium arcus A B C est decem erit B H tres, & B C sex partes; ideoque arcus B C duplus erit ipsius arcus B H; & l angulus C D B duplus erit anguli B D H; sed m angulus C D B ad centrum duplus est anguli B A C ad peripheriam: Ergo anguli B D H, & D A B æquales inter se sunt; & angulus B est communis. Ergo n duo triangula A B D, & D B K similia sunt; proptereaque A B ad B D erit, vt D B ad B K. Vnde o figura M ad ei similem, & similiter positam figuram R erit, vt A B ad B K; erat autem figura eadem M ad figuram S, vt eadem recta A B ad A K. Ergo p figura M ad ambas figuras R, & S simul sumptas erit, vt

b cor. prop. 19. l. 2.
c ex prop. 3. huius.
d prop. 19. l. 2.
e prop. 4. l. 1
f prop. 17. l. 2.
g coroll. 1. prop. 4. l. 4.
h coroll. 3. prop. 17. l. 4
i ex prop. 3. huius.
k prop. 10. l. 3.
l coroll. 4. prop. 17. l. 2.
m prop. 13. l. 2.
n coroll 1. prop. 4. l. 4.
o coroll. 3. prop. 17. l. 4
p cor. prop. 22. l. 3.



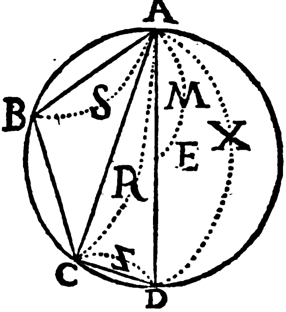
recta

recta B A ad rectas B K, & A K simul sumptas; estque B A æqualis duabus B K, K A. Ergo q figura M ex latere pentagoni æqualis est duabus figuris R ex latere hexagoni, & S ex latere decagoni simul sumptis. Quod erat ostendendum. q coroll. 1. prop. 16. l. 3

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXVI.

Si super latere hexagoni, pentagoni, & subtendente angulum pentagoni in eodem circulo inscriptorum sint descriptæ quælibet figuræ circulares, vel rectilineæ similes, & similiter positæ: erunt figuræ ex latere pentagoni, & ex subtendente angulum pentagoni, simul sumptæ, æquales quintuplo figuræ ex latere hexagoni.

In circulo, cuius radius E A, sint A B, & B C duo latera pētagoni, & recta A C subtendat angulū pentagoni, atq; descriptæ sint quelibet circulares, aut rectilineæ figuræ similes, & similiter positæ; M quidem super radio E A, siue a latere hexagoni, R super A C, & S super A B. Dico figuras R, & S simul sumptas æquales esse quintuplo figuræ M. Producatur diameter A E D, & coniungatur recta C D. Quoniam b arcus A B quinta pars est totius peripheriæ A B D A: Ergo qualium partium peripheria circuli A B D A est decem erit peripheria A B duæ partes, & peripheria A B C quatuor; sed earundem partium semicirculi peripheria A C D est quinque: Ergo peripheria C D est vna pars decima totius peripheriæ circuli, & propterea c recta C D erit latus inscripti decagoni regularis. Ponantur iam figuræ X, & Z similes ipsis M, R & S, atque similiter positæ super diametrum A D, & super latus decagoni C D. Quoniam d angulus A C D in semicirculo rectus est; Ergo e figura X ex hypothenusa æqualis est duabus figuris R, Z simul sumptis; estque f figura X quadrupla figuræ M (cùm diameter D A dupla sit radij A E): Ergo duæ figuræ R, & Z simul sumptæ æquales sunt quadruplo figuræ M. Et addita communiter figura M erunt tres figuræ R, Z,



a scho. prop. 3. huius.
b ex prop. 3 huius.
c ex prop. 3. huius.
d prop. 20. l. 2.
e prop. 18. huius.
f coroll. 3. prop. 17. l. 4.

g prop 32. huius. R, Z, & M, simul sumptę, æquales quintuplo figurę M; g sed duabus figuris Z ex latere decagoni, & M ex latere hexagoni ęqualis est figura S ex latere pentagoni; Ergo duę figurę R, & S æquales sunt tribus figuris R, Z, & M. Et propterea duæ figuræ R, & S ęquales erunt quintuplo figuræ M. Quod erat ostendendum.

Finis Libri quinti.

LIBER SEXTVS.

Cùm in quinque præcedentibus libris elementa plana tradita sint, nedum per se vtilia, & scitu iucunda, sed etiam omnino necessaria, vt passiones solidorum, siue corporum percipi possint: consequenter elementa prima, & simplicia corporum tradentur, initio sumpto à definitionibus more geometrico.

DEFINITIONES.

I.

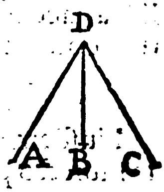
Solidum, siue corpus, est, quod longitudinem, latitudinem, & profunditatem habet, cuius extrema sunt superficies.

II.

Solidus angulus est concursus plurium, quàm duorum angulorum planorum, non in eodem plano consistentium ad vnum punctum.

III.

Vt si fuerint plures, quàm duæ rectæ A D, B D, C D, concurrentes in D, & non in eodem plano iacentes, anguli plani A D B, B D C, & C D A, non in eodem plano existentes, & concurrentes in D, efficiunt angulum solidum D. Et siquidem anguli plani constituentes solidum angulum D fuerint tres vocabitur talis solidus angulus triangularis, si quatuor quadrangularis, & sic vlterius.



III.

Solida rectilinea, quæ æquiangula inter se sunt, & omnia latera circa angulos solidos æquales proportionalia habent: vocentur similia.

IV.

Solida figura genita ex reuolutione semicirculi circa diametrum eius quiescentem, quousque redeat ad locum, à quo moueri cœperat; vocetur Sphæra. Et diameter quiescens, vocetur Axis sphæræ. Et centrum sphæræ erit idem, quod semi-

 circuli.

circuli. Diameter sphęrę est quęlibet recta per centrum sphęrę extensa. Circulus maximus sphęrę est ille, qui per centrum sphęrę transit: reliqui vero minores. Hemisphęrium autem vocetur dimidium sphęrę dissectum à circulo maximo.

POSTVLATA.

I.

Per quamlibet rectam lineam planum, seu superficiem planam ducere.

II.

Et quodlibet planum indefinitè producere.

AXIOMATA.

I.

Duo plana non habent segmentum commune.

II.

Duo plana solidam figuram non comprehendunt.

III.

Duorum planorum communis sectio linea est. Et eadem linea iacens tota in duabus superficiebus distinctis, erit earum communis sectio, vel contactus.

IV.

Eucl. prop. 1. XI. Eiusdem rectæ lineæ, cuius duo puncta, aut pars eius iacent in subiecto plano, pars reliqua in sublimi esse non potest.

a def. 5. l. 1. *Exigit enim a natura planæ superficiei, vt illi omnino, & vndequaque congruat recta linea, quod tunc verificatur, quando omnia puncta lineæ rectæ contingunt planam superficiem.*

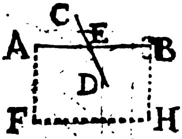
V.

Eucl. prop. 2. XI. Duæ rectæ se secantes in vno sunt plano.

Sint enim duę rectæ lineæ A B, & C D se secantes in E, patet ipsarum vnam, vt A B in vno plano A H intelligi posse collocatam, & si concipiatur planum A H circa rectam A B circunduci, necessariò in aliquo

loco

loco reuolutionis ipsius incidet in rectam C D saltem in aliquo puncto eius D præter punctum E ; & tunc planum ipsum A H, quod per duo puncta D, & E transit necessario per rectas D E, & A B transibit, quandoquidem recta linea E D non potest planum ipsum contingere in duobus punctis D, & E, & extra ipsum existere.

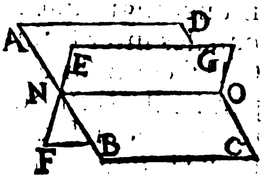


PROPOS. I. THEOR. I. Eucl. 3. XI.

Si duo plana se mutuò secent, communis eorum sectio recta linea est.

Duo plana A B C D, & E F G se secent a in linea N O. Dico lineam N O rectam esse. Sumantur duo quęlibet puncta N & O, quę in linea communis sectionis existant, idest iaceant in vtroque plano, & à puncto N ad O coniungatur recta linea. Quia b recta N O plano A C congruit, in quo puncta N, & O existunt, alias c non vndequaque plano A C congrueret recta linea. Pariter recta N O plano F G congruit, in quo pariter puncta N, & O existunt, Ergo recta N O in vtroque plano A C & E G iacet, estque communis sectio eorundem planorum linea vnica (alias d plana se secantia haberent segmentum commune, aut e solidam figuram comprehenderent: ergo recta N O est communis sectio eorundem planorum. Quare, &c.

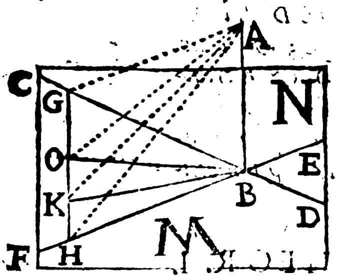
a axio. 3. huius.
b def. 5. l. 1.
c axio. 4. huius.
d axio. 1. huius.
e axio. 2. huius.



PROPOS. II. THEOR. II. Eucl. 4. XI

Si recta linea incidens in cōmunem sectionē duarū rectarum linearum perpendicularis fuerit ad vtranque, illa perpendicularis erit ad omnes rectas lineas, a quibus illa tangitur, quęque in plano per duas illas rectas lineas ducto sunt: Vocetur talis recta sublimis Erecta, seu Perpendicularis ad planum subiectum.

Duę rectę lineę C D, F E in plano M N existentes se secent in puncto B; & recta A B efficiat tam angulum A B C, quàm



angulum A B F rectum. Et ducatur à puncto B in plano N M quęlibet recta B K, cadens intra quemlibet angulorum C B F. Dico rectam A B esse quoque perpendicularem ad rectam B K. Secentur *a* G B, & H B ęquales inter se, iungaturque H G, secans B K in K, atque *b* H G secetur bifariam in O, coniunganturque rectę O B, A G, A O, A K, A H. Quia in triangulo isoscelio B H G basis G H bifariam secatur à recta B O; Ergo *c* O B perpendicularis est ad H G. Postea quoniam in triangulis A G B, A H B duo latera G B, & H B ęqualia sunt, & A B commune, angulique A B G, A B H sunt recti: Ergo *d* A G, A H ęquales inter se sunt; éstque trianguli isoscelij G A H, basis G H secta bifariam in O à recta A O: Igitur *e* ipsa A O perpendicularis est ad basim G H. Et quia *f* in triangulo A B H rectangulo in B, quadrato A H ęqualia sunt duo quadrata A B, B H; suntque *g* quadrato B H ęqualia duo quadrata B O, O H, cùm angulus O rectus sit: Ergo quadrato A H ęqualia sunt tria quadrata A B, B O, & O H. Similiter in triangulo A O H rectangulo in O eidem quadrato A H ęqualia sunt duo quadrata A O, O H. Igitur tria quadrata A B, B O, O H ęqualia sunt duobus quadratis O H, O A, & ablato communi quadrato O H, erunt duo quadrata A B, B O ęqualia quadrato A O: & propterea *h* angulus A B O rectus erit. Quare si rectę B k & B O coincidunt, erit angulus A B k rectus; si verò non coincidit, addito communi quadrato O K, erunt duo quadrata A O, O k, idest *i* quadratum K A (propter angulum rectum k O B) æqualia tribus quadratis k O, O B, B A; sed similiter duobus quadratis k O, O B æquale est quadratum K B (propter angulum rectum K O B); Igitur quadratum k A æquale est duobus quadratis K B, B A; & propterea *k* angulus A B k rectus est: Quare recta linea A B perpendicularis est ad qamlibet rectam B k, quæ à puncto B ducitur in plano M N. Quod erat ostendendum. Vocetur ipsa recta A B Perpendicularis ad planum M N, quod per rectas C D, F E ducitur.

a prop. 3. l. 1
b prop. 9. l. 1
c cor prop. 2. l. 2.
d prop. 4. l. 1
e cor. prop. 2. l. 2.
f prop. 18 l. 5.
g prop. 18. 5.
h coroll. 2 prop. 29. l. 5
i prop. 18. lib 5.
k coroll. 2. prop. 29. l. 5

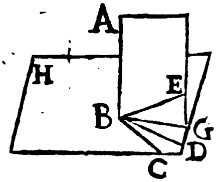
PRO-

PROPOS. III. THEOR. III.

Eucl. 5 XI.

Si recta linea incidens in communem sectionem trium rectarum ad singulas perpendicularis fuerit: illæ tres rectæ lineæ in vno sunt plano.

Recta linea A B incidat in B, & efficiat cum tribus B C, B D, B E, se tangentibus in B, rectos angulos. Dico tres rectas B C, B D, B E in vno plano esse. Si enim B E non iacet in plano C H, quod per rectas C B, & B D duci potest, producatur a planum H C quousque secet b planum per rectas A B, B E extensum in recta B G. Quoniam A B ponitur perpendicularis ad duas B C, B D: c Ergo A B perpendicularis est ad rectam B G positam in eodem plano per rectas B C, B D extenso; sed erat quoque A B perpendicularis ad B E, & iacet B E in plano A B G. Ergo duo anguli recti A B E, & A B G æquales sunt inter se, pars & totum; quod est impossibile. Non ergo recta B E extra planum C H iacet; ideoque rectæ B C, B D, B E in vno sunt plano. Quod erat ostendendum.



a post. 2. huius.
b prop. 1. huius.
c prop. 2. huius.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Eucl 8. & 18. XI.

Si in quolibet plano per rectam lineam ad subiectum planum perpendicularem extenso, recta eidem perpendiculari parallela ducta fuerit: erit illa perpendicularis quoque ad planum subiectum. Vocetur autem sublime planũ Erectum, seu Perpendiculare ad planum subiectum.

Sit recta C D perpendicularis ad planum E G, & per C D ductum sit quodlibet planum C D B, & in eo ducta sit AB parallela ipsi C D. Dico rectam A B ad idem planum E G perpendicularem esse. Iungatur recta B D; & in plano E G ducatur recta a H B perpendicularis ad rectam B D, & coniungantur rectę H D, H C, & B C. Quoniam recta C D perpendicularis est ad planum E G; Ergo b C D efficiet rectos angulos cum rectis lineis D B, & H D in eodem plano extensis ad terminum D; ideoque c in triangulo C H D rectangulo in D erit quadratum C H ęquale duobus quadratis C D, & D H; d sed qua-

a prop. 19. l. 1.
b prop. 2. huius.
c prop. 18. lib 5.
d prop. 18. l. 5.

quadrato D H ęqualia sunt duo quadrata H B, & B D (propterea quod angulus H B D rectus factus est). Igitur quadratũ HC ęquale est tribus quadratis HB BD, & DC; est verò quadratum B C ęquale duobus quadratis B D, & D C (eo quod angulus C D B rectus est); Ergo quadratum H C æquale est duobus quadratis H B, & B C; & propterea *e* in triangulo C B H angulus H B C rectus erit, sed factus fuit angulus H B D rectus: Igitur recta H B perpendicularis est ad duas B D, & B C; & *f* rectę B C, & B D iacent in eodem plano parallelarum A B, & C D, in quo puncta B, C, & D existunt: Ergo *g* recta H B perpendicularis quoque est ad rectam B A, quæ in eodem plano C B D existit: Est *h* etiam angulus A B D rectus, cùm reliquus internus C D B, & ad easdem partes parallelarum sit quoque rectus: Ergo recta A B perpendicularis est ad duas rectas B D, & B H concurrentes in B; Et propterea *i* A B perpendicularis erit ad planum E G, quod per rectas B D, & B H ducitur. Quod erat ostendendum. Vocetur quodlibet planum C D B ductum per rectam C D perpendicularem ad subiectum planum, Erectum, seu Perpendiculare ad idem planum E G.

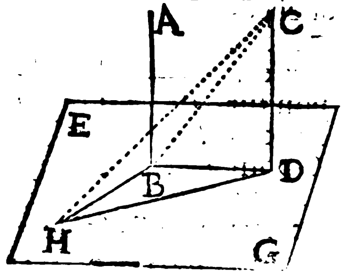
e corol. 2. prop. 29. l. 5

f axiom. 4 huius.

g prop. 2. huius.

h prop. 15. l. 2.

i prop. 2. huius.



Eucl. 7. XI.

COROLLARIVM.

Recta linea duo puncta coniungens in duabus parallelis sumpta in eodem plano parallelarum iacet. Sumpta enim fuerunt puncta B C in parallelis A B, C D, & ostensa fuit recta B C in plano parallelarum A B, C D iacere.

Eucl. 6. XI.

PROPOS. V. THEOR. V.

Si duę rectę ad idem planum perpendiculares fuerint, parallelę erunt inter se.

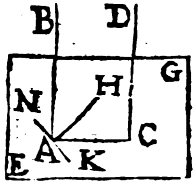
Sint duę rectę B A, & D C perpendiculares ad planum E G. Dico rectas B A, & D C parallelas esse. Si enim B A nõ est parallela D C, in *a* plano D C A, à puncto A ducatur A H parallela ipsi C D, & *b* per rectas A H, & A B extendatur planum secans subie-

a cor. prop. 16 lib. 1.

b post. 1. huius.

subiectum *c* planum E G in recta N A K. Et quia D C perpendicularis est ad planum E G: Ergo *d* ei parallela H A perpendicularis quoque erit ad planum E G: igitur *e* angulus H A k rectus erit; sed B A perpendicularis quoque est ad planum E G. Ergo angulus B A k rectus quoque est; & sunt anguli B A K, & H A K in eodem plano B A k: igitur totus angulus B A k equalis est angulo H A k suę parti, quod est absurdum. Non ergo alia recta, quàm B A esse potest, parallela ipsi D C. Quare patet propositum.

c prop. 1. huius.
d prop. 4. huius.
e prop. 2. huius.



COROLLARIVM I.

Eucl. 13. XI

Hinc constat ab eodem puncto, siue in sublimi, siue in subiecto plano, vnam tantum rectam lineam perpendicularem esse posse ad subiectum planum. Si enim duę A B, A H ad planum E G perpendiculares esse possent, inter se parallelę essent ex hac propositione, & se secarent in A, quod est impossibile.

COROLLARIVM II.

Eucl. Def. 4 & prop. 38. XI.

Constat ex his duabus propositionibus, quòd in quolibet plano ad subiectum planum erecto omnes rectę lineę, quę in eo existentes perpendiculariter ad cōmunem planorum sectionem ducuntur, sunt quoque perpendiculares ad subiectum planum. Et illa, quę à puncto sublimi eiusdem plani erecti ducitur perpendiculariter ad subiectum planum cadet in cōmunem planorum sectionem. Nam, *f* vt planum aliquod D C a censeri debeat perpendiculare ad planum subiectum E G, necesse est, vt extendatur per aliquam perpendicularem ad planum subiectum, vt per C D; & tunc *g* quęlibet recta A B cum A C communi sectione efficiens rectum angulum B A C, erit quoque parallela ipsi D C, eo quod reliquus internus D C A rectus quoque est. Vnde ex propositione quarta A B quoque erit perpendicularis ad planum subiectum E G. Si verò à puncto sublimi B, existente in plano B D C, erecto ad subiectum planum E G, cadat B A perpendicularis ad planum subiectum, punctum casus A existet in recta A C communi sectione planorum; eo quod ostensæ sunt duæ perpendiculares B A, & D C parallelæ inter se in hac quinta propositione, & ideo recta B A existet in eodē plano erecto C D B, in quo nimirum existit communis planorum sectio A C.

f prop. 4. huius.
g prop. 16. lib. 1.

PRO-

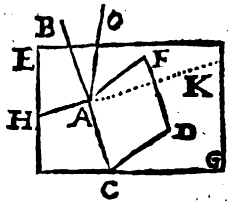
Eucl. 11. 12 XI.

PROPOS. VI. PROBL. I.

A dato puncto in sublimi, aut in subiecto plano posito, ducere rectam lineam perpendicularem ad subiectum planum.

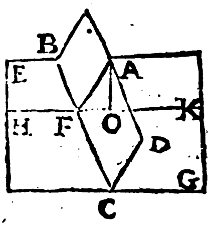
a post. 1. & prop. 1. huius. b prop. 1. huius c prop. 10. & 11 l. 1. d prop. 10. l. 1. e post 2. huius. f prop. 10. & 11. lib. 1.

Sit quodlibet planum E G: Debet à puncto A in dicto plano, aut in sublimi posito duci recta linea, quæ perpendicularis sit ad subiectum planum E G. Per punctum A a ducatur quodlibet planum A B D C, secans b subiectum planum E G in recta B C, atque c in plano A B C D à puncto A ducatur A F perpendicularis ad rectam B C, & d in plano E G à puncto intersectionis rectarum B C, A F ducatur H K perpendicularis ad eandem B C; tandem in plano per rectas F A, & H K e extenso ducatur f à puncto A recta A O perpendicularis ad rectam H K. Dico A O perpendicularem esse ad planum E G.



g prop. 2. huius. h prop. 4. huius.

Quoniam recta BC perpendicularis est ad duas rectas F A, & H K se secantes primò in A, secundò in F: Ergo g recta B C perpendicularis est ad planum per rectas F A, & H K ductum: atque h planum E G extensum per eandem perpendicularem B C erit quoque erectum ad idem planum: ergo vicissim planum per rectas F A, H K ductum perpendiculare erit ad planum E G; & recta A O existens in plano per F A, H K extenso ducitur perpendiculariter ad H k eorum communem sectionem. Ergo i recta A O perpendicularis est ad planum E G; quod faciendum erat.



i coroll. 2. prop. 5. huius.

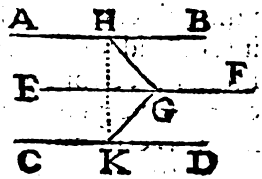
Eucl. 9. XI

PROPOS. VII. THEOR. VI.

Si duę rectę lineę vni tertię parallelę fuerint, nō in eodem plano existentes, inter se quoque parallelę erunt.

Sint rectę A B, & C D parallelę eidem rectę E F, & non sint omnes in vno plano. Dico rectas A B, & C D inter se parallelas

las esse. A quolibet [a] puncto G rectę E F ducantur in planis ęquidistantium rectę lineę G H & G K perpendiculares ad eandem E F, quę secent oppositas parallelas in H, & K, & coniugatur recta H k. Quoniã eadem recta linea E G perpendicularis est ad duas rectas G H, G k; ergo [b] E G perpendicularis est ad planum G H K; est vero A H parallela ipsi E G. Igitur [c] A H perpendicularis quoque est ad planũ H G K. Eadem ratione C D ęquidistans eidem E G perpendicularis quoque erit ad planum H G K; cùmque duę rectę A H, & C K sint perpendiculares ad planum H G k [d] erunt A H & C K inter se parallelę. Quod erat ostendendum.



a prop. 10. l. 1.

b prop. 2. huius.

c prop. 4. huius.

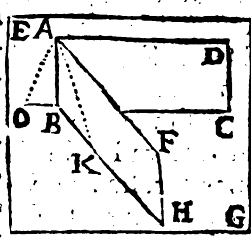
d prop. 5. huius.

PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 19. XI.

Si duo plana se mutuò secantia per duas parallelas ducta fuerint, efficient communem sectionem vtrique ipsarum ęquidistantem. Et si ambo plana perpendicularia fuerint ad subiectum planum; & communis eorum sectio ad planum subiectum perpendicularis erit.

Primò per duas rectas ęquidistantes D C, & F H ducta sint duo plana A C, BF se secãtia in recta linea AB. Dico A B parallelam esse vtrique ipsarum D C, & F H: Si enim hoc verum nõ est, in duobus planis A C, A H à [a] puncto cõmuni A sectionis A B ducantur, A O quidem parallela ipsi D C, & A K parallela ipsi F H. Et quoniam A O, F H parallelę sunt eidem D C [b] erunt inter se parallelę quoque; & fuit A K eidem F H parallela. Ergo [c] A O, & A K parallelæ sunt inter se, & se secant in A, [d] quod est impossibile. Non ergo alia recta linea pręter A B communis planorum sectionis, esse potest parallela vtrique ęquidistantium D C, F H.



Secundò plana A C, A H perpendicularia ad subiectum planum E G, idque secãtia in BC, BH se mutuo secẽt in recta A B. Dico A B perpendicularẽ esse ad planum E G. à quibuslibet [e] punctis C, & H in planis erectis ducantur perpendiculares C D, H F ad communes sectiones B C, B H: erunt tam D C, quam H F [f] perpendiculares ad planum

a cor. prop. 16. l. 1.

b prop. 7. huius.

c prop. 17. l. 1.

d coroll. 2. prop. 14. lib. 1.

e prop. 10. vel 11. l. 1.

f cor. 2. pr. 5. huius.

g prop. 5. huius. h ex prima par. huius. i prop. 4. huius.

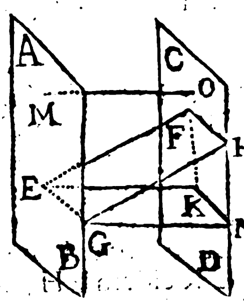
num subiectum E G; & propterea g D C, & H F parallelę erunt inter se; ideoque per eas ducta plana A C, B F efficient communem sectionem A B parallelam cuilibet ipsarum C D; sed erat DC perpendicularis ad planum subiectum; ergo A B planorum i communis sectio perpendicularis quoque erit ad subiectum planum E G, vt fuerat propositum.

PROPOS. IX. THEOR. VIII.

Si ad duo plana eadem recta linea perpendicularis fuerit, omnes rectæ lineę inter se parallelæ sectæ ab illis duobus planis, erunt æquales inter se. Vocentur illa duo plana parallela inter se.

Sint duo plana A B, & D C, & vna tantùm linea M O perpendicularis sit ad vtrumque planum, & duæ quælibet rectæ lineæ E F, G H parallelæ inter se secentur vtrinque ab eisdem planis in punctis E, F, G, H. Dico rectas E F, & G H æquales esse inter se. A punctis E, & G a ducantur rectæ E K, G N perpendiculares ad reliquum planum C D, & coniungantur rectæ K F, N H, K N, F H, & E G. Quoniam rectæ M O, & E k perpendiculares sunt ad planum C D: Ergo rectę M O, E k parallelæ sunt inter se, & earum vna O M perpendicularis est ad planum A B: Ergo reliqua c k E perpendicularis quoque erit ad idem planum A B. Eadem ratione recta G N, quę perpendicularis ponitur ad planum C D erit quoque ad reliquum planum A B perpendicularis. d Quare duę rectę E k, & G N perpendiculares quoque erunt ad rectas contiguas E G, & K N in eisdem planis existentes. Et propterea e spatium rectangulum E G N K parallelogrammum erit, cuius opposita latera E K, G N ęqualia, & parallela erunt; nec non duo latera E G, K N parallela erunt, & æqualia. Iam cùm per duas parallelas E G, & K N ducantur duo plana E H, & N F se secantia in recta F H: erit f F H parallela ipsi E G; sed positę fuerant duæ E F, & G H parallelæ inter se: Ergo g spatium E G H F parallelogrammum est, cuius opposita latera E F, & G H æqualia erunt. Eadem ratione reliquę omnes rectæ parallelæ ipsis E F, vel G H sectę à planis A B, & C D ostendentur

a prop. 6. huius. b prop. 5. huius. c prop. 4. huius. d prop. 2. huius. e prop. 27. l. 1. f prop. 8. huius. g prop. 26. l. 1.



æquaęquales inter se, & ęquales ipsis E F, G H. Quod erat ostendendum. Vocentur iam duo plana A B, C D parallela inter se; & quęlibet recta M O perpendicularis ad vtrunque planum vocetur Distantia eorum.

COROLLARIVM I.

Eucl. 16. XI

Patet, si recta linea ad vnum ęquidistantium planorum perpendicularis fuerit, esse quoque perpendicularem ad reliquum. Et si duo plana parallela secentur ab alio plano, esse cōmunes eorum sectiones parallelas. Et quęlibet recta linea aut planum secans vnum ęquidistantium planorum secabit quoque reliquum.

Nam recta linea E K ducta fuit perpendicularis ad planum C D; & ostensa fuit perpendicularis ad reliquum planum A B parallelum ipsi C D. pariterque sectiones E G, F H, factę à plano quolibet E H in planis parallelis A B, & C D, ostensæ fuerunt parallelę inter se.

Rursus si quęlibet recta linea E F secuerit planum A B in E, poterit [h] per E duci E k perpēdicularis ad planum C D, & planum per rectas E K, & E F extensum necessario secabit planum C D in aliqua recta per punctum k extensa. ideoque rectæ k F, E F conuenient (cum angulus k rectus sit, & angulus k E F sit acutus contentus à k E perpendiculari ad planum A B, & ab E F, quæ non iacet in dicto plano), vnde recta E F, & quodlibet planum per ipsam ductum secabit quoque reliquum ęquidistantium planorum C D.

h prop. 6. huius.

i prop. 17. lib. 1.

COROLLARIVM II.

Eucl. 14. XI.

Constat etiam duo plana parallela, scilicet ad quæ eadem recta linea perpendicularis est, nunquam concurrere.

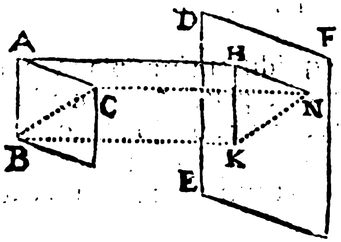
Nam infinitè productis parallelis planis A B, & C D vbiq; potest duci aliqua recta linea G N, quæ perpendicularis sit ad vtrumque planum, & ęqualis erit vni perpendicularium E k.

PROPOS. X. THEOR. IX.

Eucl. 10. & 15. XI.

Si duæ rectę lineę se mutuò tangentes ad duas rectas se tangentes fuerint parallelæ, illæ angulos ad easdem partes vergentes æquales comprehendent. Et plana, quæ per illas ducuntur: parallela erunt.

Sint duæ rectæ A B, A C se tangentes in A parallelæ duabus rectis D E, D F in alio plano existentibus, & se tangentibus in D. Dico primo ad easdem partes positos angulos B A C, & E D F æquales esse. Ducatur *a* à puncto A ad planum E D F perpendicularis A H incidens in punctũ H, à quo in plano E D F ducantur *b* rectæ H k parallela ipsi D E, & H N parallela reliquę D F. Patet *c* angulum k H N ęqualem esse angulo E D F; Secentur *d* postea H k equalis A B, & H N æqualis A C, & coniungantur rectę B C, k N, B k, C N. Et quoniam duę rectę A C, H N parallelę sunt eidem D F: Ergo *e* A C, & H N inter se parallelę sunt, & erant ęquales: Igitur *f* parallelogrammum est A C N H; & ideò C N ęqualis est, & parallela ipsi A H. Eodem modo A B, H k ęquales inter se sunt, & *g* ęquidistant, cum sint parallelę eidem D E: Ergo vt prius B k ęqualis est, & parallela eidem A H; & propterea C N, & B K ęquales inter se, & *h* parallelę erunt. *i* Vnde parallelogrãmum erit B C N k, & eius latera opposita B C, k N parallela; & ęqualia inter se erunt. Quare in triangulis A B C, H K N nedùm A B, H K ęquales sunt, atque A C, H N ęquales, sed etiam bases B C, K N sunt ęquales; *k* ideoque angulus B A C æqualis erit angulo K H N; sed prius erat angulus E D F æqualis eidem angulo K H N. Igitur anguli B A C, & E D F ęquales inter se sunt.



a prop.6. buius.
b cor. prop. 16. lib.1.
c coroll 1. prop.7. l.4.
d prop.3 l.1
e prop.7. buius.
f prop.37. lib.1.
g prop.7. buius.
h prop.7. buius.
i prop 27. l.1.
k prop.7.l.1

Secundò dico plana B A C, & E D F, quę per easdem rectas ducuntur esse parallela inter se. Nam recta A H ducta est perpendiculariter ad planum E D F; & ideo *l* efficit in eo angulos A H N, & A H K rectos, & spatia A N & A K, quæ ostensa sunt parallelogramma, erunt *m* rectangula. Quare anguli H A C, H A B recti erunt; ideoque *n* eadem recta A H perpendicularis etiam erit ad planum A B C; & propterea *o* plana A B C, D E G parallela erunt. Vt erat propositum.

l prop.2. buius.
m cor. prop. 34 l. 1.
n prop. 2. buius.
o prop.9. buius.

CO-

COROLLARIVM.

Facili negotio per datum punctum extra datum planum duci potest planum æquidistans plano dato.

Si enim per punctum A duci debeat planum æquidistans dato plano E D F, p ducenda est A H perpendicularis ad planum E D F, & q à puncto A super recta H A debent eleuari duę perpendiculares C A, & B A, super planis N H A, K H A, quę non sint in directum posita; erit r recta H A perpendicularis ad planum anguli B C D, & ducta prius fuit perpendiculariter ad planum E D F. Ergo s erit planum anguli B A C æquidistans plano E D F.

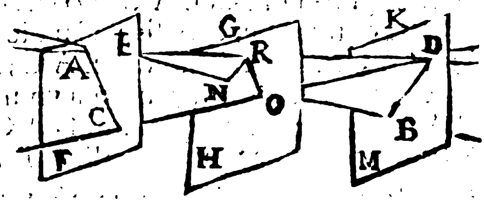
p prop. 6. huius.
q prop. 10. l. 1.
r prop. 2. huius.
s prop. 9. huius.

PROPOS. XI. THEOR. X.

Eucl. 17. XI

Si duę rectę lineę planis parallelis secentur, in easdem rationes secabuntur.

Duę rectę A B, & C D, siue in eodem, vel diuersis planis quomodocunque positę secentur à planis inter se parallelis E F, G H, K M in punctis A, O, B, C, N, D. Dico eas secari proportionaliter, idest esse A O ad O B vt C N ad N D. Coniungantur rectę A C, B D, & A D, quę occurrat plano G H in puncto R, & à puncto R ad O, & N rectę O R, R N iungantur. Quoniam planum trianguli A C D secatur à duobus planis parallelis E F, G H, Ergo a eorum communes sectiones A C, R N parallelę erunt, ideoque b vt A R ad R D, ita erit C N ad N D. Similiter quia planum



trianguli D A B secatur à duobus planis G H, K M inter se parallelis: Ergo c eorum communes sectiones D B, O R inter se parallelæ erunt, ideoque d vt A R ad R D, ita erit A O, ad O B; ostensa autem fuit C N ad N D in eadem ratione eiusdem A R ad eandem R D. Ergo e A O ad O B erit, vt C N ad N D. Quod erat ostendendum.

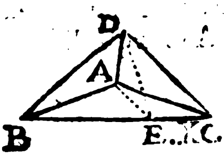
a cor. prop. 9. huius.
b prop. 2. l. 4
c cor. prop. 9 huius.
d prop. 2. l. 4
e prop. 7. l. 3

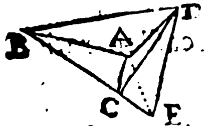
Eucl. 20. XI

PROPOS. XII. THEOR. XI.

Solidi anguli triangularis duo quilibet eius plani anguli tertio sunt maiores.

Sit triangularis solidus angulus A constans ex tribus angulis planis B A D, D A C, & C A B. Dico duos quoslibet angulos B A D, & D A C, simul sumptos, maiores esse tertio an-
a prop. 24. lib. 1. gulo B A C. In plano per B A C ducto fiat a angulus B A E æqualis angulo B A D. & siquidem A E cadit super A C, patet duos angulos B A D, D A C maiores esse angulo B A C. Quando vero A E cadit inter rectas B A, A C, in rectis A B, A C sumantur duo quælibet puncta B, & C, & iungatur recta B C, secans interceptam A E in E. At quando recta A E cadit extra angulum B A C, à quolibet puncto E rectæ A E coniungatur recta E B, secans interceptam rectam A C in





b prop. 3. l. 1 C, Et b secetur A D ęqualis E A, iunganturque rectę lineę B D, D C, & D E. Quoniam circa ęquales angulos B A D, B A
c prop. 4. l. 1 E sunt latera A D, A E ęqualia, & A B commune. Ergo c triangulorum bases B D, B E æquales sunt. Quare C E erit diffe-
d prop. 21. ib1. rentia duorum laterum B D, B C; & propterea d in triangulo B D C laterum differentia C E minor erit base C D; cumque in triangulis D A C, E A C duo latera A D, A E sint ęqualia,
e schol prop. 6. l. 2. & A C commune, & basis B C maior base C E: ergo e angulus D A C maior erit angulo E A C; sed erant anguli B A D,
axio. 4. l. 1 B A E æquales. Igitur f summa vnius ęqualium angulorum B A D, & maioris inęqualium D A C maior erit angulo B A C, qui est summa vnius ęqualium B A E, & minoris inęqualium E A C in primo casu, vel eorum differentia in secundo. Quare patet propositum.

Eucl. 21. XI

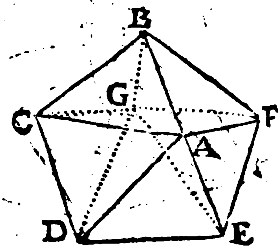
PROPOS. XIII. THEOR. XII.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis planis continetur.

Sit angulus solidus A contentus quotcunque angulis pla-

nis

nis B A C, C A D, D A E, E A F, F A B. Dico eos omnes simul sumptos minores esse quatuor planis angulis rectis. a Ducatur planum, secans omnes rectas angulum A continentes, vt efficiatur b figura rectilinea B C D E F tot laterum, quot sunt plani anguli solidum angulum A continentes, & sumpto intra polygonum B C E quodlibet punctum G, ab eo ad angulos omnes polygoni ducantur rectæ G B, G C, G D, G E, & G F. Et quoniam polygoni latera B C, C D, D E, E F, F B sunt bases, nedum triangulorum verticem habentium in G; sed etiam triangulorum verticem in A habentium. Ergo tot sunt triangula verticem habentia in G, quot sunt ea, quę verticem in A habent; sed c cuiuslibet trianguli tres anguli sunt ęquales duobus rectis. Ergo ęquali numero rectorum ęquales erunt anguli omnes triangulorũ verticem in G habentiũ; atque anguli omnes triangulorum verticem in A habentium. Et propterea anguli omnes triangulorum verticem in G habẽtium, simul sumpti, ęquales erunt angulis omnibus, simul sumptis, triangulorum verticem habentium in A. Postea d in angulo solido triangulari B duo plani anguli F B A, C B A maiores erunt angulo C B F; idest maiores erunt duobus angulis F B G, C B G, & sic reliqui omnes. Quare omnes anguli, qui sunt ad bases triangulorum verticem in A habentium, simul sumpti, maiores erunt omnibus angulis, qui sunt ad bases triangulorum verticem in G habentium; ideoque residui anguli omnes verticales, qui solidum angulum A efficiunt, minores erunt residuis omnibus angulis, qui in G verticem habent; sed e anguli omnes, qui in G verticem habent, quatuor angulis rectis sunt æquales. Igitur anguli plani omnes, qui solidũ A componunt, simul sumpti, quatuor rectis minores erunt. Quod erat ostendendum.



a post. 1. & 2. huius.
b prop. 1. huius.
c prop. 18. l. 1.
d prop. 12. huius.
e coroll. 2. prop. 13. l. 1.

PROPOS. XIV. PROBL. II.

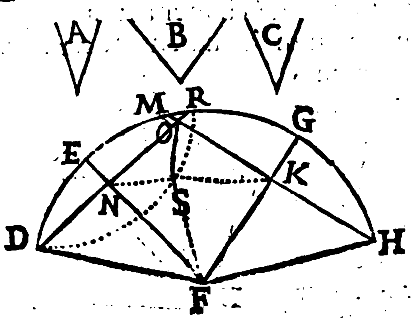
Eucl. 23. XI

Ex tribus angulis planis, quorum duo quilibet tertio sint maiores, & tres simul quatuor rectis minores sint, solidum angulum constituere.

Sint tres anguli A, B, C, qui simul sumpti sint minores quatuor

tuor

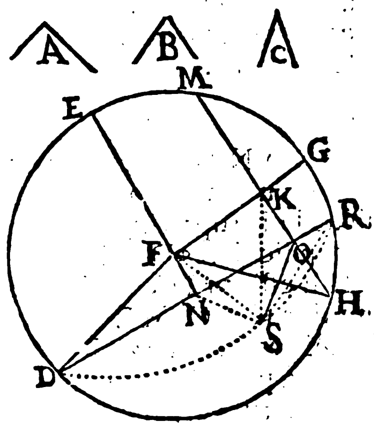
tuor rectis; sed duo quilibet ex eis tertio sint maiores. Debet effici angulus solidus, cuius tres anguli sint ipsis A, B, C æquales. In quolibet circulo D G H, cuius radius F D, fiant a ad centrum anguli D F E equalis angulo A, & E F G equalis angulo B, atque G F H equalis angulo C: erunt b tres arcus D E, E G, G H minores integra circuli peripheria, & duo ex eis maiores tertia, sicuti anguli A, B, C, seu ijs equales anguli ad centrum F, qui proportionales sunt peripherijs subtensis, minores sunt quatuor rectis, & duo quilibet maiores sunt tertio. Et à c punctis D, & H ad radios E F, G F ducantur perpendiculares D R, H M. Patet d rectas D R, H M efficere arcum D E R duplum arcus D E, & arcum H G M duplum arcus H G: Quare e rectę D R, H M antequam ad puncta R, & M pertingant se secabunt intra circulum, vt in O; & propterea f rectangula parallelogramma D O R, & H O M æqualia erunt. g eleuetur iam à puncto O recta O S perpendicularis ad planum R H, cuius h quadratum sit equale rectangulo D O R, vel H O M, erit O S nedum i perpendicularis ad rectas D R, H M in subiecto plano existentes; sed etiam k erit media proportionalis tam inter D O, O R, quàm inter H O, O M; & propterea l tria puncta D, S R in semicirculi peripheria existent erecti m ad planum D G H, cùm per S O erectam ad idem planum ducatur: non secus tria puncta H, S, M, in peripheria semicirculi erecti ad idem planum existent. Coniungantur tandem rectę N S, K S. Et quoniam planum D R H ostensum est perpendiculare ad planum semicirculi D S R; estque E F N in vno eorum posita perpendicularis ad D R communem planorum sectionem: Ergo n E F N perpendicularis est ad planum D S R; & propterea o E F N perpendicularis est ad rectam N S in eo positam. Quare in duobus triangulis F N S, F N D circa duos angulos rectos S N F, D N F sunt duo latera D N, N S ęqualia, cùm sint radij circuli D S R & F N commune: Ergo p anguli S F N, D F N ęquales sunt; estq; angulus A ęqualis angulo D F N, vel D F E in primo casu, vel angulo D F E complemento ipsius D F N in secundo casu.



a prop. 24. lib. 1.
b coroll. 2. prop. 11 l. 5 & cor 2. pr. 26 l. 3.
c prop. 10. lib 1.
d prop. 19. l. 1
e scho prop. 23. l. 1
f pr. 22. l. 4.
g pr. 6. huius
h pr. 21. l. 4.
i pr. 2 huius.
k cor. 2 pr 14 l. 4.
l sch pr. 9. l. 4.
m prop 4. huius.
n cor. 2. pr. 5 huius.
o prop. 2. huius.
p pr. 4 l. 1.

Ergo

Ergo angulus S F E æqualis erit angulo A.



Eodem modo ostendetur angulus S F K æqualis angulo H F K, seu angulus SFG æqualis angulo H F G, vel angulo C. At si duo anguli A, & C, siue eis æquales D F E, H F G sint recti à puncto q F eleuetur recta linea F S perpendicularis ad planum anguli E F G. Manifestum est r rectam S F perpēdicularem esse ad ambas rectas F E, & F G, & propterea angulus S F E æqualis erit angulo recto A, & angulus S F G æqualis erit recto angulo C: factus autem fuit angulus E F G æqualis angulo B. Igitur tres anguli plani E F S, S F G, G F E componentes angulum solidum F æquales sunt datis angulis A, B, C. Quod faciendum erat.

q prop. 6. huius.
r prop. 2. huius.

COROLLARIVM.

Eucl. 26. XI

Hinc patet artificium quomodo ad datam rectam eiusque punctum constitui possit angulus solidus, cuius anguli plani æquales sint singulis angulis dati anguli solidi. Si enim datus angulus solidus triangularis non est, ductis s planis per binas quasque rectas lineas diuidi poterit datus angulus solidus in plures solidos angulos triangulares, quorum singuli tres angulos conditionatos habebunt, idest t erunt minores quatuor rectis, & u duo quilibet tertio maiores. Ergo ex hac propositione effici potest ad datã rectã eiusq; pūctum angulus solidus triangularis æqualis vni angulo solidorum triangularium. Postea superaddi potest secundus, & tertius, &c. similiter positus angulus solidus, quousque omnes simul anguli solidi triangulares æquales sint iis in quos datus angulus solidus resoluitur; & ideo patet propositum.

s post. 1. huius.
t prop. 13. huius.
u prop. 12. huius.

PROPOS. XV. THEOR. XIII.

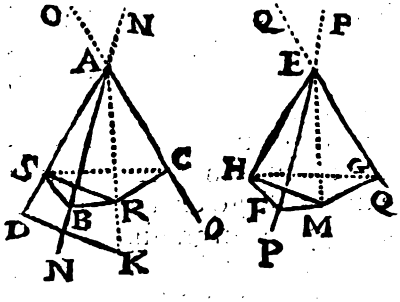
Eucl. 35. XI

Si in duobus angulis solidis triangularibus contentis ab angulis planis, qui sint æquales singuli singulis cadant perpendiculares

 culares

culares à sublimibus rectis lineis similiter positis ad plana angulorũ: erunt inter se sublimes, vt perpendiculares, & per eas educta plana efficient angulos ad easdem partes ęquales inter se.

In duobus angulis solidis triangularibus A, & F sint anguli plani D A N, H E P ęquales; pariterque anguli D A O, H E Q inter se, nec non angnli N A O, P E Q sint ęquales, atque à pũctis D, H sũptis in sublimib⁹ similiter positis D A, H E cadãt perpendiculares D K, H M ad plana N AO, P E Q. Dico D A ad H E esse, vt D k ad H M, & plana A D k, E H M effi cere angulos K A O, M E Q æquales inter se. Secetur a S A ęqualis H E, & ducatur b S R perpendicularis ad planum N A O, atque c à pũctis R, M incidentiarũ ad rectas A N, A O, E P, E Q ducãtur perpendiculares R B, R C, M F, M G; & coiungãtur rectę R A, M E, S B, S C, H F, HG. Quoniã recta A C perpendicularis est ad R C communem sectionem planorum S R C, & B A C ad d inuicem perpẽdicularium (cùm planum S R C extendatur per S R erectam ad planum B A C) e Ergo A C perpendicularis ęst ad planum S R C; ideoque f angulus A C S rectus est: eadem ratione anguli A B S, E G H, E F H recti erunt. Cùmque in duobus triangulis A CS, E G H ęqualia sint latera S A, H E subtendentia angulos rectos C, & G, suntque duo anguli S A C, H E G ęquales: Ergo g latera A C, E G ęqualia sunt: eadem ratione B A, F E ęqualia erunt; & sunt duo anguli B A C, F E G ęquales, atque anguli B, F, C, G recti. Igitur facta intellectuali applicatione h figuræ F E G M, B A C R sibi mutuò congruent, ideoque recta G M super C R, nec non F M super B R cadent: Quare punctũ concursus M cadet super R, & propterea rectę M E, R A sibi mutuò congruentes ęquales erunt; pariterque anguli G E M, C A R æquales erunt. Tandem quia in duobus triangulis S A R, H E M duo latera S A, A R ad duo H E, E M habent eandem æqualitatis rationem, & anguli recti S R A, H M E (facti i à lineis S R, H M erectis ad plana subiecta) opponuntur homologis S A, HE, & k reliqui anguli sũt acuti: ergo l perpendicu-



a pr 3. l. 1.
b prop. 6. huius.
c pr. 11. l. 1
d pr. 4. huius.
e cor. 2. pr. 5. huius.
f pr. 2. huius
g pr. 25. l. 1
h axio. 9. l. 1
i pr. 2. huius
k cor. 3. pr. 18. l. 1.
l pr. 8. l. 4.

diculares S R, H M æquales sunt: posita autem fuit D k perpendicularis quoque ad idem planum B A C: Ergo m D K, SR parallelę sunt, & in n eodē plano trianguli S A R subiectum planum secantis in eadem recta linea A R k, quæ efficit angulum k A O æqualem ipsi M E Q. & o propter similitudinem triangulorum D A k, S A R erit sublimis D A ad S A, seu p ad ei ęqualem H E, vt perpendicularis D K ad S R, seu ad ei ęqualem H M. Quod erat ostendendum.

m pr. 5. huius.
n cor pr. 4. huius.
o pr. 4. l. 4.
p pr. 3. l. 3.

COROLLARIVM.

Manifestum est duas perpendiculares ab eadē sublimi eiusdē anguli solidi ductas cadere in eādem rectā lineam per angulum subiectum transeuntem. Ostensum enim fuit in hac propositione perpendiculares D K, S R cadere in eandem rectam lineam K R A, quę per punctum A anguli plani subiecti transit.

DEFINITIONES SECVNDAE.

I.

Si à perimetro figurę planę ad sublime punctum recta linea eleuata conuertatur circa figurę perimetrum, fixo manente puncto sublimi, quousque redeat ad locum, à quo cęperat moueri: vocabitur solidum genitum, si figura subiecta rectilinea fuerit, Pyramis.

II.

Si verò fuerit circulus: vocetur Conus.

III.

Et punctum sublime fixum vocetur Vertex Pyramidis, vel Coni.

IV.

Atque figura plana subiecta vocetur Basis eius.

V.

Et perpendicularis à vertice ad basim Pyramidis, vel coni ducta: vocetur eius Altitudo.

V I.

Et si quidem perpendicularis à vertice incidat non extra basim: vocetur illa Directa.

V I I.

Si verò extra ceciderit: vocetur Pyramis Inclinata.

V I I I.

Et rectę à vertice ad angulum basis pyramidis: vocentur Latera eius.

I X.

Et quælibet recta à vertice ad circumferentiam circuli basis coni: eius Latus vocetur.

X.

Atque recta à vertice ad centrum circuli basis: vocetur Axis Coni.

X I.

Coni verò, quorum axes erecti fuerint ad basim: vocentur Recti.

XII.

Et quorum axes inclinati sunt ad basim: vocentur Scaleni.

XIII.

Si à perimetro figurę planę recta eleuata non in eius plano iacens reuoluatur semper sibi ipsi ęquidistanter constituta circa figurę perimetrum, quousque redeat ad locum, à quo moueri cęperat; atque superficies genita secetur plano ęquidistante figurę subiectę: vocabitur solidum genitum, si figura subiecta rectilinea fuerit, Prisma.

XIV.

Si verò fuerit circulus vocetur Cylindrus.

X V.

Et figura subiecta vocetur eius Basis.

XVI.

XVI.

Et recta linea translata in cylindro, at adherens angulis basis Prismatis inter basim, & oppositum planum ei parallelum intercepta, vocetur Latus eius.

XVII.

Et perpendicularis ad basim intercepta inter opposita plana parallela: Altitudo eius vocetur.

XVIII.

Atque linea ex centro basis cylindri parallela lateri: Axis eius vocetur.

XIX.

Et si latera perpendicularia fuerint ad bases: erunt Prisma, & Cylindrus rectus.

XX.

Si verò inclinata fuerint vocentur Scaleni.

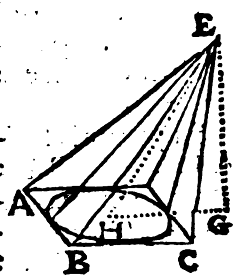
XXI.

Prisma à sex planis quadrilateris, quorum opposita sint parallela, contentum: vocetur Parallelepipedum.

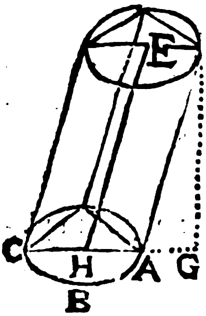
XXII.

Similes Coni, & Cylindri sunt, quorum axes æquè inclinati sunt ad bases, & proportionales sunt diametris basium.

Vt si fuerit figura plana A B C rectilinea, vel circulus; atque punctum E in sublimi extra dictum planum, & à puncto A ad E iungatur recta A E, atque recta A E circa punctum fixum E conuertatur per figuræ A B C perimetrum, quousque redeat ad locum, à quo cœperat moueri; tunc quidem genita figura solida E A B C habens subiectam figuram planam A B C rectilineam: vocabitur Pyramis. Si vero plana figura A B C fuerit circulus: vocabitur Conus.



Sed si recta linea A E, iacens extra planum figuræ A B C reuoluatur per



per figuræ A B C perimetrum semper tamen sibi ipsi æquidistanter constituta dum mouetur, quousque redeat ad locum à quo moueri cœperat, atque superficies genita à recta A E reuoluta secetur plano E parallelo plano figuræ A B C; tunc quidem solida figura genita E A B C E habens subiectam figuram planam A B C rectilineam, vocabitur Prisma; illa verò, quæ habet figuram A B C circulum, vocetur Cylindrus.

Et punctum E in pyramide, & Cono: Vertex vocetur; in omnibus autem dictis solidis figura plana A B C vocetur basis solidi; Et recta linea E G perpendicularis ad planum basis ducta à vertice E, vel à plano opposito basi: vocatur altitudo solidi. Et in pyramide si dicta perpendicularis E G incidat non extra basim A B C; tunc pyramis vocatur directa; si verò extra cadat, vocetur pyramis inclinata.

Et recta linea E A translata, vbicunque sumatur, vocatur latus coni, vel cylindri; sed angulos basis contingens vocatur latus pyramidis, vel prismatis.

Et recta linea E H à circuli centro H ad verticem ducta in cono, & parallela lateri E A in cylindro, vocetur Axis eius.

Coni, quorum axes perpendiculares fuerint ad bases vocantur recti, reliqui verò Scaleni.

Prisma verò, & Cylindrus, cuius latus perpendicularis fuerit ad planum basis: vocabitur rectus; reliqui verò Scaleni.

PROPOS. XVI. THEOR. XIV.

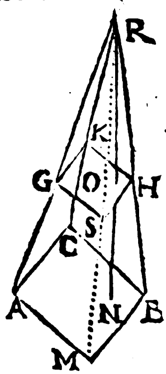
Si Pyramis secetur plano parallelo basi, erit segmentum eius ad partes verticis, Pyramis similis datæ Pyramidi; & sectio erit figura plana similis basi, quæ erunt in duplicata ratione altitudinum earum pyramidum, quarum sunt bases.

Sit pyramis R A C B M secta plano G k H S parallelo basi A C B M, & R N sit altitudo pyramidis, seu perpendicularis à vertice ad basim ducta, quæ secet planum G K S in O; eritque *a* R O perpendicularis quoque ad planum G k S parallelum ipsi A C M. Dico figuram solidam R G k H S pyramidem esse similem ipsi R A C B M, & planam figuram G K H S similem esse basi A C B M, & inter se esse in duplicata ratione

a cor. 1. pr. 9. huius.

alti-

altitudinum R O, & R N. Quoniam duo plana parallela A C B M, & G K H S secantur planis iisdem triangulorum R A C, R C B, R B M, & R M A. Ergo [b] eorum communes sectiones A C, G k parallelę sunt inter se, nec non C B, k H, pariterque B M, H S, atque M A, S G similiter ęquidistant. Vnde [c] figurę planę A C B M, & G k H S ęquiangulę sunt interse; atque triangula [d] R A C, R G K ęquiangula sunt inter se, & similia: Pariterque triangula R C B, R k H atque etiam triangula R B M, R H S, nec non triangula R M A, R S G sunt inter se æquiangula, & similia. Quare anguli solidi A, & G æquales sunt inter se, & circa eos latera R A ad A M proportionalia sunt lateribus R G ad G S: pariterque C A ad A R erit, vt K G ad G R; Vnde ex compositione ordinata erit C A ad A M, vt k G ad G S. Eadem ratione anguli solidi B, & H pariterque anguli solidi C, & K; nec nō solidi anguli M, & S ęquales erunt, existente angulo solido R cōmuni; & circa dictos angulos solidos æquales erunt, vt prius, latera proportionalia. Ergo [e] pyramis R G K H S similis est pyramidi R A C B M. Et quoniam anguli solidi A, & G ostensi sunt ęquales: Igitur [f] perpendicularis R N ad perpendicularem R O est, vt sublimis R A ad homologam sublimem R G, seu vt A C ad G k; sunt verò figuræ planæ A C B M, & G k H S ęquiangulę, quorum latera circa angulos ęquales sunt proportionalia, vt dictū est: Ergo [g] sunt [g] similia, & [h] habent duplicatam proportionem lateris A C ad eius homologum G K. Estque R N ad R O, vt A C ad G k. Ergo [i] figura A C B M ad figuram G k H S duplicatam rationem habet altitudinis R N ad altitudinem R O. Quod erat ostendendum.



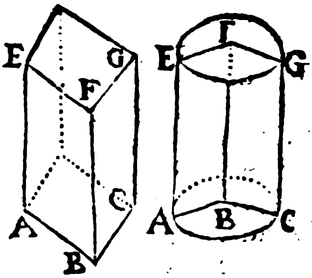
b cor 1 pr. 9. huius.
c cor. 1. pr. 7 l 4.
d cor. 1. pr. 6. l. 4.
e def. 3. huius.
f pr. 15. huius.
g pr. 16 l. 4
h pr. 17 l. 4
i cor. 3 pr. 19. l. 3.

PROPOS. XVII. THEOR. XV.

In Prismate, vel cylindro latera omnia ęqualia sunt inter se, & figura plana parallela basi ęqualis, & similis est basi.

Sit Prisma, vel Cylindrus A E G C, & planum parallelum basi sit E F G. Ostendendum est latera omnia ęqualia esse inter se, & in prismate rectilineam figuram E F G ęqualem, & similem esse basi A B C; in cylindro verò figuram E G circulum

lum esse æqualē circulo A C. A puncto F, vbi axis B F cylindri secatur plano E G, ducantur ad perimetrū figuræ E G quælibet rectæ F E, F G, ponaturque cylindri latera E A, G C, iunganturque rectæ A B, B C. Quoniam *a* in vtroque solido bina latera, vel latus A E, & axis B F sunt parallela inter se: Ergo *b* in vno sunt plano, & ab hoc plano secantur parallela plana A C, E G: Igitur *c* sectiones oppositæ A B, E F parallelæ sunt inter se, & *d* spatium A F parallelogrammum erit, cuius opposita latera A B ipsi E F, atque A E ipsi B F æqualia erunt. Eadem ratione B G, parallelogrammum erit, & C G ipsi B F, seu lateri A E æquale erit, atque C B ipsi G F æquale, & parallelum erit, sicuti A B, E F æqualia, & parallela erant. Ergo *e* angulus A B C æqualis est angulo E F G, & sic reliqui omnes anguli in prismate æquales erunt; atque circa æquales angulos latera sunt proportionalia (cùm duo *f* æqualia A B, E F ad duo æqualia C B, G F in eadem sint ratione. & sic reliqua omnia latera circa reliquos angulos æquales). Igitur *g* figura E F G similis, & æqualis est figuræ rectilineæ A B C; cùmque in cylindro à puncto F sumpto intra figuram E G quælibet rectæ F E, F G eductæ æquales sint radijs A B, C B, & ideo æquales inter se. Ergo *h* figura E G circulus est, cuius centrum F æqualis *i* circulo A C: fuerunt autem latera A E, C G & sic reliqua omnia latera ostensa æqualia tam in prismate, quàm in cylindro. Patet ergo propositum.



a def. 16 18 secun huius
b pr. 14. l. 1
c cor. 1. pr. 9. huius.
d pr. 26. l. 1
e cor. 1. pr. 7 l. 4.
f pr. 3. l. 3.
g pr. 16 l. 4
h def. 8. l. 1.
i axio. l. 2.

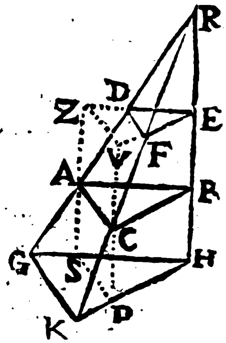
PROPOS. XVIII. THEOR. XVI.

Si super base pyramidis triangularis directę duo prismata recta describantur infra verticem pertingentia: supremum prisma circunscriptum, & maius erit frusto pyramidis supremo, & infimum prisma inscriptum, & minus erit inferiori frusto pyramidis.

Super base A B C triangularis directę pyramidis R A B C descripta sint duo prismata recta A B P, & A V B, quę secent pyramidem infra verticem R in planis D E F, & G H K parallelis basi A B C. Dico supremum prisma A V B circunscriptum

ptum

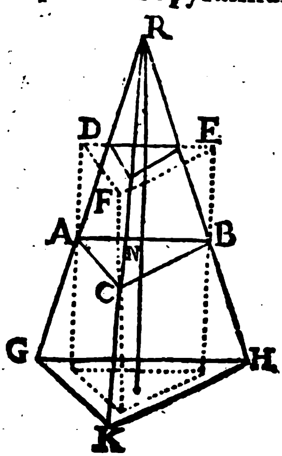
ptum & maius esse frusto supremo pyramidis A F B, & infimum prisma A P B inscriptum & minus esse pyramidis infimo frusto A k B. Et primò R B H perpendicularis à vertice R, incidat in angulum B. Quoniam duę rectæ R H & V C P perpendiculares sunt ad planum A B C, siue ad a planum G H K ei parallelum: b Ergo anguli R B C, V C B recti sunt, & V P parallela est ipsi R H, & c in eodem plano trianguli R H K existunt, in quo rectę C B, & BH iacent: Sed in triangulo R B C est angulus B rectus: ergo d angulus R C B est acutus; & ideo perpendicularis V C cadit extra triãgulum R K H & eius productio C P intra idẽ triãgulũ cadet: Eadem ratione recta S A intra triangulum R G H, & eius productio A Z extra ipsum cadet. Quare parallelogrammum A P intra pyramidem, & parallelogrammum A V extra ipsam cadet; & propterea prisma A P B intra frustum A k B inscriptum erit, & minus erit illo, atque prisma A V B circunscriptum, & maius erit frusto pyramidis A F B.



a cor. 1. pr. 9. huius.
b pr 2. & pr. 5. huius
c pr. 14. l. 1
d cor. 3. pr. 18. l. 1.

Secundò cadat perpendicularis R N, aut in latere A B, aut intra triangulum A B C in puncto N, & per latera pyramidis, & per perpendicularem R N plana ducantur diuisa erit pyramis in duas, aut tres pyramides; & in qualibet earum perpendicularis à vertice incidit in angulum basis; & e propterea omnia infima prismata super bases descripta, idest prisma ex eis compositum A B P inscriptum, & minus erit infimo frusto pyramidis A B K, & omnia suprema prismata super easdem bases descripta, idest prisma ex eis compositum A B V circunscriptum, & maius erit pyramidis supremo frusto A B F. Quare patet propositum.

e parte prima huius.



PROPOS. XIX. THEOR. XVII.

Si per rectam lineam basim coni, vel cylindri secantem, vel tangentem, & per latus solidi planum ducatur: quod per secantem ducitur intra solidum cadet; quod verò per tangentem ducitur continget solidi superficiem, & extra solidum cadet.

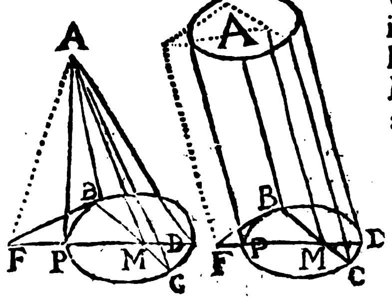
Sit conus, aut cylindrus, cuius basis B C D, summitas A, & recta linea B C secet basim solidi, at recta B F tangat eam in B, & posito latere B A ducantur plana A B C A, & A B F A. Dico planum A B C A intra solidum cadere, & planum A B F A tangere solidi superficiem, & extra ipsum cadere. Quia latus A B in superficie solidi existit, & est quoque in plano A B C A, vel in plano A B F A: Ergo a in eorum communi sectione, vel contactu existit. Quare planum A B C A; nec non planum A B F A secat, vel tangit solidi superficiem in recta linea A B. Eadem ratione planum A B C A secat solidi superficiem in latere A C à puncto C ducto. Postea sumpto quolibet puncto M inter puncta B & C, coniungatur recta M A ad verticem in cono, & parallela cuilibet lateri B A in cylindro, & per M ducatur quęlibet recta linea M D, quæ producta secet vbicunque circuli peripheriam in P & D; & ducantur b solidi latera P A, & D A: Erunt D A, M A, P A in eodem plano trianguli A P D per verticem in cono ducti, vel in eodem plano c parallelogrammi A P D A in cylindro; cùm latera P A, D A, & M A sint inter se d parallela & ęqualia. Et quoniam secans recta linea BC intra circulum B C D cadit: Ergo punctum M inter B, & C positum intra circulum ipsum pariter cadit; ideoque punctum M inter quęlibet puncta P, D, B, & C in circuli peripheria posita cadet. Ergo recta linea M A; quę ducta est intra triangula, vel parallelogrāma A B C A, & A P D A cadit inter quęlibet latera P A, B A, C A, & D A, seu inter omnia latera quæ duci possunt in superficie solidi: ergo recta linea M A cadit intra solidum.

a axio. 3. huius.

b def. 9. 16. secun. huius.

c pr. 27. l. 1.

d prop. 17. huius.



Eadem

Eadem ratione quelibet alia recta intra triangulum, vel parallelogrammum A B C A ducta cadet intra solidum. Quare planum A B C A intra solidum cadet, & ipsum secabit. Postremò in recta tangente B F à quolibet puncto F, quod non sit in contactu, ducatur recta F A ad verticem in cono, & e parallela lateri in cylindro, & ducatur à puncto F recta F D contingens, vel secans vbicunque circuli peripheriam in P, & D, atque latera solidi D A, P A ducantur: erunt, vt prius, D A, P A, F A in eodem plano trianguli, vel parallelogrammi A P D A, & parallelę inter se in cylindro. Et quia B F circulum B C D tangit in B: Ergo f punctum F extra dictum circulum cadit, & propterea punctum F non inter P & D, sed vltra rectam P D in circulo applicatam cadet; sed triangulum, vel parallelogrammum A D P A secans superficiem solidi in lateribus D A, & P A intra solidi superficiem includitur, & reliquum eiusdem plani extensi extra solidum cadit. Igitur recta F A extra figuram A D P A posita tota extra superficiem solidi cadet. Eadem ratione quelibet alia recta in plano A B F posita parallela lateri B A præter tangentem B A extra solidum cadet. Quare contingens planum A B F extra solidum cadet. Vt erat ostendendum.

e cor. pr. 16.

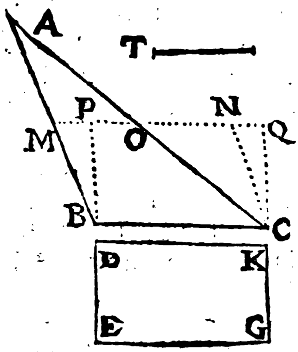
f pr. 21. l. 2.

PROPOS. XX. THEOR. XVIII.

Si triangulum, & parallelogrammum super ęqualibus rectis lineis descripta, fuerint inter se ęqualia: erunt super ea descripta prismata recta ęquè alta, ęqualia inter se.

Sint triangulum A B C, & parallelogrammum D G ęqualia inter se quorum latera B C, & E G ęqualia inter se sint. Dico prismata recta super his spatijs descripta, quorum altitudines ęquales sint rectę lineę T, esse inter se ęqualia. a Secetur A C bifariam in O, & b per O ducatur recta O M parallela BC secās AB in M & c fiat angulus CBP æqualis angulo E, d & cōpleatur parallelogrā mū BPQC, ducaturq; CN parallela e BA, secans f M P O in N. Quoniam duę rectę A C, M N, conuenientes in O secantur à parallelis A M, & C N: Ergo g triangula A M O, & C N O similia sunt, & habent latera homologa A O, C O ęqualia. Ergo h triangula A M O, C N O etiam ęqualia inter se sunt. & quoniam, facta intellectuali applicatione bases A M O, & C N O similes, & æquales sibi mutuò congruunt,

a pr. 9 l. 1.
b cor. pr 16. l. 1.
c pr. 24. l. 1
d pr 26 l. 1
e cor. pr. 16 l. 1.
f cor. pr. 29. l 1.
g cor. 1. pr. 6. l. 4.
h cor. 2. pr. 17. l. 4.



gruunt, altitudines verò ab angulis A, M, O, C, N, perpendiculariter eleuatæ ad plana triangulorum congruentium, cum æquales sint inter se, pariter sibi mutuò congruent (aliàs *i* ab ijsdem punctis binę perpendiculares duci possent ad subiectum planum, quod est impossibile) Ergo plana per congruentes perpendiculares extensa, & per earum summitates ducta sibi mutuò congruent. Vnde figuræ ipsæ solidæ conpræhensæ sibi mutuò congruent; & ideo prismata, quorum bases triangula A M O, & C N O, altitudines verò æquales rectæ T, erunt inter se ęqualia, additoque communi prismate recto eiusdem altitudinis, cuius basis quadrilaterum M B C O, cum quo priora prismata recta triangularia ęquè alta vnicum prisma constituent (eo quod à puncto O perpēdicularis eleuata ad planum A B C O est latus commune trium prismatum rectorum, quorum bases conueniunt in O, & sic reliquę perpendiculares), erunt prismata recta altitudine T descripta, quorum bases triangulum A B C, & parallelogrammum B N, ęqualia inter se. Rursus quoniā super recta M O Q ductæ sūt M B, N C parallelę inter se, pariterque P B, Q C parallelæ inter se: Ergo triangula *k* M B P, & N C Q similia sunt, & *l* ęqualia, cùm latera homologa M B, N C opposita *m* in parallelogrammo N B ęqualia sint. Quare, (vt prius dictum est) prismata recta altitudine T descripta, quorum bases triangula ęqualia, & similia M B P, N Q C sunt ęqualia inter se; & addito communi prismate recto eiusdem altitudinis T, cuius basis quadrilaterum B P N C: erunt prismata recta altitudine T descripta, quorū bases parallelogrāmum M B C N, & parallelogrammum P B C Q æqualia inter se, ideoque prismata recta altitudine T descripta, quorum bases triangulum A B C, & parallelogrammum P B C Q ęqualia erunt inter se. Et quoniam parallelogrammum E K ęquale erat triangulo A B C, & huic triangulo ęquale est parallelogrammum M B C N, *n* seu P B C Q (cùm ęqualibus triangulis A M O, C N O addatur commune quadrilaterum M O C B): Ergo parallelogramma E K, P B C Q ęqualia sunt, & habent bases B C, E G ęquales; *o* ergo sunt ęquè alta; quare (vt in pr. 30. lib. 1. ostensum est) circa angu-

i cor. 1 pr. 5 huius.

k sch. pr. 7. l. 4.

l cor. 2. pr. 17 l. 4.

m pr. 26. l. 1

n pr. 31. l. 1

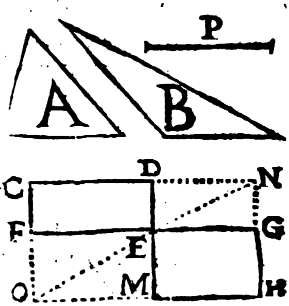
o cor. 1. pr. 1. l. 4.

angulos P B C & E ęquales eorum latera eleuata P B, D E æqualia erunt; & propterea *p* eadem parallelogramma similia erũt. Quapropter prisinata recta altitudine T descripta, quorum bases parallelogramma E K, & P B C Q similia, & ęqualia: erunt pariter ęqualia inter se. Ostensa autē fuerunt ęqualia inter se prismata recta altitudine T descripta, quorum bases triangulum A B C, & parallelogrammum P B C Q. Igitur prismata recta altitudine T descripta, quorum bases triangulum A B C, & parallelogrammum E K ęqualia erunt inter se. Quod erat, &c. *p pr. 16. l. 4*

PROPOS. XXI. THEOR. XIX.

Si duo prismata recta triangularia bases, & altitudines ęquales habuerint: erunt inter se ęqualia.

Sint duo prismata recta, quorum bases sint quælibet triangula A, & B ęqualia inter se, altitudines verò ęquales sint rectę lineæ P. Dico prismata ipsa esse inter se ęqualia. Fiat *a* parallelogrammum C E ęquale triangulo A; & parallelogrammum M G ęquale triangulo B in angulo G E M ęquali angulo D E F, quorum bases F E, & E G sint ęquales basibus triangulorum, & disponantur in directum, vt D E & E M in directum pariter sint, *b* (aliàs nõ efficerent angulos æquales ad verticem E); Et perficiantur *c* parallelogrãma F M, D G, & O N, ducanturque diametri N E, O E. Quoniam parallelogramma C E, & E H ęqualia sunt triangulis A, & B ęqualibus inter se: Ergo ipsa parallelogramma erunt inter se ęqualia: Quare *d* erit reciprocè, vt F E ad E G, ita M E ad E D; & *e* permutando, erit vt F E ad E M, ita G E ad E D, & sic reliqua latera proportionalia ostendentur: Quare *f* parallelogramma F M, & D G, quę habent latera homologa, circa angulos æquales in directum posita, similia erunt inter se; & *g* propterea diametri O E, N E erunt in directum; *h* quę secabunt singula parallelogramma F M, D G, C H in duo triangula æqualia, & *i* similia, cum sint ęquiangula. Et quia prismata recta quorum bases triangula similia & ęqualia C



a cor. pr. 20. l. 4.
b cor. pr. 5. lib. 1.
c pr. 26. l. 1.
d pr. 14. l. 4.
e prop. 12. l. 3.
f pr. 16. l. 4.
g pr. 19. l. 4.
h pr. 26. l. 1.
i pr. 4. l. 4.

ON,

ON, ONH, & cōmunis altitudo ęqualis est rectę P, sunt inter se ęqualia: Ergo si ab eis auferantur prismata recta æqualia, quorum bases triangula similia, & ęqualia OFE, & OME, communis altitudo ęqualis P, remanebunt duo prismata recta ęqualia, quorum bases quadrilatera CFEN, & HMEN, altitudines ęquales P. Et si rursus ab his auferantur prismata recta ęqualia, quorum bases triangula similia, & æqualia EDN, & EGN, altitudines ęquales P, remanebunt duo prismata recta, quorum bases parallelogramma CE, & EH, altitudines ęquales P, quę erūt necessariò ęqualia inter se; k sed prismata recta, quorum bases ęquales triangulum A, & parallelogrammum CE super ęqualibus rectis descripta, altitudines ęquales P, sunt ęqualia inter se; pariterque prismata recta, quorum bases ęquales triangulum B, & parallelogrāmum EH, altitudines ęquales P, sunt ęqualia inter se. Ergo duo prismata recta, quorum bases triangula A, & B, quorum altitudines ęquales P, inter se ęqualia sunt. Quod erat ostendendum.

k prop. 20. huius.

PROPOS. XXII. PROBL. III.

Cuilibet pyramidi triangulari directę figura composita ex prismatibus rectis æquè altis circunscribi potest, & altera inscribi, ita vt circunscriptæ, vel inscriptæ differentia à pyramide minor sit quacunque data magnitudine. Vocentur huiusmodi figurę Gradatæ pyramidi adscriptę.

Sit pyramis triangularis DABC, & DB perpendicularis à vertice incidat non extra basim BC, & sit data quælibet magnitudo &. Dico fieri posse quod proponitur. a eleuetur EA perpendicularis ad planum ABC, & reuoluatur vt pręcipit 13. def. secun. huius, factum erit prisma b rectum BEC super basim ABC altitudine DB, & hæc altitudo diuidatur bifariam c in M, & d per M ducatur planum parallelum basibus: erit iam vniuersum prisma BEC sectum in duo prismata recta æqualia inter se (eo quod tam bases ABC, ED8, quàm altitudines perpendiculares MD, MB ęquales sunt inter se); Et si rursus MB bifariam secetur in G, & per G planum GFH parallelum basibus ducatur: erit rursus prisma AGC semissis præcedentis; Et si denuo hæc bipartita subdiuisio residuarum altitudinum, & ductio planorum semper repe-

a prop. 6. huius.
b def. 19. huius sec.
c pr. 9. l. 1.
d cor. pr. 10 huius.

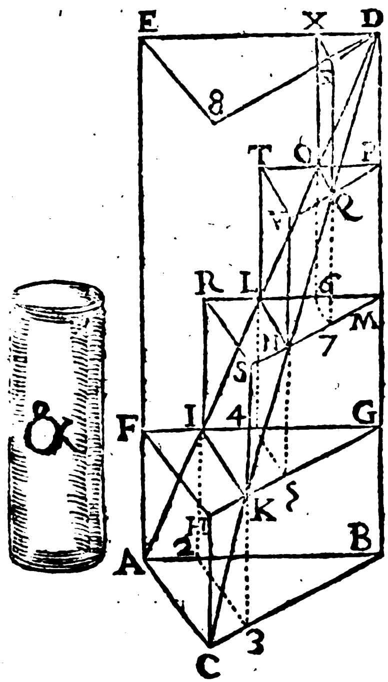
repetatur, remanebit *e* tandem aliquod prisma minus quacũque magnitudine proposita. Ergo repertum iam sit prisma B F C minus magnitudine &, perq; *f* reliquas sectiones M, P çqualiter diuidentes altitudinem B D, plana M L N, & O P Q ducantur parallela basi A B C; Postea *g* describantur duo prismata recta super basim G I K supra, & infra sectionem in planis immediatè sequentibus terminata, *h* quorum infimum I B K prisma inscriptum erit frusto pyramidis inferiori A k B, & supernum prisma R G S circunscriptum erit frusto superiori L K M, quæ duo prismata erunt æqualia, cum eandem basim I G K, & çquales altitudines perpendiculares G M, G B habeant. Pari modo super basim L M N cum altitudinibus æqualibus M P, M G describantur duo prismata æqualia, L G N inscriptum frusto pyramidis L G K, & prisma L V M circunscriptum frusto pyramidis O N M. Similiter super basim O P Q cum çqualibus altitudinibus P D, P M describantur duo prismata çqualia, O 7 P inscriptum frusto pyramidis O N M, & prisma O Z P circunscriptum frusto pyramidis D O Q P, & sic vlterius procedatur in reliquis sectionibus, si plures extiterint.

e schol pr. 27. l. 2.

f cor. pr. 10. huius.

g def. 19. sec. huius.

h prop. 18. huius.



Patet ergo, quòd prismata omnia recta B I 3, G L 5, M O 7 inscripta pyrramidi, simul sumpta, çqualia sunt prismatis G R k, M T N. P X Q circunscriptis pyramidi simul sumptis, idest figura ex prismatis composita circunscripta pyramidi D A B C absque infimo prismate B F C çqualis est figurç ex prismatis compositæ inscriptç eidem pyramidi. Quare excessus, quo figura vniuersa circunscripta pyramidi superat figuram inscriptam eidem pyramidi æqualis est prismati B F C; At solidum B F C minus est proposita magnitudine &: Ergo excessus

quo

quo figura tota circunſcripta pyramidi ſuperat figuram inſcriptam eidē pyramidi minor eſt magnitudine &; Sed pyramis D A B C pars eſt, & ideo minor, quàm figura pyramidi circunſcripta, & eadem pyramis totum eſt, & ideo maior figura eidem inſcripta. Quare differentia figurarum inſcriptæ pyramidi à circunſcripta maior eſt, quàm differentia inter figuram circunſcriptam, aut inſcriptam, & pyramidem ipſam; differentia verò dictarum figurarum circunſcriptæ, & inſcriptæ minor eſt magnitudine &. Ergo exceſſus, aut defectus, quo circunſcripta, aut inſcripta excedit, aut deficit à pyramide, minor eſt magnitudine &. Quod fieri poſſe oſtendendum erat. Vocentur dictę figurę ex priſmatis rectis ęquè altis compoſitę, Gradatę figurę pyramidi adſcriptę.

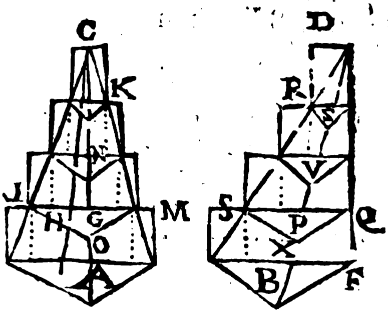
PROPOS. XXIII. THEOR. XX.

Si duę triangulares Pyramides directę habuerint baſes, & altitudines ęquales: erunt inter ſe ęquales.

Sint duæ pyramides C A, D B, quarum baſes triangula A, B ęqualia, & altitudines perpendiculares C A, D F, non extra baſes cadentes, ſint etiam ęquales. Dico pyramides æquales eſſe inter ſe. Adſcribantur *a* pyramidi C A duę figuræ gradatæ K L M circunſcripta, & N O inſcripta, ita vt differentia figurę k L M, aut N O à pyramide C A minor ſit quacunque magnitudine data: ſintque figurę genitæ à planis parallelis, baſi triangula A, G, N, I, & altitudines priſmatum comprehendentium figuras adſcriptas ſint æquales ipſi H A. Poſtea *b* perpendicularis D F in tot partes æquales vni Q F diſtribuatur, in quot partes æquales vni A H diuiſa fuit perpendicularis C A, & *c* per ſingula diuiſionum puncta plana parallela baſi efficiant *d* triangula P, V, Z ſimilia ipſi B: & *e* compleantur figuræ gradatæ circunſcripta R S F, & inſcripta V X. Et quoniam H A, Q F æquè metiuntur æquales altitudines C A, D F: Ergo *f* H A, Q F æquales ſunt, & ſic reliquæ altitudines priſmatum rectorum æquales erunt: habent *g* verò triangula ęqualia A, B ad duo triangula illis ſimilia G, P eandem proportionem duplicatā altitudinis A C ad H C, ſeu F D *h* ad Q D, cùm tam C A, D F, quàm C H, D Q ęquales ſint. Ergo *i* triangula G P æqualia ſunt, eadem ratione æqualia erunt triangula N, V, &c. Tandem *k* priſmata recta, quorum

a prop. 22. huius.
b pr. 28. l. 1
c cor. pr. 10 huius.
d prop. 16. huius.
e prop. 22. huius.
f pr. . l. :.
g prop. 1 . huius.
h pr. 5. & 27. l. 3.
i pr. 9 l. 5.
k prop. 21. huius.

baſes



bases triangula æqualia A, B, altitudines H A, Q F æquales etiam, erunt inter se æqualia: eadem ratione reliqua prismata recta numero æqualia comprehendentia gradatas figuras circumscriptas, & inscriptas æqualia erunt inter se. Quapropter duæ figuræ gradatæ K L M, R S F circumscriptæ pyramidibus C A, D B æquales erunt: pariterque duæ figuræ gradatæ inscriptæ N O, V X erunt æquales; & hoc semper verum erit quacunque existente differentia pyramidis C A à figura gradata k L M, vel N O. Quapropter erunt duæ magnitudines, prima pyramis C A, secunda pyramis D B. & figura gradata k L M, maior, quàm prima excessu minore quolibet dato, est quoque maior secunda, cùm figura k L M æqualis sit R S F circumscriptæ, & ideo maioris pyramide D B; atque figura gradata N O minor, quàm prima defectu minore quolibet dato, est quoque minor secunda, cùm figura N O æqualis sit V X inscriptæ, & ideo minoris pyramide D B. Ergo [l] pyramis C A æqualis est pyramidi D B. Quod,&c.

l *sch. pr. 24. lib. 3.*

PROPOS. XXIV. THEOR. XXI.

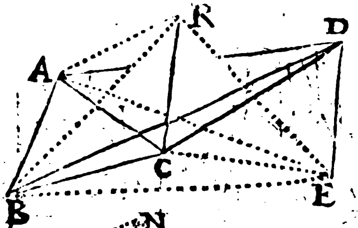
Si duæ pyramides triangulares ambligoniæ habuerint bases & altitudines æquales, erunt æquales inter se.

Sint duæ pyramides D A B C, & k G F H, quarum bases, triangula A B C, G F H æqualia inter se, & perpendiculares à summitatibus ad bases ductæ D E, k M sint æquales inter se, & cadant extra bases pyramidum. Dico pyramides esse æquales inter se. A terminis perpendicularium E, & M ad angulos basiũ coniungãtur rectæ E A, E C, E B, M G, M F, & M H, & in figuris E A B C, & M G F H sumantur puncta C, & O, vbi conueniunt triangula omnia, in quæ dictæ figuræ resoluuntur; & [a] eleuentur C R, O N æquales ipsis D E, & M k & perpendiculariter ad plana basium E A B, M G F H, & coniungantur rectæ A R, B R, E R, G N, F N, H N, M N. Quoniã duæ pyramides D A B E, & R A B E triangulares eandem basim

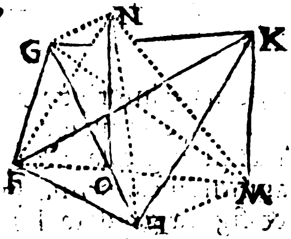
a *pr. 3. l. 1. & pr. 0. huius.*

sim A B E habent, & ęquales altitudines D E, R C, quę non incidunt extra basim: Ergo *b* pyramides D A B E, & R A B E ęquales sunt inter se. Rursus quia super eadem basi B C E cum ęqualibus altitudinibus D E, R C non cadentibus extra basim, factę sunt duę pyramides triangulares D B E C, & R B E C. *c* Ergo hę ęquales sunt inter se, quę si à prioribus ęqualibus pyramidibus D A B E, R A B E tollantur, remanebunt pyramides D A B C E & R A B C E ęquales inter se. Et, si ab his tollantur duę triangulares pyramides equales D A C E, & R A C E (quę eandem basim A C E habent, & altitudines ęquales D E, R C non cadentes extra basim) remanebunt pyramides D A B C, & R A B C ęquales inter se. Postea quoniam duę pyramides triangulares K F H M, & N F H M eandem basim F H M habent, & ęquales altitudines K M, N O non cadentes extra basim: erunt *d* illę pyramides ęquales inter se. Eadem ratione duę pyramides triangulares N F G M, & K F G M ęquales erunt inter se. Ergo ęqualibus addendo ęqualia: erunt pyramides K G F H M, & N G F H M quadrilatera ęqualia inter se, à quibus si auferantur triangulares pyramides ęquales K G H M, & N G H M (quę eandem basim M G H habent, & ęquales altitudines K M, N O non cadentes extra basim) remanebunt pyramides K G F H, & N G F H ęquales inter se; est verò *e* pyramidi N G F H ęqualis pyramis R A B C, quia eorum bases G F H, & A B C ęquales suppositę sunt, & altitudines N O, R C non cadentes extra bases sunt ęquales, cùm sint ęquales duabus ęqualibus K M, D E. Ergo pyramis K G F H ęqualis est pyramidi R A B C; sed eidem pyramidi R A B C ostensa fuit ęqualis pyramis D A B C. Ergo duę pyramides K G F H, D A B C ęquales sunt inter se. Quod erat ostendendum.

b prop. 23. huius.



c prop. 23. huius.



d prop. 23. huius.

e prop. 23. huius.

COROLLARIVM.

Hinc colligitur, quòd si fuerint duę pyramides triangulares

ęquè

ęquè altę, & basis vnius aliquoties basim alterius metiatur, pyramis quoque toties reliquam pyramidem metietur, quoties basis basim metitur.

Si enim in ęquè altis pyramidibus triangularibus D A B E, & N G F H basis G F H metiatur aliquoties basim A B E, exempli gratia ter, ita vt triangula A C B, B C E, & E C A sint ęqualia inter se, & ipsi G F H, & compleantur pyramides triangulares D A B C, D B C E, D E C A, erunt quidem ex hac propositione ęquales inter se, & ipsi pyramidi N G F H, cùm earum bases, & altitudines ęquales sint, & propterea f pyramis N G F H toties pyramidem D A B E metietur, quoties illius basis G F H basim hujus A B E metitur. f def. 4. l. 3.

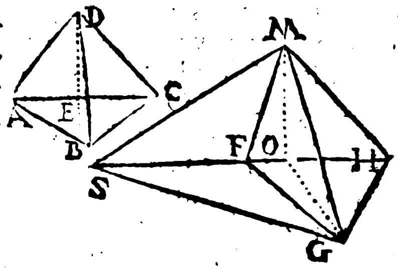
PROPOS. XXV. THEOR. XXII.

Eucl. 5. & 6. XII.

Quęlibet pyramides eiusdem altitudinis sunt inter se, vt bases.

Sint duę pyramides primò triangulares D A B C, & M F G H, quarum altitudines D E, M O ęquales sint. Dico pyramidem D A B C ad pyramidem M F G H eandem proportionem habere, quam basis A B C ad basim F G H. Producatur H F indefinitè versus F, vt in S, & a secetur F O, quę sit quęlibet mensura ipsius F H & sumatur S F quęlibet multiplex eiusdem F O, & compleantur pyramides triangulares M F O G, & & M F G S. Et quia b quoties F O metitur F H, toties triangulum F G O mensurat triangulum F G H, atque c quoties triãgulum F G O metitur triangulum F G H, toties pyramis M F G O mensurat pyramidem M F G H. Ergo d triangulum F G O, & pyramis M F G O ęquè metiuntur triangulum F G H, & pyramidem M F G H. eadem ratione quoties O F metitur ipsam F S, toties triangulum F O G ipsum triangulum S F G, atque pyramis M F O G pyramidem M F S G metientur; & propterea e triãgulum S F G ipsius F G H, atque pyramis M F S G pyramidis M F G H quælibet, & eædem partes erunt, quemadmodum S F partes est ipsius F H.

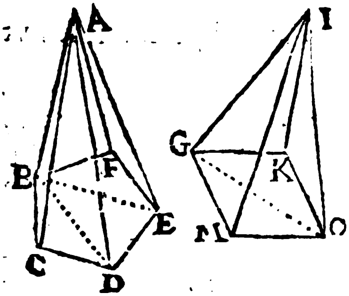
a pr. 28. l. 1.
b cor. 3. pr. 32. l. 1.
c cor pr. 24. huius.
d pr. 7. l. 3.
e def. 6. l. 3.



vnde erunt quatuor magnitudines, prima basis A B C, secunda basis F G H, tertia pyramis D A B C, quarta pyramis M F G H, & duæ aliæ, scilicet triangulum F S G, & pyramis M F S G, quę sunt quęlibet, & eędem partes consequentium, idest habent ad triangulum F G H & ad pyramidem M F G H quālibet & eandem rationem commensurabilem, & f quoties triangula S F G & A B C ęqualia sunt, etiam ęquè altę pyramides M F S G & D A B C sunt ęquales; & quoties triangulum S F G maius est triangulo A B C, etiam pyramis M F S G maior est pyramide D A B C, & quotiescunque illud minus est, hęc quoque est minor illa. Ergo g basis A B C ad basim F G H eandem rationem habet, quam pyramis D A B C ad pyramidem M F G H.

f pr. 23. & 24. huius.

g pr. 13. l. 3.



Sint secundò duę pyramides A C F, & I K M ęquè altę, bases verò quęcunque polygona F C, k M. Dico esse pyramidem A C F ad pyramidem I K M, vt basis C F ad basim k M. Diuidantur polygona basium in triangula, ductis rectis B D, B E & G O, & plana per has rectas ad vertices coniungantur. Quoniam h vt basis B C D ad B D E ita est pyramis A B C D ad pyramidem A B D E (eo quod sunt triangularia, & eiusdem altitudinis) erit i coniungendo vt polygonum C E ad triangulum B D E, ita pyramis A C E ad pyramidem A B D E. Et rursus quia, vt basis B D E ad B E F, ita pyramis triangularis A B D E ad pyramidem A B E F ęquè altam: ergo k ex compositione ordinata vt polygonum C E ad triangulum B E F, ita est pyramis A C E, ad pyramidem A B E F, & iterum l coniungendo erit, vt polygonum C F ad triangulum B F E, ita pyramis A C F ad pyramidem A B E F. Eadem ratione erit, vt triangulum G K O ad polygonum k M, ita pyramis I k G O ad pyramidem I K M; Est autem m vt basis trianguli B F E ad triangulum G K O, ita pyramis A B F E ad pyramidem I K G O (propterea quod altitudines ambarum pyramidum triangularium ęquales sunt ex hypothesi). Ergo n ex compositione ordinata ratio polygoni C F ad polygonum K M eadem erit, quę pyramidis A C F ad pyramidem I K M. Quod erat, &c.

h par. pri. huius.

i pr. 14. l. 3.

k pr. 19. l. 3.

l pr. 14. l. 3.

m pri. par. huius.

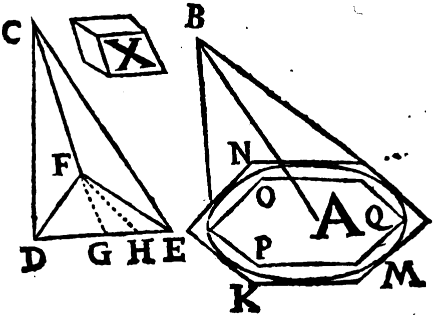
n pr. 19. l. 3.

PRO-

PROPOS. XXVI. PROBL. IV.

In cono dato possibile est pyramidem circunscribere, & alteram inscribere, ita vt illarum differentia à cono minor sit quacunque magnitudine proposita. Vocentur huiusmodi pyramides adscriptæ cono.

Sit conus cuius vertex B, basis circulus A, & quælibet magnitudo X. Dico posse circunscribi, & inscribi in dato cono duas pyramides, quarum differentia à cono minor sit magnitudine X. Ad *a* planum cuiuslibet trianguli DEF eleuetur perpendicularis CF, quæ *b* secetur æqualis altitudini coni BA, & ductis planis compleatur pyramis CDFE. iam si à C per rectam FG secantem *c* triangulum FDE bifariam ducatur planum, *d* secabitur pyramis CDFE bifariam, & si rursus aliud planum à C per FH secantem triangulum FGE bifariam ducatur, erit pyramis CGFE secta bifariam, & cùm hoc semper fieri possit: manifestum est *e* relinqui ex ea tãdem aliquam pyramidem minorem quacunque magnitudine X: Sit illa CHFE; *f* postea circulo A circunscribatur polygonum kMN, & aliud OPQ illi simile inscribatur, ita vt illorum differentia minor sit base FHE; *g* & ductis planis per omnia latera polygonorũ ad verticem B, descriptæ erunt duæ pyramides, habentes communem verticem B, quarum bases kMN, & OPQ, ideoque eiusdem altitudinis cum cono, & pyramide CFHE. Et quoniam omnia latera polygoni OPQ secãt circulum A, & omnia latera figuræ kMN tangunt circulum A: Ergo *h* plana omnia pyramidis BOPQ conum secabunt, & omnia plana pyramidis BkMN extra conum cadent; ideoque pyramis BOPQ inscripta, & minor erit cono BA, & pyramis BKMN circunscripta, & maior erit cono BA. Et quoniam, *i* vt pyramis BkMN ad pyramidem BOPQ, cùm sint eiusdem altitudinis, ita est basis kMN ad OPQ. Ergo *k* diuidendo vt diffe-



a prop. 6. huius.
b pr. 3. l. 1.
c cor. pr. 30. l. 2.
d cor. pr. 24. huius.
e schol. pr. 27. l. 2.
f pr. 9. l. 5.
g post. 1. huius.
h prop. 19. huius.
i prop. 25. huius
k pr. 13. l. 3.

differentia pyramidum B K M N, & B O P Q ad pyramidem B O P Q ita erit differentia polygonorum K M N & O P Q ad polygonum O P Q: Rursus vt *l* pyramis B O P Q ad pyramidem C F H E, cum sint eiusdem altitudinis, ita est basis O P Q ad basim F H E. Ergo *m* ex compositione ordinata, vt differentia pyramidum B K M N, & B O P Q ad pyramidem C F H E, ita est differentia polygonorum K M N, & O P Q ad planum F H E: sed differentia polygonorum k M N, & O P Q plano F H E minor est: Ergo *n* differentia pyramidum B k M N, & B O P Q minor est pyramide C F H E; sed hæc pyramis minor erat magnitudine X: Ergo differentia pyramidum B K M N, & B O P Q adhuc minor erit magnitudine X; Est verò conus B A minor pyramide inscripta B O P Q & minor pyramide circunscripta B K M N. Quare excessus, quo pyramis B k M N superat conum; aut defectus, quo pyramis B O P Q deficit à cono, multo minor erit, quàm differentia pyramidum B k M N, & B O P Q; ideoque minor quacunque data magnitudine X. Quod propositum fuerat.

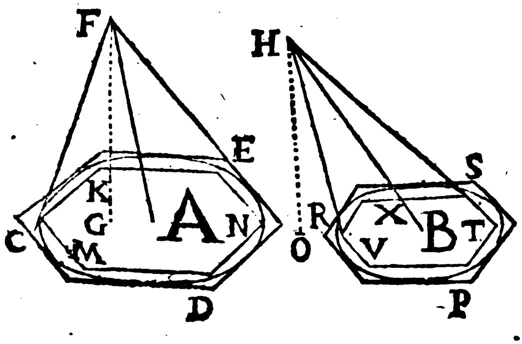
l prop. 25. huius.
m pr. 19. l. 3.
n cor. 1. pr. 16. l. 3.

PROPOS. XXVII. THEOR. XXIII.

Eucl. 11. XII.

Coni eiusdem altitudinis sunt inter se, vt bases.

Sint duo coni, quorum bases circuli A, & B; vertices verò F, H, & eorum altitudines F G, H O æquales sint. Dico conum F A ad conum H B eandem rationem habere, quam circulus A ad circulum B. Adscribātur *a* cono F A duæ pyramides F C D E, & F K M N quarum differētia à cono minor sit quacunque magnitudine proposita. Postea *b* circulo B circunscribatur polygonum regulare P R S simile polygono C D E; Pariterque eidem inscribatur polygonum regulare T V X simile polygono k M N, & *c* ab omnibus lateribus dictarum figurarum eleuentur plana ad verticem H pertingentia,



a prop. 26. huius.
b cor. 2. pr. 4. l. 5.
c post. 1. huius.

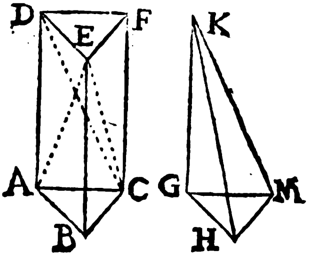
gentia, vt perficiantur duę pyramides, altera H P R S circunscripta, *d* & maior cono H B, altera verò H T V X inscripta; d ex pr. 19. huius. & ideo minor eodem cono. Et quoniam tam pyramides circunscriptę, quàm inscriptę altitudines F G, H O ęquales habent, *e* erunt inter se, vt bases; sed *f* circunscripta polygona e prop. 25. huius. basiũ C D E, P R S sunt inter se in duplicata ratione radiorũ, f pr. 10. l. 5. siue vt *g* circuli A, B. Pariterque polygona K M N, & T V X g pr. 12. l. 5. sunt inter se, vt circuli A, & B: Ergo, *h* vt pyramis F C D E ad & pr. 7. l. 3. pyramidem H P R S, ita erit circulus A ad circulum B; & in h pr. 7. l. 3. eadem ratione erit pyramis F k M N ad pyramidem H T V X. Ergo sunt duę magnitudines, prima conus F A, secunda conus H B, & ratio data circuli A ad circulum B, & duę alię vnà maiores prima, & secunda, scilicet pyramides F C D E, H P R S conis circunscriptę sunt in ratione A ad B, & excessus à prima, scilicet differentia pyramidis F C D E à cono F A minor est quacunque magnitudine data; pariterque duæ aliæ vna minores prima, & secunda, scilicet pyramides F K M N, & H T V X conis inscriptæ, sunt in eadem ratione A ad B, & defectus à prima, scilicet differentia pyramidis F K M N à cono F A minor est quacunque data magnitudine. Ergo *i* prima ad i ex pr. 24. l. 3. secundam, scilicet conus F A ad conum H B est quoque in eadem data ratione circuli A ad circulum B, basis ad basim. Quare, &c.

PROPOS. XXVIII. THEOR. XXIV. Eucl. 7. XII.

Si pyramis, & prisma ęquales bases, & æquales altitudines habuerint, erit pyramis tertia pars prismatis.

Sit prisma D B F, & pyramis K G H M, quarum altitudines sint ęquales, & bases A B C, & G H M sint pariter ęquales. Dico pyramidem ipsius prismatis tertiam partem esse. Et primò sit prisma triangulare, & in tribus eius parallelogrmmis ducantur diametri D C, A E & C E, & per duas quaslibet diametros in vno puncto cõuenientes *a* plana ducantur, vt prisma diuidatur in tres pyramides, quarum duę *b* C B A E, & C A D E æquales sunt inter se, quia *c* bases B A E, D E A sunt ęquales, cùm parallelogrãmũ D B à diametro A E bifariã secetur, & altitudo earum est eadem, scilicet eadem

a post. 1. huius. b pr. 23. & 24. huius. c pr. 26. l. 1



per-

perpendicularis à communi vertice C ad planum D B ductæ: Pari ratione duę pyramides E D A C, & E D F C habent bases ęquales D A C, & D F C, & eandem altitudinem, scilicet perpendicularem à vertice E ad planum F A ductam; Ergo [d] pyramis E D F C ęqualis est eidem pyramidi E D A C: ideoque tres pyramides, in quæ prisma resoluitur, ęquales inter se sunt; & propterea prisma D B F triplum erit pyramidis E A B C: Est verò [e] pyramis k G H M ęqualis pyramidi E A B C (cum eorum bases G H M, & A B C sint positę ęquales, & etiam altitudines ęquales). Ergo pyramis k G H M tertia pars est prismatis D B F.

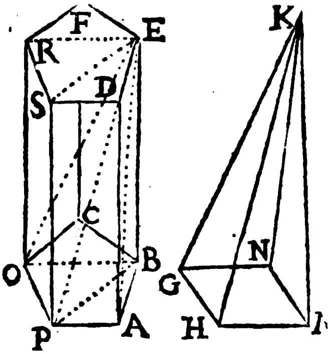
[d] pr.23 & 24.huius.

[e] pr.23.24. huius.

[f] cor.1 & 2.pr.17.l.4

Secundò in prismate polygonio diuidantur [f] bases parallelę, ęquales, & similes A C, & D F in totidem triangula, ita vt duo quælibet opposita similia parallela, & æqualia sint, vt A B P simile sit ipsi D E S, P B O ipsi S E R, &c. & [g] ductis planis per latera homologa æqualia, & parallela P B, S E, & per O B, & R E diuisum erit prisma D B F in totidem prismata triangularia, quot sunt triangula A B P, P B O, O B C in basi A C. Et si ad verticem E ducantur plana per rectas A P, P O, O C, P B, O B, erit pyramis E A C polygonia diuisa in totidem pyramides triangulares, quot sunt triangula in basi A C; & propterea tot erunt pyramides triangulares E A B P, E P B O, E O B C quot sunt prismata triangularia D B S, S B R, R B F, & erunt prismata, & pyramides descriptę super easdem bases triangulares, & in eisdem altitudinibus. Vnde (ex prima parte huius) pyramis triangularis E A B P tertia pars erit prismatis triangularis D B S, pariterque pyramis E P B O erit tertia pars ipsius prismatis S B R, nec non pyramis E O B C ipsius prismatis R B F tertia pars erit; ideoque tota pyramis polygoni E A C totius prismatis polygoni; D B F tertia pars erit: Sed [h] pyramis k G H M ęqualis est pyramidi E A C (quia bases A C, & G H M N ęquales positæ sunt, & eorũ altitudines ęquales). Ergo pyramis K G H M tertia pars est prismatis D B F. Quod erat, &c.

[g] post. 1. huius.

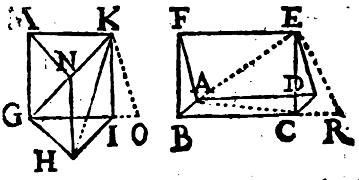


[h] pr.25.huius, & cor.1 pr.10.l.3.

SCHO-

SCHOLIVM.

Si fuerint duo prismata triangularia A E B D, & G N I M, & basis G H I sit semissis parallelogrammi B D, & altitudo K O æqualis sit perpendiculari E R à latere F E ad planum parallelogrammi B D ductæ. Dico prismata esse inter se æqualia. Ductis lineis rectis G K, H K, A C, A E, & planis per easdem rectas extensis, erit i pyramis K G H I tertia pars prismatis G N I M, & pyramis A E D C tertia pars prismatis F D B: Sed bases G H I, & A D C dictarum pyramidum sunt inter se æquales (cùm k parallelogrammum B D duplum sit trianguli A D C, & ex hypothesi duplum etiam erat trianguli G H I) & altitudines K O, E R æquales etiam positæ sunt; Ergo l pyramides K G H I, & E A D C æquales erunt inter se: vnde m earum tripla, scilicet prismata M H K, & F D B æqualia erunt inter se. Quod, &c.



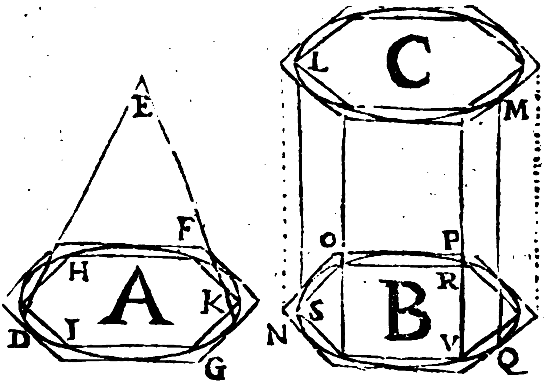
i pr. 28. huius.
k pr. 26. l. 1
l pr. 23. 24. huius.
m pr. 1. l. 3. & pr. 28. huius.

PROPOS. XXIX. THEOR. XXV.

Eucl. 10. XII.

Si coni, & cylindri bases, & altitudines æquales inter se fuerint, erit conus tertia pars cylindri.

Sit conus E A, & cylindrus C B, quorum bases circuli A, B sint æquales, pariterque eorum altitudines æquales sint inter se. Dico conum E A tertiam partem esse cylindri C B. Adscribantur a cono E A duæ pyramides E D, F G, & E H I K, quarum differentia à cono minor sit quacunque data magnitudine: & circulo B adscribantur b duo polygona O P Q, & R V S similia regularibus polygonis D F G, & H I k. Patet c circunscripta polygona D F G, O P Q æqualia esse, eo quod sunt



a pr. 26. huius.
b cor. 2. pr. 4. l. 5.
c pr. 10. 12. l. 5. & cor. 1 pr. 16. l. 3.

inter se vt quadrata radiorum, seu vt circuli æquales A, B, eadē ratione ęqualia erūt inscripta polygona H I K, & R S V. Postea à puncto S anguli polygoni R S V, atq; à puncto Q cōtactus polygoni O P Q ducantur *d* latera cylindri S L & Q M, & hęc reuoluantur semper sibi ipsis parallela per perimetra polygonorū R S V, & O P Q; cumque superficies inde genitę secentur à plano circuli C parallelo subiecto circulo B: Ergo *e* descripta erunt duo prismata, quorum bases R S V, & O P Q; altitudines verò ęquales altitudini cylindri C B. Et quia *f* tam latera cylindri C B, quàm prismatum R S V L, & O P Q M parallela sunt ijsdē cylindri lateribus L S, & M Q: Ergo *g* illa omnia parallela sunt inter se; & ideo latera cylindri, quę ab ijsdem punctis peripherię circuli B, à quibus latera polygonorum ducuntur, erunt quoque latera prismatum; aliàs *h* ab ijsdem punctis peripherię circuli B duci possent duę rectę lineæ eidem S L, vel M Q, & inter se parallelę, quod est impossibile. Et quoniam latera omnia polygoni R S V inscripti secant circulum B: Ergo *i* plana, quæ per latera polygoni R S V, & per latera cylindri ducuntur, secāt cylindrum, & intra ipsum cadunt; hæc verò plana superficiem prismatis R S V L efficiunt: Quare prisma R S V L intra cylindrum C B inscriptum erit, & minus erit cylindro. Similiter quia latera polygoni N O P circunscripti tangunt circulum B: Ergo *k* plana, quæ per latera polygoni N O P, & per latera cylindri à contactibus ducta extenduntur, tangunt cylindrum, & extra ipsum cadunt, quæ cùm superficiem prismatis N O P Q M componant, necessariò prisma N O P Q M comprehendet cylindrum C B, & maius erit illo.

Iam quoniā sunt duę magnitudines prima conus E A, secunda cylindrus C B, & ratio data subtripla, & pyramis E F G D conscripta, & maior ipso cono excessu minori quacunque magnitudine proposita ad prisma M O P Q quod conscriptum, & maius est cylindro C B, eandē rationē datā subtriplā *l* habet (eo quod altitudines, & bases ęquales inter se habēt) ideoq; pyramis E F G D maior, est quā subtripla cylindri C B. Et rursus pyramis E H I K inscripta, & minor cono E A defectu minore quacunque magnitudine proposita ad prisma R V S L inscriptum, & minus cylindro C B eandem rationem datam *m* sub triplam habet, ideoq; pyramis E H I k minor est parte tertia cylindri C B: Ergo *n* prima ad secundam, idest conus E A ad cylindrum C B erit in ratione data subtripla. Est ergo

d def. 16. secun. huius
e def. 13. secun. huius
f def. 16. secun. huius
g pr. 7. huius.
h cor. pr. 17 l. 1.
i pr. 19. huius.
k pr. 19. huius.
l pr. 28. huius.
m prop. 28. huius.
n sch. pr. 24. l. 3.

ergo conus E A tertia pats cylindri C B. Quod erat, &c.

COROLLARIVM I.

Euc l. 28. 29. 30. 31. lib. XI.

Deducitur ex his duabus propositionibus, quòd duo prismata, aut duo cylindri, quorum bases sunt æquales, & altitudines ęquales, erunt æquales inter se.

Nam pyramis, cuius basis æqualis est basi, & altitudo æqualis altitudini vniuscuiusque ex prismatis, est vtriusque prismatis tertia pars ex 28. propos. præcedente; & ideo *o* prismata ęqualia erunt inter se. Pari modo conus, cuius basis ęqualis est basi, & altitudo ęqualis est altitudini tam primi, quàm secundi cylindri, est vtriusque cylindri tertia pars, ex hac propositione; & propterea *p* cylindri ęquales erunt inter se. *o pr. 4. l. 3.* *p pr. 4. l. 3.*

COROLLARIVM II.

Et si prismata, & cylindri æquales bases habuerint, inæquales verò altitudines: erunt solida ipsa pariter inæqualia, & maius illud, cuius altitudo maior est.

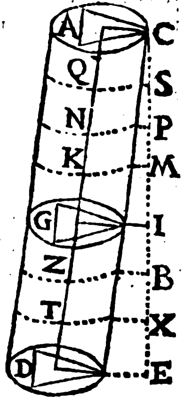
PROPOS. XXX. THEOR. XXVI.

Eucl. 25. XI. 13. 14. XII.

Si prisma, aut cylindrus secetur plano aduersis basibus parallelo: erunt prismata, vel cylindri secti inter se, vt eorum latera, & vt eorum altitudines.

Sit prisma, vel cylindrus D A, cuius latus A D, & altitudo C E, & sectum sit plano G parallelo basibus aduersis A, D, à quo secetur altitudo C E in I, & latus A D in G. Dico solidum A G ad solidum D G eandem rationem habere, quam habet altitudo C I ad altitudinem I E, & quam latus A G habet ad latus G D, si tamen comparentur ea, quæ eiusdem sunt speciei, scilicet prismata inter se, & cylindri inter se. Secetur *a* altitudo I E in quotcunque partes ęquales I B, B X, X E, & *b* in recta I C producta secentur quotcunque partes I M, M P, P S singulæ æquales X E, ita vt *c* recta I S sit quælibet partes ipsius I E. Postea *d* per puncta S, P, M, B, X plana ducantur parallela basibus D, & G, tam in cylindro, quàm in prismate. Et quoniam prisma, vel cylindrus A D secatur *a pr. 28. l. 1.* *b pr. 3. l. 1.* *c def. 3. l. 3.* *d cor. pr. 10 huius.*

planis Q. N. K, G, Z, T basibus parallelis: Ergo *e* figurę Q N, K, G, Z, T similes, & æquales sunt figuræ D, & inter se; & sunt altitudines E X, X B, B I, I M, M P, P S æquales inter se: Ergo *f* omnia prismata inter se, vel omnes cylindri Q N, N K, K G, G Z, Z T, T D æquales erunt inter se, & tot numero sũt, quot sũt equales altitudines S P, P M, M I, I B, B X, X E: Ergo *g* eædem partes erit prisma, vel cylindrus Q G ipsius prismatis, vel cylindri G D, ac est partes altitudo S I ipsius I E. Et quoniam sunt quatuor quantitates, prima altitudo C I, secunda altitudo I E, tertia prisma, vel cylindrus A G, & quarta prisma, vel cylindrus D G, & duæ aliæ quantitates altitudo S I & prisma vel cylindrus Q G, quæ *h* eandem, & quamlibet rationẽ cõmẽsurabilẽ habẽt ad cõsequẽtes; nã quęlibet partes eędẽ sunt. S I quidẽ ipsius secũdę I E, & solidũ Q G ipsius quartę solidi G D (comparando semper prismata inter se, & cylindros inter se); Et quotiescunque S I ęqualis est primę C I, *i* necessariò solidum Q G ęquale est solido A G (quoniam eandem basim G, & ęquales altitudines habent perpendiculares à puncto C ad planum G), & quoties S I maior fuerit, quàm C I, *k* necessariò solidum Q G maius erit solido G A, Et quotiescunque S I minor fuerit, quàm C I, necessariò solidum Q G minus erit solido G A: Ergo *l* prima quantitas C I ad secundam I E eandem rationem habebit, quam tertia, quę est solidum A G ad quartam, scilicet ad solidum G D. Quare vt altitudo C I ad altitudinem I E, ita erit prisma A G ad prisma G D, vel cylindrus A G ad cylindrum G D. Tandem quoniam duę rectę lineę C E, & A D secantur à planis D, G, & A parallelis inter se: Ergo *m* vt C I ad I E, ita est A G ad G D. Quare vt solidum A G ad solidum G D, ita est illius latus A G ad huius latus G D. Quapropter, &c.



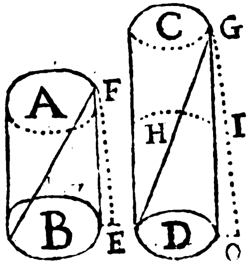
e pr. 17. huius.
f cor. 1. pr. 29 huius.
g def. 6. l. 3.
h def. 8. l. 3.
i cor. 1 pr. 29. huius.
k cor. 1 pr. 29 huius.
l pr. 23. l. 3.
m pr. 17. huius.

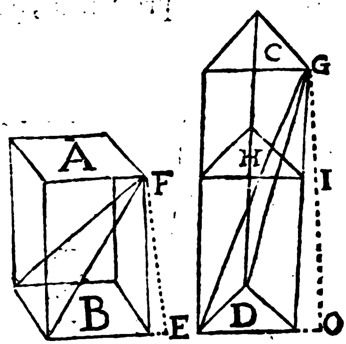
PROPOS. XXXI. THEOR. XXVII.

Quęlibet duo prismata, cylindri, pyramides, aut coni proportionem habent compositã ex rationibus basium, & altitudinum.

Sint

Sint duo prismata, vel cylindri, aut pyramides, vel certè duo coni A B, C D, quorum bases B, D, & altitudines sint F E, G O. Dico solida eiusdem speciei, scilicet prismata inter se, & cylindros inter se, atque pyramides inter se, nec non conos habere proportionem compositam ex ratione basis B ad basim D, & ex ratione altitudinis F E ad altitudinem G O. Et si quidem A B, C D fuerint pyramides, aut coni, fiant a super eisdem basibus, & in eisdem altitudinibus prismata, aut cylindri A B, C D, & è contra, si fuerint prismata aut cylindri, fiant b super eisdem basibus, & in eisdem altitudinibus pyramides, aut coni A B, C D; postea c secetur altitudo I O equalis altitudini F E, & ducatur d planum I H parallelum basi D, efficiens e figuram H equalem, & similem basi D, vt sit H D prisma, f vel cylindrus; vel certè punctum aliquod H fiat vertex pyramidis, aut coni H D. Et quia duæ pyramides, aut duo coni A B, H D equales altitudines habent: Ergo g sunt inter se, vt bases B, D: sed tam pyramides, quàm coni eque metiuntur prismata, & cylindros A B, H D, cùm h quodlibet solidum correspondentis solidi eiusdem speciei tertia pars sit: Igitur i prisma, aut cylindrus A B ad ipsum H D habet eandem proportionem, quam basis B ad basim D: Postea quia prisma, vel cylindrus C D secatur plano H aduersis basibus parallelo: Ergo prismata k H D, & C D, aut cylindri inter se sunt, vt altitudines I O, G O; sed tam prismata, quàm cylindri eque multiplices sunt pyramidum, vel conorum H D, C D, cum l quodlibet solidum correspondentis eiusdem speciei solidi triplum sit: igitur m pyramis, vel conus H D ad eiusdem speciei solidum C D eandem proportionem habet, quam altitudo I O ad altitudinem G O: est verò n proportio solidi A B ad solidum C D composita ex rationibus intermedijs, scilicet ex ratione solidi A B ad H D, & ex ratione H D ad C D (comparando semper ea, que eiusdem speciei sunt); atque est solidum A B ad H D, vt





a def. 13 14 secun. huius

b def. 1. 2. secun huius

c pr. 3. l. 1.

d cor pr. 10 huius.

e pr. 17. huius.

f def 13. 14 1. 2. secun. huius.

g pr 25. 27 huius.

h pr 28. 29 huius.

i pr. 11. & 7 l. 3.

k pr. 30. huius

l pr 28. 29. huius.

m pr. 11. & 7 l. 3

n pr. 19. l. 3

D, vt basis B ad D, & solidum H D ad C D est, vt altitudo I O,
o pr.3.l 3. vel o ei equalis F E ad altitudinem G O: ergo p solidum A B ad
p pr.19 l.3 eiusdem speciei solidum C D habet proportionem compositam ex ratione basis B ad basim D, & ex ratione altitudinis F E ad altitudinem G O. Quod erat ostendendum.

Eucl.32.XI & 11.14. XII.

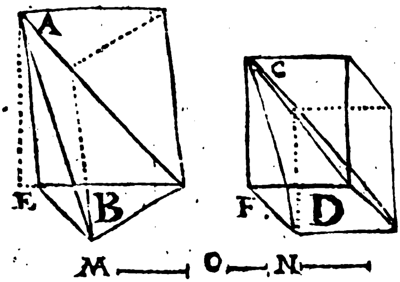
COROLLARIVM.

Patet, quod prismata, & cylindri equalium altitudinum sunt inter se, vt bases: & pyramides aut coni equalium basium sunt inter se, vt altitudines. Ostensa enim fuit proportio prismatum, vel cylindrorum A B, H D æqualium altitudinum eadem, ac est proportio basium B, D; atque proportio pyramidum H D, & C D habentium equales bases eadem fuit ac habent altitudines I O, & G O.

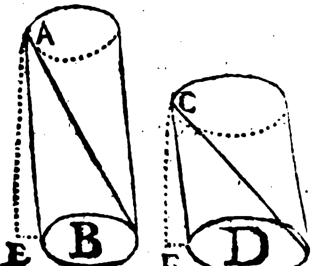
Eucl.34.XI 9.15.XII.

PROPOS. XXXII. PROBL. XXVIII.

Aequalium pyramidum, conorum, prismatum, cylindrorum, reciprocantur bases, & altitudines; & quorum bases, & altitudines reciprocantur, equales sunt inter se.



Sint primò equales inter se duæ pyramides, vel coni, aut prismata, aut cylindri A B, & C D, quorum bases B, D, & altitudines A E, C F. Dico, vt basis B ad D, ita esse reciprocè altitudinem C F ad altitudinem A E. Sint duę quęlibet figuræ M, & N equales inter se, & vt B ad D, ita sit M ad O.



Et quoniam sicut M equalis est N, ita solida A B, & C D equalia sunt inter se (dummodo semper ea comparentur, quę eiusdē generis sunt);
a pr.31.huius. & equalitatis proportio a solidi A B ad solidum C D componitur ex rationibus basis B ad basim D, & altitudinis A E ad altitudinem C F;
b pr.21.l.3 Est verò M ad O, vt B ad D: b Ergo residua proportio O ad N eadem est,

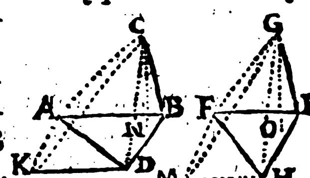
est, quę altitudinis A E ad altitudinem C F; & *c* inuertendo N ad O est, vt C F ad A E; sed *d* N ad O est, vt M ad O (eo quod M, & N ęquales sunt). Ergo *e* altitudo C F ad altitudinem A E eandem rationem habet, quam basis B ad basim D. *c pr. 9. l. 3.* *d pr 3 l 3.* *e pr 7. l. 3.*

Secundò in omnibus dictis solidis (comparando semper ea, quę eiusdem sunt speciei) sit basis B ad D reciprocè vt altitudo C F ad altitudinem A E: Dico solida ipsa ęqualia esse inter se. Quoniā *f* ęquales M, & N ad eandē O eādē rationē habent, & est B ad D, vt M ad O, & C F ad A E est, vt B ad D, seu, vt M ad O: Ergo C F ad *g* A E est vt N ad O, & inuertendo A E *h* ad C F est, vt O ad N; sed *i* proportio M ad N componitur ex rationibus M ad O, & O ad N: Ergo proportio M ad N componitur ex rationibus B ad D, & A E ad C F. Est verò proportio *k* solidi A B ad solidum C D composita ex ijsdem rationibus basis B ad basim D, & altitudinis A E ad altitudinem C F: Ergò *l* vt M ad N, ita est solidum A B ad solidum C D; sed erat M ęqualis N. Ergo solidum A B ęquale est solido C D. Quod erat, &c. *f pr. 3. l. 3.* *g pr. 7. l. 3.* *h pr. 9. l. 3.* *i pr. 19. l. 3.* *k pr 31. huius.* *l pr. 19. l. 3.*

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXIX. *Eucl. 36. XI*

Si fuerint duę pyramides, vel duo prismata, quorum bases sint triangula, vel parallelogrāma, & habeant vnum angulum solidum contentum à media trium proportionalium ęqualem angulo solido contento à tribus proportionalibus: erūt solida, quę eiusdem speciei sūt, ęqualia inter se.

Sint anguli solidi B & E ęquales inter se, & angulus B contineatur à tribus rectis proportionalibus A B, C B, D B, & angulus E contineatur à tribus F E, G E, H E ęqualibus medię C B trium proportionalium, & compleantur triangula A B D, F E H, atque parallelogramma K B, M E. Dico primò pyramides, quarum vertices C & G, bases verò triangula A B D & F E H, vel parallelogramma K B & M E ęquales esse inter se. A terminis *a* C, G sublimium ęqualium B C, & E G homologarum cadant perpendiculares C N G O ad subiecta plana: Erunt *b* perpendiculares C N & G O ęquales inter se. Et quoniam anguli A B D, & F E H æquales sunt inter se, & est A B ad F E, ita reciprocè H E ad D *a pr. 6. huius.* *b pr. 15. huius.*



B: Ergo

c pr.14.l.4. B: Ergo c triangula A B D, & F E H æqualia sunt inter se, pariterque parallelogramma K B, & M E æqualia erunt inter se. Cùm ergo pyramidum C A B D, & G F E H, bases A B D, F E H æquales sint, & altitudines C N, G O etiam æquales: erunt pyramides d æquales: pariterque quia bases k B, M E æquales sunt, & altitudines C N, G O etiam æquales; erunt e pyramides C k B, & G M E in eadem proportione æqualitatis.

d pr.23.24. huius e pr.25. huius.

Secundò iisdem positis. Dico prismata, quorum latera C B, G E, & bases triangula A B D, & F E H, vel parallelogramma K B, & M E esse æqualia inter se. Quoniam prædicta prismata altitudines habent æquales ipsis C N, & G O æqualibus; ideoque æquè alta erunt, & bases A B D, & F E H æquales sunt, nec non bases k B, et M E. Ergo f prædicta prismata æqualia inter se erunt. Quod erat, etc.

f cor 1 pr. 29 huius.

PROPOS. XXXIV. THEOR. XXX.

Si hemisphærium, et conus rectus, æquales axes, et bases habentes, secentur planis parallelis basibus, et æquè remotis à centro sphæræ et vertice coni, et super sectionibus, et super circulo basis coni, vel hemisphærij solida æquè alta describantur: erunt sectiones genitæ circuli, qui simul sumpti æquales erunt circulo basis hemisphærij, vel coni; & solida ipsa erunt cylindri æquales cylindro super circulo basis coni, vel hemisphærij descripto eiusdem altitudinis.

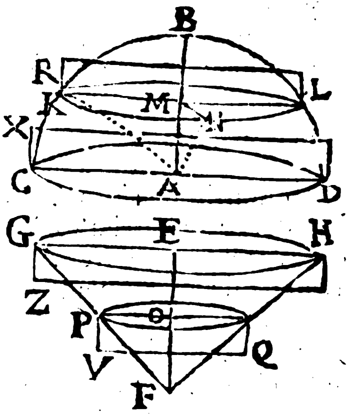
Sit hemisphærium B C D, & conus rectus F G H, quorum circuli basium A, & E sint æquales, & axes A B, & E F perpendiculares ad plana circulorum A, E, sint etiam æquales, & per puncta M & O æquè remota à centro sphæræ A, & vertice coni F ducantur plana K L & P Q parallela basibus A & E. Dico primò sphæræ sectionem K L circulum esse. Ducantur à puncto M in plano K L duæ qualibet rectæ lineæ M K, M N ad perimetrum eius, & iungantur rectæ A k, A N. Quoniam A B axis perpendicularis est ad vnum planorum æquidistantium C D: Ergo a B A perpendicularis est quoque ad planum reliquum K N L; & ideo b A M perpendicularis erit ad rectas K M, & M N in eodem plano existentes; & propterea triangula A M K, & A M N rectangula erunt in M, & sunt hypothenusæ A K, A N æquales, cùm sint radij sphæræ, & latus A M commune, atque reliqui anguli K, & N acuti,

a cor.1. pr. 9. huius. b pr.2. huius.

cùm

cùm anguli ad M sint recti: Igitur *c* triangula A M K, A M N similia sunt, & habent latera homologa A N, A k æqualia: Ergo *d* reliqua latera homologa M K, & M N æqualia sunt. Cùmque quælibet rectę à puncto M ductę ad curuam K M L in dicto plano sint æquales inter se; erit figura k N L circulus, cuius centrum M. c pr. 8. l. 4. d cor. 1. pr. 16. l. 3.

Secundò dico figuram P Q in cono genitam esse circulum; atque duos circulos k L, & P Q simul sumptos, equales esse circulo A, vel E. Quoniam in cono F G H rectangulo duo plana parallela inter se G H, & P Q si quomodolibet secentur plano per axim ducto G F H, *e* necessariò sectiones G E, & P O erunt parallelę inter se, & *f* anguli ad O & E erũt recti, quia axis E F perpendicularis est ad dicta plana, ideoque ad rectas G E, P O existentes in ipsis. Vnde *g* triangula G E F, & P O F similia erunt; & ideo, vt G E ad E F, ita erit P O ad O F, estque G E æqualis E F: Ergo *h* P O ę- qualis erit F O. Eadem ratione Q O æqualis erit eidem O F. Ergo P O, & Q O, & sic reliquæ omnes in plano P Q à puncto O ductæ ęquales erunt eidem F O, & ideo inter se; Quare figura P Q circulus erit, cuius cẽtrum O. Et quoniam *i* in triangulo rectangulo A M K duo circuli à radij, K M, & M A descripti æquales sunt circulo à radio K A descripto; estque circulus A, vel E æqualis circulo radij k A, eo quod rectę A K, A C, E G æquales sunt, atque circulus radij A M æqualis est circulo P Q (eo quod radij A M, & P O æquales sunt eidem F O, & inter se): Igitur circulus A, vel E æqualis est duobus circulis K L, & P Q simul sumptis. e cor 1. pr. 9. huius. f pr. 1. huius g cor. 1. pr. 6. l. 4. h cor. 1. pr. 16. l. 3. i pr. 18. l. 5.



Tertiò super circulos A, E, P Q, & K L describantur cylindri ęquè alti C X D, Z G H, V P Q, & R K L. Dico cylindrum X C D, vel Z G H ęqualem esse duobus cylindris R k L, & V P Q simul sumptis. Nam altitudines X C, vel Z G, & R K, V P ęquales factæ sunt: Ergo *k* cylindri X C D, R K L, V P Q erunt vt bases; & est basis circulus A, vel E æqualis duobus circulis K L, & P Q simul sumptis. Igitur *l* cylindrus X C D, vel Z G H ęqualis est duobus cylindris R k L, & V k cor. pr. 31. huius. l cor. pr. 22. & cor. 1. pr. 16. l. 3.

PQ simul sumptis, vt propositum fuerat.

COROLLARIVM.

I Colligitur ex prima parte huius propositionis, quòd perpendicularis à centro sphere ad planum circuli minoris in ea ducti cadit in centrum eiusdem circuli. Ostensum enim est perpendicularem A M à centro sphere ad planum circuli k L ductam cadere in M centrum circuli K L.

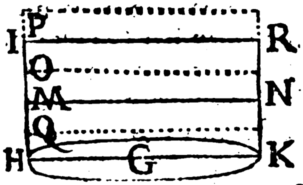
PROPOS. XXXV. PROBL. V.

Si hemisphęrium, conus rectus, & cylindrus ęquales axes, & bases habuerint, possunt adscribi hemisphęrio, & cono figurę gradatę ex cylindris ęquè altis compositę, ita vt circunscriptę, simul sumptę, maiores sint dato cylindro excessu minore quocũque dato, & duæ inscriptę, simul sumptę, minores sint dato cylindro defectu minore quocumque dato.

Sit hemisphærium A B C, conus rectus D E F, & cylindrus I H k R, quorum bases A, G, D sint circuli æquales, & altitudines perpendiculares A C, D F, I H sint æquales inter se. Debent adscribi, imperatæ figuræ. Secetur a latus I H cylindri bifariam in M, ducaturque b planum M N parallelum basi G. Manifestum est c cylindrum I M N dimidium esse totius cylindri I H k; & si rursus latus I M bifariam secetur in O, ducaturque planum per O parallelum basi G: similiter erit cylindrus R I O dimidium cylindri I M N; & si hæc bipartitio, & productio planorum æquidistantium basi G semper repetatur, relinquetur d tandem cylindrus aliquis, qui minor erit quacunque magnitudine proposita. Ponatur igitur postremus cylindrus R I O minor quacunque magnitudine data. Et e M H bifariam secetur in Q, ducaturque planum parallelum basi, & addatur in directum cylindrus P I R æqualis cylindro R I O; seceturque f tam altitudo A C, quàm D F in tot partes æquales in punctis S, T, V, X, Z, Y, in quot secta fuit I H. Patet g partes A V, F Y æquales esse cuilibet Q H, & inter se (eò quod æquè multiplices earum A C, D F, & I H æquales sunt inter se). Eadem ratione reliquæ partes V T, T S, S C, Y Z, Z X, X D, Q M, M O, O I, I P æquales inter se erunt.

a pr. 9. l. 1.
b cor pr. 10. huius.
c cor. 1. pr. 29. huius.
d sch. pr. 27. l. 2.
e pr. 9. l. 1. & cor. pr. 10. huius.
f pr. 28. l. 1.
g pr. 1. l. 3.

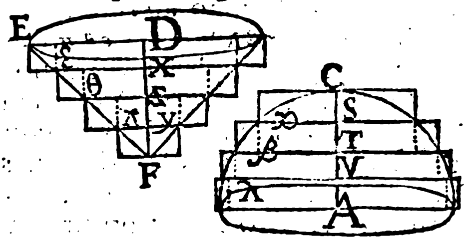
erunt. Deinde h per puncta diuisionum ducantur plana parallela basibus A, & D, quæ i circulos efficient tam in hemisphærio, quàm in cono, quorum circulorum radij sunt S α, T β, V λ, X ε, Z θ, Y π: h cor.pr.10. huius. i pr.34. huius.



& k super circulo radij S α describantur duo cylindri recti, quorum altitudines S C, & S T, eorumq; semisectiones per axim sint parallelogramma rectangula C α, T α: estque parallelogrammum C α circumscriptum segmento S C α circuli maximi BC, eo l quod contingens à puncto C cadit extra circulum B C; parallelogrammum verò T α inscriptum est frusto S α β T eiusdem circuli; cum m latus oppositum, & æquale ipsi S α minus sit, quàm T β, eo quod T β minus distat à centro A circuli B C, quàm S α. Et quia altitudines S C, S T æquales sunt, & basis communis, n cylindrus circumscriptus segmento sphæræ, cuius semisectio per axim est C α, erit æqualis cylindro inscripto, cuius semisectio est T α. Eodem modo super reliquos circulos radiorum T β, V λ, X ε, Z θ, Y π describantur bini cylindri, quorum vnus extra solidum cadens æqualis erit reliquo intra ipsum cadenti, eo quod sunt omnes æquè alti, & bini quilibet communem basim habent. Vnde vniuersa figura gradata, ex cylindris æquè altis composita, cuius semisectio per axim S α β λ A, quæ est inscripta hemisphærio, æqualis erit figuræ gradatæ circumscriptæ absque infimo cylindro, cuius semisectio per axim C α β λ V. Similiter figura gradata ex cylindris æque altis composita, cuius semisectio per axim D ε θ λ Y inscripta cono æqualis ostendetur figuræ gradatæ circumscriptæ absq; infimo cylindro, cuius semisectio per axim X ε θ π F. Quapropter binæ figuræ gradatæ inscriptæ hemisphærio, & cono, simul sumptæ, æquales erunt duabus figuris gradatis circumscriptis hemisphærio, & cono absque duobus infimis cylindris, quorum semisectiones V B, & X E. Et quoniam puncta V, Y æquè recedunt à centro sphæræ A, & à vertice coni F recti cylindri o æquè alti, quorum semisectiones

k def. 19. secun. huius

l pr.21.l.2.



m pr.16.l.2. & pr.11.l.2

n cor.1.pr. 29. huius.

o prop.31. huius.

per axim parallelogramma A λ, & Z π, simul sumpti, ęquales erunt cylindro Q H k; propterea quod altitudines ęquales sunt, & circulus basis G ęqualis est duabus basibus à radiis V λ, & Y π descriptis. Eadem ratione duo cylindri, quorum semisectiones V β, & X θ ęquales erunt cylindro Q M N; & duo cylindri quorum semisectiones T α, D ε ęquales erunt cylindro O M N. Quare duę figurę gradatę inscriptę hemisphęrio, & cono, quarum semisectiones A λ β α S, & Y π θ ε D simul sumptę, ęquales erunt cylindro O H k; sed eisdem figuris inscriptis ęquales erant duę figurę gradatę circunscriptę hemisphęrio, & cono absque infimis cylindris, quorum semisectiones C α β λ V, & X ε θ π F. Ergo duę figuræ gradatę circunscriptę hemisphærio, & cono absque infimis cylindris, ęquales erunt cylindro O H k: At p infimus cylindrus circa spheram, cuius semisectio B V, ęqualis est cylindro O I R, propterea quod bases, & altitudines æquales sunt; pariterque infimus cylindrus circa conum, cuius semisectio E X ę-qualis est cylindro P I R: Igitur duæ figurę gradatę circunscriptę hemisphęrio, & cono, quarũ semisectiones C α β λ B A, & D E ε θ π F, simul sumptę ęquales erunt cylindro P H k; estque cylindrus P I R excessus cylindri P H k supra cylindrum I H k, atque cylindrus P I R minor erat quacunque data magnitudine. Igitur duę figuræ gradatæ circunscriptę hemisphęrio A B C, & cono D E F, simul sumptę, superant cylindrum datum I H K excessu minore quacunque data magnitudine; Et duę figurę gradatę inscriptæ hemisphærio A B C, & cono D E F, quæ æquales erant cylindro O H K, deficiunt a cylindro I H K defectu O I R minore quacunque data magnitudine. Quod fieri posse ostendendum erat.

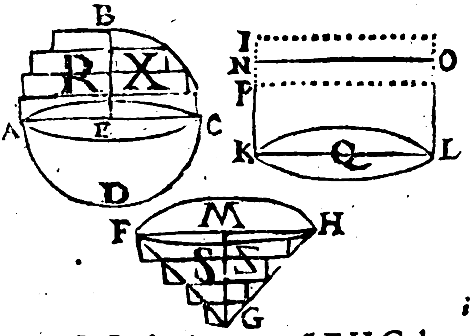
p cor. 1. prop. 29. huius.

PROPOS. XXXVI. THEOR. XXXI.

Sphęra quadrupla est coni recti, cuius basis ęqualis est circulo maximo, axis verò ęqualis radio sphęrę.

Sit sphera A B C D, cuius circulus maximus per centrum E ductus sit A C, & conus F H G, cuius basis M sit ęqualis circulo

culo E, & axes M G, B E sint ęquales, & perpendiculares ad plana basium E, & M. Dico sphęram A B C D quadruplam esse coni recti F H G. Fiat rectus *a* cylindrus N K L O, cuius basis Q ęqualis sit circulo E, vel M, & altitudo N k ęqualis sit axi B E, vel M G; Et *b* describantur circa hemisphęrium A B C, & circa conũ F H G duæ



a def.14.19 secun.huius & pr.3.l.1.

b pr.35.huius.

figurę gradatę ex cylindris ęquè altis compositę, quarum semisectiones per axim sint R, & S, ita vt simul sumptę, maiores sint cylindro N k L O excessu I N O minori quacunque data magnitudine: pariterque hemisphęrio, & cono inscribantur duę figurę gradatę, quarum semisectiones X, & Z, quę minores sint cylindro N K L O defectu P N O minori quacunque data magnitudine. Et quoniam sunt duę magnitudines, prima cylindrus N k L O, secunda est hemisphęrium A B C, vna cum cono F G H, & duę alię magnitudines in ratione ęqualitatis, scilicet cylindrus I K L, & duę figurę gradatę, simul sumptę, quarum semisectiones R, & S, quę sunt vnà maiores prima, & secunda, (nam figurę gradatę circunscriptę, quarum semisectiones R, & S maiores sunt hemisphęrio vnà cum cono), & cylindrus I k L maior est cylindro N K L O excessu I N O minore quacunque data magnitudine: pariterq; sunt duę alię magnitudines scilicet cylindrus P k L qui ęqualis est duabus figuris gradatis inscriptis, quarũ semisectiones X, & Z, & sunt vnà minores prima, & secunda; estque defectus cylindri P K L à prima, scilicet à cylindro N k L O minor quacunque magnitudine data: Ergo *c* prima ad secundam, idest cylindrus N K L O ad hemisphęrium A B C, vnà cum cono F G H eandem rationem ęqualitatis habet. Estque *d* cylindrus N k L O triplus coni F H G ęqualem basim, & altitudinem cum illo habentis: Igitur *e* hemisphęrium A B C vnà cum cono F G H ad conum F G H triplam proportionem habet; Et *f* diuidendo hemisphęrium A B C ad conum F G H duplam proportionem habebit: Estque sphęra A B C D dupla hemisphęrij A B C: Ergo sphęra A B C D quadrupla est coni F G H. Quod, &c.

c ex sch. pr. 24.l.3.

d pr.29.huius.

e pr.3.l.3.

f pr.13.l.3.

CO-

COROLLARIVM.

Hinc manifestum est si cylindrus rectus basim habuerit æqualem maximo sphęrę circulo, altitudinem verò æqualem diametro eiusdem sphęrę, esse cylindrum sesquialterum ipsius sphæræ.

Quia cylindrus N K L O, ex hac propositione, ęqualis est hemisphęrio A B C vnà cum cono F G H; est verò *g* cylindrus triplus coni: Ergo *h* per conuersionem rationis cylindrus N K L O sesquialter est hemisphęrij A B C, et *i* duplum ad duplũ in eadẽ ratione quoque erit; idest cylindrus cuius basis ęqualis est maximo sphęrę circulo, altitudo verò ęqualis diametro sphęrę, sesquialter erit sphęræ A B C D.

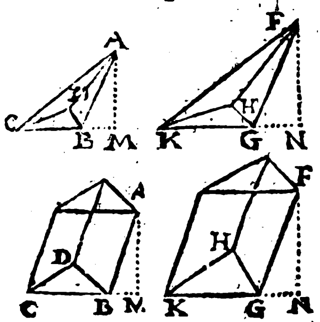
g prop.29. huius. *h cor.pr.15. l.3.* *i pr.11. l.3.*

Eucl.33.XI 8.12.16.XII

PROPOS. XXXVII. THEOR. XXXII.

Pyramides, prismata, coni, cylindri similes, & sphæræ in triplicata sunt ratione homologorum laterum, vel suorum axium.

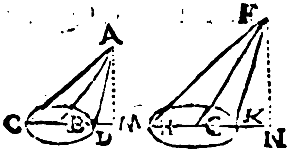
Sint duę pyramides, aut prismata, aut coni, aut cylindri similes, aut duę quęlibet sphęrę A B C D, & F G H k, quarum latera homologa, seu axes A B, & F G. Dico solidum ad simile solidum triplicatam habere proportionem lateris, seu axis A B ad latus, seu axim F G. Demittatur *a* à summitatibus solidorum ad plana basium perpẽdiculares A M, & F N, quę altitudines eorum determinabunt. Quoniam *b* propter similitudinem pyramidũ, aut prismatum anguli solidi B, & G ęquales sũt, & ideo planis angulis ęqualibus C B D, & H G k insistentes A B, & F G cum lineis primò positis æquales angulos continent: *c* Quare vt B A ad G F, ita erit perpendicularis, seu altitudo A M ad altitudinem F N: Cumque propter similitudinem triangulorum, vel parallelogrammorum C B A, K G F sit, vt A B ad B C, ita



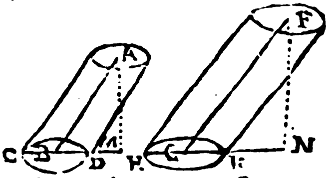
a pr.6.huius *b def.3.huius.* *c prop.15. huius.*

C, ita F G ad G k: Ergo *d* permutando vt A B ad F G, seu, *e* vt altitudo A M ad altitudinem F N, ita est B C ad G k. In conis verò, & cylindris, quoniam *f* propter similitudinem solidorum, vt axis A B ad axim F G, ita est diameter C D circuli basis ad diametrum H K, seu *g* radius B D, ad radium H G, & anguli A B D, & F G k ęquales sunt: pariterque anguli ad M, & N recti: Ergo *h* triangula A B M, & F G N similia sunt; Quare vt *i* axis A B ad axim F G, ita est A M, altitudo eiusdem solidi, ad F N altitudinem alterius solidi.

d pr.10.l.3 *e pr.7.l.3.* *f def.23. secun. huius* *g pr.11.l.3.* *h cor.4. pr. 4.l.4.* *i cor.2.pr. 44.l..*

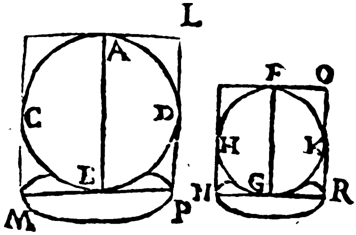


Patet ergo, quòd in omnibus prędictis solidis similibus, vt est latus, vel axis A B ad latus, seu axim F G, ita est altitudo A M ad altitudinem F N; & ita pariter est B D ad G H, quę sũt latera homologa polygonorum basium, vel semidiametri circulorũ basium B D, & G K dictorum solidorum: & quoniam *k* solida, quę eiusdem speciei sunt, idest coni inter se comparati, &c. proportionem habent inter se compositam ex proportione basium B C D & G k H, & ex ratione altitudinum A M, & F N: Est verò *l* proportio duplicata lateris, seu semidiametri C B ad latus, seu semidiametrum G k eadem, quę basis B C D ad ei similem basim G k H; sed vt C B ad G K, ita est A B ad F G: Ergo *m* proportio duplicata lateris, seu axis A B ad latus, seu axim F G, eadem est, quę basis B D C ad basim G H K; Postea simplex proportio A B ad F G eadẽ est, quę altitudinis A M ad altitudinem F N: Ergo proportio solidi A B C D ad solidum F G H K componitur ex duplicata proportione, & rursus ex simplici ipsius A B ad F G; Hęc *n* verò triplicata proportio est lateris, vel axis A B ad F G. quare solida similia A B C D, & F G H K triplicatam proportionem habent laterum homologorum, siue axium A B ad ad F G.



k prop.31. huius. *l pr.17.l.4. & pr.12.l.5* *m pr.7.l.3.* *n pr.19.l.3.*

In sphęris autem A C B D, & F H G K intelligantur circumscripti cylindri recti M L, & N O, quorũ bases M P, & N R ęquales sint maximo sphęrę circulo, & altitudines L P & O R ęquales diametro eiusdem sphęræ. Et quoniam cylindri M L, & N O similes sunt, (eo



quod

quod sunt recti, & eandem æqualitatis rationem habet axis A B ad axim F G, quam M P diameter circuli suę basis ad N R diametrum basis alterius: Ergo o cylindrus M L ad cylindrum N O proportionem triplicatã habet axis A B ad axim F G; Est verò p cylindrus M L sesquialter sphęrę A C B D; Pariterque cylindrus N O sesquialter sphęrę F H G k: Ergo q permutando vt cylindrus M L ad cylindrum N O, ideſt r vt triplicata proportio axis A B ad axim F G, ita est sphęra A B C D ad sphæram F H G k. Quod erat ostendendum.

o *par. prima huius.*
p *cor. pr. 36. huius.*
q *pr. 12. l. 3*
r *par. prima huius.*

Finis Libri sexti.

LI-

LIBER SEPTIMVS.

De quinque corporibus regularibus.

DEFINITIONES.

I.

Cuiuslibet rectæ lineæ quadratum, vocetur eius Potentia: Et proportio quadratorũ quarumlibet linearum, vocetur earundem linearum proportio potentialis, vel in potentia.

Vt quotiescunque dicetur recta A ad rectam B esse potentia, vt 2 ad 3, sensus erit, quadratum ipsius A ad quadratum alterius rectæ B habere proportionem subsesquialteram, seu esse vt 2 ad 3.

II.

Solida figura in sphera inscribi dicitur, & sphera circunscribi figurę solidę, quando omnes anguli solidę figurę tangunt superficiem sphęrę.

III.

Solida figura sphæræ circunscribi dicitur, & sphæra inscribi dicitur in figura solida, quando omnia plana figuræ solidæ tangunt superficiem sphęrę.

IV.

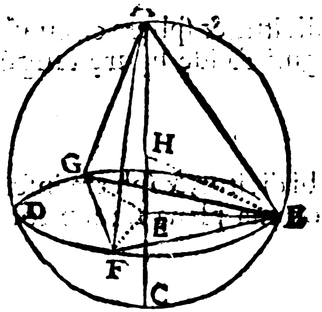
Nomina trianguli, quadrati, pentagoni, hexagoni, decagoni, absque alia superaddita declaratione significent tantummodo eas figuras regulares, quę ab eodem circulo comprehendi possunt; pariterque nomina figurarum solidarum significabunt solummodo eas, quę in eadem sphęra inscribi possunt.

Euclid. 15. XIIII.

PROPOS. I. PROBL. I.

In data sphęra figuram solidam sub quatuor triangulis ęqualibus, & ęquilateris contentam, inscribere. Vocetur autem talis figura Tetraedrum.

In sphęra A B C D, cuius axis A C, circulus maximus A B C D, inscribenda est figura imperata. Secetur a C E, quæ tertia pars sit axis A C, & b per E in duobus planis eleuentur E B, & E G perpendiculares ad eandem A C; erunt c axis A C & circulus A B C perpendiculares ad planum per B E G ductum, quod efficiet d circulum B G D F, & e in eo inscribatur triangulum ęquilaterum B G F, iunganturque rectę AB, A F, & A G. Ostendendum est figuram A B F G esse quęsitam. Quoniam f in semicirculo A B C, rectę lineæ C A, A B, A E proportionales sunt; vt g recta C A ad A E, ita erit quadratum ex C A ad quadratum ex A B; & ita erit quadratum ex B A ad quadratum ex A E; sed h vt recta A E ad E C, ita est quadratum ex A E ad quadratum ex E B: Igitur i ex compositione ordinata erit, vt A C ad C E tertiam partem eius, ita quadratum A B ad quadratum E B, & k propterea quadratum ipsius AB triplum est quadrati ipsius E B; sed l quadratum ipsius F B, scilicet lateris trianguli ęquilateri, inscripti circulo B D, triplum est quadrati radij eius E B. Ergo m quadrata rectarum A B, & B F ęqualia sunt inter se; & n propterea rectæ A B, & B F ęquales erunt. Eadem ratione tam recta A F, quàm A G ęqualis erit eidem F B, seu B G, vel F G; & proptęrea o quatuor triangula A B F, A F G, A G B, & B G F æquilatera erunt & inter se ęqualia. Et hęc comprehendunt solidam figuram p descriptam intra sphęram A B C D, quod imperatum fuerat. Vocetur dicta figura A B F G Tetraedrum.



a pr. 28. l. 1.
b pr. 10 l. 1
c pr. 2. & 4. l. 6.
d pr. 34. l. 6.
e pr. 3. l. 5.
f ex pr. 10. l. 4.
g cor. 3. pr. 17. l. 4.
h ex sch. pr. 9. & cor. 3. pr. 17 l. 4.
i pr. 19. l. 3.
k def. 8. l. 3.
l pr. 30. l. 5.
m pr 4. l. 3.
n cor. 2. pr. 17. l. 4.
o pr. 1. & 4 l. 1.
p def. 2. huius.

CO-

COROLLARIVM I.

Diameter sphęrę potestate sesquialtera est lateris inscripti tetraedri. Nam facta est C A sesquialtera ipsius A E, & vt C A ad A E; ita ostensum est in hac propositione quadratum ipsius C A ad quadratum A B lateris Tetraedri.

COROLLARIVM II.

Altitudo tetraedri subsesquialtera est diametri sphęræ: & sesquitertia radij eiusdem.

Nam secta fuit E C tertia pars diametri A C; & ideo qualium partium A C est 6. erit E C 2, & A E 4. & H C, seu H B sphęrę radius 3. Et propterea A E altitudo ad A C erit vt 4 ad 6, & ad radium sphęrę H B erit, vt 4 ad 3.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à centro sphęrę ad planum basis inscripti tetraedri, quę vocetur Radius tetraedri, sexta pars est diametri, & tertia pars radij sphęrę.

Nam perpendicularis H E ęqualis est differentię altitudinis A E, & radij sphęrę A H; sed altitudo A E est 4, & radius 3, illarum partium, quarum diameter A C est 6. Ergo talis perpēdicularis H E sexta pars est diametri, & tertia radij AH.

COROLLARIVM IV.

Latus tetraedri ad eius altitudinem sesquialterum est potestate. Nam, vt C A ad A E, idest, vt 3 ad 2, ita ostensum est quadratum B A ad quadratum A E in hac propositione.

COROLLARIVM V.

Radius circuli comprehendentis triangulum tetraedri octo nonę partes est potestate radij sphęrę; Et octuplum potestate perpendicularis à centro sphęrę.

Nam E H tertia pars est radij H B: Ergo q quadratum H E nona pars est quadrati H B; ideoque quadratum B E erit 8. q cor. 3. 27. 17 l. 4.

COROLLARIVM VI.

Patet tetraedrum diuidi in quatuor pyramides ęquales, quarum vertices in centro sphęrę, bases verò plana tetraedri: eo *r* quod bases, & altitudines sunt inter se ęquales.

r pr.23.l.6.

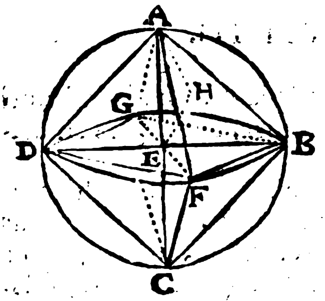
Eucl. 14. XIII.

PROPOS. II. PROBL. II.

In data sphęra solidam figuram sub octo triangulis ęquilateris inter se ęqualibus contentam inscribere. Vocetur autem talis figura Octaedrum.

a pr.10 l.1. *a pr.6.l.6.*

Sit data sphera A B C D, cuius centrum E. Describi debet intra eam figura imperata. Ducantur *a* tres diametri A C, B D, F G ad inuicem perpendiculares, & coniungantur rectę A B, A F, A D, A G, C B, C F, C D, & C G. Quoniam in tribus triangulis A E B, A E F, B E F communia latera E B, A E, & E F sunt ęqualia, radii nimirũ sphęrę; Suntque anguli A E B, A E F, & B E F ęquales, cùm radii A E, B E, F E ad inuicem perpendiculares ducti sint. Igitur *b* isoscelium triangulorum bases A B, A F, F B ęquales sunt inter se; & propterea *c* triangulum A B F ęquilaterum erit. Simili ratione reliqua omnia triangula B A G, G A D, D A F, F C B, B C G, G C D, D C F ęquilatera erunt; & *d* sunt inter se ęqualia, cùm bina quęlibet triangula habeant latera communia. Igitur figura solida A B C D G F intra spheram descripta comprehensa erit sub octo triangulis ęquilateris, & inter se ęqualibus. & hoc erat faciendum. Vocetur huiusmodi figura solida Octaedrum.



b pr.4.& 5. l.1.

c pr.1.l.1.

d pr.4.l.1.

COROLLARIVM I.

Constat sphęrę diametrum potestate duplam esse; Et radium sphęrę potestate semissem esse lateris octaedri.

b pr.30.l.3.

Nam in quolibet triangulo A B C *e* rectangulo in semicirculo A B C, in quo duo latera A B, B C ęqualia sunt, quadratum

dratum f hypothenusę, seu diametri sphęrę A C duplum est quadrati lateris A B; & g quadratum radii E A, quod est quarta pars quadrati A C, erit semissis quadrati lateris A B. f pr. 18. l. 5 g cor. 1. pr. 19 l. 5.

COROLLARIVM II.

Radius sphęrę potestate sesquialter est radii circuli continentis triangulum Octaedri. h cor. 1. huius pr.

Nam h A E potestate semissis est ipsius A B, & i A B est tripla potestate ipsius A H, radii nimirum circuli, continentis triangulum A B F, quæ rationes componunt sesquialteram. i pr. 30. l. 5.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à cętro sphęrę ad planum trianguli Octaedri (quę vocetur Radius octaedri) est ad radium sphęrę potestate subtripla. nam k à centro sphęrę ducta perpendicularis E H ad planum circuli continentis triangulum A B F cadet in centrum eiusdem circuli; l & ideo in triangulo rectangulo in H erit quadratum ex A E ęquale duobus quadratis ex A H, & E H; & qualium partium quadratum ex A E est 3 erat quadratum A H 2; propterea quadratum ipsius EH erit vna tertia pars quadrati A E. k cor. pr. 34 l. 6. l pr. 18. l. 5

COROLLARIVM IV.

Altitudo Octaedri ad diametrum sphęrę potestate tertia pars est.

Nam perpendicularis E H producta ad oppositam basim C D G dupla est ipsius E H, sicuti A C dupla est ipsius A E.

COROLLARIVM V.

Latus octaedri ad eius altitudinem potestate sesquialterum esse constat.

COROLLARIVM VI.

Patet octaedrum diuidi in octo pyramides verticem in centro sphęrę habentes, quę altitudines, & bases æquales habent; & ideo m æquales erunt inter se. m pr. 23. l. 6.

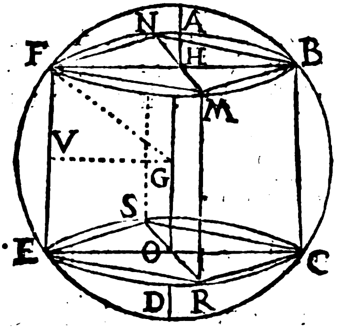
PRO-

Eucl. 15. XIII.

PROPOS. III. PROBL. III.

In data sphæra solidam figuram inscribere sub sex quadratis æqualibus contentam. Vocetur talis figura, Cubus.

Sit data sphæra A B D F, cuius centrum G, axis A D. Debet in ea inscribi figura imperata. Secetur a recta G H, quæ media proportionalis sit inter radium sphæræ G A eiusque partem tertiam: erit b eius quadratum tertia pars quadrati ex radio sphæræ G A, & c fiat G O çqualis G H, atque per duo puncta H, & O ducantur duo plana ad axim A D erecta, sicuti in prima propositione huius factum est, quç d efficient circulos B M F, C R E, & e ducantur duç diametri B F, & M N ad inuicem perpendiculares, & in altero circulo ducatur f diameter C E parallela ipsi B F, atque R O S parallela ipsi M N, iunganturque rectæ B M, M F, F N, N B, B C, M R, F E, N S, S C, C R, R E, & E S. Et quoniam iuncta recta G F in triangulo rectangulo F G H g quadratum radij F G, seu G A çquale est duobus quadratis F H, & H G; & erat quadratum radij A G triplum quadrati ipsius G H: Ergo quadratum ipsius G F seu duo quadrata ipsarum F H, & H G tripla erunt quadrati ipsius G H; & propterea quadratum ipsius F H duplum erit quadrati ipsius H G; estque h quadratum ipsius F M duplum quadrati ipsius F H (eo quod angulus F H M rectus est, & F H, & H M sunt radij æquales eiusdem circuli B F): Igitur quadratum ipsius F M quadruplum erit quadrati ipsius H G; & propterea i recta F M dupla erit ipsius H G. Vnde F M æqualis erit H O. Eadem ratione singulæ rectæ F N, N B, B M, C R, R E, E S, S C æquales erunt eidem H O, suntque k singulæ B C, M R, F E, & N S parallelç, & çquales eidem H O, propterea quod coniungunt terminos radiorum parallelorum, & l inter se çqualium, cùm çqualiter distent à centro circuli maximi sphçrç. Igitur duodecim dictç rectç çquales sunt inter se; & quia axis A D perpendicularis est ad rectas M N, B F, R S, & C E, & ideo m ad plana circulorum B F M, & C E R, & rectç B C,



a pr. 18. l. 1. & pr. 10. l. 4
b cor. 3. pr. 17. l. 4.
c pr. 3. l. 1.
d pr. 34. l. 6
e pr. 10. l. 1.
f cor. pr. 16. l. 1.
g pr. 18. l. 5.
h pr. 18. l. 5.
i cor. 3. pr. 17. l. 4.
k pr. 27. l. 1
l pr. 10. l. 2.
m pr. 2. l. 6.

BC, MR, FE, NS parallelę sunt axi AD: propterea eędem rectę *n* perpendiculares erunt ad ipsas BM, MF, FN &c. atq; ad CR, RE, &c. in planis eorundem circulorum existentes. Similiter *o* anguli NBM, BMF, CRE, &c. recti erunt, cùm in semcirculis constituti sint. Quapropter *p* figurę sex BR, RF, FS, SB, BF, & CE erunt quadrata, quę comprehendunt figuram intra sphęram descriptam. quod fuit propositum. Vocetur talis figura Cubus.

n pr. 4. l. 6.
o pr. 10. l. 2.
p pr. 34. l. 1.

COROLLARIVM I.

Patet sphęrę diametrum potestate triplam esse lateris cubi. Nam sphęrę radius AG factus est triplus potestate ipsius HG, estque AD dupla ipsius AG, atque latus cubi BC ostensum est duplum ipsius HG. Ergo *q* quadratū AD triplum est quadrati lateris cubi BC.

q cor. 1. pr. 19. l. 5. & pr. 11. l. 8.

COROLLARIVM II.

Radius circuli, continentis quadratum cubi, seu distantia perpendicularis à centro sphęrę ad latus cubi potestate subsesquialtera est radij sphęrę.

Ostensa enim fuit FH subsesquialtera potestate ipsius AG; estq; *r* GV, perpendiculariter ducta supra latus cubi FE, ęqualis FH illi oppositę in parallelogrammo HV.

r pr. 26. l. 1.

COROLLARIVM III.

Perpendicularis à centro sphęrę ad planum quadrati cubi semissis est lateris cubi; & est potestate tertia pars radij sphęrę. Facta enim fuit GH tertia pars potestate ipsius AG, & ostensa fuit GH semissis ipsius BC lateris cubi. Vocetur autem talis perpendicularis Radius cubi.

COROLLARIVM IV.

Altitudo cubi ęqualis est lateri ipsius cubi; & propterea altitudo erit tertia pars potestate diametri sphęrę.

Ostensa enim fuit HO ęqualis lateri cubi BC.

CO-

COROLLARIVM V.

Tandem patet cubum distribui in sex pyramides quadrangulares vertices in centro sphęrę habentes, quę *f* sunt ęquales, cùm bases quadratas habeant ęquales, atque altitudines perpendiculares à centro sphęrę, etiam ęquales inter se.

f pr 23.l.6.

Eucl 16. lib. XIII.

PROPOS. IV. PROBL. IV.

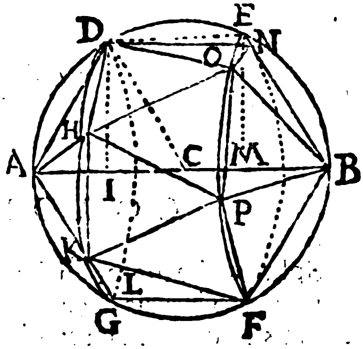
In data sphęra solidam figuram sub viginti triangulis ęquilateris, & inter se ęqualibus contentam inscribere. Vocetur autem tale solidum Icosaedrum.

In sphęra, cuius axis A B, centrum C, circulus maximus A D B F inscribi debet figura solida imperata. Secętur *a* C I, quę media proportionalis sit inter radium sphęrę A C, eiusq; partem quintam: erit *b* eius quadratum quinta pars quadrati radij sphęrę A C, & *c* secetur M C ęqualis ipsi C I, & per I, & M ducantur duo plana, erecta ad axim A B, atque ad circulum A D B (vt in prima propositione huius factum est) quę *d* efficient duos circulos D G, & E F *e* inter se ęquales, & *f* parallelos; eo quod iuncti radij D I, & E M ęqualiter distant à centro circuli A D B; Et *g* in eisdem circulis inscribantur duo pentagona regularia D H k L, & F P O N, ita vt anguli D, & F in puncta opposita sphæræ D, & F incidant; & à polis sphæræ A, & B ad singulos angulos pentagonorum rectæ iungantur A D, A H, A K, A L, &c. B F, B P, B O, B N, &c. Ducanturque rectæ N D, D O, O H, H P, P K, K F, F L, &c. Ostendendum est viginti triangula, comprehendentia inscriptam figuram, æqualia, & æquilatera esse. Diuidatur *h* arcus O N bifariam in E; iunganturque rectæ N E, D E, & D C. Quoniam quadratum radii A C, siue D C quintuplum est quadrati ipsius I C: Suntque *i* duo quadrata D I, & I C æqualia quadrato radii D C (propterea quod angulus D I C rectus est, cùm *k* axis A B perpendicularis sit ad circulum D G.) Igitur duo quadrata D I, & I C quintupla sunt quadrati ipsius I C; & propterea quadratum ipsius D I quadruplum erit quadrati ipsius I C. Vnde *l* recta linea D I dupla erit ipsius I C; est autem M I dupla eiusdem I C. Igitur rectæ D I, & M I æquales sunt inter se; estque *m* M E æqualis eidem D I (cùm æqualiter

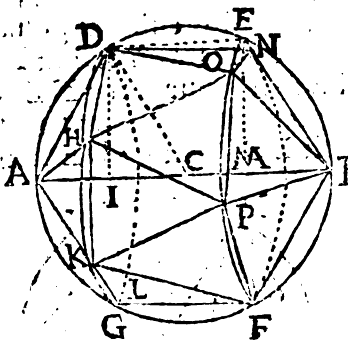
a pr.18.l.1 & pr.10.l.4
b cor.3.pr.17 l.4.
c pr.3.l.1.
d pr 14.l.6
e ax & pr.10 l.2.
f pr.9 l.6.
g pr.3.l.5.
h cor pr.19 l.2.
i pr.18 l 5
k pr.2.l.6.
l cor.1.pr.19.l.5.
m pr.10.l.2

liter

liter distent à centro) Ergo n figura D I M E cuius angulus I rectus quadratum est, & propterea recta D E æqualis erit D I, radio circuli D H G; siue radio M E; Cumque arcus N E semissis sit arcus N O subtensi à latere pentagoni: o erit recta N E latus decagoni eiusdem circuli E O F, cuius p D E latus est inscripti hexagoni, cùm sit æqualis radio circuli M E: Est verò axis A B perpendicularis ad circulum E O F, atque D E est parallela ipsi A B; Ergo q D E perpendicularis quoque erit ad planum circuli E O F; & propterea r ad rectam E N in eo existẽtem: Vnde in triangulo D N E erit angulus D E N rectus, & propterea s quadratum ipsius D N æquale erit quadrato lateris decagoni N E vnà cum quadrato lateris hexagoni D E eiusdem circuli N O F: & ideo t N D æqualis erit lateri pentagoni N O eiusdem circuli E O F. Eadem ratione singulæ rectæ D O, H O, H P, K P, K F, L F, &c. æquales erunt singulis lateribus pentagoni N O, O P, P F &c. ideoque u quinque triãgula N D O, O H P, P K F, &c. quorum bases sunt quinque latera pentagoni N O P F inter se æqualia, & æquilatera erũt. Eadem ratione ostendentur quinque triangula D O H, H P K, K F L, &c. quorum bases sunt quinque latera pentagoni D H K L æquilatera, & inter se, & prioribus æqualia. Tandem quoniam A C quintuplum potest ipsius I C, & est M I dupla ipsius I C; Ergo x M A in I secatur extrema, & media ratione, cuius segmentum maius erit M I; hoc autem æquale est circuli radio I D, scilicet y lateri hexagoni circuli D G, erit z minus segmentum A I æquale lateri decagoni eiusdem circuli: ideoque a quadratum ex D A, quod æquale est duobus quadratis ex D I, & I A (cùm axis A B perpendicularis sit ostensus ad eius radium I D) erit b æquale quadrato lateris pentagoni; & c propterea recta D A æqualis erit lateri pentagoni D H circulo D G inscripti, & sic reliquæ omnes A H, A K, A L, &c. pariterque B N, B O, B P, B F, &c. erunt inter se æquales, & æquales ipsis lateribus D H, H K, K L, N O, O P, &c. Igitur decem d triangula vertices in A, & B habentia



n pr. 34. l. 1
o pr. 3. l. 5.
p sch. pr. 3. l. 5.
q pr. 4. l. 6.
r pr. 2. l. 6.
s pr. 18. l. 5.
t pr. 32. l. 5.
u pr. 1. & 7. l. 1.
x pr. 26. l. 5.
y sch. pr. 3. l. 5.
z sch. pr 8. l. 5.
a pr. 18. l. 5
b pr. 32 l. 5
c cor. 2 pr. 17. l. 4.
d pr. 1. & 7. l. 1.



(tot nimirum, quot sunt latera amborum pentagonorum N O P F, & D H K L) æquilatera sunt, & inter se, & prioribus æqualia. Quapropter viginti triãgula comprehendẽtia solidam figuram intra sphæram descriptam æquilatera sunt, & inter se æqualia. vt propositum fuerat. Vocetur huiusmodi figura solida Icosaedrum.

COROLLARIVM I.

Sphæræ diameter ad latus icosaedri est, vt latus hexagoni cum duplo lateris decagoni ad latus pentagoni; & potentia
e pr.18.l.4. est, vt 5 e quadrata lateris hexagoni ad quadratum lateris pentagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad quintam partem quadrati lateris pentagoni. Nam in circulo D G est D H
f sch pr.3. l.5. latus pentagoni, & f radius D I, seu ei æqualis I M est latus hexagoni; estque I M maius segmentum rectæ M A diuisæ ex-
g sch.pr.8. l.5. trema, & media ratione: Ergo g minus eius segmentum A I, & ei æqualis M B sunt latera decagoni eiusdem circuli D G; & propterea diameter sphęrę A B ad latus icosaedri D H erit, vt summa lateris hexagoni I M, & dupli lateris decagoni A I ad latus pentagoni D H ab eodem circulo comprehensorum. Rursus quia A B componitur ex A M diuisa in I extrema, & media ratione, & ex minore eius segmento M B: Ergo h qua-
h pr.25.l.5. dratum ex A B quintuplum est quadrati maioris segmenti I
l sch pr 3. l.5. M, seu l D I lateris hexagoni circuli D G: Ergo diameter sphęræ potẽtia ad latus icosaedri D H est, vt 5 quadrata lateris hexagoni D I ad quadratum rectæ D H, quę est latus pentagoni eiusdem circuli, seu erit, vt quadratum lateris hexagoni ad quintam partem quadrati lateris pentagoni.

COROLLARIVM II.

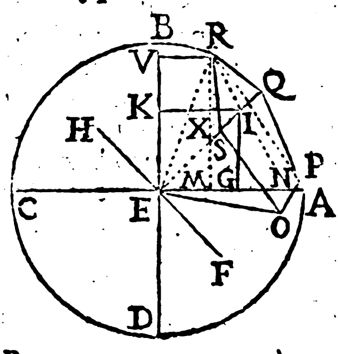
Patet icosaedrum diuidi in viginti pyramides triangulares
m pr.23 l 6 verticem in centro sphęrę habentes, ęquales m inter se, cùm
n pr.10.l.2. bases, scilicet triangula icosaedri ęqualia sint inter se, n & per-

perpendiculares à centro sphęrę ad plana triangulorum icosaedri (quę vocentur Radij icosaedri) ęquales sint; eo quod radij ° circulorum circunscribentium dicta triangula ęquilatera & ęqualia, ęquales sunt inter se; & propterea in maximis circulis sphęrę existētes ęqualiter distāt à centro sphęrę. o ex pr. 15. l. 5. & cor. 2. pr 17. l. 4. & pr. 10. l. 3.

PROPOS. V. PROBL. V. Eucl. 17. XIII.

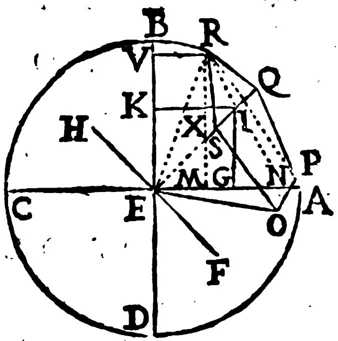
In data sphęra figuram solidam sub duodecim pentagonis regularibus inter se ęqualibus contentam, inscribere. Vocetur autem talis figura Dodecaedrum.

Sit sphęra, cuius circulus maximus A B C D, cētrum E. Describi debet intra eam imperata figura. Ducantur a tres diametri A C, B D, F H, quę sint ad inuicem perpendiculares; b & secetur E G ęqualis radio cubi, seu medietati lateris cubi inscripti in eadem sphęra: & c in plano A B C fiat quadratum E G I K, quod d erit tertia pars quadrati ex radio A E; & e secetur E G in M extrema, & media ratione, cuius maius segmentum sit E M, seceturque f G N ęqualis E M, iungaturque recta N I, & g à puncto M ducatur M R parallela ipsi G I, vel E B, secans h N I productam in R, & k I in X; atque à puncto R ducatur R V parallela ipsi K I, vel E A, secans E B in V, & i à punctis N I ad planum B E A eleuentur perpendiculares S I Q, O N P (quę k inter se parallelę erunt, & l in eodem plano, in quo recta R N iacet) secenturque m N O, P O, singulę ęquales ipsi G N, vel E M; & S I, Q I fiant singulę ęquales ipsi E G, coniunganturque rectę R S, S O, P Q, Q R, R E, R O, R P, S E, O E, P E, I E. Patet figuram R S O P Q in vno plano parallelarum S Q, O P existere. Et quoniam G N ęqualis facta est E M maiori segmento rectę E G, diuisę in M extrema, & media ratione: Igitur n E N, pariterque N M in G in eadem media, & extrema ratione secantur, eritque M N ęqualis E G. Cumque o propter parallelas G I, M R sit R N ad I N, vt M N ad N G vel p vt N E ad E G; atque propter parallelas E A, K I, V R sit V E ad K E, atque R M ad X M, vt R N ad I N; Igitur q tam N R in I, a pr. 10. l 1. & pr. 6 l 6. b pr. 3 l. 1. & cor 3. pr. 3. huius. c pr 34. l. 1. d ex pr. 3. huius. e pr. 25 l. 4. f pr. 3. l. 1. g cor pr. 16. l. 1. h cor pr. 29. l. 1. i pr 6. l. 6. k pr. 5 l. 6. l cor pr. 4. l 6. m pr. 3. l. 1. n pr 25 & cor pr. 26. l. 4. o sch. pr. 4. l. 1. p pr. 26. l. 4 q pr. 26. l. 4



quàm M R in X, quàm E V in K secantur extrema, & media
r pr. 26. l. 1. ratione; suntque r maiora segmenta X M, K E æqualia, cùm
s pr. 34. l. 1. sint latera opposita parallelogrammi K M, & s E G, k E latera
t pr. 26. l. 4. quadrati K G æqualia sunt; Ergo t minora segmenta V k, R X
& cor. 1. pr. 16. l. 3. æqualia sunt ipsi G N, vel N P, vel E M vel u V R ei opposite
u pr. 26. l. 1. in parallelogrammo V M. Et quia x P N perpendicularis ad
x pr. 2. l. 6. planum A E B est quoque perpendicularis ad N R existentem
z pr. 18. l. 5. in eodem plano; Ergo z in triangulo R N P quadratum ex R
y cor. 2. pr. 17. l. 4. P æquale erit quadratis ex R N, & ex P N, seu y ex N G, vel
ex R X ei æquali, & similiter propter angulum rectum
R M N quadratum ex R N æquale est quadratis ex R M, & ex
M N, vel ex ei æquali M X; Ergo quadratum ex R P æquale
a pr. 24. l. 5. est tribus quadratis ex M R, ex R X, & ex X M; & a sunt duo
quadrata ex tota M R, & R X minori segmento, rectæ diuisæ
extrema, & media ratione, tripla quadrati ex maiori eius segmento
M X: Igitur quadratum ex R P quadruplum est quadrati
ex M X, seu quadrati K G: est verò b quadratum ex S Q
b cor. 1. pr. 19. l. 5. quadruplum quadrati K G, eo quod S Q dupla est ipsius S I,
seu I G: Ergo quadrata ex R P, & ex S Q æqualia sunt, ideoque
c cor. 2. pr. 17. l. 4. rectæ c R P, S Q æquales erunt. Eadem ratione R O æqualis erit
eidem S Q, & ideo ipsi R P: Quare in pentagono R S P tres rectæ
O R, S Q, R P subtendentes angulos eius æquales sunt inter
d pr. 8. & 26. l. 4. se, d intermedia S Q parallela basi O P secat subtensas R P,
R O extrema & media ratione, veluti secat ipsam R N in I,
e pr. 11. l. 3. & maiora earum segmenta æqualia sunt basi O P, eo quod e S
pr. 26. l. 4. Q dupla ipsius S I, vel M N ad O P duplam ipsius N O, vel N
& pr. 3. l. 3. G est vt M N ad eius maius segmentum N G rectæ extrema, &
f cor. pr. 12. l. 4. & cor. 1. pr. 16. l. 3. media ratione diuisæ & sunt R O, R P æquales ipsi S Q; & ex ea
relinquũt vtrinq; portiones æquales; quia I S, I Q æquales sũt, f &
eorum portiones inter I, & subtensas R O, R P æquales sunt, sicuti
æquales sunt portiones O N, N P rectæ parallelæ ipsi S Q:
g sch. pr. 7. l. 5. Igitur g pentagonum R S O P Q regulare est. Postea quia in
triangulo E V R angulus V rectus est, quadratum h ex E R æquale
h pr. 18. l. 5. & cor. 2. pr. 17. l. 4. erit duobus quadratis ex E V, & ex V R, seu ex k V, quæ
ostensa fuit ei æqualis; sed i duo quadrata ex E V, & ex eius
i pr. 24. l. 5. minori segmento V k tripla sunt quadrati maioris segmenti K
E rectæ diuisæ extrema, & media ratione; Ergo quadratum ex
E R triplum est quadrati k G. Similiter quia in triangulo E
N O angulus N rectus est, quadratũ ex E O æquale erit duobus
quadratis ex E N & ex N O, seu ex ei æquali G N; suntque duo
quadrata ex E N, & ex minori segmento N G rectæ diuisæ

extre-



extrema, & media ratione tripla quadrati ex E G maiori segmento; Ergo quadratum ex E O triplum est quadrati k G: non secus ostendetur quadratum ex E P triplum quadrati K G: fuit autem quadratum radij sphęrę E A triplũ eiusdem quadrati K G: Igitur quadrata rectarum E R, E O, E P, & E A ęqualia sunt, & ideo k rectę E R, E O, E P, ęquales erũt radio sphęrę E A; & propterea anguli R, O, P in superficie sphęrę existẽt. Deinde quia S Q perpendicularis ęst ad planum B E A, *l* erit quoque erecta ad contiguam E I existentem in eodem plano; & *m* est E I potestate dupla ipsius E G, & eiusdem G E tripla est potestate semidiameter sphęrę E A: Ergo EI potestate subsesquialtera est radij sphærę, & ideo *n* E I erit distantia lateris cubi à centro sphæræ; & est S Q bifariam secta in I, & perpendicularis ad E I, atque est dupla semilateris cubi E G: Ergo *o* S Q est latus cubi inscripti in sphæra A B C H, & ideo anguli S, Q pentagoni R S P in sphæræ superficie existent. Si ergo compleatur inscriptio cubi in sphæra, cuius vnum latus est S Q; & ab eodem puncto N radij E A super communi basi O P construatur aliud pentagonum regulare, & *p* priori æquale, verticem habens versus D, habebit omnes angulos in superficie sphæræ, & recta linea subtendens angulum pentagoni parallela basi O P, pari modo applicata erit super latere inscripti cubi parallelo ipsi S Q.

k *cor. 2. pr. 17 l. 4*

l *pr. 2. l. 6*

m *pr. 18. l. 5*

n *cor. 2. pr. 3. huius.*

o *ex pr. 3. huius.*

p *cor. pr. 17. l. 4.*

Et similiter in extremitatibus B, C, D, F, & H reliquorum quinq; radiorũ construi possunt bina pẽtagona, regularia & æqualia habentia angulos in superficie sphæræ, quorum rectæ subtendentes angulos pentagonorũ æquidistantes basibus applicatæ erunt reliquis decem lateribus inscripti cubi; & propterea omnia dicta duodecim pentagona se se mutò tangent, tum in eorum lateribus æquidistantibus lateribus cubi, quarũ vnum est O P, tum in angulis inscripti cubi, & ideo component solidam figuram. Vnde *q* inscripta erit in sphæra figura solida domprehensa à duodecim pentagonis regularibus, & ęqualibus. Quod ęrat faciendum. Vocetur talis figura Dodecaedrum.

q *def. 2. huius.*

CO-

COROLLARIVM I.

Constat ex postrema parte huius propositionis rectam lineam subtendentem angulum pentagoni dodecaedri equalem esse lateri cubi in eadem sphera descripti.

COROLLARIVM II.

Sphere diameter ad latus dodecaedri est vt latus trianguli equilateri ad latus decagoni, & potentia est, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad quadratũ lateris decagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad tertiam partem quadrati lateris decagoni.

r cor. 1. pr. 3. huius. Nam r quadratum diametri sphere A C triplum est quadrati S Q lateris cubi, sicuti, f quadratum lateris trianguli triplum est quadrati lateris hexagoni: Ergo t vt A C ad S Q ita est latus trianguli regularis ad latus hexagoni; & vt S Q ad O P, scilicet vt maius ad segmentum minus recte extrema, & media ratione diuise (vt in hac propositione ostensum est), u ita est latus hexagoni ad latus decagoni: ergo x ex compositione ordinata diameter sphere A C ad OP latus dodecaedri erit, vt latus trianguli regularis ad latus decagoni. Et y potentia eadẽ erit, que quadrati lateris trianguli, seu z tripli quadrati lateris hexagoni ad quadratum lateris decagoni, vel vt quadratum lateris hexagoni ad tertiam partẽ quadrati lateris decagoni.

f pr 30 l. 5.
t pr. 18. l. 4.
u sch. pr 8. l. 5.
x pr. 19. l. 3
y pr. 18 l 4.
z pr. 30. l. 5.

COROLLARIVM III.

Constat etiam dodecaedrum distribui in duodecim pyramides pentagonas, vertices in centro sphere habentes, equales a inter se; cum bases, scilicet pentagona dodecaedri equalia sint inter se, & perpendiculares à centro sphæræ ad plana pẽtagonalia (que Radij dodecaedri vocẽtur) equales sũt, b eo quod radij circulorum circunscribentium dicta similia, & æqualia pentagona equales sunt inter se, & propterea c equaliter distant à centro circuli maximi sphæræ.

a pr. 25. l. 6.
b pr 10. l. 5. & pr. 19. & cor. 1 pr. 11. l 3.
c pr 10. l. 1.

SCHOLIVM.

Quod verò preter has quinque regulares solidas figuras, effici non possit

sit alia, quę à planis figuris æqualibus æquilateris, & æquiangulis contineatur, sic ostendetur.

Ad constitutionem anguli solidi requiruntur duæ conditiones, d prima, vt anguli plani, constituentes solidum angulum, non sint pauciores, quàm tres: secunda, e vt omnes, simul sumpti, minores sint quatuor rectis. Modò quia f angulus trianguli equilateri tertia pars est duorum rectorum, idest sexta pars quatuor rectorum: erunt sex anguli trianguli æquilateri sex partes sextę quatuor angulorum rectorum; ideoque æquales erunt quatuor rectis: Et propterea g plura, quàm quinque triangula ęquilatera ad vnum punctum cum suis angulis conuenientia non constituent angulum solidum, sed figuræ planæ regulares, quæ spatium solidum comprehendere debent, necesse est, vt angulos solidos constituant. Igitur pręter pyramidem, Octaedrum, & icosaedrum aliam figuram solidam triangula ipsa ęquilatera constituere non possunt.

d def. 11. l. 6.
e pr. 13. l. 6.
f cor. 5. pr. 18. l. 1.
g pr. 13. l. 6

Secundò quia h angulus quadrati quarta pars est quatuor rectorum, erunt quatuor anguli quadrati ęquales quatuor rectis; ideoque i plura, quàm tria quadrata ad vnum punctum cum suis angulis conuenientia angulum solidum non efficient. Et propterea præter cubum nullam aliam figuram solidam quadrata ipsa constituere possunt.

h pr. 34. l. 1.
i pr. 13. l. 6.

Tertiò quia k angulus pentagoni quinta pars est sex angulorũ rectorum, idest tres partes decimæ quatuor rectorum: erunt quatuor anguli pentagoni, simul sumpti, ęquales duodecim partibus decimis quatuor rectorum, scilicet erunt maiores, quàm quatuor recti: Et ideo l plura, quàm tria pentagona ad vnum punctum cum suis angulis conuenientia non constituent angulum solidum. Igitur præter dodecaedrum aliam figuram solidam pentagona non constituent.

k ex sch. pr. 18 l. 1.
l pr. 13. l. 6.

Quartò quia m angulus hexagoni sexta pars est octo angulorum rectorum, idest tertia pars quatuor rectorum: erunt tres anguli hexagoni simul sumpti ęquales quatuor angulis rectis; & propterea n tres anguli hexagonales ad vnum punctum conuenientes non constituent angulum solidum; ideoque hexagona, & sic reliquę omnes figurę planæ regulares, excedentes numerum senarium angulorum, ineptę erunt ad anguli solidi constitutionem, cùm pauciores, quàm tres anguli plani solidum angulum non efficiant; & propterea quælibet figuræ planę regulares plurium, quàm quinque angulorum corpus aliquod regulare componere nequeunt. Quapropter prȩter pyramidem, Octaedrum, cubum, Icosaedrum, & dodecaedrum nulla alia figura construi potest ex coaptatione planarum figurarum æqualium, & regularium. Quod erat ostendendum.

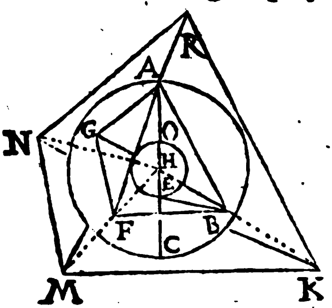
m ex sch. pr. 18. l. 1.
n pr. 13. l. 6

PRO-

PROPOS. VI. PROBL. VI.

Circa datam ſphęram quodlibet regulare corpus circunſcribere, & in quolibet ipſorum ſphęram inſcribere.

In ſphęra, cuius centrum H, & axis A C circunſcribi debet quodlibet ex dictis corporibus regularibus. a Inſcribatur in ſphęra corpus illius ſpeciei, quod circunſcribi debet; ſitque illud A B F G, & perpendicularis à centro ſphęrę ad planum figure B FG, ſiue radius inſcripti ſolidi ſit H E, & per punctum C extremum diametri A C b ducatur planum k M N parallelum plano B F G: eritque c radius H C perpendicularis quoque ad planum k M N, & ideo d omnes rectę tangent circulos maximos per diametrum A C extenſos; & propterea planum k M N tanget ſphęram. Rurſus in pyramide H B F G producta e erit figura diſſecta K M N ſimilis baſi B F G, & omnia latera H N, H M, H K ęqualia erunt, cùm eandem rationem habeant ad pyramidis ęqualia latera B H, F H, G H eo quod ſunt radij ſphęrę. Eadem ratione ſi ducantur plana contingentia ſphęram parallela baſibus reliquarum pyramidum verticē in centro ſphęrę H habentium, in quę ſolida figura A B F G reſoluitur, erūt figurę planę circunſcriptę ſimiles figuris inſcriptis, & rectę omnes à centro ſphęrę H per angulos inſcriptę figuræ vſque ad externum planum ductę erunt ęquales inter ſe, & prioribus H K, H M, H N, eo quod f eandem rationem habent ad latera ęqualia pyramidum in centro ſphęræ verticem habentium, ſeu ad radios ſphæræ, quam habent radij ſphæræ, ſeu figuræ circunſcriptæ ad g æquales radios figuræ inſcriptæ. Quare plana omnia ſphæram tangentia in eiſdem punctis K, M, N, R, conuenient; & ideo ſolidam figuram efficient ſimilem ipſi A B F G. Quod erat faciendum.



a pr. 1. 2. 3. 4. & 5. huius.

b cor. pr. 10 l. 6.

c cor. 1. pr. 9 l. 6.

d pr. 2. l. 6. & cor. 1. pr. 11. l. 2.

e pr. 16. l. 6.

f pr. 7. & 4. l. 3.

g ex cor. post. pr. 1. 2. 3. 4. & 5. huius.

Secundò in dato corpore regulari B A F G inſcribi debet ſphæra. Radio H E deſcribatur ſphæra E O. Dico hanc eſſe inſcriptam ſolido; quia radii omnes cuiuslibet ſolidæ figuræ regularis ſunt æquales inter ſe, vt in poſtremis corollariis

quinque

quinque precedentium propositionum dictum est. Ergo sphera radio H E descripta necessariò *h* tangit reliqua plana figuræ A B F G; & ideo *i* sphera E O inscripta erit corpori regulari A B F G. vt fuit propositum.

h ex prima parte huius pr.
i def. 3. huius.

PROPOS. VII. THEOR. I.

Latus tetraedri potestate ad latus octaedri est, vt 4 ad 3, ad latus cubi, vt 2 ad 1, ad latus icosaedri, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, ad latus dodecaedri, vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, sed longitudine est, vt latus quadrati ad latus decagoni: latus verò octaedri ad latus cubi potestate est, vt 3 ad 2, ad latus icosaedri, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, & ad latus dodecaedri, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni: sed latus cubi potestate ad latus icosaedri est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, & ad latus dodecaedri, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris decagoni; atque latus icosaedri ad latus dodecaedri potestate est, vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris decagoni.

Primò quoniam *a* proportio lateris tetraedri ad axim sphęrę potentiâ est, vt 2 ad 3, seu vt 4 ad 6, & *b* axis sphęrę ad latus octaedri potentia est duplus, seu vt 6 ad 3. Ergo *c* ex compositione ordinata latus tetraedri ad latus octaedri potestate est, vt 4 ad 3.

a cor. 1. pr. 1. huius, & pr. 11. l. 3.
b cor. 1. pr. 2 huius.
c pr 19. l. 3

Secundò eidem *d* rationi 2 ad 3 lateris tetraedri ad axim sphęrę potestate addita *e* proportione 3 ad 1 ipsius axis potestate ad latus cubi, componetur proportio 2 ad 1 lateris tetraedri ad latus cubi potestate.

d cor. 1 pr. 1. huius.
e cor. 1. pr. 3 huius.

Tertiò quoniam *f* latus tetraedri ad axim sphęrę potestate est, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; est verò *g* axis sphęrę potestate ad latus icosaedri, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratũ lateris pentagoni; siue vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni: Ergo ex compositione ordinata, est latus tetraedri ad latus icosaedri potestate, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, seu vt 1 quadratũ lateris hexagoni ad 3 decimas partes quadrati lateris pẽtagoni.

f cor. 1. pr. 1 huius & pr. 11 l. 3
g cor. 1 pr. 4 huius.

h cor 1 pr. 1. buius, & pr. 1. l. 5. i cor. 2. pr. 5 buius. k cor. 1. pr. 1 buius. l cor 2. pr. 5 buius.

Quartò quia latus tetraedri ad axim sphęrę est, vt latus quadrati ad latus trianguli (eo quod h ambę proportiones potestate subsesquialterę sunt), sed i axis sphęrę ad latus dodecaedri est, vt latus trianguli ad latus decagoni. Ergo latus tetraedri ad latus dodecaedri est: vt latus quadrati ad latus decagoni. Rursus latus tetraedri ad axim sphęrę potestate est, k vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; sed l axis sphęrę ad latus dodecaedri potestate est, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratū lateris decagoni: Ergo latus tetraedri ad alterum latus dodecaedri potestate est, vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni.

m cor. 1. pr. 2. buius. n cor. 1. pr. 3. buius.

Quintò quoniam m latus octaedri subduplū est axis sphęrę potestate, seu vt 3 ad 6, & n axis sphęrę triplus potestate lateris cubi, seu vt 6 ad 2. Ergo latus octaedri ad latus cubi potestate est, vt 3 ad 2.

o cor 1. pr. 2 buius. p cor. 1 pr. 4. buius.

Sextò quia o latus octaedri est potestate ad axim sphęrę, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 10 quadrata lateris hexagoni; & p axis sphæræ potestate ad latus icosaedri est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, seu vt 10 quadrata lateris hexagoni ad duo quadrata lateris pentagoni. Ergo latus octaedri ad latus icosaedri potestate est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, seu vt quadratum lateris hexagoni ad 2 quintas partes quadrati lateris pentagoni.

q cor. 1. pr. 2. buius. r cor 2. pr. 5. buius.

Septimò quoniam latus octaedri q potestate ad axim sphæræ est, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 6 quadrata lateris hexagoni; estque r axis sphæræ ad latus dodecaedri, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, seu vt 6 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni. Ergo latus octaedri ad latus dodecaedri potestate erit, vt 3. quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris decagoni, seu vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 2 partes tertias quadrati lateris decagoni.

s schr. 1. pr. 3 buius. t cor 1. pr. 4 buius.

Octauò quoniam s latus cubi ad axim sphæræ potestate subtriplum est, scilicet vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; est verò t axis sphæræ ad latus icosaedri potestate, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, seu, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni. Ergo latus cubi ad latus icosaedri potestate est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, siue vt 1 quadratum lateris hexagoni

ad

ad 3 partes quintas quadrati lateris pentagoni.

Nonò quoniam *u* latus cubi ad axim sphæræ potestate est, vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; estque axis *x* sphæræ ad latus dodecaedri potestate, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad quadratum lateris decagoni. Ergo latus cubi ad latus dodecaedri potestate est, vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni. u cor. 1. pr. 1 huius. x cor. 2 pr 5. huius.

Decimò quia *y* latus icosaedri ad axim sphæræ est, vt quadratum lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris hexagoni, seu vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 15 quadrata lateris hexagoni; estque *z* axis sphæræ ad latus dodecaedri potestate, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni, seu vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 5 quadrata lateris decagoni. Ergo latus icosaedri ad latus dodecaedri potestate erit, vt 3 quadrata lateris pentagoni ad 5 quadrata lateris decagoni, seu vt 1 quadratum lateris pentagoni ad 5 partes tertias quadrati lateris decagoni. y cor. 1. pr. 4 huius. z cor. 2. pr. 5 huius.

COROLLARIVM.

Facilè deducitur ex hac propositione, quam proportionem habeant triangula tetraedri, octaedri, & icosaedri, & horum solidorum superficies inter se. Nam *a* hæc triangula æquilatera & æquiangula, sunt similia inter se; ideoque *b* eandem proportionem habent inter se, quam eorũdem laterum quadrata habent; Ergo *c* triangulum tetraedri ad triangulum octaedri est, vt 4 ad 3; ad triangulum *d* icosaedri, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; *e* & triangulum octaedri ad triangulum icosaedri est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni. Postea quia triangulum tetrahedri quater sumptum, & triangulum octaedri octies, atque triangulum icosaedri vigesies, efficiunt superficies dictorum solidorum: Ergo superficies tetraedri ad superficiem octaedri est, vt 16 ad 24, seu vt 2 ad 3, & superficies tetraedri ad superficiem icosaedri est, vt 40 ad 60, seu *f* vt 2 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni. Similiter superficies octaedri ad superficiem icosaedri erit, vt 40, ad 40, seu vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni. a schol. pr. 4. l. 5. b cor 3. pr. 17 l. 4. c par. 1 huius prop. d par. 3. huius prop. e par 6. huius prop. f pr. 11. l. 3

PROPOS. VIII. THEOR. II.

Circulus cōtinens triangulum tetraedri ad circulum continentē triangulum octaedri, vel quadratum cubi eandem rationem habet sesquitertiam, atque ad circulum continentem triangulum icosaederi, vel pentagonum dodecaedri, est vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; & circulus continens triangulum octaedri, vel quadratum cubi ad circulum continentem triangulum icosaedri, vel pētagonum dodecaedri est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni.

a cor 1. pr 4 buius, & pr. 11. l 3. Quoniam *a* axis sphęrę potestate ad latus icosaedri est, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni; est
b pr. 30 l. 5 verò *b* latus trianguli icosaedri ad radium circuli comprehendentem idem triangulum potestate, vt 3 ad 1, seu vt 3 quadrata
c pr. 19. l 3 lateris pentagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni: *c* Ergo ex compositione ordinata axis sphęrę ad radium circuli comprehendentem triangulum icosaedri potestate erit, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni.

d cor 1. pr. 3. buius Postea *d* quia axis sphęrę triplus potentia ad latus cubi, erit
e cor. 2. pr. 5. buius. vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris hexagoni; Et quia *e* axis sphęrę ad latus dodecaedri potentia est, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris decagoni;
f cor pr. 22. l. 3. ergo axis *f* sphęrę ad duo latera cubi, & dodecaedri potestate erit, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris he-
g pr. 32. l. 5 xagoni cum 1 quadrato lateris decagoni: Sunt *g* verò 2 qua-
h pr. 3. & 7 l. 3. drata ex latere hexagoni, & ex latere decagoni, simul sumpta, ęqualia quadrato lateris pentagoni: Ergo axis *h* sphęrę ad latera cubi, & dodecaedri potestate erit, vt 3 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, seu vt 15 quadra-
i pr. 33. l. 5 ta lateris hexagoni ad 5 quadrata lateris pentagoni. Et quoniam *i* sunt duę potentię lateris pentagoni dodecaedri, & re-
k cor. 1 pr. 5. buius. ctę lineę subtendentis angulum dicti pentagoni, scilicet *k* lateris cubi, quintuplę potentię radii circuli comprehendentis pentagonum ipsum dodecaedri: ergo ex compositione ordi-
l pr. 19. l. 3 nata *l* axis sphęrę potestate ad radium circuli comprehendentis pentagonum dodecaedri erit, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni: sed prius in eadem ratione fuit axis sphęrę ad radium circuli comprehendentis

trian-

triangulum icosaedri: Ergo *m* axis sphęrę potestate eandem rationem habet ad duos radios circulorum comprehendentium pentagonum dodecaedri, & triangulum icosaedri; propterea *n* radij ipsi, atque circuli æquales erunt. m pr. 7. l 3. n pr. 4 l 3 & ax. l. 2.

Postea quoniam radius sphæræ potestate ad radios circulorum continentiũ *o* triangulũ octaedri, & *p* quadratum cubi, eãdem rationem sesquialteram habet; Ergo *q* radij, & ideo circuli ipsi continentes triangulum octaedri, & quadratum cubi æquales sunt inter se. o cor. 2. pr. 2 huius. p cor. 2 pr. 3 huius. q pr. 4. l. 3. & ax. l. 2.

Iam quia *r* eandem rationem habent inter se latera regularium triangulorum tetraedri, octaedri, & icosaedri, quam habent radij circulorum continentium dicta triangula. Ergo *s* radius circuli continentis triangulum tetraedri ad radiũ circuli continentis triangulum octaedri, vel ad ei æqualem radium circuli continentis quadratum cubi potestate erit, vt 4 ad 3, quæ est proportio laterum tetraedri, & octaedri potestate, & ideo *t* circuli ipsi erunt, vt 4 ad 3; & *u* ad radium circuli continentis triangulum icosaedri, vel continentis pentagonum dodecaedri potestate erit, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni, & *x* circuli ipsi in eadem ratione erunt. Eadem ratione radius circuli continentis triangulum octaedri, vel ei æqualis continentis quadratum cubi ad radiũ circuli cõtinentis triangulum icosaedri, vel pentagonum dodecaedri potestate eandem rationem habebit, quam *y* habent potentiæ eorum laterum, scilicet erit, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 2 quadrata lateris pentagoni, et ita quoque circuli inter se erunt. Quod erat, &c. r ex pr. 10. l. 5. s pr 7. huius. t pr 12. l. 5. u pr. 7. huius. x pr. 12. l. 5 y pr. 7. huius.

COROLLARIVM I.

Eucl. 2. XIV.

Constat ex demonstratione huius propositionis duos circulos comprehendentes triangulum icosaedri, & pentagonum dodecaedri ęquales esse inter se: pariterque duos circulos cõprehendentes triangulum octaedri, & quadratum cubi ęquales esse inter se.

COROLLARIVM II.

Colligitur etiam, quòd quadratum radij circuli continentis triangulum icosaedri, vel circuli continentis pentagonum dodecaedri est ęqualis 4 partibus decimi quintis quadrati lateris

teris

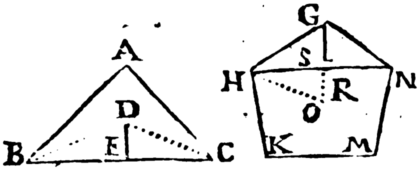
teris pentagoni in circulo maximo sphere descripti. Nam in hac propositione axis sphærę ad radium circuli continentis triangulum icosaedri, vel pentagoni dodecaedri potestate fuit, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 1 quadratum lateris pentagoni, & *a* radius sphærę ad axim sphere potestate est, vt 1 ad 4, seu vt 1 quadratum lateris pentagoni ad 4 quadrata lateris pentagoni: Ergo *b* ex compositione perturbata quadratum radij sphęrę ad quadratum radij circuli continentis triangulum icosaedri, vel pentagonum dodecaedri est, vt 15 quadrata lateris hexagoni ad 4 quadrata lateris pentagoni, seu vt 1 quadratū lateris hexagoni ad 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni; estque *c* quadratum radij sphęrę ęquale quadrato lateris hexagoni in circulo maximo sphęrę descripti. Ergo patet propositum.

a cor. 3. pr. 17. l. 4.
b pr. 10. l. 3
c sch. pr. 3. l. 5.

PROPOS. IX. THEOR. III.

Triangulum icosaedri ad pentagonum dodecaedri est, vt tres quintæ partes lateris trianguli icosaedri ad latus cubi; & superficies icosaedri ad superficiem dodecaedri est, vt latus trianguli icosaedri ad latus cubi.

Sit A B C triangulum icosaedri, & G H K M N pentagonum dodecaedri, & D, & O sint centra circulorum, figuras continentium, & ducantur D B, D C, O H, O G, H N; & *a* ducatur D E perpēdicularis ad B C, secās eam bifariam in E, & *b* secetur G O bifariam in S. Quoniam *c* H N, subtendens angulum pentagoni dodecaedri æqualis est lateri cubi, & *d* secātur perpendiculariter, & bifāriam à circuli radio O G in R, pariterque *e* perpendicularis D E semissis est radij circuli continentis triangulum ęquilaterum A B C: Ergo *f* parallelogrammum sub D E semiradio, & sub B E semilatere trianguli ęquilateri A B C æquale est triangulo D B C; ideoque *g* triplum parallelogrammi D E B ęquale est triangulo A B C. Similiter parallelogrammum sub basi S O semisse radij G O, & altitudine perpendiculari H R semisse lateris cubi, ęquale est triangulo G H O, & *h* ideo quintuplum parallelogrammi sub H R, & S O ęquale erit penta-



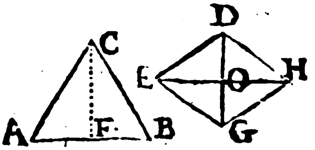
a pr. 11. l. 1 & pr 2 l. 2
b pr. 9. l. 1.
c cor. 1. pr. 5 huius.
d pr 19. l. 2
e ex pr. 30. l. 4.
f ex cor 2 pr 32. l 1.
g cor 3. pr. 3 l. 5.
h cor. 1. pr. 3. l. 5.

pentagono G H K M. Quare triangulum A B C ad pentagonum G H K N erit, vt triplum rectanguli D E B ad quintuplum rectanguli sub H R, & S O; suntque *i* semiradij O S, & D E çquales, cùm circuli, figuras continentes, çquales sint: Ergo *k* triangulum A B C ad pentagonum G H K M est, vt triplum semilateris B E trianguli icosaedri ad quintuplum semilateris H R cubi, seu *l* vt triplum B C lateris icosaedri ad quintuplum H N lateris cubi, vel vt tres quintç partes lateris icosaedri ad latus cubi. *i ax. l. 2.* *k pr. 1. l. 4* *l pr. 11. l. 3*

Secundò quoniam triangulum icosaedri ad pentagonum dodecaedri est, vt 3 latera icosaedri ad 5 latera cubi. Ergo 20 triangula icosaedri, idest superficies tota icosaedri ad 12 pentagona dodecaedri, seu ad superficiem totam dodecaedri: erit, vt 60 latera icosaedri, ad 60 latera cubi, siue vt latus icosaedri ad latus cubi, ita erit superficies icosaedri ad superficiẽ dodecaedri.

PROPOS. X. THEOR. IV.

Triangulum tetraedri ad quadratum cubi est, vt altitudo triãguli æquilateri ad eius basim. Et superficies tetraedri ad superficiem cubi est, vt radius circuli ad latus inscripti trianguli çquilateri.



Sit triangulũ tetraedri ABC, in quo ducatur eius altitudo, siue perpendicularis C F, secans *a* basim A B bifariam in F; sitque quadratum D E G H cubi in eadem sphera, in qua tetraedrum, inscripti; & in eo ducantur duç diametri D G, & E H, se *b* secantes bifariam & ad angulos rectos in O. Et quia *c* quadratum ipsius A B lateris nimirum tetraedri duplum est quadrati D E lateris cubi, estque *d* pariter quadratum diagonalis E H duplum quadrati lateris D E. Ergo quadrata ipsarum A B, D G, & E H equalia sunt; & ideo *e* rectç A B, D G, & E H equales sunt; Sed *f* triangulum A B C ad duo triangula D E H, & G E H eandem proportionem habet, quam altitudo C F ad duas altitudines DO, & G O (cùm bases A B, & E H çquales sint); estque A B equalis altitudinibus D O, & O G. Ergo *g* tetraedri triangulum A B C ad duo triangula D E H, & G E H, siue ad quadratum cubi *a cor. pr. 2. l. 2.* *b ex pr. 3. l. 5.* *c pr. 7. huius* *d ex pr 18. l 5 & pr. 34 l 1.* *e cor 2. pr. 17. l. 4.* *f cor. 1 pr 3 l. 4.* *g pr. 7. & pr. 3. l 3.*

DE

D E G H eandem proportionem habet, quam trianguli altitudo C F ad basim eius A B.

h par. 1. huius. Secundò h quia triangulum tetraedri ad quadratum cubi est, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius basim, & vt 4 altitudines ad 6 bases trianguli, vel vt 4 partes sextę altitudinis trianguli ad eius basim, ita erit superficies tetraedri ad superficiem cubi; sed 4 partes sextę, seu 2 partes tertię altitudinis trianguli ęquilateri ęquales sunt radio circuli circunscribentis triangulum ęquilaterum (eò quod i altitudo trianguli ęquilateri sesquialtera est radij circuli, continentis triangulũ). Ergo k vt radius circuli ad latus inscripti trianguli ęquilateri, ita erit superficies tetraedri ad superficiẽ cubi. Quę erant, &c.

i pr. 30. l. 5.

k pr. 7. l. 3.

COROLLARIVM.

Vnde colligitur; quòd triangulum tetraedri ad quadratum cubi potestate est, vt 3 ad 4. & superficies tetraedri ad superficiem cubi potestate est subtripla.

l pr. 30. l. 5. Nam l quadratum altitudinis trianguli ęquilateri ad quadratum basis eius est, vt 3 ad 4 & quadratũ radij circuli ad quadratum lateris inscripti trianguli est, vt 1 ad 3. & hę ostensæ fuerunt in hac propositione basium, et superficierum proportiones tetraedri & cubi.

PROPOS. XI. THEOR. V.

Triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri est vt latus cubi ad quinque sextas partes lateris icosaedri. Et superficies tetraedri ad superficiem dodecaedri, vt latus cubi ad quinque semisses lateris icosaedri.

a pr. 7 huius. Quoniam a quadratum cubi ad quadratum lateris icosaedri est, vt 5 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pentagoni: ergo 2 quadrata cubi ad 1 quadratum lateris icosaedri, vel 18 quadrata cubi ad 9 b quadrata lateris icosaedri erunt, vt 10 quadrata lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris pẽtagoni; sed c hanc eandem proportionem habet triangulum tetraedri ad triãgulum icosaedri: igitur d 18 quadrata cubi ad 9 quadrata lateris icosaedri erunt, vt triangulum tetraedri ad triangulum icosaedri. Postea quia e triangulum icosaedri ad pentagonum dodecaedri est, vt 3 latera icosaedri ad 5 latera cubi,

b ex cor. 1. pr 19 & pr 11. l. 3. c cor pr. 7. huius. d pr. 7. l. 3. e pr 9. huius.

cubi, et *f* ita est quadratum primi ad rectangulum primi, & secundi, idest 9 quadrata lateris icosaedri ad 15 rectangula laterum icosaedri, & cubi: Igitur *g* triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri erit, vt 18 quadrata lateris cubi ad 15 rectangula laterum icosaedri, & cubi, vel *h* vt 6 latera cubi ad 5 latera icosaedri; seu potius, vt latus cubi ad quinque partes sextas lateris icosaedri, ita erit triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri. Postea quia quadruplum primi ad duodecuplum secundi est, vt 24 latera cubi ad 60 latera icosaedri, vel vt 2 ad 5, vel potius vt latus cubi ad 5 medietates lateris icosaedri, ita erit superficies tetraedri ad superficiem dodecaedri. Vt fuit propositum. *f pr.1.l.4.* *g pr.19.l.3* *h pr.11.l.3*

PROPOS. XII. THEOR. VI.

Triangulum octaedri ad quadratum cubi est, vt 3 quartæ partes altitudinis trianguli æquilateri ad eius basim, & superficies octaedri ad superficiem cubi est, vt altitudo trianguli æquilateri ad eius basim. Atque triangulum octaedri ad pentagonum dodecaedri est, vt latus cubi ad 10 nonas partes lateris icosaedri. Et superficies octaedri ad superficiem dodecaedri est, vt latus cubi ad 5 tertias partes lateris icosaedri.

Quoniam *a* proportio trianguli octaedri ad triangulum tetraedri est, vt 3 ad 4, seu vt 3 quartæ partes altitudinis trianguli ęquilateri ad eius totam altitudinem; & *b* proportio trianguli tetraedri ad quadratum cubi est, vt altitudo trianguli æquilateri ad eius basim: Ergo *c* triangulum octaedri ad quadratum cubi est, vt 3 quartę partes altitudinis trianguli ęquilateri ad eius basim. Postea quia octuplum primi ad sextuplum secundi erit, vt 24 partes quartę altitudinis trianguli æquilateri ad 6 latera eiusdem trianguli, siue vt 6 altitudines trianguli ęquilateri ad sex latera eiusdem trianguli, vel *d* vt 1 altitudo ad 1 basim trianguli ęquilateri, ita erit tota superficies octaedri ad superficiem cubi. *a cor. pr. 7. huius.* *b pr.10. huius.* *c pr.19.l.3.* *d pr.11.l.3.*

Secundò quoniam *e* triangulum octaedri ad triangulum tetraedri est, vt 3 ad 4, vel vt 9 latera cubi ad 12 latera eiusdem; sed *f* triangulum tetraedri ad pentagonum dodecaedri est, vt 6 latera cubi ad 5 latera icosaedri; siue vt 12 latera cubi ad 10 latera icosaedri: Ergo *g* ex compositione ordinata triangulum *e cor.pr.7. huius.* *f pr.11. huius.* *g pr.19.l.3* octaedri ad pentagonum dodecaedri erit, vt 9 latera cubi ad 10 latera icosaedri, hoc est, vt latus cubi ad decem nonas partes lateris icosaedri.

Deinde quia vt octuplum primi ad duodecuplum secundi, sic est superficies octaedri ad superficiem dodecaedri: Igitur vt 72 latera cubi ad 120 latera icosaedri, aut vt 3 ad 5, vel vt latus cubi ad quinque tertias partes lateris icosaedri, ita erit superficies octaedri ad superficiem dodecaedri. Quę erant, &c.

PROPOS. XIII. THEOR. VII.

Quadratum cubi ad pentagonum dodecaedri est, vt latus cubi ad 5 sextas partes altitudinis trianguli icosaedri. Et superficies cubi ad superficiem dodecaedri est, vt latus cubi ad 5 tertias partes altitudinis trianguli icosaedri; atque superficies cubi ad superficiem icosaedri est, vt quadratum cubi ad 5 tertias partes parallelogrammi comprehensi sub latere, & altitudine trianguli icosaedri.

a prop. 10. huius Quoniam *a* quadratum cubi ad triangulum tetraedri est, vt latus trianguli æquilateri ad eius altitudinē, siue vt latus trianguli icosaedri ad eius altitudinem; vel vt 5 latera icosaedri ad 5 altitudines eius; atque *b* triangulum tetraedri ad pentagonū dodecaedri est, vt 6 latera cubi ad 5 latera icosaedri. Ergo *c* ex compositione perturbata, vt 6 latera cubi ad 5 altitudines trianguli icosaedri, vel vt latus cubi ad 5 sextas partes altitudinis trianguli icosaedri, ita erit quadratum cubi ad pentagonum dodecaedri.

b prop. 11. huius.

c pr. 20. l. 3.

Postea superficies cubi ad superficiem dodecaedri est, vt 6 quadrata cubi ad 12 pentagona dodecaedri, idest vt *d* 36 latera cubi ad 60 altitudines trianguli icosaedri, vel vt 3 ad 5, aut vt 1 latus cubi ad 5 partes tertias altitudinis trianguli icosaedri.

d par. 1. huius pr.

Tertiò quia *e* parallelogrammum sub altitudine trianguli icosaedri, et latere eius contentum duplum est trianguli icosaedri; Ergo 6 quadrata cubi ad 10 parallelogramma sub altitudine, & latere trianguli icosaedri contenta, aut 3 ad 5, vel potius quadratum cubi ad 5 tertias partes parallelogrammi sub latere, et altitudine trianguli icosaedri contenti, habebit eandem proportionem, quam superficies cubi ad superficiem icosaedri. Quæ erant, &c.

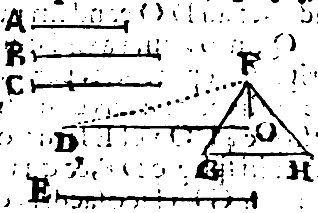
e cor. 2 pr. 32. l. 1.

PRO-

PROPOS. XIV. THEOR. VIII.

Tetraedri radius ad octaedri, siue cubi radium est, vt latus hexagoni ad latus trianguli, et ad icosaedri, vel dodecaedri radium erit, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratũ lateris hexagoni, et 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni; sed octaedri, vel cubi radius ad icosaedri, vel dodecaedri radium erit, vt latus exagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni, vel vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij sphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri.

Sint A radius tetraedri, B radius octaedri, C radius cubi, DO radius icosaedri, & E radius dodecaedri, quæ sunt perpendiculares à centro sphęræ ad plana figuratum corporum regularium. Dico primò A ad B esse, vt latus hexagoni ad latus trianguli.

Quoniam radius a A ad radium sphæræ potentia, est vt 1 ad 9 (eo quod tetraedri radius A tertia pars est radij sphęrę) b & quadratum radij sphęræ ad quadratum radij B octaedri est, vt 9 ad 3: Ergo c quadratum A ad quadratum B est, vt 1 ad 3: d estque quadratum lateris hexagoni tertia pars quadrati lateris trianguli: Ergo quadratum radij A ad quadratum B est, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli; & ideo e ipse radius tetraedri A ad octaedri radium B erit, vt latus hexagoni ad latus trianguli.

a cor. 3. pr. 1. huius. *b cor. 3 pr. 3. huius.* *c pr 19. l. 5.* *d pr 30. l. 4.* *e pr 18. l. 4.*

Secundò quia f C radius cubi ęqualis est ipsi B: eo quod vterque tertia pars est potestate radij sphęræ: Ergo A ad C eandem rationem habet, quam ad B; & propterea A ad C erit, vt latus hexagoni ad latus trianguli.

f cor. 3. pr. 2. & cor. 3. pr 3. huius.

Tertiò sit triangulum icosaedri FGH, radius circuli eum continentis, sit FO, & DF sit radius sphęræ, atque DO fuit radius icosaedri: ergo g in triangulo rectangulo DFO radius DO erit latus quadrati differentialis inter quadrata DF, & FO. Et quia quadratum h radij tetraedri nona pars est qua-

g prop. 2 & ex pr. 18. l. 5. *h par. 1. huius.*

g pr. 8. huius. drati radij sphęræ, & g quadratum radij sphęræ D F ad quadratum F O radij circuli continentis triangulum icosaedri est, vt quadratum lateris hexagoni ad 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni: Ergo h quadratum radij D F sphęræ ad differentiam quadratorum D F, & F O, siue ad quadratū radii D O, erit, vt quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 quintas decimas partes quadrati lateris pentagoni. Quare i ex compositione ordinata quadratum radii A ad quadratum radii D O erit, vt nona pars quadrati lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni; & ideo k ipsemet radius A tetraedri ad radium D O icosaedri erit, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pentagoni.

h ex pr. 18. l. 5.

i pr. 19. l. 5.

k ex cor. 8. pr. 17. l. 4.

Quartò quia l radij circulorum, comprehendentium triangulum icosaedri, & pentagonum dodecaedri ęquales ostensi sunt: Ergo m perpendiculares, quę à centro eiusdem sphęrę ad centra dictorum circulorum æqualium in circulis sphęrę maximis coniunguntur ęquales sunt inter se; & ideo radius E dodecaedri ęqualis erit radio D O icosaedri: Et propterea n A ad E, et ad D O eandem rationem prius expositam habebit.

l ex pr. 8. huius.

m ex pr. 10. l. 2.

n pr. 3. l. 3.

Quintò o quia axis lateris cubi, & radius sphæræ radij cubi tripli sunt potentiâ, permutãdo, p & inuertendo C radius cubi, semissis erit lateris cubi, sicuti radius sphæræ semissis est axis; estque q DO vel E latus quadrati differentialis inter quadratũ radij sphęrę D F, & quadratũ F O radii circuli cõtinẽtis triãgulum G F H icosaedri, quod r est tertia pars quadrati lateris icosaedri: Ergo radius B octaedri, vel s ei æqualis radius C cubi ad radium D O, icosaedri, vel ad t ei ęqualem radium E dodecaedri, eandem rationem habet, quam semissis lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij sphæræ, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Vel potius u quia radius B octaedri ad radium sphęræ potẽtiâ est, vt 1 ad 3, siue vt 1 quadratum lateris hexagoni ad 3 quadrata lateris hexagoni; & radius sphæræ DF ad D O radium icosaedri fuit, vt y quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter quadratum lateris hexagoni, & 4 decimas quintas partes quadrati lateris pẽtagoni, siue, z vt 3 quadrata lateris hexagoni ad differentiam inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 12 decimas quintas, vel 4 quin-

o cor. 1. & 3 pr. 1. huius.

p pr. 11. & 9. l. 3.

q pr. 18. l. 5

r pr. 10. l. 5.

s par. 2. huius pr.

t par. 4. huius pr.

u cor. 3. pr. 2 huius.

y par. 3 huius pr.

z pr. 11. l. 3

quintas partes quadrati lateris pentagoni: Ergo a B ad D O potentià erit, vt quadratum lateris hexagoni ad differentiam inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni. Vnde octaedri radius B, siue ei ęqualis radius cubi, erit ad icosaedri radium D O siue ad ei ęqualem E radium dodecaedri, in eadem ratione, quam habet latus hexagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni. Quę erant ostendenda. a pr. 19. l. 5.

PROPOS. XV. THEOR. IX.

Tetraedrum ad octaedrum est, vt latus hexagoni ad sesquialterum lateris trianguli, & ad cubum est, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli, & ad icosaedrum est, vt tertia pars cubi ex latere hexagoni descripti ad prisma rectum, cuius basis est sesquialtera quadrati lateris pentagoni, altitudo verò est latus quadrati differentialis inter quadratū lateris hexagoni, & quatuor decimas quintas quadrati lateris pentagoni, atque ad dodecaedrum est, vt rectangulū sub latere cubi, & sub tertia parte radij sphęrę contentum ad rectangulum sub 5 medietatibus lateris icosaedri, & sub latere quadrati differentialis inter quadratum radij sphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri.

Quoniam a tetradrum diuiditur in quatuor pyramides æquales, verticem in centro sphęrę habentes, quarum bases æquales sunt, scilicet triangula tetraedri, & altitudines ęquales, scilicet radij tetraedri: Ergo tetraedrum quadruplum est pyramidis, cuius basis est triangulum tetraedri, & altitudo ęqualis est radio eiusdē; Sed b pyramis, cuius basis est æqualis superficiei tetraedri, siue quadruplo vnius trianguli tetraedri & altitudo, radius eiusdem, quadrupla quoq; est vnius pyramidis tetraedri verticē in centro sphęrę habentis, (eo quod pyramides ęquè altę sunt inter se, vt bases). Ergo c pyramis, cuius basis ęqualis superficiei tetraedri, & altitudo ęqualis radio tetraedri est ęqualis solido tetraedri. Eadem ratione reliqua corpora regularia ęqualia erunt pyramidibus, quarum bases ęquales sunt superficiebus, & altitudines ęquales radijs ipsorū solidorum; Vnde vt sunt pyramides dictæ inter se, ita erunt solida

a cor. 6. pr. 1 huius, & pr. 2. huius.

b pr. 25. l. 6

c pr. 3. l. 3.

lida

d pr. 31. l. 6. lida regularia; sed d illę pyramides habent proportionem compositam ex rationibus basium, & altitudinum. Ergo similiter corpora regularia compositam proportionem habebunt ex rationibus superficierum eorundem solidorum, & altitudinum, siue radiorum.

e cor pr. 7. huius. f pr. 14 huius. g pr. 19. l. 3 & pr. 31. l. 6. Et primò quia e superficies tetraedri ad superficiem octaedri est, vt 2 ad 3, siue vt 1 latus hexagoni ad 3 semilatera hexagoni; & f radius tetraedri ad radium octaedri est, vt latus hexagoni ad latus trianguli, siue vt 3 semilatera hexagoni ad 3 semilatera triãguli: Ergo g tetraedrum ad octaedrum est, vt latus hexagoni ad 3 semilatera trianguli.

h prop. 14. huius. i prop. 10. huius. k pr. 31. l. 6 & pr. 17. l. 4 l pr. 7. l. 3. Secundò quia tam h radius tetraedri ad radium cubi, i quàm superficies tetraedri ad superficiem cubi est, vt latus hexagoni ad latus trianguli, sed k hę duæ proportiones componunt tam rationem tetraedri ad cubum, quàm proportionem quadrati lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli: l Ergo tetraedrum ad cubum est, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris trianguli.

m cor. pr. 7. huius. n pr. 14. huius. o pr. 31. l. 6. p pr. 39. l. 6. Tertiò quia m superficies tetraedri ad superficiem icosaedri est, vt quadratum lateris hexagoni ad 3 semiquadrata lateris pentagoni; & n radius tetraedri ad radium icosaedri est, vt tertia pars lateris hexagoni ad latus quadrati differentialis inter quadratũ lateris hexagoni, & 4 partes decimas quintas quadrati lateris pentagoni; sed o hę duę proportiones componunt proportionem prismatis recti, cuius basis est quadratum lateris hexagoni, altitudo verò est tertia pars lateris hexagoni; siue p tertię partis cubi ex latere hexagoni ad prisma rectum, cuius basis est sesquialtera quadrati lateris pentagoni, altitudo verò est latus quadrati differentialis inter quadratũ lateris hexagoni, & 4 partes decimas quintas quadrati lateris pentagoni. Quare hanc eandem proportionem habebit tetraedrum ad icosaedrum.

q pr. 11 huius. r pr. 14. huius. s pr. 13. l. 4. Quartò quoniam q superficies tetraedri ad superficiem dodecaedri est, vt latus cubi ad 5 semilatera icosaedri, & r radius tetraedri ad radium dodecaedri est, vt tertia pars radij sphęrę ad latus quadrati differentialis inter quadratum radij sphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri; sed s hę duæ proportiones componunt proportionem plani rectanguli sub latere cubi, et tertia parte radij sphęrę contenti ad rectangulum sub 5 semilatera icosaedri, & sub latere quadrati differentialis inter quadratum radij sphęrę, & tertiam partem quadrati la-

ti lasi lateris icosaedri. Quare hanc eandem proportionem habebit tetraedrum ad dodecaedrum. quę erant ostendenda.

PROPOS. XVI. THEOR. X.

Octaedrum ad cubum est, vt altitudo trianguli ad eius basim; & ad icosaedrum est, vt cubus super latus hexagoni descriptus ad prisma rectum, cuius basis quadratum lateris pentagoni, altitudo verò est latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni: & ad dodecaedrum est, vt dimidium quadrati cubi ad parallelogrammum sub 5 tertiis partibus lateris icosaedri, & sub latere quadrati differētialis inter quadratum radij sphęrę, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri.

Quoniam, a vt dictum est, octaedrum ad cubum proportionem habet compositam ex rationibus superficierum, & radiorum, & b sunt dicti radij ęquales inter se: Ergo c vt superficies octaedri ad superficiem cubi, ita est octaedrum ad ipsum cubum; erat d autem superficies octaedri ad superficiem cubi, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius basim. Ergo e octaedrum ad cubum erit, vt altitudo trianguli ęquilateri ad eius basim.

a par. 1 pr. 15 huius.
b cor. 1. pr. 8. huius.
c pr 25. l. 6
d prop. 12. huius.
e pr 7. l. 5.

Secundò quia f superficies octaedri ad superficiem icosaedri est, vt quadratum lateris hexagoni ad quadratum lateris pentagoni; & g octaedri radius ad icosaedri radium est, vt latus hexagoni ad latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni; sed h hę duę proportiones componunt proportionem cubi descripti ex latere hexagoni ad prisma rectum, cuius basis est quadratum lateris pentagoni, altitudo verò est latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni (quandoquidem prismata recta proportionem habent compositam ex basibus, & altitudinibus). Quare, vt prius, octaedrum ad icosaedrum est, vt cubus descriptus super latere hexagoni ad prisma rectum, cuius basis est quadratum lateris pentagoni, & altitudo est latus quadrati differentialis inter 3 quadrata lateris hexagoni, & 4 quintas partes quadrati lateris pentagoni.

f cor pr. 7. huius.
g prop. 14. huius.
h pr. 31. l. 6.

Tertiò quoniam i superficies octaedri ad superficiem dodecaedri

i pr. 12 huius.

caedri est, vt latus cubi ad 5 tertias partes lateris icosaedri; & octaedri k radius ad dodecaedri radium est, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radii sphere, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri; sed l hæ duæ proportiones componunt rationem dimidij quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum sub 5 tertijs partibus lateris icosaedri, et latus quadrati differentialis inter quadratum radii sphere, et tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Quare in hac eadem proportione erit octaedrum ad dodecaedrum. Vt erat propositum.

k prop. 14. huius.
l pr. 31. l. 6.

PROPOS. XVII. THEOR. XL.

Cubus ad icosaedrum est, vt dimidium eiusdem cubi ad prisma rectum contentum sub altitudine trianguli icosaedri, & sub 5 tertijs partibus lateris eiusdem trianguli icosaedri, atque sub latere quadrati differentialis inter quadratū radij sphere, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Sed cubus ad dodecaedrum est, vt dimidium quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum sub 5 tertiis partibus altitudinis trianguli icosaedri, & sub latere quadrati differentialis inter quadratum radij sphere, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. At icosaedrum ad dodecaedrum est, vt latus icosaedri ad latus cubi.

Quoniam a superficies cubi ad superficiem icosaedri est, vt quadratum cubi ad parallelogrammum sub 5 tertiis partibus lateris trianguli icosaedri, & sub altitudine eiusdem trianguli; & b cubi radius ad icosaedri radium est, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratum radii sphæræ, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Hę c autem duę proportiones componunt proportionem dimidii cubi intra sphęram descripti ad prisma rectum, cuius basis est rectangulum contentum sub 5 tertiis partibus lateris trianguli icosaedri, & sub altitudine eiusdem trianguli; altitudo verò est latus quadrati differentialis inter quadratum radii sphęræ, & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Sed hę proportiones, vt dictum est, etiam componunt proportionem cubi ad icosaedrum. Igitur cubus ad icosaedrum eandem expositam proportionem habet.

a prop 13. huius.
b prop. 14. huius.
c pr. 31. l. 6.

Secundo quoniam d superficies cubi ad superficiem dodecaedri

d prop. 13. huius.

caedri

caedri est, vt latus cubi ad 5 tertias partes altitudinis trianguli icosaedri; et e cubi radius ad dodecaedri radium est, vt dimidium lateris cubi ad latus quadrati differentialis inter quadratū radij sphęrę, et tertiam partem quadrati lateris icosaedri: Hæ verò f duę proportiones componunt rationem semissis quadrati cubi ad parallelogrammum rectangulum contentum sub quinque tertijs partibus altitudinis trianguli icosaedri, & sub latere quadrati differentialis inter quadratum radij sphęre & tertiam partem quadrati lateris icosaedri. Igitur, vt prius, in hac eadem proportione erit cubus ad dodecaedrum. e prop. 14. huius. f pr. 13. l. 4. & pr. 34. & 31. l. 1.

Tertiô quoniam g superficies icosaedri ad superficiem dodecaedri est, vt latus icosaedri ad latus cubi; atque h icosaedri radius ęqualis ostensus est radio dodecaedri. Igitur i icosaedrū ad dodecaedrum eandem proportionem habebit, quam latus icosaedri ad latus cubi: quod erat ostendendum. g prop. 9. huius. h prop. 14. huius. i pr. 1. l. 6. & ex pr. 15 huius.

S C H O L I V M.

In XV. Euclidis libro, qui Hypsicli Alexandrino tribuitur agitur in quinque propositionibus de mutua inscriptione figurarum regularium; at quia huiusmodi argumentum parum vtilitatis elementari institutioni afferre videtur, suntque à Campano, Candalla, & Clauio diligentissimè expositum, & amplificatum, vtque instituti mei est aliena transcribere, propterea partem hanc Geometriæ, licet curiositatis plenam, omnino relinquendam esse duxi.

Finis Libri septimi.

Eucl. lib. VII. VIII. IX.

LIBER OCTAVVS.

Arithmeticorum.

DEFINITIONES.

I.

Vnitas est anticipatio, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

II.

Numerus autem ex vnitatibus composita multitudo.

Conceptus, seu anticipatio vnitatis diuisionem non admittit. Nam proprium est multitudinis diuidi posse in plures partes; & propterea vnitas indiuidua est. Differt tamen vnitas à puncto, quòd vnitas pars sit componens numerum, punctum verò non componat magnitudinem, sed sit principium, & terminus eius.

III.

Par numerus est, qui bifariam diuiditur.

IV.

Impar verò, qui bifariam non diuiditur, vel vnitate differt à pari.

V.

Pariter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

Numerus, qui componitur ex pari multitudine parium numerorum, vt 24. qui componitur ex 6 quaternarijs, mensurabitur à pari numero 4 per parem 6, id est per parem multitudinem eorundem, & tunc 24 vocabitur Pariter par.

VI.

Pariter autem impar est, quem par numerus metitur per numerum imparem.

Et

Et numerus compositus ex impari multitudine parium numerorum, vt 6, qui componitur ex tribus binarijs, mensurabitur à pari numero 2 per imparem 3. Et propterea dicetur numerus 6 Pariter impar.

VII.

Impariter verò impar est numerus, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Numerus verò compositus ex impari multitudine imparium numerorum, vt 15, qui componitur ex tribus quinarijs, mensurabitur ab impari 5 per imparem 3. diceturquè propterea numerus 15 Impariter impar.

VIII.

Primus numerus est, quem sola vnitas metitur.

IX.

Multiplicatio numeri in numerum est inuentio numeri, qui ad multiplicatum eandem proportionem habeat, quam multiplicans ad vnitatem; Et factus numerus, Planus vocatur: Et numeri se se multiplicantes vocãtur Latera eius. At si tres numeri se multiplicent, factus numerus, Solidus vocabitur, & tres dicti numeri vocentur Latera eius.

Vnitas X ad numerum A eandem proportionem submultiplicem habeat, quam numerus B ad quartum numerum C; Dicetur numerus C Productus ex multiplicatione numeri A in numerum B: Et dicitur numerus C Planus; & A, & B Latera eiusdem numeri plani C. Vnde constat toties numerum multiplicatum B contineri in producto C, quot sunt vnitates contentæ in multiplicante A.

X 1
A 3
B 4
C 12

At tres numeri A, B, D se multiplicare dicentur, si tertius numerus D multiplicetur in planum numerum C, genitum ex multiplicatione duorum laterum A & B, producaturque numerus E. Itaque fieri debet vnitas X ad A, vt B ad C; & denuò vt vnitas ad C, ita D ad productum E. dicetur numerus E Solidus; & tres numeri A, B, D Latera dicti solidi.

X 1
A 3
B 4 C 12
D 6
E 72

X.

Quadratus numerus est, cuius latus medium proportionale est inter ipsum, & vnitatem.

X 1
A 3
B 9

Vt si vnitas X ad numerum A sit, vt A ad numerum B; Dicetur B numerus Quadratus, & A Latus eius. Itaque ex multiplicatione lateris A in se ipsum gignitur numerus quadratus B.

XI.

Cubus verò numerus est ille, inter quem, & vnitatem duo medij proportionales intercedunt, quorũ vnus est latus eius, alter verò est quadratus eiusdem lateris.

X 1
A 3
B 9
E 27

Vt si vnitas X ad numerum A eandem rationem habeat, quam A ad quadratum numerum B, & vt X ad A, ita quoque sit B ad numerum E. Dicetur E numerus Cubus, eiusque Latus A.

XII.

Similes plani, & solidi numeri sunt; qui proportionalia habent latera.

A 6	B 54		
C 2	E 6		
D 3	H 9		
	X 1		

Vt si fuerint duo numeri plani A & B, & duo latera plani A sint C & D, pariterque duo latera plani B sint E & H; Et siquidem C ad D eandem proportionem habuerit, quam E habet ad H, dicentur plani numeri A, & B Similes inter se.

Eucl. 1. VII.

PROPOS. I. THEOR. I.

Si duobus numeris inęqualibus propositis detrahatur semper minor de maiore alternè, neque reliquus vnquam pręcedentem metiatur, quo ad assumpta sit vnitas: nullus numerus, sed sola vnitas propositos numeros metietur. Vocentur tales numeri Primi inter se.

Sint duo numeri inęquales A & B, & B minor, quoties potest subtrahatur ex maiore A, & numerus ablatus sit C, & reliquus D ex B, quoties potest tollatur, sitque ablatus numerus E, atque reliquus F ex D tollatur, quoties potest, sitq; ablatus numerus G, & in hac alterna detractione nunquam reliquus numerus pręcedentem, à quo detractus est, metiatur donec ad vnitatem H perueniatur. Dico tantummodo vnitatem, non autem numerum aliquem esse communem mensuram

suram numerorum A, & B. Si enim hoc verum non est, metiatur eos aliquis numerus M. Quoniam M ponitur mensura ipsorum A, & B, sed B mensurat ablatum C; a Ergo M metitur totum A, & ablatum C; ideoque b M reliquum D metietur; mensurat autem D ipsum E: Ergo

D 7 H 1
A 17 G 6
C 10
E 7 M
B 10
F 3

a ax. 1. l. 3.

b ax. 6. l. 1.

M metietur nedùm totum B, sed etiam ablatum E. Vnde residuum F quoque mensurabit; at F metitur G; Ergo M metitur totum D, & ablatum G; & propterea residuum H mensurabit. Quare numerus M metitur vnitatem H. c quod est impossibile. Non ergo aliquis numerus esse potest mensura communis numerorum A, & B. Quod erat ostendendum. Vocentur tales numeri A, & B Primi inter se.

c def. 13 l. 1.

PROPOS. II. PROBL. I.

1 Eucl. 2. VII.

Duobus numeris datis non primis inter se, maximam eorum communem mensuram reperire.

Sint duo numeri A & B non primi inter se. Debet eorum maxima mẽsura communis reperiri. Ex maiore A tollatur B, quoties potest, & residuum D tollatur ex B, quoties potest: Tandem procedendo in hac alterna detractione a peruenietur ad residuum aliquem numerum F, qui pręcedentẽ D metietur (alias essent A & B primi numeri, quod non ponitur). Dico numerum F ipsos numeros A, & B mensurare. Quia F metitur D, & D ipsum E; Ergo b F ipsum E mensurat; sed etiam F se ipsum metitur; Ergo c F ipsum B mensurabit; & propterea F ipsum G, atque aggregatum ex C, & D, idest A quoque mensurabit. Dico secundò F esse maximam communem mensuram numerorum A, & B. Si enim hoc verum non est, sit H maior, quàm F mensura communis numerorum A, & B. Et quia H ponitur mensura ipsius B, & B ipsum C metitur; Ergo H ipsum C mensurabit; sed H ponitur quoque mensura totius A: Ergo H residuum eius D; & ideo ipsum E mensurabit. Quare H,

a prop. 1. huius.

b ax. 1. l. 3.

c ax. 6. l. 1.

C 10
A 18
D 8
F 2
B 10
E 8
H

re H, residuum F ipsius, B quoque mensurabit; numerus maior numerum minorem, quod est impossibile. Non ergo aliqua mensura cōmunis maior esse potest, quàm F. Quare, &c.

COROLLARIVM I.

Patet duorum numerorum quamlibet communem mensuram, metiri quoque eorundem numerorum maximam communem mensuram.

Nam H, quę posita fuit mensura numerorum A, & B, ostensa fuit mensura ipsius F.

COROLLARIVM II.

Hinc deducitur, quòd quilibet numeri vnitate differentes, & qui binario differunt, & non fuerint ambo pares, primi inter se erunt. Nam facta alterna detractione ex numeris, quorum differentia est vnitas, relinquetur tandē vnitas pro communi maxima mensura, & quorum differentia est binarius, cùm sit saltem vnus eorum par, ex alterna detractione, binarius relictus, detractus à reliquo impari, necessaro vnitatem pro communi mensura relinquit.

SCHOLIVM.

Patet etiam, quòd dato quolibet numero non primo, reperiri poterit numerus, qui sit primus, & eius minima mensura sit.

d def. 8 huius.

Sit numerus A non primus, idest d mensurabilis ab aliquo numero. Sumatur aliquis numerus B, qui pars sit numeri A, vt eius semissis, vel tertia pars, &c. & si B non est primus numerus, sumatur aliqua pars ipsius B, quę sit C; & si C non est primus numerus, sumatur D pars ipsius C. Et quia numerus infinitè diminui non potest, inuenietur tandem aliquis numerus, quem nullus alius numerus metiatur; & ideo e primus erit, & sit ille D. Et quoniam D metitur C, & C ipsum B, & B ipsum A, f metietur primus numerus D postremum numerum A; & D est minimus omnium numerorum, qui mensurare possunt ipsum A, cùm D à nullo alio minore numero mensurari possit. Ergo patet propositum.

e def. 8. huius.

f ax. 1. l. 3.

A	64
B	16
C	4
D	2

PRO-

PROPOS. III. PROBL. II.

Eucl. 3 VII.

Pluribus numeris datis, quàm duobus, nō primis inter se, maximam communem mensuram eorum reperire.

Sint plures, quàm duo numeri A, B, C non primi inter se. Debet eorum maxima communis mensura reperiri. Duorum numerorum A, & B, reperiatur maxima communis mensura D; & duorum numerorū B, C, reperiatur communis mensura maxima E; & sic vlterius, si plures extiterint. Postea, quoniam numeri A, B, C supponuntur non primi inter se, non *a* erunt omnes A, B, C mēsurabiles tantūmodo ab vnitate, sed necessariò aliquis numerus omnes eos metietur; hæc *b* autem mensura communis omnium A, B, C necessariò tam D maximam mensuram communem numerorum A, & B, quàm E maximam mensuram communem numerorum B, & C metietur; ideoque *c* D, & E non erunt primi inter se. Reperiatur iam F maxima mensura communis numerorum D, & E. Paret *d* F mensurare omnes numeros A, B, & C, eo quod F mensurat D, & D metitur ipsos A, & B; Ergo F mensurat numeros A, & B. Pari ratione F, metiens E, metietur etiā C. Dico iam F esse maximam mensuram omnium A, B, & C. Si enim hoc verum non est, sit H maior, quàm F mensura omnium numerorum A, B, & C. Et quia H metitur A, & B, *e* metietur quoque H ipsam D mensurā communem maximam eorundem A, & B. Pari ratione H metietur ipsum E. Cùmque H mensuret ipsos D, & E, *f* metietur quoque H ipsam F mensuram communem eorum maximam *g*, quod est impossibile, eo quod H ponitur maior, quam F. Ergo nulla maior, quàm F esse potest mensura communis numerorum A, B, & C. Quare patet propositum.

A 42
D 6
B 36
F 2
E 4
C 20
H

a pr. 1. huius.
b cor. pr. 1. huius.
c pr. 1 hu.
d ax. 1. l. 3.
e cor. pr. 2. huius
f cor pr 2. huius.
g def. 13. l. 1.

COROLLARIVM I.

Manifestum est quanlibet communē mensuram plurium, quàm duorum numerorum, metiri quoque eorundem maximam communem mensuram.

CO-

COROLLARIVM II.

Collligitur ex constructione, & demonstratione huius propositionis, quòd maxima communis mensura aliarum maximarum communium mensurarum quorunlibet numerorum expositorũ est quoque communis mensura maxima illorum. Nam numerorum A, B, C fuit tam D, ipsorum A, B, quàm E ipsorum B, C maxima communis mensura, & F fuit maxima communis mensura ipsorum D, & E, atque F ostensa fuit maxima communis mensura numerorum A, B, C.

Eucl. 31. 33 VII.

PROPOS. IV. THEOR. II.

Omnis primus numerus ad omnem numerum, quem non metitur, primus est. Et omnem numerum non primum aliquis primus numerus metitur.

Primus numerus A non metiatur numerum B. Dico A, & B inter se primos esse. Si enim A, & B primi non sunt, metiatur eos præter vnitatem aliquis numerus C.

A 3	B 5
C	

Et quoniam supponitur C metiri numerum B, & A non metiri B, non erit C æqualis ipsi A; a aliàs A quoque mensuraret ipsum B; Et cum numerum A alius numerus C metiatur, non b erit A numerus primus, quod est contra hypothesin. Quare nullus numerus mensurare potest ambos A, & B; & ideo primi inter se erunt A, & B.

a ax. 4. l. 3.

b def. 8 hu.

Secundò sit numerus non primus A. Dico aliquem primum numerum eum metiri.

A	24
B	2
C	

Quoniam numerus A ponitur non primus, metietur eum aliquis numerus, vel plures numeri (aliàs si nullus numerus ipsum A mensuraret, sed tantummodo c vnitas, esset A numerus primus, quod non ponitur). Intelligatur d numerus B, qui sit minimus omnium, metientium numerum A. Ostendendum est B esse numerum primum. Si enim primus non est, metietur numerum B aliquis alius numerus, qui sit C. Et quia C metitur ipsum B, & B numerum A, e metietur quoque C ipsum A; Est verò C minor, quam B: Ergo minor numerus, quam B, metietur quoque ipsum A: Quare B non est minimus omnium, metientium A,

c def 8. hu.

d schol. pr. 2. huius.

e ax. 1 l. 3.

quod

quod est falsum. Quare B à nullo numero mensurari potest; & ideo f B primus erit, quod erat ostendendum. f def 8. huius.

COROLLARIVM I.

Euch. 34. VII.

Constat, quòd omnis numerus aut primus est, aut eum aliquis primus numerus metitur.

COROLLARIVM II.

Manifestum est, quòd numerus, qui est minima mensura cuiuslibet numeri non primi: erit primus numerus.

PROPOS. V. THEOR. III.

Eucl. 25. 30. VII.

Duorum primorum numerorum summa ad vnum eorum prima est. Et si summa ad vnum componentium prima fuerit, erunt duo illi numeri primi inter se. Et qui vnum primorum numerorum metitur ad reliquum primus est.

Sint numeri A, & B inter se primi. Dico A, cũ B esse primum ad A solum, vel ad B. Si enim A simul cum B, ad A non est primus, metiatur illos, si possibile est numerus C. Et quia C metitur totum A, B, atque ablatum A, a metietur quoque C residuum B: Quare A, & B non sunt primi, cùm numerus C vtrunque metiatur, quod est contra hypothesin. Vnde A B, & A primi inter se erunt. Eadem ratione A, B ad B, primus erit. a ax. 6. l. 1.

A 17	B 20
C	

Secundò sit A simul cum B primus ad A, vel ad B. Dico A, & B primos esse inter se. Si enim hoc verum non est, sit C communis mensura numerorum A, & B, si fieri potest: Quare b C metietur aggregatum ex A, B; Metitur quoque C ipsum A vel B; Igitur summa numerorum A, B, non c est prima ad numerum A, vel ad B, quod est contra hypothesin. Quare A, & B primi inter se erunt. b ax. 6. l. 1. c ax. 1. l. 3.

A 20	B 23
C 4	D

Tertiò sint A, & B primi inter se, & C metiatur ipsum A. Dico C, & B primos esse inter se. Si enim hoc verum non est, habeant C, & B communem mensuram numerum D. Et quia D metitur C, atq; C metitur numerũ A; Ergo d D metitur ip- d sr. 1. l. 3.

e pr. 1. huius sum A, metiebatur autem numerum B: Igitur e A, & B non sunt primi, cùm habeant communem mensuram numerum D, quod est contra hypothesin. Non ergo aliquis numerus D metitur ipsos C, & B; & ideo C, & B primi sunt. Quod erat ostendendum.

Eucl. 23. 24 21. VII.

PROPOS. VI. THEOR. IV.

Primi inter se numeri minimi sunt omnium eandem cum eis rationem habentium. Et duo minimi in data ratione primi sunt inter se. At quilibet numeri minimi ęquè metiuntur numeros eandem cum eis rationem habentes.

Sint numeri A, & B primi inter se, & quilibet numeri C ad D sint inter se, vt A ad B. Dico A, & B minores esse, quàm C & D. Quia A ipsius B partes est, cùm a vnitas, quę sit E, esse possit eorũ cõmunis mẽsura, & C ad D est, vt A ad B: Ergo b C ipsius D eędẽ partes erit, quę A partes est ipsius B; & propterea reperiri poterit H, quæ toties metiatur D, quoties E ipsum B, atque H sit eadem pars ipsius C, ac est E pars alterius A; sed H vnitas esse nequit, cùm c C ipsi A, & D ipsi B æqualis non ponatur; neque H minor vnitate esse potest, cùm vnitas indiuidua sit. Igitur H numerus erit maior vnitate E; estque d C ad A, & D ad B, vt pars H ad partem E: Igitur e C maior est, quàm A, & D, maior, quàm B, & ideo numeri primi A, B sunt quoque minimi omnium eandem rationem habentium.

a pr. 1. huius. b def. 8. l. 3. c pr. 1. l. 3. d pr. 11. l. 3 e pr. 1. l. 3.

A 12	B 17
E 1	
C 36	D 51
H 3	

Secundò sint A, B minimi in ratione C ad D. Dico A, B primos esse inter se. Si enim non sunt primi metietur eos cõmuni mensura numerus E; & quę pars est numerus E ipsius A, ita fiat vnitas O pars eadem numeri M, atque vt E ad B ita fiat O ad N: Quare f M ipsius N eędem partes erit, quæ A partes est ipsius B; estque g M minor A, & N minor B, eo quod vnitas O minor est numero E: Ergo M, & N minores sunt ipsis A, B, quod est absurdum: Supponebantur enim A, B minimi omnium eandem rationem habentium. Quare A, & B primi erunt.

f def 6. l. 3. g pr. 1. l. 3.

M	O 1	N	
A 6	E	B 5	
C 18		D 15	

Tertiò sint A, & B minimi omnium eandem rationem habentium, quam C ad D, & A ad B. Dico A ipsum C, & B ipsum

ipsum D æquè metiri. Quoniam A ad B est, vt C ad D: Ergo [b] permutando A ad C erit, vt B ad D. Quare [i] minor A ipsius C, & B ipsius D eadem pars, vel eędem partes erunt (cùm numeri commensurabiles inter se sint saltem ab vnitate); & si quidem partes credantur esse, [k] habebunt communes easdem mensuras, quæ intelligantur esse E, & H. Et quia [l] partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, erit E ad H, vt A ad B, & [m] minores sunt E, H ipsorum A, & B, qui sunt illorum ęquè multiplices, quod est absurdum: Suppositi enim fuerunt A, & B minimi omnium, eandem rationem habentium, quam C ad D: Quare A, & B partes non erunt ipsorum C, & D; & propterea A ipsius C, & B alterius D eadem pars [n] erunt, & eas ęquè metientur. Quod erat ostendendum.

A	4	B	3
E		H	
C	20	D	15

h pr. 12. l. 3.
i def. 8. l. 3.
k def 6. l. 3.
l pr. 11. l. 3.
m def. 5. l. 3.
n def. 4. l. 3.

PROPOS. VII. THEOR. V.

Eucl 17. 18. VII.

Si idem numerus in plures numeros multiplicetur, vel plures numeri in eundem numerum ducantur, erunt producti, vt multiplicati, vel vt multiplicantes.

Idem numerus A, multiplicans numeros B C, & F efficiat productos D, E, & H. Dico primò productos D, E, & H eandem rationem habere, quam multiplicati B, C, & F. Quoniam [a] vt vnitas X ad A, ita est B ad D (sic enim D erit productum ex multiplicante A in multiplicatum B), & similiter vt X ad A, ita est C ad E, atque vt eadem X ad eundem A, ita est F ad H: Quare [b] B ad D, & C ad E, atque F ad H eandem rationem habebunt, scilicet eam, quam habet vnitas X ad numerum A: Quare [c] permutando, vt B ad C, ita erit D ad E, atque, vt C ad F, ita erit E ad H.

				B	3	D	6
X	1	A	2	C	4	E	8
				F	6	H	12

a def 9. huius.
b pr. 7. l. 3.
c pr. 12. l. 3.

Secundò tres numeri B, C, & F, multiplicantes numerum A efficiant productos numeros D, E, & H. Dico productos D, E, H easdem proportiones habere, quam habent numeri, multiplicantes B, C, F. Quoniam, [a] vt vnitas X est ad B, ita est A ad D (sic enim D erit productum ex multiplicante B in A)

		B	3			D	6
X	1	C	4	A	2	E	8
		F	6			H	12

a def. 9. huius.

e pr. 12. l. 3. erit permutando, e vt X ad A, ita B ad D. Eadem ratione quia vt X ad C, ita erat A ad E; erit permutando, vt X ad A, ita C
f pr. 7. l. 3. ad E. Pari ratione vt X ad A, ita erit F ad H. Quare f B ad D, atque C ad E, nec non F ad H eandem rationem habebunt, nimirum eam, quam vnitas X habet ad numerum A. Et ideo
g pr. 12. l. 3. denuo g permutando B ad C erit, vt D ad E, atque C ad F erit, vt E ad H. Quæ erant ostendenda.

Eucl. 16. VII.

COROLLARIUM.

Manifestum est, quòd idem numerus procreatur ex multiplicatione prioris numeri in secundum, atque ex multiplicatione secundi numeri in priorem: & numerus productus mensuratur à multiplicato & multiplicante numero.

h def. 9. huius. Quoniam in prima parte huius propositionis, quando A, multiplicans B, efficit D, h est, vt vnitas X ad A, ita B ad D. At in secunda parte quando B multiplicat A, tunc vt X ad B, ita est A ad quartum numerum productum; estque permutan-
i pr 12. l. 3. do, i vt vnitas X ad numerum A, ita B ad quartum numerum productum ex multiplicatione B in A. Igitur vt X ad A, ita est idem B ad D, & ad quartum numerum productum; ideoque
k pr. 7. l 3. D k productus ex multiplicatione A in B æqualis est producto
l def 4. l. 3. ex multiplicatione B in A. Insuper l sicuti vnitas X metitur B, ita A metitur D, & sicut X metitur A, ita B metitur productum D.

Eucl. 19. VII.

PROPOS. VIII. THEOR. VI.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, erit productum ex primo in quartum æquale producto ex secundo in tertium. Et si productum ex primo in quartum æquale fuerit producto ex secundo in tertium, erunt quatuor illi numeri proportionales.

Sit prior numerus A ad secundũ B in eadem ratione, in qua tertius C ad quartum D, atque ex multiplicatione D in A fiat R, & ex multiplicatione C in B fiat S.

R 40	H 50	S 40		
A 4		B 5		
D 10		C 8		
	X 1			

Dico numeros R, & S æquales esse inter se. Ex a multiplicatione D in B fiat
a def. 9. huius. H. Et quia D, multiplicans A, & B, facit R, & H; Ergo b R ad H est, vt A ad
b pr. 7. huius B. Rursus quia C, & D, multiplican-

tes

tres B, faciunt S, & H: Igitur c S ad H est, vt C ad D, seu d vt A ad B; Erat autem R ad H, vt A ad B: Ergo R ad H est, vt S ad eundem numerum H: & propterea e numeri R, & S æquales sunt inter se. c pr. 7. huius. d pr 7 l 3. e pr 4. l. 3.

Secundò R productus ex priore A in quartum D, æqualis sit numero S, producto ex secundo B in tertium C. Dico A ad B eandem proportionem habere, quam C ad D. Fiat rursus H ex D in B. Quoniam f æquales R, & S ad eundem numerum H habent eandem rationem; estque g, vt prius dictum est A, ad B, vt R ad H: Igitur A ad B est, vt S ad H; sed vt S ad H, ita est C ad D. Igitur A ad B est, vt C ad D. Quod erat ostendendum. f pr. 3. l 3. g pr 7. huius & pr. 7. l. 3.

PROPOS. IX. THEOR. VII. Eucl. 20. VII.

Si tres numeri proportionales fuerint productum ex primo in tertium æquale erit producto ex secundo in se ipsum. Et si numerus productus ex primo in tertium æquale fuerit producto ex secundo in se ipsum: erunt tres illi numeri proportionales.

Sint primò tres numeri A, B, C proportionales, sitque R productum ex C in A, & S sit productum ex B in B. Dico R æqualem esse numero S. Quoniam, vt prior numerus A ad secundum B, ita est idem numerus B (sumptus, vt tertius) ad quartum C; ideo a R productum ex primo in quartum æquale erit S producto ex secundo in tertium. a pr 8. huius.

Secundò sit R numerus productus ex A in C, & S sit productus ex B in B, siue in se ipsū; sintque R & S æquales inter se. Dico A ad B eandem rationē habere, quàm B ad C. Quoniam R productus ex A primo in C quartum æqualis est S facto ex B secundo in B tertium. Ergo vt b A ad B, ita est B ad C. Quod erat ostendendum. b pr. 8. huius.

R	36	H	108	S	36
A	2			B	6
C	18			B	6
		X			

PROPOS. X. THEOR. VIII. Eucl. 16 17 IX.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium. Et si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, quorum extremi primi

fuerint

fuerint inter se; non erit, vt primus ad secundum, ita postremus ad alium.

Sint primi numeri inter se A, & B. Dico reperiri non posse alium numerum, ad quem B sit, vt A ad B. Si enim hoc verũ non est, sit vt A ad B, ita B ad numerum C. Et quoniam A, & B primi sunt, ęquè a metientur numeros B, & C eandem rationem habentes, nimirum A ipsum B, & B ipsum C: Cumque A se ipsum metiatur; Igitur A metitur quoque duos numeros A, & B primos inter se. Quod b est impossibile. Non igitur duobus numeris primis A, & B tertius numerus proportionalis reperiri potest.

a pr. 6. huius

A 5 B 7 C

b pr. 1. huius

Secundò sint continuè proportionales numeri A, B, C, D, quorum extremi A, & D sint inter se primi. Dico reperiri non posse numerum, ad quem D eandem proportionem habeat, quam A ad B. Si enim hoc verum non est, sit D ad E, vt A ad B. Ergo c permutando vt A ad D, ita erit B ad E; suntque A, & D primi inter se; & propterea minimi in sua proportione: Igitur d ęquè metitur A ipsum B, atque D ipsum E; sed B metitur ipsum C, e eo quod A ad B est, vt B ad C; f Igitur A ipsum C metitur quoque. Rursus C ad D ponitur, vt A ad B; Igitur g C ipsum D similiter metietur, metiebatur autem prius A ipsum C: Igitur h numerus A extremum numerum D mensurabit; sed numerus A se ipsum quoque mensurat: Igitur duo numeri extremi A, & D mensuram communem habent, nempe numerum A: & propterea i primi inter se non erunt, quod est contra hypothesin. Non ergo vt A ad B, ita erit D ad quemlibet alium numerum E. Quę erant ostendenda.

c pr. 12. l. 3.
d pr. 6. huius
e def. 8. l. 3.
f ax. 1. l. 3.

A 8 B 12 C 18 D 27 E

g def. 8. l. 3.
h ax. 1. l. 3.
i pr. 1. huius

Eucl. 18. 19. IX.

PROPOS. XI. PROBL. III.

Duobus, vel tribus numeris datis tertium, vel quartum proportionalem inuenire: oportet autem productum è secundo in se ipsum, vel è secundo in tertium mensurari à primo.

Sint primò duo dati numeri A & B, sitque productum ex B in se ipsum numerus D, & prior numerus A metiatur numerum D, & vt A est ad eius multiplicem D, ita vnitas X fiat ad C.

ad C. Dico C esse tertium proportionalem duorum numerorum A, & B. Quoniam a permutando vnitas X ad A, est vt C ad D; Ergo b idem numerus D procreatur ex multiplicatione prioris numeri A in tertium C, atque ex secundo B in se ipsum. Ergo c vt A ad B, ita erit B ad C.

				X	1	
A	4	B	6	C	9	
			D	36		

a pr. 12. l. 3.
b def. 9. huius.
c pr. 9. huius.

Secundò sint dati tres numeri A, B, E; sitq; D productum ex B secundo in E tertium, & A ipsum D metiatur; & quoties prior numerus A metitur numerum D, toties vnitas X numerum C metiatur. Dico vt A ad B, ita esse E ad C. Quoniam d permutando vt vnitas X ad A, ita est C ad D: e Ergo idem numerus D gignitur ex multiplicatione prioris numeri A in quartum C, atque ex multiplicatione secundi B in tertium E; & ideo f vt A ad B, ita est E ad C. Quod verò determinatio sit necessaria sic ostendetur. Ponatur A non metiri ipsum D, & si fieri potest C sit tertius, vel quartus proportionalis. Erit igitur g productum ab extremis æquale producto ab intermedijs; estque D productum ab intermedijs: Igitur D producitur ex C in A; & propterea, h vt vnitas X ad numerum C, ita erit A ad D; Sed vnitas metitur numerum C: Igitur i A metitur ipsum D, quod est impossibile: Ponebatur enim A non mensurare numerum D. Quapropter patet propositum.

						X	1
A	4	B	8	E	9	C	18
						D	72

d pr. 12. l. 3.
e def. 8. huius.
f pr. 8 huius
g pr. 8. & 9. huius.
h def. 8. huius.
i def. 8. l. 3.

PROPOS. XII. THEOR. IX.

Eucl. 32. VII.

Si genitum numerum ex multiplicatione duorum numerorum metiatur aliquis primus numerus, vel qui ad vnum multiplicantium primus sit, is etiam reliquum multiplicãtium metietur.

Numerus B, multiplicans A faciat D, & numerus primus E, vel primus ipsi A metiatur D. Dico E metiri quoque B. Quia E ponitur metiri D, erit D multiplex ipsius E; Fiat ergo numerus H, tam multiplex vnitatis X, quam D est multiplex ipsius E: Vnde a numerus D procreatus erit ex multiplicatione prioris E in H quartum; sed idem numerus D efficitur ex multiplicatione secundi

A	5	B	6
D	30		
E	3	H	10
X	1		

a def. 9. huius.

A in

A in tertium B: Igitur *b* E ad A eandem proportionem habet, quam B ad H; suntque A, & E numeri primi, & ideo *c* in sua proportione minimi: Ergo æquè metientur numeros H, B, eandem rationem habentes, A quidem ipsum H, & F ipsum B; & propterea E ipsum B metietur. Quod erat propositum.

b pr 8. huius
c pr. 6. huius

Eucl. 26, 28. VII.

PROPOS. XIII. THEOR. X.

Si duo numeri ad quempiam primi fuerint, & ex illis genitus ad eundem primus erit. Et si duo numeri ad duos numeros, vterque ad vtrunque, primi fuerint, & qui ex eis gignuntur primi inter se erunt.

Sit vterque numerus A & B ad ipsum C primus, producaturque D ex A in B. Dico D ad C primum esse. Si enim hoc verum non est, sit E communis mensura numerorum C, & D. Et quia C, & A primi sunt, & E metitur C: Igitur *a* E ad A primus est, & metitur E ipsum D productum ex A in B; Ergo *b* E metitur reliquum multiplicantium B; metiebatur autem E ipsum C: Quare duo numeri B, & C habent communem mensuram E, quod est absurdum: Erant enim C, & B primi inter se. Quare *c* numeri C, & D non erunt commensurabiles, sed primi, vt erat propositum.

	D 15	
A 5		B 3
	E	
	C 8	

a pr. 5. huius
b pr. 12. huius.
c pr. 1. huius

Secundò sit tam numerus A, quàm B primus, tum ipsi C, cum numero D, atque ex A in B fiat E, nec non ex C in D fiat H. Dico E, & H primos inter se esse. Quoniam vterque A, & B primus est ad C: Ergo *d* E ex illis genitus ad C primus erit. Eadem ratione D ad E primus erit. Cùmque vterque C, & D ad E primus sit: Igitur *e* H ex illis genitus ad E primus erit. Quod erat probandum.

A 5		B 3
	E 15	
C 2		D 7
	H 14	

d par. 1. huius pr.
e par. 1. huius pr.

Eucl. 27. VII.

COROLLARIVM.

Si duo numeri primi inter se fuerint; & numerus ex vno eorum in se genitus ad reliquum primus erit.

	D 25	
A 5		B 5
	C 8	

Nam si A æqualis est B, & A ad C primus

mus est, erit quoque B ad C primus; ideoque f D productus ex A in B, siue ex A in se, erit ad ipsum C primus. f par. 1. huius pr.

PROPOS. XIV. THEOR. XI.

Eucl. 31. IX.

Si impar numerus ad aliquem numerum primus sit; & ad illius duplum primus erit.

Impar numerus A primus sit ad numerum B, huius autem duplus sit C. Dico A ad C quoque primum esse. Fiat, vt B ad C, ita vnitas X ad binarium D, & quia binarius D minimè metitur imparem numerum A, (aliàs A compositus ex binarijs bifariam diuidi posset a & par esset): propterea D non potest esse mensura communis duorum numerorum A, & D; Neque similiter numerus maior, quàm D mensura communis esse potest eorundem numerorum A & D, quia licet metiatur ipsum A, nihilominus numerus maior minorem D non metietur: Vnde b A, & D primi inter se erunt, cùm binarius A ab vnitate tantùm mensurabilis, sit c numerus primus; érat autem ex hypothesi B ad ipsum A primus: Igitur duo numeri D, & B ad ipsum A primi erunt. Ergo d productum ex D in B ad ipsum A, scilicet numerus C ad ipsum A primus erit. Quapropter duplū ipsius B ad A primus erit. Quod erat, &c.

a def. 3. huius. b pr. 4. huius. c def. 8. huius. d pr. 13. huius.

	X	1
A 5	D	2
	B	7
	C	14

PROPOS. XV. THEOR. XII.

Eucl. 29. VII.

Si duo numeri primi inter se fuerint, eorum quęlibet potestates eiusdem gradus, primę inter se erunt.

Sint numeri A, & B primi inter se, & ex A in se fiat potestas C, atque ex A in C fiat E, nec non ex A in E fiat G, & sic vlterius; Similiter ex B in se fiat D, & ex B in D fiat F, atque ex D in F fiat H, &c. Dico potestates C, & D eiusdem gradus, idest tertias proportionales ab vnitate, numeros primos inter se esse, atque E, & F quartos proportionales ab vnitate primos esse & sic G, & H primos esse, &c. Quoniam A, & B sunt primi inter se, erit a C factus ex A in

a cor. pr 13. huius.

	X 1		
A	3	B	2
C	9	D	4
E	27	F	8
X	81	H	16

se ad B primus; pariterque D factus ex B in se ad A primus erit. Similiter quia C, & B sunt primi, erit D factus ex B in se ad C primus. Quapropter erit vterque A, C ad vtrunque B,
b pr.13.huius. D primus, & *b* propterea E factus ex A in C ad F factum ex B in D primus erit. Rursus quia A, C primi sunt ad B, erit *c* E
c prop.13. huius. ex eis genitus ad B primus, & eadē ratione F ad A primus erit. Quapropter vterque A, E ad vtrunque B, F primus erit, & ideo G ad H primus erit (factus scilicet ex anterioribus ad factum ex postremis) & sic deinceps, si plures extiterint. Quod, &c.

Eucl.35. Val.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

Numeris datis quotcunque, reperire minimos omnium eandem cum illis rationem habentium.

Sint quilibet numeri A, B, C. Debent reperiri numeri minimi in eisdem rationibus. Et si quidem A, B, C primi fuerint,
a pr.7 huius. ipsimet *a* erunt minimi in continuatione suarum proportionum; si verò primi non fuerint, reperiatur *b* eorum maxima
b pr.3.huius. communis mensura D. Et quàm multiplex est A ipsius D, tam multiplex fiat numerus E vnitatis X, & vt B ad D, ita fiat F ad vnitatem X, atque vt C ad D, ita fiat G ad vnitatem X. Et quoniam A ad D est, vt E ad X, erit
c pr.12.l.3 permutando *c* A ad E, vt D ad vnitatem X, & B ad F, vt D ad X, atque C ad G, vt
d pr.7 l.3. D ad vnitatem X. Quare *d* proportionales erunt A ad E, B ad F, atque C ad G. Et
e pr 12.lib.3 permutando *e* vt A ad B, ita erit E ad F, & vt B ad C, ita erit F ad G. Dico iam E, F, G minimos esse omnium, eandem rationem habentium, quam A, B, & C. Si enim hoc verum non est, sint alij numeri H, I, & K minimi in eisdem rationibus, si
f pr.6.huius fieri potest. Quare *f* æquè metientur numeros A, B, & C, eo quod ponuntur minimi. Fiat ergo vnitas X ad numerum L, vt est pars H ipsius A, vel vt I pars est ipsius B, aut K ipsius C.
g pr.2.lib 3 Et quoniam H ponitur minor, quàm E, habebit *g* eadem A ad H maiorem proportionem, quàm ad E; estque L ad X, vt
h pr 6 lib 3 A ad H: Ergo *h* L ad X maiorem rationem habet, quàm A
i pr.6.lib.3. ad E; sed vt A ad E, ita est D ad X: Igitur *i* L ad X maiorem proportionem habet, quàm D ad eandē vnitatem X; & propterea

A	6	B	4	C	8
		D	2		
E	3	F	2	G	4
H		I		K	
		L			
		X	1		

pterea k L maior erit, quàm D; erat autem prius A ad H, vt L ad X. Ergo permutando l A ad L erit, vt H ad vnitatem X. Similiter ostendetur B ad L, vt I ad X, atque C ad L, vt K ad vnitatem X. Vnde numerus L maior existens, quàm D, pars erit; ideoque communis mensura numerorum A, B, C; quod est absurdum. Factus enim fuit D maxima mensura communis numerorũ A, B, & C. Non ergo reperiri poterunt numeri minores, quàm E, F, G in rationibus A, B, C; & propterea E, F, G minimi erunt. Quod erat faciendum.

k pr. 5. lib. 3
l prop. 12. lib. 3

PROPOS. XVII. PROBL. V.

Eucl. 36. VII.

Duobus numeris datis, reperire numerum minimum, quem illi metiuntur.

Sint dati numeri A, & B. Reperiri debet numerus minimus omnium mensurabilium ab ipsis A, & B. Et primùm A, B sint inter se primi. Ex multiplicatione A in B fiat numerus C. Et quia a vnitas X est ad A, vt B ad C, & vnitas X metitur numerum A. Igitur b B metitur numerum C. Cùmque permutando c sit X ad B, vt A ad C: Ergo d A metitur C, sicuti vnitas X metitur numerum B. Quare A, & B metiuntur C. Dico iam C esse minimum omnium mensurabilium ab A, & B. Si hoc verum non est, sit D minor, quàm C mensurabilis ab eis, & vt D multiplex est ipsius A, ita fiat E multiplex vnitatis X. Quare e D fiet ex A ducto in E; metitur autem B ipsum D, & est B primus ad multiplicatem A: Igitur f B metitur E. Postea quia, vt X ad E, ita erat A ad D: Ergo permutando g X ad A est, vt E ad D; sed vt X ad A ita erat B ad C: Ergo h B ad C est, vt E ad D; metitur autem primus B ipsum E tertium: Ergo i secundus C metitur quartum D, maior minorem, quod est impossibile. Nullus ergo numerus minor, quàm C, mensurabitur à numeris A, & B.

X 1
A 4 B 5
C 20
D
E

a def. 9. huius.
b def. 8. lib. 3.
c pr. 12. l. 3
d def. 8. l. 3.
e def. 8. huius.
f pr. 22. huius.
g pr. 12. l. 3.
h pr. 3. lib. 3
i pr. 10. lib. 3

Secundò sint A, B non primi inter se, & reperiantur k C, D, minimi in data ratione A ad B, & ex multiplicatione A in D fiat numerus E. Patet E mensurari à numeris A, & D, ex quorum multiplicatione efficitur. Cùmque numeri A, B, C, & D sint proportionales, idem l numerus efficietur ex primo A in quartum D, atque ex secundo B in tertium C; & ideo nume-

k pr. 16. huius.
l pr. 8. huius

rus E mensurabitur quoque à numero B. Dico iam E esse minimum omnium mensurabilium à numeris A, & B. Si enim hoc verum non est, sit F minimus mensurabilium ab eis, sitque F minor, quàm E. Et quoties A metitur F, toties vnitas metiatur numerum H; Vnde ex *m* multiplicatione numeri A in H efficietur numerus F. Similiter quæ pars est B numeri F fiat vnitas numeri G: Vnde idem numerus F efficietur ex multiplicatione prioris A in H quartum, atque ex multiplicatione secundi B in tertium G: Quare *n* vt A ad B, seu vt C ad D, ita erit G ad H. Cùmque C, & D sint minimi in sua proportione: Ergo *o* metientur numeros G, H eiusdem rationis; ideoque D metitur H. Sed *p* vt vnitas ad A, ita est D ad E, & vt eadem vnitas ad eandem A, ita est H ad F: Ergo *q* vt D ad E, ita est H ad F; & permutando *r* D ad H erit, vt E ad F; Metiebatur autem D ipsum H: Ergo *s* E metitur F, maior minorem, quod est impossibile. Non ergo minor numerus, quàm E, mensurabitur ab A, & B; & propterea E minimus est omnium mensurabilium ab eis. Quod erat, &c.

X 1	
A 4	B 6
C 2	D 3
E 12	
F	
G	H

m def. 9. huius.
n pr. 8 huius.
o pr. 6 huius
p def. 9. huius.
q pr. 7 lib. 3
r pr. 12 lib 3
s def. 8. lib. 3

Eucl. 37. VII.

PROPOS. XVIII. THEOR. XIII.

Si duo numeri quempiam numerum metiantur, etiam minimus ab illis mensuratus eundem metietur.

Duo numeri A, & B metiantur numerum C; & D sit minimus numerus mensuratus ab A, & B. Dico D mensurare numerum C. Si enim hoc verũ non est, subtracto D ex C, quoties potest, relinquat numerum F minorem, quàm D, sitque pars subtracta E. Et quia tam A, quàm B metiuntur D, atque D metitur ipsum E: Ergo *a* tam A, quàm B metiuntur ablatum numerum E; sed ex hypothesi A, & B metiuntur totum numerum C: Igitur *b* tam A, quàm B metiuntur residuum numerum F minorem minimo D, mensurato ab A, & B, quod est impossibile. Non ergo residuus F esse potest minor, quàm D; & propterea D metietur numerum C, vt fuit propositum.

A 2	B 3
C 18	D 6
E 12	F

a ax. 1. l. 3.
b ax. 6. l. 1.

PRO-

PROPOS. XIX. PROBL. VI.

Eucl 38. VII.

Datis pluribus, quam duobus numeris, reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

Sint quotcunque numeri A, B, C, & D. Reperiri debet minimus numerus, quem illi metiuntur. Inueniatur *a* numerus E minimus omnium mensurabilium à duobus A, & B; postea reperiatur numerus F minimus omnium, quem E, & C metiuntur. Et quoniam A, & B metiuntur E, & E metitur F: Ergo *b* nedùm C, sed etiam A, & B metientur numerum F. Dico iam F esse minimum omnium, quos A, B, & C metiri possunt. Si enim hoc verum non est, sit G minor, quàm F minimus mensurabilium ab eisdem A, B, C. Et quoniam A, & B ipsum G metiri conceduntur, estque E minimus omnium mensurabilium à duobus A, & B: Ergo *c* E metietur ipsum G; Vnde duo numeri E, & C metientur numerum G; estque F minimus omnium, quos E, & C metiri possunt: Igitur *d* F metietur numerum G, maior minorem, quod est absurdum: Nullus ergo numerus minor, quàm F, mensurari poterit à tribus numeris A, B, & C. Et propterea ipse numerus F minimus erit mensurabilium ab eisdem A, B, & C. Postea reperiatur numerus H minimus omnium, quos F, & D metiuntur: erit, vt prius, H minimus omnium, quos A, B, C, & D mensurare possunt, & sic vlterius. Et hoc erat faciendum.

A 3 B 4 C 6 D 8
E 12 F 12 H 24
G

a prop. 17. huius.
b ax. 1. lib. 3.
c prop. 18. huius.
d prop. 18. huius.

PROPOS. XX. THEOR. XIV.

Eucl. 14. IX.

Si primi numeri metiantur minimum omnium, quos mensurare possunt, nullus alius numerus primus illum metietur.

Sit numerus A minimus, quem metiuntur primi numeri B, C, & D. Dico nullum alium primum numerum prçter B, C, D metiri eundem A. Si enim hoc verum non est, alius primus numerus E prçter illos metietur numerum A, & quoties E metitur A, toties vnitas metiatur numerum F: Quare *a* ex multiplicatione E in F fiet A: *b* Igitur

A 30
B 2 C 3 D 5
E F

a def. 9. huius.
b prop 12. huius.

singuli

singuli B, C, D, qui primi sunt ad E (cùm omnes primi supponantur) metientur F alterum multiplicantium; estque F minor, quàm A multiplicatus: Ergo B, C, D metiuntur minorē numerum, quàm minimum A mēsurabilium, quod est absurdum. Nullus ergo primus numerus pręter A, B, C metietur numerum A. quod erat ostendendum.

Eucl. 20. IX.

PROPOS. XXI. PROBL. VII.

Quotcunque numeros reperire, quorum quilibet primus sit.

Sumatur quilibet numerus primus A, cui addita vnitate fiat numerus B. Iam si B est numerus primus, erunt ambo numeri A, & B primi; si verò B non est primus numerus, reperiatur a eius minima mensura, quę sit C; eritque numerus C primus. Dico iam C diuersum esse à numero A. Nam si idem esset, cùm C metiatur totū B, & ablatum A, metietur b quoque ipse numerus C residuam vnitatem, quod est impossibile. Igitur numerus primus C non est idem ac primus numerus A.

a sch. pr. 2. huius.

b ax. 6. lib. 1

Postea c reperiatur numerus D, quem A, & C metiantur, & ipsi D addita vnitate fiat numerus E. Iam si E est primus numerus, erunt tres inuenti numeri A, C, & E primi. Si verò E nō est primus, reperiatur d minima eius mēsura F, eritque F numerus primus. Dico pariter F diuersū esse à numeris A, & C. Nam si esset ęqualis vni eorum, vt ipsi A, cùm F, siue A metiatur totum numerum E, & ablatum D, e metietur quoque idem numerus F residuam vnitatem, quod est impossibile. Igitur numerus primus F non erit ęqualis numero primo A, & eadem ratione, nec erit ęqualis numero primo C. Non aliter inueniri potest quartus, & alij infiniti numeri primi. Quod erat faciendum.

c prop. 17. huius.

d sch. pr. 2. huius.

e ax. 6. lib. 1

A 7	
B 8	C 2
D 14	
E 15	F 2

Eucl. 41. VII.

PROPOS. XXII. PROBL. VIII.

Numerum reperire, quis sit minimus habens datas partes.

Sint quęlibet datę partes, semissis, tertia, & quarta. Debet reperiri omniū minimus numerus, qui habeat datas partes. Eadem vnitas X fiat semissis numeri A, tertia pars numeri B; &

quarta

quarta pars numeri C, & sic vlterius, si plures partes extiterint; Postea *a* reperiatur minimus numerus D omnium, quos A, B, & C mensurare possunt, & quoties A metitur D, toties vnitas X metiatur numerum F, atque quoties B, & C metiuntur D, toties vnitas X metietur numeros G, & H. Et quoniã vt X ad F, ita est A ad D, erit *b* permutando X ad A, vt F ad D; Eadem ratione X ad B erit, vt G ad D, atque X ad C erit, vt H ad D: Quare *c* quę pars est vnitas X singulorum numerorum A, B, & C eadem pars erunt singuli numeri F, G, & H eiusdem numeri D; sed vnitas X semissis est ipsius A, & pars tertia numeri B, atque pars quarta numeri C: Igitur numerus F semissis est numeri D, & G tertia, atque H quarta pars eiusdem numeri D; & propterea numerus D habebit datas partes. Dico iam numerum D esse minimum omnium, habentium datas partes. Si enim hoc verum non est, sit numerus M minor, quàm D, habens datas partes, sitque numerus N semissis ipsius M, O sit tertia pars, atque P quarta eiusdem numeri M; erat autem vnitas X numeri A semissis, & ipsius B tertia, atque ipsius C quarta pars: Ergo vt X ad A, ita erit N ad M, & *d* permutando X ad N, erit, vt A ad M; Pari ratione X ad O erit, vt B ad M, atque X ad P erit, vt C ad M; sed vnitas X pars est, & metitur singulos numeros N, O, & P: Igitur numeri A, B, & C metiuntur numerum M minorem, quàm D minimum omniũ, quos A, B, C mensurare possunt, quod est impossibile. Non ergo numerus minor, quàm D habere potest datas partes; ideoque ipse numerus D est minimus datas partes habens. Vt quęrebatur.

		X 1	
$\frac{1}{2}$	A 2	F 6	N
$\frac{1}{3}$	B 3	G 4	O
$\frac{1}{4}$	C 4	H 3	P
		D 12	
		M	

a pr. 19. huius.
b pr. 12. lib. 3
c def. 8. lib. 3.
d pr. 12 lib 3.

COROLLARIVM I.

Eucl. 39. VII.

Patet, quòd si numerus numerum metiatur, dimensus partem habebit à metiente denominatam.

Nam quia numerus A metiebatur numerum D, ostensum est D habere partem F denominatã ab A; idest talis pars fiet F ipsius D, videlicet semissis, quę pars est vnitas ipsius A, à quo numerus dictus denominatur.

CO-

Eucl. 40. VII.

COROLLARIVM II.

Et si numerus partem habuerit quamlibet, metietur illum numerus à parte denominatus.

Nam in postrema parte huius propositionis dictum est numerum M habere tertiam partem, & ostensum est M metiri à numero O toties, quoties vnitas ternarium B metitur.

Eucl. 1. VIII.

PROPOS. XXIII. THEOR. XV.

Si quorũcunque numerorum continuè proportionalium extremi primi inter se fuerint, omnes illi erunt minimi omniũ eandem rationem habentium.

Sint quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, quorum extremi A, & D sint primi inter se. Dico numeros A, B, C, D minimos esse omnium, cum eis eandem proportionẽ habentium. Si enim hoc verum non est, sint alij numeri E, F, G, H, minores illis in eadem proportione continua.

A 8	B 12	C 16	D 27
E	F	G	H

Quoniam quot sunt numeri A, B, C, D, tot sunt alij secundi ordinis E, F, G, H, qui bini sumuntur in eadem ratione: Ergo a ex compositione ordinata, vt A ad D, ita erit E ad H, & b sunt A, & D minimi in sua proportione, quandoquidem primi inter se supponuntur: Igitur tam A numerum E, quam D ipsum H æquè metitur, maiores quidem minores, quod est impossibile: Non ergo numeri minores ipsis A, B, C, D reperiri possunt, qui eandem proportionem habeant cum eis. Quod, &c.

a pr. 19. lib. 3

b pr. 6. huius.

Eucl. 2. VIII

PROPOS. XXIV. PROBL. IX.

Quotcunque numeros reperire continuè proportionales minimos in data ratione.

Sint minimi numeri datæ rationis A, B. Inueniendi primò sint tres numeri minimi in continua proportione data A ad B. Ex a multiplicatione A in se fiat C, & ex A in B fiat D, atque ex B ducto in se ipsum fiat E. Et quia A multiplicans duos numeros A, & B efficit numeros C, & D, erit, b vt A ad B, ita C ad D.

a def. 9. huius.

b pr. 7. huius.

ad D. Rursus quia A, & B, multiplicantes ipsam B producunt duos numeros D, & E, erit c D ad E, vt A ad B. Quare d C, D, E continuè proportionales sunt in ratione A ad B. Dico iam C, D, E minimos esse in ratione A ad B. Quoniam A, & B primi e numeri inter se (cùm sint minimi datæ rationis) in se ducti efficiunt extremos numeros C, & E: erunt f ipsi C, & E inter se primi. Quare g continuè proportionales C, D, & E minimi sunt in proportione A ad B.

X 1
A 2 B 3
C 4 D 6 E 9
F 8 G 12 H 18 K 27

c pr. 7. huius.
d pr. 7. lib. 3
e pr. 6 huius
f pr. 15. huius.
g prop. 23. huius.

Secundò vt vnitas X ad numerum A, ita fiant tres numeri C, D, E ad numeros F, G, H. Quare, vt prius, erunt h numeri F, G, H continuè proportionales in ratione A ad B, veluti sunt numeri C, D, E. Deinde fiat, vt vnitas X ad numerum B, ita E, ad numerum K. Vnde i permutando erit X ad E, vt B ad K; sed vt X ad A, ita erat E ad H, erit permutando pariter vt X ad E, ita A ad numerum H: Igitur k H ad K est, vt A ad B; ideoque quatuor l numeri F, G, H, K continuè proportionales sunt in ratione A ad B: Ostendendum modò est numeros F, G, H, & K minimos esse in continua proportione data A ad B. Quoniam A, & B primi m inter se sunt, cùm sint minimi in sua proportione, sintque, F, & K geniti eiusdem gradus ab ipsis A, & B: erunt n extremi F, & K inter se quoque primi; & propterea o F, G, H, K minimi erunt in sua proportione, scilicet A ad B; & sic procedendum est, si plures numeri, quàm quatuor, quærantur. Et hoc erat faciendum.

h pr. 7 huius, & prop. 7. lib. 3.
i pr. 12. lib. 3.
k pr. 7. huius.
l pr. 7. lib. 3.
m prop. 6. huius.
n pr. 15. huius.
o pr. 23. huius.

PROPOS. XXV. THEOR. XVI.

Eucl. 3. VIII.

Si fuerint quotcunque numeri continuè proportionales minimi omnium, eandem cum eis rationem habentium, illorum extremi primi inter se erunt.

Sint numeri A, B, C, D minimi continuè proportionales. Dico extremos A, & D inter se primos esse. Inueniãtur a duo numeri E, F minimi in ratione A ad B, vel B ad C, &c. Deinde, vt in præcedenti factum est, reperiantur tot minimi numeri K, L, M, N in ratione E ad F, quot sunt dati A, B, C, D. Patet b esse K, & N extremos, primos inter se; & ideo erunt continuè proportionales K, L, M, N, minimi in ratione E

a pr. 16. huius.
b prop. 15 huius.

A 8	B 12	C 18	D 27
	E 2	F 3.	
K 8	L 12	M 18	N 27

ad F; erant autem A, B, C, D, minimi in ratione E ad F: Igitur singuli singulis æquales erunt (aliàs minores minimis reperirentur in eadem proportione), nimirum A æqualis erit ipsi K, & D ipsi N; ostensi autem fuerunt K, & N inter se primi. Ergo a A, & D inter se quoque primi erunt. Quod erat ostendendum.

a pr. 2 huius.

Eucl. 4. VIII.

PROPOS. XXVI. PROBL. X.

Rationibus datis quotcunque in minimis numeris, reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint primò datæ duæ rationes A ad B, & C ad D in minimis numeris. Debent reperiri tres numeri deinceps proportionales minimi in datis proportionibus. Reperiatur a numerus E minimus omnium mensurabilium ab ipsis B, & C, & quàm multiplex est E ipsius B, fiat F, tàm multiplex alterius A. Similiter D alterius G fiat eadem pars, ac est C ipsius E. Et

a pr. 17. huius.

A 2	B 3		C 4	D 5
	F 8	E 12	G 15	
	I	K	L	

quoniam b A ad F est, vt B ad E, erit permutando, c vt A ad B, ita F ad E. Pari ratione quia, vt C ad E ita est D ad G, permutando vt C ad D, ita erit E ad G; & propterea tres numeri F, E, G deinceps proportionales erunt in datis rationibus A ad B, & C ad D. Dico iam numeros F, E, G minimos esse in datis rationibus. Si enim hoc verum non est: erunt aliqui alij illis minores singuli singulis in eisdem rationibus. Ponantur esse I K, & L. Iam quia A, & B minimi sunt in sua proportione ipsi d metientur æquè numeros I, & K, eandem proportionem habentes, nimirum B ipsum K. Eadem ratione cùm C, & D sint minimi in sua proportione, seu in ea, quam habet K ad L: Igitur antecedens C antecedentem K metietur. Cùmque B & C eundem K metiantur, mensurabit e quoque eundem K numerus E, qui minimus erat omnium mensurabilium ab ipsis B, & C, quod est absurdum: Est enim K minor, quàm E. Non ergo reperiri possunt numeri alij minores ipsis F, E, G deinceps proportionales in datis rationibus; & propterea ipsimet minimi sunt in datis rationibus.

b def. 8. lib. 3.
c pr. 12. lib. 3.
d pr. 6. huius.
e prop. 18. huius.

Sint secundò datæ tres rationes A ad B, C ad D, & E ad F in mini-

minimis numeris. Inueniri debent quatuor numeri deinceps proportionales minimi in datis rationibus. Inueniantur, vt prius, tres numeri G, H, & I deinceps proportionales minimi in datis duabus rationibus A ad B, & C ad D, & *f* inueniatur numerus K minimus omnium, quos mensurare possunt numeri I, & E; & quoties I metitur ipsum K, toties G numerum L, atque H numerum M metiatur, & quoties E metitur K, toties F ipsum N metiatur. Et quoniam numeri G, H, I ipsos L, M, K eque metiuntur: erunt *g* L, M, K deinceps proportionales in datis rationibus, vt sunt G, H, I. Similiter, vt E ad F, ita erit tandem K ad N, eo quod E, F eque metiuntur ipsos K, & N: Vnde L, M, K, N deinceps proportionales erũt in datis rationibus A ad B, & C ad D, atque E ad F. Dico iam numeros L, M, K, N minimos esse in eisdẽ rationibus. Si enim hoc verum non est, sint alij numeri O, P, Q, R deinceps proportionales minimi, in datis rationibus, minores illis. Et quoniam A, B minimi sunt in sua proportione, ipsi *h* metientur æquè O, & P eandem rationem habentes. Quare B ipsũ P metietur. Eadem ratione C metietur eundem P. Cùmque B, & C metiantur numerum P, mensurabit *i* quoque H minimus, quem *k* illi metiuntur, eundem numerum P. Cùmque *l* H ad I sit, vt P ad Q; permutando *m* erit I eadem pars ipsius Q, quę H ipsius P. Cùmque E, & F minimi sint in proportione Q ad R, metietur *n* quoque E eundem Q. Quapropter duo numeri I, & E metiuntur numerum Q, & ideo *o* eundem Q metietur maior numerus K, qui minimus factus fuit omnium mensurabilium ab ipsis I, & E, quod est impossibile: Non ergo alij numeri minores ipsis L, M, K, N, sed ipsimet, minimi erunt deinceps proportionales in datis rationibus. Eodem modo procedendum est vlterius, si plures, quàm tres fuerint datæ proportiones. Et hoc erat faciendum.

A 2 B 3, C 4 D 5, E 6 F 5
G 8 H 12 I 15
L 16 M 24 K 30 N 25
O P Q R

f prop. 17. huius.
g pr. 11. & pr. 7. lib. 3.
h pr. 6. huius.
i pr. 18. huius.
k par. 1. huius pr.
l pr. 7. lib. 3.
m prop. 12. lib. 3.
n pr. 6. huius.
o prop. 18. huius.

PROPOS. XXVII. THEOR. XVII.

Eucl. 7. VIII.

Si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & primus postremi multiplex, aut pars fuerit: erit ille multiplex, vel pars quoque secundi.

Sint continuè proportionales numeri A, B, C, D, & A ipsius D multiplex, aut pars sit, veluti vnitas H pars est ipsius K, vel contrà. Dico A ipsius B partem quoque, aut multiplicem esse. Si enim A neque multiplex, neque pars conceditur numeri B: erit saltem *a* A partes ipsius B (cùm numeri sint commensurabiles saltem ab vnitate). Ponaturque E, si fieri potest, communis mensura numerorũ A, & B, & erit E minor, quàm A, & B, aliàs si vni eorum ęqualis esset, A ipsius B multiplex, aut pars esset, quod non ponitur. Et quia B ad C, atque C ad D est, vt A ad B; ponitur verò A ipsius B partes: Igitur *b* B ipsius C, atque C alterius D eædem partes erunt, atque A partes est ipsius B. Sintque F, & M ipsarum B, C, & D communes mensurę eędem, quę est E ipsorum numerorum A, & B. Et quoniam A ipsius E, atque B ipsius F ęquè multiplices sunt, erit *c* E ad F, vt A ad B, seu vt B ad C. Pari ratione erit F ad M, vt B ad C, atque C ad D; estque B ipsius C partes: Igitur *d* E ipsius F, nec non F alterius M eędem partes erunt; & propterea habebunt easdem communes mensuras, quę sint G, & N. Et, vt prius, ostendetur G ipsius N partes, sicuti E partes erat alterius F: Vnde *e* G, & N habebunt communem aliquam mensuram, sit illa O. Cùm igitur O metiatur numerum G; G verò ipsum E mensurat, atque E metitur numerum A: Igitur *f* O metitur numerum postremum A. Eadem ratione quia O metitur numerum N, N verò ipsum M, atque M ipsum D, metietur quoque O postremum D; cùmque numeri A, & D habeant O communem mensuram (quę minor erit tam ipsius A, quàm D, vt in principio huius propositionis ostensum est) erit A ipsius D partes: Facta autem fuit H ad K, vt A ad D: Igitur H ipsius K partes erit, vnitas numeri, vel numerus vnitatis, quod est impossibile. Non igitur A ipsius B partes erit; sed aut multiplex, aut pars necessariò. Quod erat ostendendum.

A 8	B 16	C 32	D 64
	E	F	M
	G	N	
		O	
H 1			K 8

a def. 3. lib. 3

b def. 8. lib. 3

c prop. 11. lib 3.

d def. 8. lib. 3.

e def. 6. lib 3

f ax. 1. lib 3

Eucl. 6. VIII.

COROLLARIVM.

Colligitur ex hac propositione, quòd, si quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & prior neque multiplex,

plex, neque pars sit secundi, neque alius quispiam eiusdem ordinis multiplex, aut pars erit postremi.

Nam in demonstratione huius propositionis positus fuit numerus A ipsius B partes tantummodo, & hinc deduximus A ipsius C, vel A ipsius D, aut B alterius D partes esse; & propterea inter se nequeunt habere eandē proportionem, quam vnitas H ad numerum k; vel contrà rationem, quam habet numerus H ad vnitatem K. Si enim A verbi gratia ad D eandem rationem haberet, quam vnitas H ad numerum K, non esset A ipsius D partes. Vnde patet propositum.

PROPOS. XXVIII. THEOR. XVIII.

Eucl. 8: VIII.

Si inter duos numeros medij continua proportione ceciderint numeri, quot inter eos medij cadunt, tot inter alios eandem cum illis rationem habentes, medij continua proportione cadent.

Inter duos numeros A, & B cadant medij proportionales continuè numeri C, D, sitque, vt A ad B, ita E ad F. Dico tot medios numeros continuè proportionales reperiri posse inter E, & F, quot inter A, & B. Sumantur a totidem numeri G, H, I, k minimi in ratione A ad C, quot sunt numeri A, C, D, B: erit b ex compositione ordinata, vt A ad B, siue vt E ad F, ita G ad k. Cùmque c G, & k sint inter se primi, eo quod sunt extremi minimorum numerorum: d erunt ipsimet in sua proportione minimi; & ideo e ęquè metietur G ipsum E, atque k ipsum F. Fiant ergo L ipsius H, atque M ipsius I tam multiplices, quàm est E ipsius G, vel F multiplex ipsius k: Igitur permutando f vt G ad H, siue vt A ad C, ita erit E ad L, atque vt H ad I, siue C ad D, ita erit L ad M; pariterque vt I ad k, siue vt D ad B, ita erit M ad F: Quare E, L, M, F continuè proportionales sunt, & eius multitudo ęqualis est multitudini A, C, D, B. Ergo tot medij continuè proportionales cadent inter E, & F, quot inter A, & B. Quod erat demonstrandum.

A 24	C 36	D 54	B 81
E 32	L 48	M 72	F 108
G 8	H 12	I 18	K 27

a pr. 24. huius.
b pr. 19. lib. 3.
c pr. 25. huius.
d pr. 6. huius.
e pr. 6. huius.
f pr. 12. & 7. lib. 3.

PRO-

Eucl. 9. VIII.

PROPOS. XXIX. THEOR. XIX.

Si duo numeri fuerint inter se primi, quot inter eos medij cõtinua proportione cadunt, tot inter vtrunque eorum, & vnitatem medii continua proportione cadent.

Inter primos numeros A, & B cadant C, D medij in continua proportione, sitque X vnitas. Dico tã inter X, & A, quàm inter X, & B cadere tot numeros medios proportionales in continua ratione, quot inter A, & B cadunt. Inueniantur a duo numeri E, F minimi in ratione A ad C, & b sumantur in eadem proportione tres numeri G, H, I, deinde quatuor K, L, M, N, quousque multitudo postremorum numerorum ęqualis sit multitudini A, C, D, B. Quoniam A, B extremi inter se sunt primi, erunt c A, C, D, B, minimi in proportione E ad F; sed totidem sunt K, L, M, N facti in eadem proportione minimi: Ergo singuli K, L, M N, ęquales sunt singulis A, C, D B, scilicet K ipsi A, & N ęqualis ipsi B; cùm minores minimis dari non possint. Et quia, vnitas X ad E (vt in constructione 25. huius dictum est) est vt E ad G, & ita G ad K; erunt X, E, G, K continuè proportionales. Simili ratione X, F, I, N continuè proportionales erunt; estque tam multitudo X, E, G, K, quàm X, F, I, N, ęqualis multitudini K, L, M, N, vel A, C, D, B, vt constat ex 25. prop. huius. Igitur tot cadent medij continuè proportionales inter vnitatem X, & numerum K, seu ei ęqualem A, & inter vnitatem X, & numerum N, siue sibi ęqualem B, quot inter numeros A, & B cadunt. Et hoc erat ostendendum.

a pr. 16. huius. b prop. 24. huius. c pr. 23. huius.

A 8 C 12 D 18 B 27
K 8 L 12 M 18 N 12
G 4 H 6 I 9
E 2 F 3
X 1

Eucl. 10. VIII.

PROPOS. XXX. THEOR. XX.

Si ab vnitate duo ordines numerorum continuè proportionalium fuerint, & multitudine ęqualium, quot inter vtrunque extremum, & vnitatem medij continua proportione cadunt, tot inter extremos medij continua proportione cadent in ratione, quam habent numeri vnitati proximi.

Inter

Inter vnitatem X, & numerum A cadant medij proportionales C, D atque inter X, & B totidem medij sint proportionales E, F. Dico inter A, & B tot medios numeros proportionales cadere in eadem ratione C ad E, quot inter A, & X. Vt vnitas X ad C, ita fiat E ad G; & G ad H, atque F ad L. Quoniam vt X ad C, ita supponitur esse C ad D, estque E ad G, vt X ad C: Igitur *a* C ad D est, vt E ad G. Et permutando *b* vt C ad E, ita est D ad G. Rursus quoniam X ad C, est vt E ad G, erit permutando, vt X ad E, ita C ad G; atque vt X ad E ita ponitur E ad F: Ergo *c* C ad G est, vt E ad F: Et rursus *d* permutando vt C ad E, ita est G ad F: Quare tres numeri D, G, F continuè proportionales sunt in ratione C ad E, & sunt totidem quot sunt X, C, D. Deinde quoniam, vt X ad C, ita ex hypothesi est D ad A, & vt eadem vnitas X ad eundem numerum C, ita erat ex constructione G ad H, atque F ad L: Igitur *e* veluti D, G, F proportionales sunt continuè, ita erũt A, H, & L. Tandem quia erat vt X ad C, ita F ad L; *f* Ergo permutando X ad F erit, vt C ad L.

a pr. 7. lib. 3 *b pr. 12 lib. 3.* *c pr 7. lib. 3* *d pr. 12. lib. 3.* *e def. 9. & pr. 7 huius.* *f pr. 12. lib. 3.*

Rursus quia, vt X ad E, ita erat F ad B; erit permutando X ad F, vt E ad B; & propterea *g* vt C ad E, ita erit L ad B: Quare numeri A, H, L & B cõtinuè proportionales sunt in ratione C ad E; & eorum multitudo æqualis est multitudini X, C, D, A; & sic vlterius si plures fuerint. Quare inter A, & B tot medij proportionales cadũt H, & L, quot sũt C, & D inter X, & A; siue E, & F inter X, & B. Quod erat ostendendum.

A 27	H 36	L 48	B 64
	D 9	G 12	F 16
	C 3	E 4	
	X 1		

g def 9. & pr. 7. huius.

PROPOS. XXXI. THEOR. XXI.

Eucl. 5. VIII.

Plani numeri rationem habent compositam ex duabus rationibus laterum. Et solidi numeri rationem habent compositam ex tribus rationibus laterum, & antecedentia sunt eiusdem plani, aut solidi latera.

Sit numerus A planus, genitus ex D ducta in C, idest sit vnitas X ad D, vt C ad A, atque numerus B genitus ex ductu H in E. Dico rationem plani A ad planum B compositã esse ex rationibus C ad E, & D ad H. Sic enim antecedentia erunt latera eiusdem plani. Fiat E ad G, vt est vnitas X ad D. Et quia eadem D ducta in C, & E gignit numeros A, & G:

A 6	G 12	B 20
C 2		E 4
D 3		H 5
	X 1	

a pr. 7 huius. b pr. 7. huius c pr. 19. & 7. lib. 3.

& G: erit a A ad G, vt C ad E. Rursus quia D, & H ductæ in eãdem E efficiunt G, & B, erit b G ad B, vt D ad H. Habet c verò A ad B proportionem compositam ex ratione A ad G, seu C ad E, & ex ratione G ad B, seu D ad H. Igitur proportio A ad B componitur ex ratione lateris C ad latus E, & ex ratione lateris D ad latus H.

d def. 9. huius.

Secundò sit A numerus genitus ex ductu trium laterum C, D, & E, ita vt ex C in D fiat M, atque ex ductu E in M fiat A; sitq; pariter B factus ex ductu triũ laterũ F, G, & H, ita vt sit X ad G, vt F ad O; atque vt X ad H, ita fiat O ad B. Dico rationem A ad B compositam esse è tribus rationibus laterum C ad F, & D ad G, atque E ad H. Fiat d N ex D in F, & ex ductu E in N fiat R, pariterque ex ductu E in O fiat S; erit e M ad N, vt C ad F, & N ad O erit, vt D ad G; estque f A ad R, vt M ad N, cùm ex ductu E in M, & N fiant A, & R; igitur g A ad R est, vt C ad F. Pari ratione R ad S erit, vt N ad O, siue vt D ad G. Tandem quia duę E, & H ductę in eãdem O efficiunt S, & B: erit h S ad B, vt latus E ad H. Cùmque i proportio A ad B componatur ex rationibus A ad R, R ad S, atque S ad B: erit quoque proportio A ad B composita ex rationibus C ad F, D ad G, & E ad H, & sic vlterius si plura fuerint latera, producentia numeros A, & B. Quod erat ostendendum.

e par. 1. huius pr. f pr. 7. huius g pr. 7. lib. 3 h pr. 7 huius i pr. 19. lib. 3

A 48	R 96	S 160	B 140
	M 6	N 12	O 20
C 2			F 4
D 3			G 5
E 8			H 7
	X 1		

Eucl. 11. 12. VIII.

PROPOS. XXXII. THEOR. XXII.

Inter duos numeros quadratos vnus medius proportionalis cadit, atque inter duos cubos duo numeri medij proportionales intercedunt in continua proportione laterum.

a pr. 16. & 24. huius. b pr. 19. lib. 3.

Sit primò quadratus numerus A genitus ex multiplicatione lateris C in se ipsum, atque quadratus numerus B sit genitus ex multiplicatione lateris D in D. Dico inter numeros A, & B cadere vnum numerum medium proportionalem. Reperiantur a tres numeri M, N, O, continuè proportionales minimi in ratione lateris C ad D. Quoniam b numerus M ad O proportionem habet compositã ex ratione M ad N, & N ad O, estque M ad N, atque N ad O, vt latus C ad D: Igitur proportio

portio numeri M ad O composita est ex ratione C ad D, & ex altera ratione eiusdem C ad D; Est verò c proportio numeri plani A ad planum B composita ex ratione lateris multiplicati C in multiplicatum D, atque ex ratione lateris multiplicantis C in multiplicantem D: Igitur d vt M ad O, ita est A ad B; cadit vero inter M, & O vnus medius proportionalis numerus, nempe N in continua proportione C ad D: Igitur e inter A, & B vnus medius proportionalis numerus cadet, qui sit E, in continua ratione lateris C, ad D; eruntque propterea A, E, B, continuè proportionales in ratione laterum C ad D.

A 16	E 24	B 36
C 4		D 6
M 4	N 6	O 9

c pr. 30. huius.

d cor. 3. pr. 19. lib 3.

e pr. 29. huius, & cor. 3. pr. 19. lib. 3.

Secundò sit A numerus cubus, genitus ex multiplicatione lateris C ter in se ipsum ducti, pariterque cubus numerus B genitus sit ex multiplicatione lateris D ter in se multiplicati. Dico inter A, & B duos medios proportionales numeros cadere. Reperiantur f quatuor numeri M, N, O, R continuè proportionales minimi in ratione lateris C ad D; Erit g igitur proportio M ad R triplicata proportionis M ad N, seu C ad D; idest composita erit ex tribus rationibus lateris C ad D: Est verò h proportio solidi numeri A ad solidum B composita ex eisdem rationibus laterum, scilicet ex tribus rationibus lateris C ad D: Igitur i tam proportio M ad R, quàm numeri A ad B triplicata est eiusdem proportionis lateris C ad D; ideoque k vt M ad R, ita erit numerus A ad B; sed inter numeros M, & R duo medij proportionales numeri cadunt, nempe N, & O. Igitur l inter A, & B duo numeri pariter medij continuè proportionales intercedent, qui sint E, & F in continua proportione lateris C ad D. Quod erat ostendendum.

A 64	E 96	F 144	B 216
C 4			D 6
M 8	N 12	O 18	R 27

f pr. 16. & 24. huius.

g pr. 19. lib. 3.

h pr. 32. huius.

i pr. 19. lib. 3.

k cor. 3. pr. 19. lib. 3.

l pr. 29. huius, & cor. 3. pr. 19. lib. 3.

COROLLARIVM.

Eucl. 13. VIII.

Hinc deducitur, quòd si quotlibet numeri proportionales fuerint, erunt potestates eiusdem gradus proportionales quoque. Nam si trium proportionalium numerorum A, B, C sint D, E, F potestates eiusdem gradus, idest aut omnes quadrati, aut cubi, &c. erunt proportiones D ad E,

	X	
A	B	C
D	E	F

& E ad F duplicatæ, vel triplicatę sim ilium proportionum A ad B, & B ad C; & propterea m D, E, F proportionales erunt.

m cor. 9. pr. 19 lib. 3.

Eucl. 18. 19 VIII.

PROPOS. XXXIII. THEOR. XXIII.

Inter duos numeros planos similes vnus medius numerus proportionalis cadit in continua proportione laterum homologorum. Et si inter duos numeros vnus medius proportionalis ceciderit: illi erunt plani numeri similes.

Sint primò duo numeri A & B plani similes, idest A genitus sit ex multiplicatione laterum C, & D, atque B sit genitus ex multiplicatione laterum E in F, sitque C ad D in eadem proportione, quam E habet ad F (sic a enim plani numeri similes erunt). Dico inter A, & B vnum medium proportionalem numerum cadere in continua proportione lateris C ad eius homologũ E. Reperiantur b tres numeri M, N, & O minimi in continua proportione lateris C ad E. Et quia C ad D est, vt E ad F: Ergo c permutando C ad E erit, vt D ad F; Et est d proportio numeri M ad O duplicata proportionis M ad N, seu duplicata ipsius C ad E, vel D ad F; atq; proportio e plani numeri A ad planum B composita est ex ratione lateris C ad E, atque D ad F, seu f duplicata rationis C ad E; Igitur tam proportio numeri A ad B, quàm M ad O duplicata est eiusdem proportionis C ad E; & propterea, g vt M ad O, ita erit A ad B; cadit autē inter numeros M, & O vnus medius proportionalis, nempe N. Igitur h inter numeros A, & B vnus medius proportionalis cadit numerus, qui sit G in continua proportione lateris C ad E.

A 6	G 12	B 24
C 2		E 4
D 3		F 6
M 2	N 4	O 8

a def. 21. huius.
b pr. 16 & 24. huius.
c pr 12. lib 3
d pr. 19. lib. 3.
e pr. 32. huius.
f pr. 19. lib. 3
g cor. 3. pr. 19. lib 3.
h pr 20. huius, & cor. 3 pr. 19. lib 3.

Secundò inter numeros A, & B cadat vnus numerus medius proportionalis G. Dico numeros A, & B similes esse. Reperiantur i duo numeri C, & E minimi in ratione A ad G, vel G ad B: erunt k C, & E primi inter se; & ideo l ęquè metientur numeros eandem cum illis rationem habentes; scilicet toties C ipsum A metietur, quoties E ipsum G. pariterque toties C mensurabit ipsum G, quoties E metitur B: Vnde idem numerus E mensurabit tam numerum G, quàm B.

i pr. 16. huius.
k pr 6. huius
l prop 6. huius.

Fiat

Fiat ergo D tam multiplex vnitatis quàm G multiplex est ipsius E, atque F fiat tam multiplex eiusdem vnitatis, quam B multiplex est eiusdem E. Quapropter m vt numerus D, multiplicans ad multiplicantem F, ita erit G ad B; sed vt G ad B, ita erat A ad G, atque C ad E erat, vt A ad G: Igitur n vt C ad E, ita erit D ad F. Et quia C ad E est, vt A ad G, permutando o C ad A erit, vt E ad G; sed E ad G est, vt vnitas ad numerum D: Igitur vt vnitas ad numerum D, ita erit C ad A. Quare p C, & D erunt latera, ex quibus gignitur planus numerus A; pariterque E, & F erunt latera plani numeri B. Suntque ostensa prędicta latera proportionalia. Igitur q plani numeri A, & B similes inter se sunt. Quod erat ostendendum.

A 8	G 12	B 18
C 2		E 3
D 4		F 6

m def. 9. & pr. 7. huius.
n pr. 7. lib. 3
o pr. 12. lib. 3.
p def. 9. huius.
q def. 12. huius.

PROPOS. XXXIV. THEOR. XXIV.

Eucl. 19. 21 VIII.

Inter duos numeros solidos inter se similes duo medij proportionales cadunt in continua proportione laterum homologorum. Et si inter duos numeros duo medij proportionales ceciderint, erunt illi similes solidi.

Sint numeri C, D, E latera numeri solidi A, & ex trium laterum F, G, H multiplicatione producatur numerus solidus B; sitque vt C ad D, ita F ad G, atque vt D ad E, ita G ad H (sic enim a solidi A, & B similes sunt). Dico inter A, & B duos medios proportionales cadere in proportione continua laterum homologorum C ad F, vel D ad G, aut E ad H. Reperiantur b quatuor numeri M, N, O, R minimi in continua proportione lateris C ad F. Patet c proportionem M ad R triplicatam esse vnius rationis M ad N, vel C ad F; Est verò d proportio A ad B composita ex rationibus laterum C ad F, D ad G, atque E ad H, suntque hę tres proportiones eędem: Igitur e proportio A ad B pariter triplicata est eiusdem rationis C ad F; & propterea vt M ad R, ita erit A ad B. Quare f inter A, & B duo medij numeri proportionales cadent nempe P & Q, veluti inter M, & R cadunt duo medii proportionales N, & O in ratione C ad F.

A 64	P 96	Q 144	B 216
C 2			F 3
D 4			G 6
E 8			H 12
M 8	N 12	O 18	R 27

a def. 12. huius.
b pr. 16. & 24. huius.
c pr. 10. lib. 3.
d pr. 31. huius.
e pr. 19. lib. 3.
f pr. 19. huius, & cor. 3 pr. 19. lib. 3.

Quare A, P, Q, B continuè proportionales erunt in ratione lateris C ad eius homologum F.

Secundò inter numeros A, & B cadant duo medij proportionales P, & Q. Dico A, & B similes solidos numeros esse. Reperiantur g duo numeri E, & H minimi in proportione A ad P: erunt h igitur E, & H primi inter se, & propterea ęquè metietur numeros eandem cum eis rationem habentes. Vnde quoties E metitur ipsum A, toties H metietur ipsum P; Similiter toties E metietur numerum P, quoties H mensurat ipsum Q: pariterque toties E mensurabit numerum Q, quoties H mensurat numerum B. Fiat igitur vnitas X ad I, vt est E ad A, atque X ad L fiat, vt E ad P: pariterque X ad k fiat vt E ad Q. Manifestum i est multiplicantes numeros I, L & k continuè proportionales esse in eadem ratione, in qua sunt A, P, & Q. Cumque inter I, & k cadat L medius proportionalis: erunt k I, & K numeri plani similes; & propterea l duo latera, ex quorum multiplicatione generatur numerus I, quę sint C, & D proportionalia erunt duobus lateribus, ex quibus procreatur numerus planus K, quę sint F, & G; eritque latus C ad eius homologum F, vt D ad G, siue vt I ad L, vel vt A ad P, vel vt E ad H. Et quoniam ex mutua multiplicatione trium laterum C, D, E gignitur numerus A, eo quod ex C in D efficitur planus numerus I, atque ex numero E in I ducto efficitur numerus A, pariterque ex mutua multiplicatione laterum F, G, & H procreatur numerus solidus B; estque proportio lateris C ad F, vt D ad G, & vt E ad H, siue vt A ad P: Igitur m solidi numeri A, & B similes erunt inter se. Quod erat ostendendum.

A 64	P 96	Q 144	B 216
	I 32	L 48	K 72
C 8			F 12
D 4			G 6
E 2			H 3
	X 1		

g pr. 16 huius.
h prop. 6. huius.
i def. 9. & pr. 7. huius.
k pr 33 huius
l def. 12. huius.
m def. 12. huius.

Eucl. 14. 15. 16. 17. VIII

PROPOS. XXXV. THEOR. XXV.

Si quadratus numerus quadrati numeri, vel cubus numerus cubi numeri multiplex aut pars, vel partes tantùm fuerit: erit quoque latus lateris multiplex, aut pars, vel solummodo partes. Si verò latus lateris multiplex, vel pars, aut partes tantùm fuerit: erit quoque quadratus numerus quadrati, vel cubus cubi numeri multiplex, aut pars, partesue.

Sint

Sint primò A, B duo numeri quadrati, quorum latera C, D, atque A ipsius B multiplex sit. Dico C ipsius D multiplicem esse. Quoniam a inter numeros quadratos A, & B vnus medius proportionalis cadit, qui sit E, atque est A ad E, & E ad B, vt latus C ad D; & ponitur A multiplex postremi B: erit b quoque A multiplex secundi E. Quare c C ipsius D multiplex quoque erit, cùm sit C ad D, vt A ad E.

A 16	E 8	B 4
C 4		D 2

a pr. 32. huius.

b pr. 27. huius.

c def. 8. lib. 3.

Sint secundò A, & B numeri cubi, quorum latera C, & D; sitque A multiplex ipsius B. Dico C ipsius D multiplicem quoque esse. Nam d inter numeros cubos duo medij proportionales cadunt, qui sint E, F in ratione laterũ C ad D; ponitur verò A ipsius B multiplex: Igitur e erit A ipsius E; siue C ipsius D multiplex quoque. Pari ratione, cùm A ipsius B pars supponitur, sequitur quoque, eadem ratione latus C ipsius D partem esse: & è conuerso, cùm latus C ipsius D pars supponitur, est quoque numerus A pars postremi B.

A 64	E 32	F 16	B 8
C 4			D 2

d pr. 32. huius.

e pr. 27. huius, & def. 8 lib. 3.

Tandẽ numerus quadratus A quadrati numeri B, vel cubus cubi sit tantũmodo partes; idest neque multiplex, neque pars illius sit. Pari ratione inuentis medijs proportionalibus: f erit primus A secundi E partes tantummodo; & propterea C ipsius lateris D partes solummodo erit. Et contra cùm latus C ipsius D neque multiplex, neque pars supponitur: erit necessariò A ipsius secundi E partes tantummodo; & ideo erit prior numerus A postremi B partes tantummodo. Quę erant ostẽdenda.

f cor pr. 27. huius.

PROPOS. XXXVI. THEOR. XXVI.

Si ab eodem numero ad duos alios extremos vel ad numerum, & vnitatem continuentur ęquales multitudines proportionalium numerorum: inter extremos totidem medij cõtinua proportione cadent numeri.

Inter numerum A, & C intercedant medij continua proportione D & E, atque inter numerum, vel vnitatem B, & eundem numerum C totidem interponantur numeri F, G medij continua proportione. Dico inter A, & B tot numeros medios continua proportione cadere, quot inter A, & C, vel inter

a pr. 16. & 24. huius. inter B, & C interponuntur. Reperiantur a tres minimi numeri K, L, M in ratione E ad G; & ratio D ad E, vel E ad C vocetur X, & proportio C ad G, vel ei similis G ad F vocetur Z. Et quia b proportio D ad F componitur ex rationi-
b pr. 19. lib. 3. bus D ad C, & C ad F, estque ratio D ad C duplicata rationis D ad E, seu X, & proportio C ad F duplicata rationis C ad G,
c pr. 19 lib. 3. seu Z; ergo c proportio D ad F componitur ex his rationibus
d cor. 1. pr. 21. lib. 3. X, X, Z, Z; sed d quocunque ordine prædictæ proportiones disponantur, semper componunt eandem proportionem: Ergo proportio D ad F composita erit ex rationibus X, Z, X, Z;
e pr. 19 lib. 3. idest ex duabus proportionibus e similibus, quarũ singulę ex rationibus X, Z componuntur; & propterea proportio D ad F duplicata erit rationum X, Z; sed E ad G componitur ex rationibus E ad C, & C ad G, scilicet ex rationibus X, & Z: Ergo D ad F proportionem duplicatam habet rationis E ad G; erat autem proportio K ad M duplicata rationis E ad G: Er-
f cor. 3. pr. 19 lib. 3. go f vt K ad M; ita est D ad F; cadit
g pr. 28. huius. verò inter K, & M vnus medius proportionalis L: Igitur g inter D, & F

A 27	O 9	P 3	B 1
	D 18	N 6	F 2
	E 12	G 4	
		C 8	
	K 9	L 3	M 1

vnus medius proportionalis cadet. Simili ratione inter numeros A, & B duo medij proportionales cadent in ratione E ad G; Quod erat, &c.

Eucl 22. 23. VIII.

COROLLARIVM.

Facilè colligitur, quòd si tres numeri proportionales fuerint, at primus sit quadratus, erit tertius quadratus quoque. Et si quatuor numerorum continuè proportionalium prior sit cubus, erit quartus cubus quoque. Nam trium proportio-
h def. 10. huius. nalium O, N, G, si G quadratus fuerit, h interponetur inter vnitatẽ B, & numerum G vnus medius proportionalis F; & ideo
i def. 10. huius. ex hac propositione inter extremũ O, & vnitatẽ B vnus quoq; numerus medius proportionalis intercadet, & propterea i O quadratus erit. Si verò quatuor cõtinuè proportionaliũ C, E,
k def. 11. huius. D, A prior C fuerit cubus k interponentur inter cubum C, & vnitatem B duo medij continuè proportionales, quot nimirum inter C, & A interponuntur. Igitur ex hac propositione
l def. 11. huius. inter vnitatem B, & numerum A duo medii quoque in continua proportione cadent; ideoque l numerus A cubus erit.

PRO-

PROPOS. XXXVII. THEOR. XXVII.

Eucl 24, 26. 25 & 27. VIII

Si duo numeri inter se eandem rationem habuerint, quam duo numeri quadrati, erunt aut ambo quadrati, aut ambo similes plani numeri; Et duo numeri plani similes, sunt inter se, vt duo numeri quadrati; At numeri eãdem rationem habentes, quam duo cubi numeri, erunt, aut ambo cubi, aut similes numeri solidi; Et si numeri solidi similes fuerint, erunt, vt duo cubi numeri.

Sit primò numerus A ad B in eadem ratione, quam habet numerus quadratus C ad quadratum D. Dico A, & B quadratos esse, aut similes planos. Quoniam inter *a* quadratos numeros C, & D vnus medius proportionalis cadit, nempe E; estque A ad B, vt C ad D: *b* Igitur inter A, & B vnus medius proportionalis numerus cadet, qui sit F. Quare erunt tres numeri continuè proportionales A, F, B, & ideo si A quadratus est, *c* erit quoque B quadratus; sin minùs, *d* erunt A, & B similes numeri plani.

A 8	F 12	B 18
N 2		O 3
C 4	E 6	D 9

a prop. 32. huius.
b prop. 28. huius.
c cor. prop. 36. huius.
d prop. 33. huius.

Secundò sint A, & B similes numeri plani, quorum latera homologa N, & O; & fiant C, D quadrata laterum N, & O. Dico A ad B esse, vt C ad D. Quoniam *e* tam proportio quadratorum C, D, quàm similium *f* planorum A, B duplicata est rationis laterum N ad O; Ergo *g* A ad B est, vt C ad D.

e prop. 32. huius.
f prop. 33. huius.
g cor. 3. pr. 19. lib 3.

Tertiò sit numerus A ad B in eadem ratione, quam habet cubus numerus C ad cubum D. Dico A, & B esse cubos, vel solidos numeros similes. Quoniam *h* inter duos cubos numeros C, & D cadunt duo medij proportionales, nempe E, & F; estque A ad B, vt C ad D. *i* Igitur inter A, & B duo medij proportionales numeri cadunt, qui sint G, & H; & propterea erunt quatuor numeri continuè proportionales A, G, H, B; vnde quando prior A cubus est, erit *k* quoque postremus numerus B cubus, vel *l* saltem A, & B similes plani erunt.

A 16	G 24	H 36	B 54
N 2			O 3
C 8	E 12	F 18	D 27

h prop. 32. huius
i prop. 28. huius.
k cor. prop. 36 huius.
l prop. 34. huius.

Quartò sint A & B numeri solidi similes, quorum homologa latera N, & O, & fiant laterum N, & O cubi numeri C, & D. Dico A ad B esse, vt C ad D. Quoniam *m* tam proportio

m prop. 32 huius.

tio

n prop. 34. huius. o cor. 3. pr. 19. lib. 3. tio cuborum numerorum C, D, quam n similium solidorum numerorum A, B triplicata est eiusdem rationis laterum N ad O. Ergo o numerus A ad B eandē rationem habet, quam numerus cubus C ad numerum cubum D. Quę erant ostendenda.

COROLLARIVM.

Manifestum est, quòd duorum numerorum, si vterque primus sit, ipsi non erunt inter se, vt duo numeri quadrati: Nam si primus numerus A ad numerum primum B esset, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, saltem ex hac propositione numeri A, & B essent plani similes; & ideo inter p eos vnus medius proportionalis caderet, nempe C; Cùmque trium numerorum proportionalium A, C, B extremi A, & B sint primi, & ideo q primi inter se; cadet r inter vtrunque eorum, & vnitatem X vnus medius proportionalis numerus D, atque F: & ideo s A, & B numeri quadrati essent; & propterea mensurabiles à suis lateribus D, & F, quod est absurdum: erat t enim vterque numerus primus.

A 7 C B 5
D F
X 1

p prop. 33. huius. q pr. 4. huius. r prop. 29. huius. s def. 10. huius. t pr. 1. huius.

Eucl. 1. 2. IX.

PROPOS. XXXVIII. THEOR. XXVIII.

Ex multiplicatione duorum planorum numerorū similium, efficitur quadratus numerus. Et duo latera, quadratum efficientia, erunt numeri plani similes.

Sint numeri A, & B similes plani, & ex A multiplicato in B fiat numerus C. Dico C quadratum esse. Ex A in se fiat a numerus quadratus D. Et quia A, multiplicans numeros A, & B producit numeros D, & C, b erunt producti D, & C inter se, vt multiplicati A, & B; sed c inter A, & B cadit vnus medius proportionalis, eo quod sunt plani similes; Ergo d inter D, & C vnus medius proportionalis cadet, qui sit E: Cùmque D, E, C continuè proportionales sint, & prior D quadratus sit, erit e postremus numerus C quadratus quoque.

A 6 H 24 B 96
D 36 E 144 C 576

a def. 10. huius. b pr. 7. huius. c prop. 33. huius. d prop. 28. huius. e cor prop. 36. huius.

Secūdò ex multiplicatione numeri A in B producatur quadratus

dratus

dratus numerus C. Dico A, & B similes planos esse. Fiat *f* rursus ex A in se quadratus numerus D: Erit igitur *g* quadratus numerus D ad quadratum C, nempe producti in eadem proportione, quam multiplicati A ad B, sed *h* inter quadratos D, & C cadit vnus medius proportionalis: Igitur inter A, & B vnus medius proportionalis cadet qui sit H; ideoque *i* numeri A, & B similes plani erunt. Quod erat ostendendum.

f def. 10 huius. g pr. 7. huius. h prop. 32. huius. i pr. 37. huius.

COROLLARIVM.

Constat numerum productum ex multiplicatione duorum quadratorum, quadratum esse; eo quod quadrati numeri plani similes sunt.

PROPOS. XXXIX. THEOR. XXIX.

Eucl. 3. 4. 5. 6. IX.

Numerus productus ex multiplicatione cubi numeri in se ipsum, vel in alium cubum, erit quoque cubus numerus. Et si ex multiplicatione alicuius numeri in se ipsum, vel in aliquem cubum numerum procreatur numerus cubus, & ille cubus erit.

Sit primò numerus A cubus, & vt vnitas X ad A, ita fiat A ad B. Dico numerum B productum ex A in se cubum esse. Sit C latus cubi A, & *a* ex C fiat numerus D; Erit igitur D quadratus numeri C; ideoque *b* ex multiplicatione numeri C in D efficietur numerus cubus A; Quare vnitas X, & C, D, A continuè proportionales sunt. Estque vnitas X ad A, vt numerus A ad B; Igitur *c* inter A, & B duo medij proportionales E, F cadent, quot sunt numeri C, & D medij in continua proportione inter X, & A positi: Cùmque A, E, F, & B continuè proportionales sint, sitq; prior A numerus cubus, erit *d* quartus B cubus quoque.

A 8	E 16	F 32	B 64
	D 4		
	C 2		
	X 1		

a def. 9. & 10. huius. b def. 11. huius. c prop 28. huius. d cor. prop. 36. huius.

Secundò ex multiplicatione cubi numeri A in numerum cubum B fiat numerus C. Dico productum numerum C cubum esse. Rursus ex *e* A cubo in se ipsum fiat numerus D: Erit igitur *f* D cubus: Et quoniam idem numerus A multiplicans duos numeros A, & B efficit duos nu-

A 8	B 27
D 64	C 216

e def. 11. huius. f par. 1. huius pr.

g pr. 9. huius meros D & C, erit g productus numerus D ad C, vt multipli-
h prop. 32. huius. catus A ad multiplicatum B; sed h inter A, & B duo medij
proportionales cadunt, cùm sint A, & B cubi: Igitur i inter D,
i prop. 28. huius. & C cadent quoque duo medij numeri proportionales. Estq;
k cor. prop. 36. huius. prior numerus D cubus: Quare k postremus C cubus erit.

Tertiò ex multiplicatione numeri A in numerum cubum B fiat numerus cubus C. Dico numerum multiplicantem A cubum quoque esse.

A 27 B 8
C 216 D 64

l def. 9. huius. Fiat l numerus D ex multiplicatione cubi numeri B in se ipsum. Constat, ex prima parte, D cubum esse; Et quoniam B multiplicans se ipsum, &
m pr. 7. huius. numerum A, efficit duos numeros D, & C: erit m D ad C, vt
B ad A; sed n inter duos cubos numeros D, & C duo medij
n prop. 32. huius. numeri proportionales cadunt: Igitur o inter A, & B duo quo-
que medij proportionales cadent: Cùmque prior B cubus sit:
o prop. 28. huius. erit p postremus A cubus.

p cor. prop. 36. huius. Quartò numerus A, se ipsum multiplicans, efficiat numerum cubum B. Dico A cubum esse. Fiat q ex multiplicatione
q def. 9. huius. numeri A in B ipse numerus C; Constat r numerum C cubum
esse, eo quod inter vnitatem, & numerum C duo medij pro-
r def. 11. huius. portionales cadunt A, & B: Et quia

X 1 A 8 B 64 C 512

s par. 3. huius pr. cubus numerus B, multiplicans numerum A efficit cubum numerum C: erit s numerus A cubus. Et hęc omnia ostendenda erant.

Eucl. 8. IX.

PROPOS. XL. THEOR. XXX.

Si ab vnitate fuerint quotcunque numeri continuè proportionales, tertius ab vnitate quadratus est, & vnum intermittentes, omnes; quartus autem est cubus, & duos intermittentes, omnes: Septimus verò cubus simul, & quadratus, & quinque intermittentes, omnes.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri A, B, C, D, E, F, &c. continuè proportionales. Dico primò tertium ab vnitate, qualis est B esse quadratum, & vnum intermittentes, omnes, quales sunt D, F, &c. Quoniam, vt vnitas X ad latus A, ita est
A ad B, a erit B numerus quadratus; Et quoniam tres numeri
a def. 10. huius. B, C, & D continuè proportionales sunt, & est prior B qua-
b cor. prop. 36. huius. dratus, b erit posterior D quadratus quoque. Similiter F tertius à numero quadrato D, erit quoq; quadratus, & sic reliqui omnes.

Secundò

Secundò dico numerum C quartum ab vnitate cubum esse, & duos intermittentes, omnes, vt est numerus F, &c. Quoniam vt vnitas X ad A, ita est A ad B, & ita B ad C, c erit C cubus genitus ex triplici multiplicatione lateris A; Cumque inter C, & F intercedant duo medij proportionales D, & E, sitque prior C ostensus cubus, d erit quartus F proportionalis cubus quoque.

X. A 2 B 4 C 8
D 16
F 32
F 64 M

c def. 11. huius.
d cor. prop. 30. huius.

Tertiò dico septimum ab vnitate, veluti est F, cubum simul, & quadratum esse, & sic quinque intermittentes, omnes. Quoniam e numerus F septimus ab vnitate ostensus est quadratus, & similiter f F cubus ostensus est. Igitur F cubus simul, & quadratus est. Continuentur postea post numerum F sex alij numeri continuè proportionales in eadem ratione, in qua est X ad A, vel A ad B, ita vt inter F, & postremum M quinque medij numeri proportionales intercedant; propterea, quia M septimus est ab ipso numero F, erit g quadratus, & similiter cubus. Quare patet propositum.

e par. 1. huius pr.
f par. 2. huius pr.
g par. 1. & 2 huius pr.

PROPOS. XLI. THEOR. XXXI.

Eucl. 9. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, & qui est post vnitatem sit quadratus, erunt reliqui omnes quadrati; At si ille, qui est post vnitatem, sit cubus, reliqui omnes cubi erunt.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò sit numerus A proximus vnitati quadratus. Dico reliquos omnes quadratos esse. Quoniam a tertius ab vnitate, vt est B, & vnum intermittentes, omnes, vt D, & F quadrati ostensi sunt; & ponitur A quadratus, atque tres numeri A, B, C continuè proportionales: Igitur b tertius C quadratus quoque erit: Similiter E tertius post quadratum C, erit quoque quadratus, & sic reliqui omnes quadrati erunt.

X 1 A 4 B 16 C 64
D 256
E 1024
F 4096

a pr. 40. huius.
b cor. prop. 30. huius.

Secùdò sit A proximus vnitati cubus. Dico reliquos omnes cubos esse. Quoniam vt vnitas X ad A, ita est A ad B: c Igitur ex multiplicatione cubi A in se ipsum efficietur numerus cu-

c prop. 39. huius.

bus B. Rursus quia numerus C quartus proportionalis ab vnitate producitur ex multiplicatione numeri A in B, suntque A, & B cubi; Igitur [d] productus C cubus quoque erit. Similiter quia vt vnitas X ad A, ita est C ad D; erit [e] productum ex secundo A in tertium C æquale producto ex vnitate X in quartum D; propterea numerus D producetur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum C; & propterea [f] D cubus erit. Simili ratione numerus E producitur ex multiplicatione cubi numeri A in cubum numerum D; & propterea productus E cubus quoque erit, & sic reliqui omnes. Quare patet propositum.

d prop. 39. huius.

e pr. 8. huius

f prop. 39. huius.

X 1 A 8 B 64 C 512
D 4096
E 32768
F 262144

Eucl. 10. IX.

PROPOS. XLII. THEOR. XXXII.

Si fuerint ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales, & vnitati proximus non sit quadratus, neque alius vllus quadratus erit præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. At si proximus vnitati non sit cubus, neque vllus alius præter quartum ab vnitate, & duos intermittentes, omnes, cubus erit.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F, &c. Et primò, proximus vnitati A, non sit quadratus. Dico neque alium vllum quadratum esse præter tertium ab vnitate, & vnum intermittentes, omnes. Si enim hoc verum non est, sit numerus C, si fieri potest, quadratus; Cùmque [a] numerus B sit quadratus, cùm tertius sit ab vnitate, pariterque D quadratus sit, cùm tertius sit à quadrato numero B, sitque C ad D, vt A ad B, erit [b] inuertendo B ad A, vt D ad C: Quare numerus B ad A eandem proportionem habet, quam quadratus numerus D ad quadratum numerum C, estque B quadratus; Igitur [c] numerus A, proximus vnitati, quadratus quoque erit, quod est contra hypothesin: Non igitur numerus C quadratus erit; & sic reliqui alij in locis paribus positi.

a prop. 40. huius.

b pr. 9. lib. 3

c cor. prop. 36. huius.

X 1 A 3 B 9 C 27
D 81
E 243
F 729

Secundò sit A, proximus vnitati, non cubus. Dico nullum alium esse cubum præter quartum ab vnitate, & duos intermitten-

mittententes, omnes, vt sunt C, F, &c. Si enim hoc verum
non est sit D cubus, si fieri potest. Et quia *d* vt A ad cubum numerum C, ita est D ad F (cùm inter eos singuli medij proportionales intercedant) habebit *e* inuertendo cubus C ad A eandem proportionem, quam cubus numerus F ad cubum numerum D; & propterea *f* numerus A vnitati proximus cubus quoque erit, quod est contra hypotsin: Non igitur numerus D cubus erit. Eadem ratione nullus alius numerus cubus erit pręter eos, qui in locis determinatis collocati sunt. Quod erat ostendendendum.

d cor 3. pr. 19. lib. 3.
e pr. 9 lib. 3
f pr. 32 & cor pr. 36, huius.

PROPOS. XLIII. THEOR. XXXIII.

Eucl. 11. & 12. IX.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint; vnitas & quilibet minor ęquè metientur numeros maiores ęquè remotos; & quilibet primus numerus postremum metiens, etiā eum, qui vnitati proximus est, metietur.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri continuè proportionales A, B, C, D, E, F. Dico primùm quemlibet minorem numerum B eandem partem esse numeri maioris F atque est vnitas pars numeri D ęquè recedentis ab ea. Quoniam *a* ex compositione ordinata, vt est X ad D: ita est B ad F, propterea quod vtreque proportiones quadruplicatę sunt simplicium proportionum C ad D, vel X ad A, & est vnitas numeri D pars: Igitur *b* B ipsius F eadem pars erit, ac est vnitas X ipsius D. Quod erat ostendendum.

a prop. 19. lib. 3.
b def 8 lib. 3.

Secundò primus numerus H metiatur vltimum F. Dico H ipsum A metiri. Si enim hoc verum non est, erit *c* H ad A primus, cùm H primus numerus supponatur: Cùmque *d* B fiat ex multiplicatione A in se, eo quod est vt X ad A, ita A ad B, erit *e* B ad H primus. Et quia ambo A, & B sunt ad numerum H primi, *f* atque C fit ex ductu A in B, eo quod est vt X ad A, ita B ad C; Igitur *g* C ad H primus est quoque: Cùmque duo numeri A, & C ad ipsum H primi sint, & *h* gignitur numerus D ex multiplicatione A in C, eo quod X ad A est, vt C ad D: Igitur H ad ipsum D primus est; eadem ratione H primus erit ad E & ad F. Quare *i* numerus

X 1 A 6 B 36 C 216
H 3 D 1296
E 8776
F 526 S 6

c pr. 4. huius.
d def 9. & 10. huius.
e cor pr. 13. huius.
f def 9. & 11. huius.
g prop. 13. huius.
h pr. 8. huius.
i conu pr. 4. huius.

merus H ipsum F non metitur, quod est contra hypothesin. Et propterea H ipsum A metietur. Vt propositum fuerat.

Eucl. 13. IX PROPOS. XLIV. THEOR. XXXIV.

Si ab vnitate quotcunque numeri continuè proportionales fuerint, atque numerus post vnitatem primus sit, maximum nullus alius metietur prêter eos, qui sunt in eadem continua proportionalitate.

Sint ab vnitate X quotcunque numeri A, B, C, D continuè proportionales, quorum A proximus vnitati sit numerus primus. Dico nullũ aliũ numerũ prêter A, B, C metiri maximum D. Si enim hoc verum non est, metiatur ipsum D

X 1	A 5	B 25	C 125	D 625
	F	H	G	E

alius numerus E prêter ipsos A, B, C; & primo loco patet, quòd numerus E non est primus, aliàs cùm metiatur extremum D *a* metietur quoque numerum primum A vnitati proximum, quod est impossibile; Erit igitur E non primus & propterea *b* eum mensurabit aliquis primus numerus, hic verò alius non erit, quàm A; Nam cùm E metiatur extremum D, alius primus numerus, qui ponitur mensura ipsius E, *c* mensurabit quoque extremum D, & *d* propterea ipsum primum A proximum vnitati, quod est impossibile; Vnde constat, quod quilibet numerus, dimetiens maximum quotcunque numerorum ab vnitate continuè proportionalium, quorum proximus vnitati sit primus, multiplex erit necessariò numeri, qui vnitati succedit. Postea quoties E metitur ipsum D, toties vnitas metiatur numerum G. Quare idem numerus D efficietur *e* ex multiplicatione A in C, & ex G in E: Ergo *f* vt A ad G, ita est E ad C; Et quia *g* vt X ad G, ita erat E ad D, erit *h* permutando, vt X ad E, ita G ad D, sed vnitas X metitur ipsum E: Igitur G metitur ipsum D; & propterea (vt prius ostensum est de numero E) erit G multiplex ipsius A; erat autem, vt A ad G, ita E ad C; Igitur E metitur quoque numerum C. Rursus quoties E metitur numerum C, toties vnitas X metiatur H; Vnde (vt antea dictum est) H metietur ipsum C, & multiplex erit ipsius A. Cumque idem numerus C fiat ex ductu A in B, atque ex multiplicatione H in E, *i* erit vt A ad H, ita E ad B; sed A mensurabat ipsum H; Quare E mensurabit quoque nume-

a prop. 43. huius.
b *pr. 4 huius.*
c *ax. 1. lib. 3*
d *prop 43. huius.*
e *def. 9. huius.*
f *pr. 8. huius*
g *def. 9 huius.*
h *pr. 12 lib. 3.*
i *pr. 8. huius*

numerum B: Tandem quoties E metitur B, toties X metiatur ipsum F; Vnde, vt prius F mensurabit numerũ B, & multiplex erit ipsius A. Et quia idem numerus B procreatur ex ductu E in F, atque ex ductu A in se ipsum k erit vt A ad F, ita E ad A; Sed A metitur ipsum F: Igitur E metitur ipsum A, maior minorem numerum primum, quod est impossibile. Quapropter nullus alius numerus prẹter A, B, C mensurabit maximum numerum D. Quod erat ostendendum. k pr. 9. huius.

PROPOS. XLV. THEOR. XXXV. Eucl. 15. IX

Si tres numeri continuè proportionales minimi fuerint omnium cum ipsis eandem rationem habentium, duo quilibet simul sumpti ad reliquum primi erunt.

Sint tres numeri A, B, C continuè proportionales minimi omnium cum eis eandem rationem habentium. Dico primo loco A, & B simul sumptos ad ipsum C primos esse. Reperiãtur a duo numeri D, & E minimi in ratione A ad B, aut B ad C, & fiat F ẹqualis D, & E simul sumptis, atque G sit quadratum ipsius F. Manifestum est (ex ijs, quẹ dicta sunt in propositione 24 & 25 huius) vnitatem X ad D esse, vt D ad A; & vt X ad D, ita esse E ad B, atque vt X ad E, ita esse E ad C & D ad B. Vnde constat quod, b vt vnitas X ad D, ita sunt D, & E simul, idest F, ad A, & B simul. Et quoniam D, & E minimi sunt in sua proportione, erunt c inter se primi; ideoque d D, & E simul sumpti, idest F ad ipsum E primus erit. Est verò D ad E etiam primus: Igitur D, & F primi sunt ad eundem numerum E: Vnde e productus ex D in F, idest A vnà cum B, primi erunt ad productum ex E in se ipsũ, ideoque numerus C, primus erit ad aggregatum ex A, & B. Dico secundò duos extremos A, & C, simul sumptos, ad ipsum B intermedium primos esse. Quoniam D, & E primi sunt inter se: Ergo f eorum summa F ad quemlibet ipsorum D, vel E prima est: Igitur g productum ex D in E, scilicet numerus B, primus quoque erit ad G productum ex F in se ipsum. Et quia, vt dictum est, X ad D est, vt F ad summam A, B, & vt X ad E, ita est F ad summam B C: Ergo h vt X ad D simul cum E, idest ad F, ita est F ad A, B, vnà cum B, C. Quare i numerus G productus

A 9 B 12 C 16
D 3 E 4
X 1
F 7
G 49

a prop. 16. huius.
b prop. 19. lib. 3.
c pr. 6. huius.
d pr. 5. huius.
e prop. 13. huius. & cor. eius.
f pr. 5. huius.
g pr. 13. huius, & cor. eiusd.
h cor. pr. 12 lib. 3.
i pr. 7 & 4. lib. 3.

ex

ex F in se ipsum æqualis est A, & C vnà cum duplo intermedij B: Igitur A, & C vnà cum duplo ipsius B, primi erunt ad numerum B, sicuti B, & G primi erant; & k eorum differentia, k pr. 5. huius. nimirum summa numerorum A, C, & B prima erit ad numerum B: & rursus horum differentia, scilicet numeri A, & C, simul sumpti, ad ipsum B primi erunt. Quod erat propositum.

COROLLARIVM.

Patet ex hac propositione numerum quadratum maioris lateris superare quadratum lateris minoris, & excessum æqualem esse quadrato differentiæ laterum cum duplo medij proportionalis inter duos quadratos ex differentia, & ex minori latere factos. Nam quadratus G lateris maioris F æqualis fuit quadratis A, C cum duplo medij proportionalis B: ergo excessus quadrati G maioris lateris F supra quadratum A ex latere minori D, æqualis est quadrato C ex differentia E cum duplo ipsius B medij proportionalis inter A, & C.

SCHOLIVM.

Non erit difficile ex hac propositione reperire numerum quadratum, cuius duæ portiones, aut vna tantùm, aut neutra sit numerus quadratus.

E 25
R 8 S 17
A 9 H 16 O 4 N 1
C 5 D 4 X 1

Primò sumatur quilibet numerus quadratus impar A, & secetur in duas portiones C, D vnitate inter se differentes, & l fiat E quadratus ipsius C, & H quadratus ipsius D. Dico quadratos A, & H æquales esse quadrato E. Fiat vnitatis X quadratus N, qui vnitas erit, m & fiat productus ex X in D, sitque O, qui æqualis erit numero D. n Quoniam quadratus ex summa vnitatis X, & D æqualis est quadratis N, & H, cum duplo producti O; estque C æqualis summæ X, D: Ergo quadratus E æqualis est quadratis N, H cum duplo producti O; est verò vnitas N, seu X cum duplo numeri O, seu D æqualis numeris C, & D, idest numero A: Ergo quadratus E æqualis est quadratis H, & A.

l def. 10. huius.
m def. 9. huius.
n ex pr. 45. huius.

Secundò numerus R deficiat ab A vnitate, & numerus S excedat H vnitate. Patet numeros R, S æquales esse duobus numeris quadratis A, & H. Dico R, S non esse numeros quadratos. Si enim quadrati essent o vnitas, quæ est differentia quadratorum A, & R siue H, & S æqualis esset; non dum quadrato vnitatis, sed etiam duplo numeri medij proportionalis inter vnitatem, & minorem numerum quadratum, quod est impossibile.

o cor. pr. 45 huius.

Tertiò

Tertiò sumatur quilibet p numerus primus impar A, qui quadratus non erit, q cùm à nullo latere numerus primus metiri possit; & facta r eadem constructione, erit eadem ratione quadratus numerus E æqualis quadrato numero H, & non quadrato A.

p ex pr. 25. huius.
q pr. 1. def. 10. huius.
r par. 1. huius schol.

E 16
A 7 H 9 O 3 N 1
C 4 D 3 X 1

PROPOS. XLVI. THEOR. XXXVI.

Eucl. 32. 33 34. IX.

Quilibet numerus à binario duplus, pariter par est tantùm. Et si dimidium imparē habuerit, pariter impar est tantùm. Et si dimidium habuerit parem, & non fuerit à binario duplus, pariter par, & pariter impar erit.

Primò sint quotcunque numeri A, B, C, D à binario A dupli. Dico quemlibet eorum C esse pariter parē tantùm. Quoniam A, B, C, D sunt ab vnitate X continuè proportionales, & A vnitati proximus, primus numerus est (cùm binarius ab vnitate tantùm metiatur): Igitur a nullus alius numerus præter ipsos A, B, C metietur quemlibet ipsorum, vt C: Suntque b omnes A, B, C, D pares: Ergo tantummodo par numerus per parem numerum metietur numerum C; ideoque c quilibet ipsorum C pariter par est tantùm.

X 1 A 2 B 4 C 8 D 16

a prop. 44. huius.
b def. 3. huius.
c def. 5. huius.

Secundò numeri A sit semissis B impar, & C sit binarius, ita vt d impar B metiatur A per parem C. Dico A esse tantùm pariter imparem. Si enim hoc verum non est, erit quoque numerus A pariter par. e Quare numerum A metietur aliquis par numerus D per alium numerum parem E: Ergo f ex multiplicatione D in E fit numerus A; sed idem A producitur ex B in C: Ergo g vt D ad B, ita erit C ad E; sed binarius C necessariò pars est, & metitur parem numerum E (eo quod par numerus est aggregatum pluriū binariorum): Igitur par numerus D h ipsum B imparem metitur aliquoties, quod est impossibile. Quare numerus A tantummodo est pariter impar.

D E
A 10
B 6 C 2

d def. 6. huius.
e def. 5. huius.
f cor. pr. 7. huius.
g pr. 8. huius.
h def. 3. & 4. huius.

Tertiò sit numerus A par, cuius dimidium B sit par, & A non sit à binario duplus. Dico A pariter parem esse, & pariter imparem. Fiat binarius D ad vnitatem X, vt A ad eius semissem B.

sem B.

i def. 9. huius. sem B. Igitur *i* ex multiplicatione paris D in parem B efficitur A, & *k* propterea A pariter par erit. Postea sit C semissis ipsius B, & sic vlterius, peruenietur tandem ad imparem numerum, alias non esset A à binario non duplus; Sit iam C numerus impar, & fiat E duplus ipsius D, & sic vlterius, quousque inuenti termini X, D, E tot sint, quot sunt numeri C, B, A, suntque tam hi, quàm illi successiuè in proportione subdupla: Ergo *l* vt vnitas X ad E, ita est C ad A; ideoque *m* ex multiplicatione numeri C in E procreatur numerus A, estque E par, cum sit à binario duplus, & C erat impar. Ergo A genitus ex pari E in imparem C, erit *n* quoque pariter impar. Quę erant ostendenda.

k def. 5. huius.

A 20	E 4
B 10	D 2
C 5	X 1

l pr. 19. lib. 3.

m def. 9. huius.

n def. 6. huius.

SCHOLIVM.

Eucl. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. & 29. IX.

Decem propositiones à vigesima ad trigesimam libri noni facilè ex dictis colligi possunt. Nam si pares numeri componantur, aut multiplicentur, aut alter ab altero tollatur, pares numeri efficientur; cùm o pares omnes à binario mensurentur; Et si pari numero addatur, vel auferatur impar, compositum p, aut residuum impar erit; at si ab impare tollatur, vel ei addatur impar, efficietur par, eo quod duo impares excedunt duos numeros pares duabus vnitatibus, scilicet binario, seu pari. Tandem impar numerus, multiplicans imparem, efficit numerum imparem, eo quod multitudo numerorum imparium multiplicatorum excedit totidem numeros pares tot vnitatibus, quot sunt ipsi numeri multiplicati; Sed numeri multiplicati imparem multitudinem componunt. Igitur productum, præter pares numeros, habet etiam imparem; & propterea totus impar erit.

o def. 3. huius.

p def. 3 & 4. huius.

PROPOS. XLVII. THEOR. XXXVII.

Eucl. 35. IX.

Si sint quotcunque numeri continuè proportionales, quorum prior sit omnium minimus, erit differentia primi, & secundi ad primum, vt differentia minimi, & maximi ad omnes maximum pręcedentes.

Sint continuè proportionales numeri A, B, C & D, quorum maximus sit D & minimus A, sitque excessus secundi B supra

supra A numerus E, & excessus tertij C supra secundum B sit H, atque G sit excessus maximi D supra C, & fiat F æqualis ipsis E, H, G, simul sumptis; patet excessum maximi D supra minimum A æqualem esse numeris E, H, G, simul sumptis, siue numero F. Dico numerum E ad A eandem rationem habere, quam F ad numeros C, B, A, simul sumptos. Quoniam inuertendo [a] D ad C eandem rationem habet, quam C ad B, & quam B ad A; erit [b] diuidendo duorum D, C differentia G, ad C, vt H differentia duorum C, B ad B; & vt differentia E ad A: & [c] omnes antecedentes G, H, E simul, idest F ad omnes consequentes C, B, A simul sumptos, eandem rationem habebunt, quam vnus E ad vnum A. Quod erat propositum.

	E 6	H 18	G 54
A 3	B 9	C 27	D 81
			F 78

a pr. 9 lib. 3

b pr. 13. lib. 3.

c pr. 15. lib. 3.

PROPOS. XLVIII. PROBL. XI.

Eucl. 36. IX.

Numerum reperire, qui æqualis sit omnibus partibus eius simul sumptis. Vocetur talis numerus Perfectus.

Ponantur ab vnitate X tot numeri A, B, C, D in proportione dupla, quousque ex omnibus simul sumptis componatur numerus E, qui sit primus, & vt X ad D, ita fiat E ad F. Dico numerum F æqualem esse omnibus partibus eius, idest æqualem esse vnitati, & alijs omnibus numeris, qui ipsum F mensurare possunt. Quot sunt numeri A, B, C, D, tot numeri fiant ab E in dupla proportione, sintque E, G, H, I. Et quia A, B, C, D eandem rationem habent, quam E, G, H, I erit ex [a] compositione ordinata, vt A ad D, ita E ad I; erat autem vt X ad D, ita E ad F: Igitur [b] vt X ad eius duplum A ita erit I subduplus numeri F. Quare E, G, H, I, F deinceps dupli sunt. Detrahatur ex G secundo prior numerus E, sitque excessus M, qui æqualis erit ipsi E, propterea quod G ponitur duplus ipsius E; pariterque ex postremo F detrahatur prior numerus E; sitque excessus N: igitur [c] vt M ad E, ita erit N ad numeros E, G, H, I, simul sumptos: Estque M æqualis E: Igitur [d] N æqualis est ipsis E, G, H, I simul sumptis: Erat autem E æqualis ipsis X,

a pr. 19. lib. 3.

b pr. 21. lib. 3.

c pr 47. huius.

d cor 1. pr. 16. lib. 3.

X 1		E 31
	M 31	
A 2		G 62
R		
B 4		H 124
O		
C 8		I 248
	N 461	
D 16		F 496

sis X, A, B, C, D: Ergo duo numeri simul sumpti N, & E, idest numerus F æqualis erit omnibus X, A, B, C, D, E, G, H, I simul sumptis: Cumque vt X ad D, ita sit E ad F, erit e permutando, vt vnitas X ad E, ita D ad F; & propterea f D, atque adeo g reliquæ omnes eius partes X, A, B, C metientur numerum F. Postea quia I metitur ipsum F, cùm sit eius semissis, metientur h quoque reliqui H, G, E deinceps subdupli eundem numerum F: Quapropter vnitas X, & singuli numeri A, B, C, D, E, G, H, I metientur numerum F. Dico iam quòd nullus alius numerus, præter A, B, C, D, E, G, H, I, metitur ipsum numerum F. Ponatur numerus O, qui sit quelibet mensura numeri F, & vt O ad F, ita fiat vnitas X ad R; i Quare idem numerus F efficitur ex multiplicatione numeri E in D, atque ex multiplicatione R in O: Igitur k vt E ad R, ita erit O ad D; l sed D non mẽsuratur nisi à numeris A, B, C, eo quod binarius A vnitati proximus primus est, ergo O diuersus ab ipsis A, B, C, non metitur D; & m ideo E non metietur ipsum R. Cumque numerus E sit primus, erit n quoque ad ipsum R primus; & ideo o E, R in sua proportione minimi erunt, & propterea, toties E metietur ipsum O, quoties R mensurat ipsum D; Sed numerũ D nullus alius mensurare potest præter aliquem præcedentium A, B, C, vt dictum est: Igitur numerus R æqualis erit, aut ipsi A, vel B, vel C: Ponatur ergo R æqualis numero B. Et quia vt B siue R ad D tertium proportionalem, ita p est E ad H, cùm tam illę, quam hę proportiones duplæ sint: Estque q permutando vt R ad D, ita E ad O; Igitur r numerus O æqualis est ipsi H. Quapropter quilibet numerus O, dimetiens numerum F diuersus esse non potest ab ipsis A, B, C, D, E, H, I: & propterea numerus F tantummodo mensuratur à numeris A, B, C, D, E, G, H, I; estque numerus F æqualis vnitati X, & omnibus numeris A, B, C, D, E, G, H, I. Igitur patet propositum. Vocetur numerus F, supradicta lege conflatus, numerus Perfectus.

e pr.12.lib.3
f cor.pr.7. huius
g ax.1.lib.3.
h ax.1.lib.3
i de 9. huius.
k pr 8.huius
l prop 44. huius
m def 8.lib. 8.
n pr.4.huius
o pr.6.huius
p pr.19.lib.3
q pr.12.lib. 13.
r pr.4.lib.3.

Finis Libri octaui.

LIBER NONVS.

Post expositionem elementorum Arithmetices considerantur in hoc postremo libro symmetriç quantitatum, quæ obscurè ab aliquibus, ab omnibus verò per quam prolixè expositę fuerunt, & methodo non vniuersali; Nam agunt tantummodo de commensurabilitate, & incommensurabilitate linearum, & superficierum planarum; at ego compendiosè hanc mathematices partem reddo vniuersaliorem; Siquidem cuilibet quantitatis generi conuenire easdem proprietates ostendo.

DEFINITIONES.

I.

Si fuerint tres quãtitates eiusdem generis, & vt prima (quę locum vnitatis habeat) est ad secundam, ita fiat tertia ad quartam, vocabitur quarta proportionalis: Productum ex secunda in tertiam.

II.

Et si fuerint duę quantitates, & quam proportionem habet prima (quę vt vnitas vsurpetur) ad secundam, ita sit secunda ad tertiam, vocabitur tertia proportionalis Quadratum ipsius secundę, aut Potentia, vel Quantitas quadrata. Et secunda vocetur Latus prędictę quadratę quantitatis.

Franciscus Maurolycus Messanensis, qui præcedenti sæculo Mathematicas scientias, barbarie corruptas, suo pristino nitori primus omnium restituit, præter alia ingeniosissima eius inuenta, hanc partem, quæ de quantitatibus asymmetris agit, mirificè ampliauit, & præcipuè animaduertit operationes numericas adaptari posse quibuslibet quantitatibus eiusdem generis, siue commensurabilibus, siue non: Tanti igitur viri vestigia sectando conabor breuiori, & clariori methodo partem hanc Mathematices pro viribus illustrare. Itaque licet numeri plani easdem passiones habere videantur, quas habent superficies planę rectangulæ, nihilominus valde differunt inter se. Nam plani numeri R, & H geniti ex D ducta in A & B, habent altitudinem communem D, & bases eorum sunt A, & B, &

est

a pr.7.lib.8 est a planus numerus R ad planum H, vt basis A ad basim B, & hoc etiam b verificatur in superficiebus rectangulis; sed differunt, quia c vnitas X ad altitudinem, seu multiplicantem D habet proportionem aliquam, & eandem, quam basis, seu multiplicatus numerus A ad planum, seu productum numerum R; hoc autem in superficiebus rectangulis locum non habet; Nam neque punctum ad altitudinem D, neque basis A ad superficiem R proportionem habere potest vllam: Itaque in numeris vnitas, altitudo, basis, & planum sunt eiusdem generis, idest sunt omnes quantitates lineares. Vnde colligitur, quod in quibuslibet quantitatibus eiusdem generis vsum habere potest operatio analoga multiplicationi; Propterea quod d quælibet proportio duarum quantitatum eiusdem generis, vt motuum, vel temporum, &c. est commensurabilis aut incommensurabilis, primam duo numeri, secundam duę rectæ lineæ exprimere possunt, vt si pondus ponderis partes fuerit e reperiri possunt duo numeri eandem proportionem habentes, & è conuerso communis mensura duorum ponderum multiplicata dabit terminum secundum proportionis: At si fuerit incommensurabilis f quælibet recta linea ad aliquam aliam eandem proportionem habebit, & ideo quælibet proportio duorum ponderum declarari, & exponi potest in duabus rectis lineis, & sic vt pondus ad pondus ita intelligi, aut poni potest quęlibet recta linea ad aliam rectam lineam; & è conuerso. Itaque si fuerint tres quantitates A, B, C eiusdem generis, siue sint magnitudines, siue motus, aut tempora, &c. &, vt A ad B, ita ponatur C ad quartam proportionalem D; Vocatur D quantitas Producta ex B in C; Et B & C vocantur Latera producti D. Si verò fiat, vt A ad B, ita B ad D: vocabitur tertia proportionalis D quantitas Quadrata, seu Quadratum absolutè, & B erit eius latus. Itaque hæ operationes sunt analogæ multiplicationi numerorum; Nam A tenet locum vnitatis, B locum multiplicantis, seu altitudinis, & C locum multiplicati, seu basis, & D vicem gerit plani multiplicati. Tandem animaduertendum est nomine Quadrati alicuius lineę intelligi debere g superficiem quadratam, supra definitam; At quando dicitur quantitatis Quadratum tunc propriè significatur quantitas analoga quadrato, siue tertia proportionalis in hac definitione exposita: At generaliter nomen quantitatis quadratę vsurpabitur in vtraque significatione, & comprehendet, nedùm superficiem planam quadratam, sed etiam quantitatem quadratam; & nomen Producti

b pr.1 lib.4

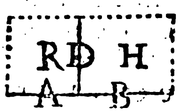
c def.9 lib.8

R 15 H 20

A 3 B 4

D 5

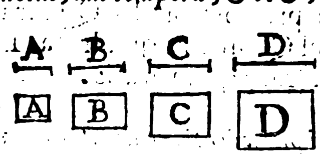
X 1



d def.7.lib.3

e def.2. & pr.16. lib.8

f ax.2. lib. 3 & pr.11. lib. 4.



g pr.34. lib.1

ducti duarum quantitatum significabit, nedùm parallelogrammum rectangulum, sed etiam quartam quantitatem proportionalem D paulò ante definitam; & latera producti significabunt nedùm lineas rectas continentes rectum angulum spatij plani, sed etiam secundam B, & tertiam quantitatem E, quæ cum vnitate A, & producto D quatuor proportionales conficient.

III.

Lineę, seu quantitates simplices eiusdem generis habentes communem aliquam mensuram, vocentur longitudine Cõmensurabiles: Si verò nulla linea, vel quantitas reperiri potest, quę communis mensura sit illarum linearum, vel quantitatum, vocentur longitudine Incommensurabiles.

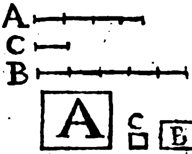
IV.

Lineę, seu quantitates eiusdem generis, quarum quadrata eadem quantitas cõmuni mensura metitur: vocentur potentià Commensurabiles; Si verò nulla quantitas reperiri potest, quæ vtrunque quadratum metiatur; vocentur quantitates, vel lineę, quę latera eorum sunt, potentià Incommensurabiles.

Vt si duarum linearum, vel quantitatum A, & B fuerit C communis mensura, idest a A fuerit partes ipsius B: dicentur A, & B longitudine Commensurabiles; si verò b nulla mensura communis reperiri potest ipsarum A, & B: vocentur A, & B longitudine Incommensurabiles. Si postea quadrati ex A, & quadrati ex B reperiri potest aliqua communis mensura, quę sit quadratum ex C: Tunc vocantur latera A, & B potentià commensurabilia. At si nullum quadratum reperiri potest, quod sit communis mensura quadratorum ex A, & ex B: Tunc appellantur A, & B potentià incommensurabiles: animaduertendum tamen est eiusdem generis esse debere quantitates A & B; quod licet multoties in hoc libro non repetatur, semper subintelligi debet.

a def 3. lib. 3.

b schol. pr. 30. lib. 2.



AXIOMATA.

ex Pappo Alex.

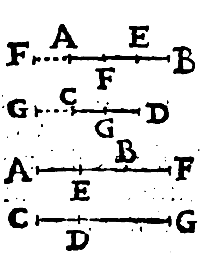
I.

Si inęqualibus ęquales addantur, vel auferantur, erit differentia priorum ęqualis differentię postremarum.

II.

II.

Et si ab æqualibus inæqualia tollantur: differentia ablatarum æqualis erit differentię residuarum.



Si enim A B sit maior, quàm C D excessu E B, & ipsis A B, & C D addantur, vel auferantur ęquales F A, & G C: Pariter summa F B superat summam G D, vel differentia F B superat differentiam G D eodem excessu E B. Si postea ab ęqualibus A F, & C G auferantur inæquales A B maior, & C D minor, quarum excessus sit E B. Manifestum est residuum B F deficere à residuo G D eodem defectu B E.

PROPOS. I. THEOR. I.

Quadratum ex aggregato duarum quantitatum æquale est summę quadratorum earundem quantitatum, & duplo producti ab eisdem quantitatibus.

Sint duę quęlibet quantitates eiusdem generis A, & B. Dico quadratum, cuius latus est summa quantitatum A, & B ęquale esse quadrato ex A, quadrato ex B vnà cum duplo producti ex A in B. Sit X quantitas eiusdem

X

A B

C DF E

generis, quę vt vnitas supponatur, & a vt X ad A, ita ponatur A ad C, atq; vt X ad A, ita fiat B ad D: Igitur b A ad C erit, vt B ad D; & propterea c summa ipsarum A, & B ad summam consequentium C, & D eandem proportionem habebit, quam vna A ad vnam C, seu quam X habet ad A. Rursus vt X ad B, ita fiat B ad E, & vt X ad B, ita fiat A ad F: Quare, vt prius A, & B simul sumptę, erunt ad E, & F simul sumptas, vt vna B ad vnam E, seu vt X est ad B; Sed prius, vt eadem X ad A, ita erat eadem summa duarum A, & B ad aggregatum ex C, & D: igitur d quam proportionem habet X ad duas consequentes simul A, & B eandem proportionem habebit eadem summa A, & B ad quantitates C, D, F, & E simul sumptas: Quare e aggregatum ex C, D, F, & E: erit quadratum, cuius latus est summa quantitatum A, & B. Et quia vt X ad B, ita erat A ad F; Ergo f permutando, vt X ad A, ita erit B ad F; sed prius vt eadem X ad eandem A, ita erat B ad D; Igitur

a def. 2. & 2. huius.
b pr. 7 lib. 3.
c pr. 15. lib. 3
d cor. pr. 23. lib. 3.
e def 2. huius.
f pr. 12. lib 3.

B ad

B ad g F, atque ad D eandem rationem habet; Et propterea F, & D h æquales erunt: Et est C quadratum ipsius A, atque E est quadratum alterius B. Igitur quadratum ex aggregato A, & B æquale est quadrato ex A, quadrato ex B, vnà cum duplo producti ex A in B. Quod erat ostendendum. g pr.7.l.3. h pr.4.l.3.

COROLLARIVM I.

Deducitur ex demonstratione huius propositionis, quòd quantitates quadratæ, scilicet illæ, inter quas, & tertiam quantitatem singulæ mediæ proportionales cadunt, sunt in duplicata proportione laterum, seu mediarum proportionalium.

Nam i permutando vt A ad B, ita est C ad D, & vt eadem A ad eandem B, ita erat F, seu D, ad E: Igitur k C, D, & E continuè proportionales sunt in ratione A ad B; Et l propterea quadratum C ad quadratum E duplicatam rationem habebit lateris A ad latus B; & è conuerso. i pr.12.l.3. k pr 7.l 3. l pr.19.l.3.

COROLLARIVM II.

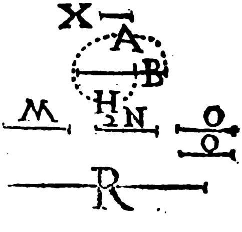
Patet etiam si quatuor quantitates quadratæ fuerint proportionales, esse eorũ latera proportionalia, & è conuerso.

Nam subduplicatæ m proportiones earundem proportionum eædem sunt quoque inter se, & è conuerso. m cor.3.pr. 19.l.3.

PROPOS. II. THEOR. II.

Quadratum differentiæ duarum quantitatum inæqualium æquale est excessui summæ duorum quadratorum ex eisdem quantitatibus supra duplum producti ex eis.

Sit quantitas A maior, & B minor, earumque differentia Sit H; & a vt X, loco vnitatis posita, est ad A, ita fiat A ad R; pariterque fiat O quadratum ipsius B, & M sit quadratum ipsius H, atque N sit productum ex H in B. Quoniam b quadratum R lateris A, seu aggregati duarum quantitatum H, & B, æquale est quadrato M, quadrato O, vnà cum duplo producti N; Ergo addito communi quadrato O; erunt duo quadrata R, & O simul sũpta æqualia quadrato M, duplo produ- a def.2 & 3 huius. b pr.1. huius.



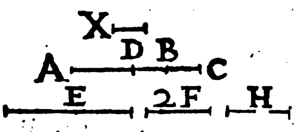
cti N, & duplo quadrati O, simul sumptis; Sed quia vt eadem X ad eandem B, ita est H ad N, & ita B ad O: Ergo *c* duę H, B simul, idest A ad N, O simul, erunt, vt B ad O, seu vt X ad B; Et propterea *d* N, O erit productum ex B in A: Igitur quadratum R vnà cum quadrato O æquale erit quadrato M, vnà cum duplo producti ex A in B; Et propterea summa quadratorum ex A, & B, scilicet R, & O superat duplum producti ex A in B, estq; excessus quadratum M. Vnde M, quod est quadratum ipsius H, differentię duarum inęqualium quantitatum A, & B, æquale est differentię, seu excessui summę quadratorum ex A, & ex B supra duplum producti ex A in B. Quod erat ostendendum.

c pr.7. & 15. l.3.
d def.1.huius.

PROPOS. III. THEOR. III.

Differentia duorum quadratorum ęqualis est producto ex aggregato, & ex differentia laterum eorundē quadratorum.

Sit maior quantitas A B, minor verò B C, & ex maiori A B secetur B D ęqualis minori B C: Ergo ipsarum A B, & B C summa erit A C, differentia verò erit A B; Et fiat *a* vt X (quæ vnitatis locum habet) ad A D, ita A D ad E, atque vt X ad eandem A D, ita fiat D B ad F, & tertiò vt X ad A D, ita fiat B C ad quartam proportionalem, quę ęqualis *b* erit eidem F (cùm C B & B D ęquales sint). Manifestum est tres *c* antecedentes A D, D B, & B C simul sumptas habere ad omnes consequentes E, & duplum F, simul sumptas, eandem proportionem, quam vna A D habet ad vnam E, seu eandem quam X habet ad ipsam A D; Et propterea *d* E vnà cum duplo ipsius F erit productum ex differentia A D in summam A C laterum inęqualium A B, & B C. Dico iam excessum quadrati ex A B supra quadratū ex B C esse productum compositum ex E vnà cum duplo F. Fiat, vt X ad B C, ita B C ad H, erit *e* H quadratum lateris B C. Et quia *f* quadratum ex latere A B, composito ex duobus segmentis A D, & D B ęquale est quadrato ex A D, scilicet E, & quadrato ipsius D B, seu ei ęqualis B C, scilicet H, vnà cum duplo producti ex A D in D B, seu in B C, scilicet duplo ipsius F; & summa quadratorum E, & H vnà cum duplo producti F (scilicet quadratum

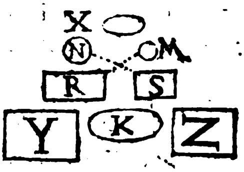


a def.2 & 3. huius.
b prop.7. & cor.1. pr.16 l.3.
c pr.15. l.3
d def.1. huius.
e def.2. huius.
f pr.1. huius

ex maiori A B) superat ipsum H, ideſt quadratum minoris B C, eſtque exceſſus compoſitus ex E cum duplo ipſius F: Igitur exceſſus quadrati ex maiori A B ſupra quadratum minoris B C eſt compoſitus ex E cum duplo F; Sed E cũ duplo F ęquale eſt producto ex differentia A D in aggregatum A C earundem inequalium A B, & B C. Igitur differentia quadratorum ex A B, & ex B C ęqualis eſt producto ex differentia A D in aggregatum A C earundem quantitatum inęqualium A B, & B C. Quod erat oſtendendum.

SCHOLIVM.

Ex his tribus propoſitionibus facilè colligitur verificari in reliquis quantitatibus, ea quæ in prima, & tertia propoſitionibus lib. II. oſtendit Euclides. Productum g enim ex altitudine A D in eandem A D, tanquam baſim fuit ipſa E; atque in baſim B D ducta fuit F, pariterque in B C ducta fuit altera F, & oſtenſum fuit, quod productum ex A D in aggregatum A C equale eſt producto E cum duplo F. Simili modo poſſunt reliquæ paſſiones hiſce quantitatibus adaptari, quæ h in numeris, & i in ſuperficiebus planis rectangulis oſtenſæ ſunt. Vt ſi fuerint quatuor quantitates proportionales eiuſdem generis M, N, R, & S, erit productum ex prima M in quartam S ęquale producto ex ſecunda N in tertiam R, & è conuerſo. Si enim ſumatur quælibet quantitas X, loco vnitatis, quę ſit eiuſdem generis cum illis, & k fiat vt X ad M, ita S ad productum Z, pariterq; fiat vt X ad N, ita R ad Y: erunt Z, & Y ęquales inter ſe. Nam ſi vt X ad N, ita fiat S ad K, erit l permutando, vt X ad S, ita N ad K, pariterq; permutando m vt eadem X ad eandem S, ita erit M ad Z; Ergo n M ad Z erit, vt N ad K; & iterum permutando erit Z ad K, vt M ad N. Eodem modo quia duæ rationes R ad Y, & S ad K ſunt eædem vni tertię rationi X ad N; Ergo R ad Y eſt, vt S ad K; Ergo permutando Y ad K erit, vt R ad S; ſed prius Z ad K erat, vt M ad N, ſeu vt R ad S. Igitur Z ad K eſt, vt Y ad eandem K. Et propterea o Z, & Y ęquales ſunt inter ſe. Eodem modo conuerſum demonſtrabitur. Et ſi fuerint tres quantitates proportionales, erit quadratum productum ex intermedia ęquale plano producto ab extremis. Itaque ſi eadem quantitas in duas alias producatur efficientur duæ quantitates productæ, quæ erunt inter ſe, vt producentes. Nam ex ductu N in R facta eſt Y, & ex ductu eiuſdem N in S facta eſt K: & oſtenſum eſt productum Y ad K habere eandem rationem, quã R ad S; & hęc ſunt veluti baſes, & N vicẽ gerit cõmunis altitudinis.



g pr. 3. huius.

h lib. 8.

i lib. 4. & 5.

k deff. 1. huius.

l pr. 12. l. 3.

n pr. 7. l. 3.

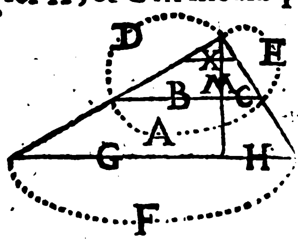
o pr. 4. l. 3.

Similiter applicatio alicuius quantitatis producta ad aliquam aliam quantitatem est inuentio quartę proportionalis duorum laterum dicti producti, & tertię quantitatis. Vt si productum Z, cuius latera sunt M, & S applicandum sit ad latus R, fieri debet, vt R ad S, ita M ad N, eruntque M, & N noua latera eiusdem producti Z. Non aliter si alicuius quantitatis quadratæ reperiri debeat eius latus; Debet tantummodo inueniri media proportionalis inter assumptam vnitatem, & quantitatem quadratam. Eodem modo reliquę passiones, quæ de figuris numericis ostenduntur possunt omnino quibuslibet alijs quantitatibus continuis adaptari.

PROPOS. IV. THEOR. IV.

Si fuerint duę quantitates inter quas, & inter earum summam mediæ proportionales positæ sint: erunt quadrata ex postremis medijs proportionalibus, simul sumpta ęqualia quadrato ex aggregato; atque productum ex eisdē medijs proportionalibus æquale erit producto ex media proportionali inter quantitates datas & eorum summam.

Sint B, & C duę quęlibet quantitates eiusdem generis, quarum summa sit A, & inter B, & C sit media proportionalis M, atque inter A & B sit media proportionalis D, pariterque inter A, & C sit media proportionalis E, & sumpta X pro vnitate a fiat, vt X ad A ita A ad F, atque vt X ad A, ita fiat C ad H, pariterque vt X ad A, ita fiat B ad G; erit igitur H productum ex A in C; sed b quadratū ex E æquale est producto ex A in C (cum E sit media proportionalis inter A, & C): Ergo H est quadratum ipsius E. Similiter productum ex A in B, scilicet G ęquale erit quadrato mediæ proportionalis D. Ostendendū modo est quadrata G, & H simul sumpta ęqualia esse quadrato F; Quia vt X ad A, ita facta est C ad H, atque B ad G, estque A ad F, vt X ad A: Igitur c vt A ad F, ita sunt duę B, & C simul sumptæ ad duas G, & H simul sumptas, sed antecedentes ęquales sunt inter se, nimirum A ipsis B, & C simul sumptis: Igitur d consequentes inter se ęquales erunt, scilicet F ipsis G, & H simul sumptis. Quapropter quadratum ipsius A ęquale erit duobus quadratis ex D, & E, simul sumptis.



a def. 2. & 3. huius.

b schol. pr. 3. huius.

c pr. 7. & 15 l. 3.

d cor. 1. pr. 26 l. 3.

Se-

Secundò Dico productum ex D in E æquale esse producto ex A in M. Quoniam A, D, & B proportionales sunt, pariterque A, E, C continue proportionales sunt: Igitur *e* proportio extremarum B ad C duplicata erit proportionis ipsius D ad E; Est verò M media proportionalis inter B, & C; Igitur B ad *f* M erit, vt D ad E; quadratum *g* autem ex D ad productum ex D in E est, vt D ad E, propterea quod habent eandem altitudinem D; pariterque productum ex A in B ad productum ex A in M eandem proportionem habet, quam B ad M (cùm A sit productorum communis altitudo): *h* Igitur quadratum ex D ad productum ex D in E eandem rationem habebit, quam productum ex A in B ad productum ex A in M; sed *i* productum ex A in B æquale est quadrato ipsius D, mediæ proportionalis inter A, & B. Ergo *k* productum ex D in E æquale erit producto ex A in M. Quod erat ostēdendum.

	A	
D		E
B	M	C

e cor. 1. pr. 1 huius.
f cor. 3. pr. 19. l. 3.
g sch pr. 3. huius.
h pr. 7. l. 3.
i sch pr. 3. huius.
k cor. 1. pr. 16. lib. 3.

COROLLARIVM I.

Manifestum est, si quantitates A, D, E fuerint lineæ rectæ, constituere triangulum rectangulum, cuius hypothenusa erit A. Nam in triangulo rectangulo *l* perpendicularis ab angulo recto media proportionalis est inter segmenta hypothenusæ, & latera media proportionalia sunt inter hypothenusam, & conterminalia segmēta eius, facta à perpendiculari. Et *m* propterea M erit perpendicularis ab angulo recto, & D & E erūt latera dicti trianguli rectanguli.

l pr. 9. l. 4.
m sch pr. 9. l. 4. & pr. 20. l. 2.

COROLLARIVM II.

Deducitur etiam, qua ratione reperiri possit latus potens differentiam duorum quadratorum inæqualium. Fiat, *n* vt A latus quadrati maioris ad D latus quadrati minoris, ita D ad B, & *o* inter A, eiusque residuum C reperiatur media proportionalis E. Patet ex hac propositione esse E latus quadrati differentialis inter quadrata quantitatum A, & D.

n def. 2. huius.
o sch pr. 3. huius.

PROPOS. V. THEOR. V.

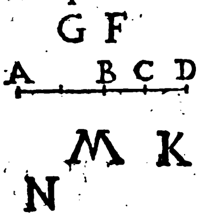
Si eadem quantitas bis diuidatur, siue interius, siue exterius, ita vt segmenta ex prima diuisione facta, inæqualia sint segmentis

mentis postremis: dupli producti priorum segmentorum à duplo producti posteriorum segmentorum differentia. ęqualis erit differentię duorum quadratorum ex prioribus segmentis à duobus quadratis ex posterioribus segmentis.

Sit eadem quantitas A B, bis secta interius in C & D, vel exterius, ita vt segmenta priora A C, & C B inæqualia sint posterioribus segmentis A D & D B. & F æqualis sit duplo producti ex A C in C B, atque G sit æqualis quadratis ex A C, & ex C B; pariterque K sit æqualis duplo producti ex A D in D B, & M sit æqualis quadratis ex A D & ex D B, atq; N sit æqualis quadrato ex A B. Dico differentiam inter F, & k æqualem esse differentiæ inter M, & G.

a sch prop 3. huius. Et in primo casu a secetur A B bifariam in H. Et quia supponuntur priora segmenta A C, C B inæqualia posterioribus segmentis A D, D B, non erunt ambo segmenta A C, & A D æqualia inter se, & ablata communi A H, erunt residuæ H C, & H D inæquales; Ponatur H C minor, quàm H D. Postea quia duarum inæqualium A H, & H C summa est A C, differentia vero est C B (eo quod A H, & H B æquales sunt inter se): erit b quadratum ex A H æquale quadrato ex H C simul cum producto ex A C in C B, nimirum contentum ex aggregato, & differentia ipsarum A H, & H C. Pari ratione eidem quadrato ex A H æquale erit quadratum ex H D vnà cum producto ex A D in D B: Quare quadratũ ex H C, vnà cum producto ex A C in C B ęquale erit quadrato ex H D vnà cum producto ex A D in D B; Sed c quadratum ex H C minus est quadrato ex H D, cùm latus H C positum sit minus, quàm H D: Igitur reciprocè productum ex A C in C B maius erit producto ex A D in D B. At in secundo casu quia eidem A B adduntur inæquales B C, & B D: Manifestum est productum A C B similiter inæquale esse producto A D B; Quare duplum producti ex A C in C B, idest F, inæquale erit duplo producti ex A D in D B, scilicet ipsi K. Et quoniam d in primo casu quadrato totius A B, scilicet quadrato N ęqualia sunt quadrata ex A C, & ex C B, & duplum producti ex A C in C B: erunt G, & F æqualia

b pr. 3. huius.



c per 3 pp. 17 lib 4. & def. 2. huius

d pr. 1. huius

qualia

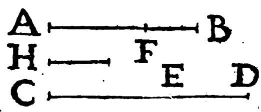
qualia quadrato N. Pari ratione eidem quadrato N æqualia erunt M, & K. Igitur F, & G, simul sumpta, æqualia erunt K, & M, simul sumptis. Cùm igitur ab his æqualibus aggregatis tollantur inæqualia F, & K: erit e differentia ablatorum æqualis differentiæ residuorum. Quare eodem excessu superabit F ipsum K, quo M superat ipsum G. e ax. 2. huius.

At in secundo casu quoniam f quadratum ex differentia A B, scilicet N, vnà cum duplo producti A C B, scilicet F æquale est duobus quadratis ex A C, & ex C B, idest ipsi G; Et pari ratione quadratum N vnà cũ K æquale erit ipsi M: Cùmque ab inæqualibus G, & M tollatur commune quadratum N: erit g differentia inter residua F, & K eadem, quæ inter tota G, & M; quod erat probandum. f pr. 2 huius. g ax. 1. huius.

PROPOS. VI. THEOR. VI. Eucl. 2. X.

Si duabus quantitatibus propositis inæqualibus detrahatur semper minor de maiore alternè, & reliqua nunquam præcedentem metiatur: incõmensurabiles erunt ipsæ quantitates.

Sint duæ quantitates inæquales A B, & C D, & minor A B auferatur ex C D, quoties potest, & residua sit E D minor, quãm A B, seu C E; Rursus E D auferatur ex A B quoties potest, ita vt residua F B minor sit, quàm E D, seu A F, & sic vlterius semper alterna detractione auferatur minor de maiore, & nunquam reliqua precedentem metiatur. Dico A B, & C D incommensurabiles esse. Si enim hoc verum non est; Sit H cõmunis mẽsura earundẽ AB, & CD. Et quia ex CD tollitur CE maior, quã semissis ipsius D C (cũ residua E D minor sit, quã ablata A B, vel C E), & ex A B tollitur A F magis, quàm dimidium illius, & sic semper: Ergo a relinquetur tandem aliqua quantitas minor, quàm H. Sit illa F B: Cùmque H ponatur mensura communis ambarum quantitatum A B & C D, & A B metitur C E; Ergo b H metitur totam C D, & ablatam C E; ideoque c H metietur residuam E D; sed E D metitur A F: Ergo H metietur nedùm totam A B; sed etiam ablatam A F, & propterea H metietur residuam F B, quod d est absurdũ. Facta enim fuit F B minor, quàm H. Non igitur aliqua quantitas a sch. pr. 1 l. 1. b ax. 1. l. 5. c ax 6. l. 1. d def. 13. l. 5



titas

titas H esse potest communis mensura quantitatum A B, & C D. ideoque e erunt incommensurabiles. Quod erat ostendendum.

e def. 3. huius.

COROLLARIVM.

Manifestum est quamlibet mensuram cōmunem duarum quantitatum metiri quoque quamlibet portionem, quæ ex alterna detractione relinquitur.

Ostensum enim est duarum quantitatū A B, & C D communem mensuram H metiri portiones omnes C E, E D, A F, & tandem F B omnium postremam.

Eucl. 3. 4. X.

PROPOS. VII. PROBL. I.

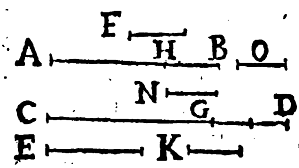
Duabus, vel tribus quantitatibus commensurabilibus propositis, maximam earum communem mensuram reperire.

Sint primò duæ quantitates A B, & C D commensurabiles inter se. Reperiri debet earum mensura communis maxima. Tollatur a minor A B ex C D, quoties potest, vt nimirum residua G D minor sit, quàm A B, & G D auferatur ex A B quoties potest, & hoc semper fiat alterna detractione; Tandem aliqua quantitas residua præcedentem metietur: Nam si nunquam postremum residuum præcedētem mensuraret, b essent quantitates A B, & C D incommensurabiles, quod est contra hypothesin. Metiatur H B præcedentem G D. Et quia H B metitur G D, & G D metitur A H: Igitur c H B metitur A H, & mensurat quoque se ipsam: Ergo H B metitur totam A B, hæc verò metitur C G: Igitur H B mensurat ipsas C G, & G D, ideoque H B metietur totam C D; & propterea H B mensura communis erit quantitatū A B, & C D. Dico iam H B maximā esse omnium quantitatum, quæ mensurare possunt ipsas A B, & C D. Si enim hoc verum non est, sit F maior, quàm H B, mensura communis ipsarum A B, & C D. Et quia d quælibet mensura communis quantitatum A B, & C D metitur quamlibet extremam portionem H B, quæ ex alterna detractione relinquitur: Igitur maior F metitur minorem H B, quod est impos-

a sch. pr. 3. huius.

b pr. 6. huius.

c ax. 1. l. 3.



d cor. pr. 6. huius.

impossibile. Ergo quælibet alia mensura communis quantitatum A B, & C D minor erit, quàm H B. Et propterea H B erit omnium maxima.

Secundò sint tres quantitates A B, C D, & E commensurabiles inter se. Reperiri debet earum communis mensura maxima: reperiatur [e] communis maxima mensura quantitatum C D, & E, quæ sit K; sicuti H B reperta fuit maxima mensura communis quantitatum A B & C D. Et quia tres quantitates A B, C D, & E ponuntur inter se commensurabiles, dabitur aliqua communis mensura omnium trium; qualiscunque sit illa, cùm sit mensura communis duarum A B, C D, [f] mensurabit quoque postremum residuum alternæ detractionis H B; sed H B ostensa fuit maxima communis mensura duarum A B, C D: Ergo illa mensura communis trium A B, C D, & E metietur maximam mensuram communem H B duarum quantitatum A B, & C D. Pari ratione metietur K mensuram communem maximam ipsarum C D, & E; ideoque H B, & K commensurabiles erunt inter se. Iam [g] reperiatur N maxima mensura communis duarum H B, & K. Et quia N metitur H B, hec autem metitur duas A B, & C D: Igitur [h] N metitur duas A B, & C D; cùmque N metiatur K, & hec metiatur E: Ergo N metitur tres quantitates A B, C D, & E. Dico iam N esse maximam mensuram trium A B, C D, & E. Si enim hoc verum non est, sit O maior, quàm N mensura communis earundem A B, C D, & E. Et quia O mensurat ambas A B, & C D, metietur, [i] vt dictum est, ipsam H B earum maximam mensuram communem; Pariterque quia O mensurat ambas C D & E, metietur quoque K earum maximam communem mensuram: Cùmque O metiatur ambas H B, & K, metietur quoque O ipsam N maximam mensuram communem earundem H B, & K; ideoque maior O metietur minorem N, quod est impossibile. Nulla ergo maior, quàm N metietur tres A B, C D, & E; & propterea N erit earum maxima mensura communis, vt propositum fuerat.

e par. 1. huius pr.

f cor. pr. 6. huius.

g par. 1. huius pr.

h ax. 1. l. 5.

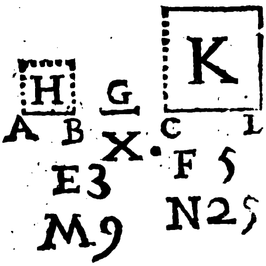
i cor. pr. 6. huius.

PROPOS. VIII. THEOR. VII.

Eucl. 9. X.

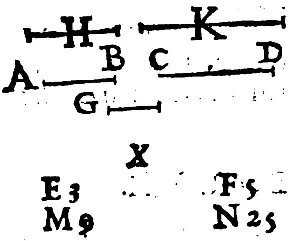
Quadrata, quæ à quantitatibus longitudine commensurabilibus fiunt, habent inter se proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Et quadrata, quę sunt inter se, vt numeri quadrati, habent latera longitudine cōmensurabilia. Quę verò à quantitatibus longitudine incommensurabilibus fiunt quadrata, non habebunt inter se proportionem, quam habent numeri quadrati. Et quadrata, quæ non sunt inter se, vt numeri quadrati, non habebunt latera longitudine commensurabilia.

Sint primò A B, & C D duæ quęlibet quantitates eiusdem generis inter se commensurabiles longitudine, & quadratum H lateris A B, & quadratum K lateris C D. Dico quadratum H ad quadratum k habere eandem proportionem, quam habet aliquis numerus quadratus ad aliquem quadratum numerum. Duarum A B, C D longitudine commensurabilium a reperiatur maxima communis mensura G, & quoties G metitur A B, toties vnitas X metiatur numerum E; atque quoties G metitur C D, toties vnitas X metiatur numerum F: Manifestum b est A B ad C D esse, vt numerus E ad F, cùm antecedentes eędem partes sint consequentium; Fiat postea c M numerus quadratus lateris E, atque N numerus quadratus lateris F. Et quia d quadratum H ad quadratum k duplicatam proportionem habet lateris A B ad latus C D. Similiter e numerus quadratus M ad numerum quadratum N duplicatam rationem habet lateris E ad F, estque A B ad C D, vt numerus E ad F: Igitur f quadratum H ad quadratum k eandem proportionem habet, quam numerus quadratus M ad numerum quadratum N.



a pr. 7. huius
b def. 8 l. 3.
c def. 10. l. 8
d cor. 1. pr. 1. huius
e pr. 32 & cor. 1. pr. 36 lib 8.
f cor. 3. pr. 19. l. 3.

Secundò sit quadratum H ad quadratum K, vt numerus quadratus M ad numerum quadratum N. Dico latera A B, & C D esse longitudine commensurabilia. Sint E, & F latera quadratorum numerorum M, & N. Et quoniam quadratum H ad quadratum k ponitur, vt quadratus numerus M ad quadratum numerū K; sed g quadratum H ad quadratum K habet proportionem duplicatam lateris A B ad latus C D, pariterque quadratus numerus M ad quadratum numerum N duplicatam rationem habet lateris E ad F: Igitur h latus A B ad C D habet



g cor. 1. pr. 1 huius, & pr. 2. l. 8.
h cor 3 pr. 19. l. 3.

habet eandem rationem, quam latus E ad F; Sed *i* numeri E, F habent rationem commensurabilem ab vnitate. Ergo latera *k* A B, & C D longitudine sunt commensurabilia. i def. 7. l. 3. k def. 8. l. 3.

Tertiò sint latera A B, & C D longitudine incommensurabilia. Dico eorum quadrata H, & k non habere proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum. Si enim quadratum H ad quadratum K haberet proportionem, quam quadratus numerus quilibet M ad quadratum numerum N, essent *l* latera A B, & C D longitudine commensurabilia, quod est falsum, & contra hypothesin. Non ergo quadratū H ad quadratum K proportionem habere potest, quam numerus quadratus habet ad numerum quadratum. l par. 2. huius pr.

Quarto quadratum H ad quadratum K non habeat proportionem eandem, quam numerus quadratus habet ad quadratum numerum, siue illa commensurabilia sint, siue omnino inter se incommensurabilia. Dico eorum latera A B, & C D esse longitudine incommensurabilia. Si enim latera A B, & C D dicantur esse longitudine commensurabilia *m* habebūt eorum quadrata H, & K, proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, quod est contra hypothesin. Non ergo latera A B, & C D longitudine commensurabilia sunt; Vt fuerat propositum. m par. 1. huius pr.

COROLLARIVM I.

Eucl 5. & 8. X.

Colligitur ex demonstratione primę partis huius propositionis, quòd quantitates commensurabiles habent proportionem, quam numerus ad numerum; Et illæ, quæ habent eandem rationem, quam duo numeri inter se, erunt commensurabiles; & quæ incommensurabiles sunt, non erunt inter se, vt numerus ad numerum. Et illę quę non sunt inter se, vt duo numeri, incōmensurabiles erunt. Nam *n* quilibet duo numeri commensurabilem proportionem inter se habent, cum saltem vnitas sit eorum communis mensura, & nulla commensurabilis proportio excogitari potest, quæ in numeris exprimi non possit. Ergo è contra nulla incommensurabilis proportio in numeris exprimi poterit; & ideo patet propositum. n ex def. 7. l. 3.

COROLLARIVM II.

Patet lineas, vel quantitates, quæ longitudine sunt com-

mensurabiles, omnino potentià commensurabiles esse: Nam
o par 1. huius pr. eorum o quadrata sunt vt numeri quadrati. Quæ p verò potestate tantùm commensurabiles sunt, erunt longitudine incommensurabiles. Et quę q longitudine incommensurabiles
p par. 4. huius pr. sunt, possunt aliquando potestate commensurabiles esse,
q par 3 huius pr. quando scilicet eorum quadrata habent proportionem inter se eandem, quam duo numeri, qui non sint quadrati, vel non similes. Et tandem illę, quę potestate incommēsurabiles sunt,
r par. 2. huius pr. omnino longitudine incommensurabiles erunt. Nam r si longitudine commensurabiles essent, eorum quadrata, seu potestates essent commensurabiles. Quod est contra hypotesin.

Eucl. 10. X.

COROLLARIVM III.

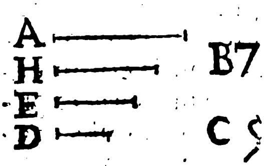
Manifestum etiam est quatuor quantitatum proportionalium antecedentes, aut longitudine, aut potestate tantùm esse vnà commensurabiles, aut vnà incommensurabiles
def. 8. lib 3 consequentibus. Si enim prima partes est secundę, erit s tertia eædem partes quartæ atque prima partes est secundę. Et si prima ad secundam nullam commensurabilem rationem ha-
t def 12. l. 3 buerit, neque t tertia ad quartam proportionem commensurabilem habebit.

Eucl. 11. X.

PROPOS. IX. PROBL. II.

Propositæ quantitati inuenire duas alias incommensurabiles, altera quidem longitudine tantùm, altera verò etiam potestate.

Sit quælibet quantitas A, huic primò inueniri debet alia
a sch. pr. 45. l. 8. incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur a duo
b pr. 11 & 10. lib. 4 & sch. pr. 3. huius. numeri, B quidem quadratus, & C non quadratus. Deinde b vt est numerus B ad C, ita fiat A ad D, atque inter A, & D ponatur media proportionalis E. Dico E esse incommensurabilem longitudine tantùm ipsi A. Quoniam est c qua-



c cor. 8 pr. 17. l. 4. & cor. 1. pr. 1. huius. dratum ex A ad quadratum ex E, vt A ad tertiam proportionalem D, vel d vt numerus B ad C; sed numerus B ad nume-
d pr. 7. l. 3. rum C non habet proportionem, quam numerus quadratus
e pr. 8. huius ad numerum quadratum: Igitur e latera A, & E longitudine

sunt

sunt incommensurabilia. Et quia f potestate sunt commensurabilia, cùm quadratum ex A ad quadratum ex E habeat proportionem, quam numerus B ad numerum C. Ergo A, & E incommensurabiles sunt tantummodo longitudine. f def 4. & cor. 1. pr. 8. huius. g pr. 10. l. 4. & sch pr. 3. huius.

Secundò eidem A inuenienda sit alia incommensurabilis longitudine, & potestate. Inueniatur g H media proportionalis inter A, & E. Dico H esse quęsitam. Quoniam h quadratum ex A ad quadratum ex H est, vt A ad tertiam proportionalem E; estque i A incommensurabilis longitudine ipsi E; Ergo k quadratum ex A quadrato ex H incommensurabile erit. Quare l A, & H incommensurabiles erunt potestate; & ideo incommensurabiles omnino longitudine. Vt propositum fuerat. h cor 3. pr. 17 lib. 4. & cor 1 pr 1. huius. i par. 1. huius pr. k cor. 3. pr. 8 huius. l def. 4 & cor 2. pr. 8. huius.

PROPOS. X. THEOR. VIII.

Eucl. 18. 19 X.

Si fuerint duę quãtitates inęquales, erit semissis minoris media proportionalis inter semisummam, & semidifferentiã maioris, & lateris potẽtis differentiã quadratorum inęqualium quantitatum; & hę erunt vnà commensurabiles longitudine, vel vnà incommensurabiles.

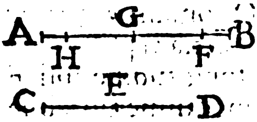
Sint duæ quantitates inęquales, A B maior, cuius semissis A G, & C D minor, cuius dimidium C E; patet a C E minorem esse ipsa G A; & propterea ex quadrato maioris A G, seu G B auferri poterit quadratum minoris C E: Sitque b residuum quadratum lateris G F, & secetur G H ęqualis G F. Et quia G B c ad G F cum C E est, vt A B ad H F cum C D (cùm illæ sint harum semisses): ergo d sicuti quadratum ex G B ęquale est quadratis ex G F, & ex C E, ita quadratum ex A B ęquale erit quadratis ex H F, & ex C D: & propterea H F erit latus quadrati differentialis inter quadrata inęqualium A B & C D; & A F erit semisumma, & F B semidifferentia ipsarum A B, & H F. Dico primò C E esse mediam proportionalem inter A F & F B. Quoniam duarum inęqualium A G, & G F, (scilicet medietatum ipsarum A B, H F) est A F aggregatum & differentia F B; quadratum e maioris A G ęquale erit quadrato minoris G F vnà cum producto A F B ex aggregato, & differentia; sed quadratum eiusdem A G ęquale est quadrato eiusdem G F vnà cum quadrato ipsius C E: Igitur quadratum a pr. 1. l. 3. b ex pr. 18. l. 5. & cor 2 pr. 4 huius. c pr. 11. l 3. d pr 18. l. 4 & cor 2. pr. 1. huius. e cor. pr 22. l. 5 & pr. 3. huius.

ipsius

ipsius C E æquale est producto ex A F in F B; ideoque f C E, semissis minoris, media proportionalis est inter maioris segmenta A F, & F B, scilicet inter semisummam & semidifferentiam maioris A B, & H F lateris potentis differentiam quadratorum inequalium A B, & C D. Dico secundò si segmenta A F, & F B longitudine commensurabilia sunt, esse quoque A B ipsi H F longitudine cõmensurabilem. Sit duarum longitudine commensurabilium A F, & F B communis mensura X: Manifestum est g X metiri quoque aggregatum A B, cumque X mẽsuret A F, & F B, seu ei ęqualem A H, metietur quoque X ipsam H F differentiam earundem A F, & A H. Quapropter X metietur ipsas A B, & H F; & ideo A B, & H F longitudine commensurabiles erunt.

f cor. 2. pr. 1. lib. 4. & sch. pr. 3. huius.

g def. 3. huius, & ax. 6 l. 1.



Tertiò, sint A B, & H F commensurabiles longitudine. Dico A F, & F B longitudine commensurabiles esse. Quia h quam proportionem commensurabilem longitudine habet A B ad H F, eandem habet G A illius semissis ad G F dimidium huius: Igitur i duę commensurabiles longitudine A G, & G F aliquam communem mensuram habebunt, quę sit X: k Vnde eadem X metietur illarum aggregatum A F, atque earundem differentiam F B; & propterea segmenta A F, & F B longitudine commensurabilia erunt.

h pr. 11. & def. 8. l. 3.

i def 3. huius.

k ax. 6. l. 1.

Quartò sit A F incommensurabilis longitudine ipsi F B. Dico A B longitudine incommensurabilem esse ipsi H F. Si enim hoc verum non est, sint A B, & H F longitudine commensurabiles: Erunt l igitur vt in tertia parte dictum est, ipsę A F, & F B longitudine commensurabiles, quod est contra hypothesin. Quare incommensurabiles longitudine sunt A B, & H F.

Quinto sit A B incommensurabilis longitudine ipsi H F. Dico A F, & F B longitudine incommensurabiles esse. Nam si incõmensurabiles longitudine nõ credantur, erunt m A B & H F commensurabiles longitudine, quod est contra hypothesin. Quare A F, & B F longitudine incommensurabiles sunt. Quod erat propositum.

m par. 2. huius pr.

COROLLARIVM I.

Patet, quòd si duę quantitates commensurabiles componãtur, & totum vtrique ipsarum commensurabile erit; & si

tota

tota vni ipsarum commensurabilis fuerit, & illę commensurabiles erunt. Nam illę, vt dictum est, n habent aliquam communem mensuram, quę necessariò differentiam earum, & aggregatum mensurabit. n par 1. huius pr.

COROLLARIVM II.

Eucl. 17. X.

Constat duarum incommensurabilium quantitatum summam, vel differentiam inter se, & vtrique ipsarum incommensurabilem esse.

Nam in quarta parte huius propositionis supposite fuerunt duę quantitates A F, & F B incommensurabiles, & ostensa fuit earum summa A B incommensurabilis ipsi H F differentię earundem. Rursus si summa A B non credatur incommensurabilis vni ipsarum, vt F B, habebunt o A B, & F B aliquam communem mensuram, quę p residuam A F quoque metietur; ideoque A F, & F B commensurabiles erunt; quod est contra hypothesim. o def. 3. huius. p ax. 6. l. 11.

COROLLARIVM III.

Colligitur ex constructione huius propositionis, qua ratione maior inęqualium quantitatum secari possit, vt semissis minoris media proportionalis sit inter facta segmenta. Si enim G F latus quadrati differentialis inter quadratum ex G B, & C E (quę sunt semisses inęqualium A B, & C D) tollatur ex G B, secta q erit A B in F in duo segmenta A F, F B, inter quę C E semissis minoris media proportionalis est. q par. 1. huius pr.

COROLLARIVM IV.

Et si semissis minoris media proportionalis fuerit inter maioris segmēta, erunt facta segmēta ęqualia semisummę, & semidifferentię maioris datarū, & lateris differentialis quadratorum inęqualiū quantitatū. Nam C E semissis minoris D C fuit media proportionalis inter segmenta A F, F B; & ostensum fuit maius segmentum A F ęquale A G semissi maioris A B, & G F semissi lateris F H quadrati differentialis inter quadrata ex A B, & C D, atque F B ęqualis fuit differentię earundem A G, & G F.

DE-

DEFINITIONES SECVNDAE.

I.

Quantitas notę mensurę, cui cętere comparantur; vocetur Rationalis, & eius quadratum Rationale.

II.

Quantitates, quę expositę Rationali commensurabiles sunt lõgitudine, vel potentià tantũmodo, vocẽtur Rationales.

III.

Quę verò expositę Rationali incommensurabiles sunt longitudine, vel potentià tantùm: vocentur Irrationales.

IV.

Et quantitates productę, quę exposito quadrato Rationali commensurabiles sunt, vocentur quoque Rationales: Quę verò eidem Incommensurabiles sunt, vocentur Irrationales.

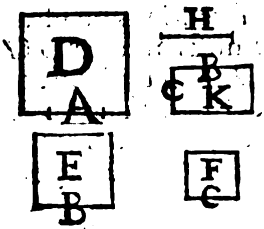
V.

Atque latera, quę possunt quantitates productas irrationales: vocentur Irrationalia.

Si enim proponatur aliqua quantitas A certæ, & notæ magnitudinis & mensuræ, manifestum est, quòd omnium aliarum B & C, quæ cum illa exposita comparari possunt, erunt quædam ipsi A commensurabiles longitudine & potentià, aliæ verò potentià tantùm, pariterque aliæ eidem expositæ incommensurabiles erunt longitudine tantùm, quędam verò longitudine, & potentià eidem incommensurabiles erunt: Iam exposita quantitas A, ratione cuius cętera commensurabiles sunt, vel incommensurabiles: vocetur Rationalis; Et quadratum eiusdem A, nempe D, quod certam quoque mensuram habet, pariter vocetur Rationale.

Et si quidem B commensurabilis est longitudine rationali A, vocabitur B Rationalis quoque ex comparatione; Et si tantummodo quadratum E ex latere B commensurabile fuerit quadrato Rationali D, at longitudine incõmensurabilis sit B ipsi A, idest a quadratum E ad quadratum D sit quidem, vt numerus ad numerum, sed non vt numerus quadratus ad numerum quadratum: tunc ipsa B vocatur etiam Rationalis ex comparatione, & eius quadratum E, quatenus cõmensurabile est exposito quadrato Rationali D, vocatur quoque Rationale. Deinde sit C longi-

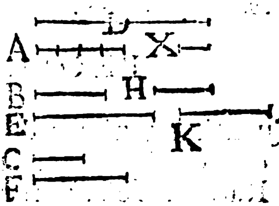
a pr. 8. huius.



longitudine incommensurabilis expositę Rationali A: Dicetur C Irrationalis, eiusque quadratum F, quando Rationali quadrato D incommensurabile est, vocatur quoque Irrationale; Et similiter latus C, potens Irrationale quadratum F, dicetur pariter irrationale, quatenus C potentià Incommensurabilis est expositæ Rationali A.

Et nedùm quadratum, sed etiam rectangulum, seu productum K ex lateribus B in C Irrationale dicetur, si incommensurabile fuerit quadrato expositę Rationalis A; Et latus H, potens quadratum æquale producto Irrationali K, dicetur quoque Irrationale.

Postea quia duæ quantitates, quæ expositę Rationali comparantur possunt quoque inter se ipsas comparari; propterea possunt esse duæ comparatæ quantitates ambę Rationales, vel ambę Irrationales ex comparatione, at inter se ipsas collatæ possunt esse commensurabiles longitudine, & potentià, vel potentià tantùm, vt si duæ B, & C sint rationales, quatenus longitudine commensurabiles sunt expositę Rationali A, idest si B ad A sit, vt numerus 5. ad 4. & C ad A sit, vt 6. ad 4. erunt B, & C Rationales, & inter se longitudine commensurabiles, eo b quod vni tertię A commensurabiles sunt longitudine, pariterque c potentià, eo quod quadrata laterum commensurabilium sunt inter se, vt duo numeri.



b cor. pr. 12 l. 3.

c cor. 2. pr. 8. huius.

Secundò si qualium partium quadratum D est 16, sit quadratum E 8 partes, & quadratum F 24; tunc d quidem B, & C non longitudine, sed potentià Rationali A commensurabiles erunt; Nam eorum quadrata E, & F ad quadratum Rationale D eandem proportionem habent, quam numeri 8 & 24, non quadrati, habent ad numerum 16 quadratum; Et hac de causa B, & C dicentur Rationales: Et quia inter se ipsas potestate tantùm commensurabiles sunt, eo quod 8 ad 24, seu 4 ad 12 non habet proportionem, quam numerus quadratus ad numerum quadratum, dicentur B, & C Rationales, inter se verò potentià tantùm commensurabiles.

d pr. 8. huius.

Si verò qualium partium quadratum D est 16, sit quadratum E 6, & quadratum F 24 partes; Tunc quidem B, & C dicentur Rationales, propterea quod potentià tantùm commensurabiles sunt Rationali A, non autem longitudine, eo quod vterque numerus 6 & 24 sit non quadratus, & numerus 16 sit quadratus; Et quoniam qualium partium quadratum E est 6 earundem quadratum F est 24 & numeri 6 & 24 non sunt quadrati: Ergo eorum latera B, & C numeris exprimi non possunt, quatenus rationales sunt, idest quatenus ab exposita Rationali A, cui comparantur, denominationem, & mensuram sortiuntur; sed si absolutè considerentur latera B, & C, erunt inter se longitudine commensurabilia, cum

eorum quadrata sint inter se, vt 6 ad 24 qui numeri, licet non sint qua-
e pr.37.l.8. *drati, e sunt tamen plani similes, qui sunt inter se, vt quadrati numeri 4, & 16, propterea B, & C iure merito vocari possunt Rationales, & inter se longitudine commensurabiles.*

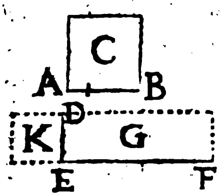
Tandem si vt circuli radius ad latus inscripti quadrati, & ad radium eiusdem, ita fiat quadratum Rationale D ad quadratum E lateris B, &
f ex pr.31.l.5. & pr.8.huius. *ad quadratum C lateris B; Manifestum f est nedum B, sed C quoque incommensurabilem esse longitudine, & potentiâ expositæ Rationali A; Et hac de causa erunt B, & C Irrationales, at inter se nihilominus erunt*
g pr.31.l.5. *longitudine commensurabiles, eo quod g latus quadrati duplum est radij eius. Dicentur igitur B, & C in tali casu, Irrationales inter se longitudine commensurabiles.*

Eucl.10.21. X.

PROPOS. XI. THEOR. IX.

Quantitas genita ex ductu duorum laterum Rationalium, quę quidem inter se sint longitudine commensurabilia, Rationale est. Et si quantitatis productę Rationalis vnum latus Rationale fuerit, erit reliquum latus Rationale, & longitudine commensurabile reliquo lateri.

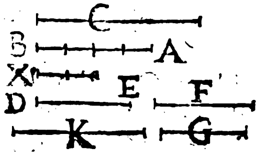
Sit exposita Rationalis A B notæ mensuræ, cuius quadratum C, & productum G, cuius duo latera D E, & E F primùm sint Rationalia, idest Rationali expositæ A B sint commensurabilia, aut longitudine, aut potentiâ tantùm, atque etiam sint D E, & E F inter se commensurabilia longitudine.



a pr.34.l.1. & def.2.huius. Dico G Rationale esse, idest commensurabile ipsi C. Lateris a D E fiat quadratum K. Quoniam Rationalis D E Ra-
b def.2. & 4.huius. tionali expositę A B commensurabilis est longitudine, vel
c def.2.sec.huius. potentiâ tantùm, erit b quadratum K commensurabile Rationali quadrato C, respectu cuius cætera dicuntur Rationalia;
d pr.1.l.4. & sch.pr.3.huius. & ideo c K Rationale erit. Deinde quia eadem D E ducta in se ipsam efficit quadratum K; & ducta in E F efficit productum G: erit d K ad G, vt latus D E ad E F; estque ex hypo-
e cor.3.pr.8.huius. thesi D E ipsi E F longitudine commensurabilis. Igitur e K
f cor.pr.17.l.3. ipsi G commensurabilis quoque erit: Cùmque duo C, & G eidem K commensurabilia sint, erit f G commensurabile ra-
g def.4.sec.huius. tionali C; & propterea g Rectangulum, vel productum G Rationale erit.

Secundò

Secundò iisdem positis sit rectangulum, vel productum G Rationale, idest commensurabile quadrato Rationali C; atque eiusdem producti G vnum latus D E sit Rationale, idest commensurabile Rationali expositæ A B lõgitudine, vel potentiâ tantùm. Dico eiusdem producti reliquum latus E F Rationale esse, & reliquo lateri D E erit commensurabile longitudine. *h* Rursus fiat quadratum K lateris D E: erit, vt antea dictum est K Rationale; sed ex hypothesi productũ G Rationale est: *i* Igitur G, & K quadrato C Rationali exposito cõmensurabilia erunt; ideoque *k* G, & K inter se commensurabilia erunt; sed *l* vt K ad G, ita est latus D E ad E F (cùm eadem D E ducta in D E, & E F efficiat K, & G): Ergo *m* latera D E, & D F commensurabilia sunt longitudine; estque exposita Rationalis A B ipsi D E Rationali aliquo modo commensurabilis; igitur *n* E F Rationali A B commensurabilis erit, vel longitudine, vel potentiâ tantùm; & propterea E F Rationalis erit, & ostensa fuit longitudine commensurabilis lateri D E. Quod erat ostendendum.



h pr 34 l.1. & def.2. huius.
i def 4 sex. huius.
k cor.pr.27. l 3.
l pr 1. l.4. & sch. pr.3. huius.
m cor 3. pr. 8. huius.
n cor.pr.18. l.3.

COROLLARIVM.

Eucl. 22. X.

Patet si spatium Rationale ad latus Rationale applicetur, latitudinem efficere Rationalem, & commensurabilem longitudine lateri, cui applicatum est.

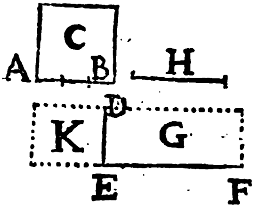
PROPOS. XII. THEOR. X.

Eucl. 23. X.

Productum à duobus lateribus Rationalibus, sed inter se commensurabilibus potentiâ tantùm: Irrationale est, & latus ipsum potens irrationale est: Vocetur autem Mediale, & productum, aut quadratum ei æquale, vocetur Mediale.

Sit exposita Rationalis A B, cuius quadratum Rationale C, & productum G, cuius latera D E, & E F sint Rationalia, sed inter se sint potentiâ tantùm commensurabilia. Dico primò productum G Irrationale esse. Fiat *a* lateris D E quadratum K, erit, vt *b* dictum est, quadratum K Rationale. Et quoniam *c* sicuti latus D E ad E F, ita est quadratum K ad produ-

a pr.34.l.1. & def.2. huius.
b in pr.11. huius.
c pr 1.l.4. & sch.pr.3. huius.



ctum G; estque latus D E ipsi E F longitudine incommensurabile (cùm potentiâ solummodo commensurabilia supposita sint); Igitur d productum G ipsi K incommensurabile erit; sed rationale C eidem K Rationali commensurabile erat: Igitur G ipsi C incommensurabile erit (aliàs si commensurabile credatur G eidem C, essent K, & G commensurabiles vni tertio C, & ideo e inter se cõmensurabiles, quod est contra hypothesin). Quare f G incommensurabile existens ipsi C quadrato Rationalis expositæ A B, erit Irrationale.

d cor. 3. pr. 8. huius.

e cor. pr. 17. l. 3.

f def. 4 sec. huius.

Secundò latus H possit quadratum æquale spatio, vel producto G, vel sit g H media proportionalis inter latera D E, & E F. Dico H Irrationalem esse. Quoniam quadratum ex H æquale est producto G, estque G incommensurabile quadrato Rationali C: Igitur quadratum ex H incommensurabile erit quadrato Rationali C; & ideo h latus H ipsi A B Rationali nec potentiâ, nec longitudine commensurabile erit; & propterea H i Irrationalis est. Quæ erant ostendenda. Vocetur H Media, propterea quod media proportionalis est inter duas Rationales potentiâ tantùm inter se commensurabiles. Et productum G, vel quadratum ex H, vocetur Mediale.

g pr. 10 l. 4. & sch. pr. 3. huius.

h cor. 2. pr. 8. huius.

i def. 3. sec. huius.

COROLLARIVM.

Eucl. 13. 14 X.

Patet, quòd si duarum quantitatum commensurabilium vna alicui tertiæ incommensurabilis sit, erit & reliqua eidem incommensurabilis, longitudine quidem, si illæ longitudine commensurabiles & incommensurabiles sunt; aut potentiâ, si priores potentiâ commensurãtur, aut non commensurãtur.

In prima enim parte huius propositionis fuerunt quantitates C, & k inter se commensurabiles, & K incommensurabilis erat ipsi G, & ostensa fuit C incommensurabilis eidem G. vnde patet, quòd si C, & K longitudine commensurabiles fuissent, & k ipsi G longitudine incommensurabilis, esset quoque C eidem G longitudine incommensurabilis.

At si C, & K potentiâ tantùm commensurabiles fuerint, & K ipsi G potentiâ sit incommensurabilis; erit C eidem G potentiâ incommensurabilis.

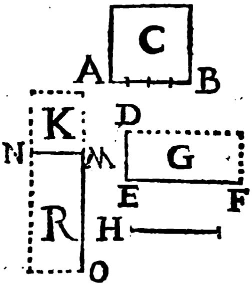
PRO-

PROPOS. XIII. THEOR. XI.

Eucl. 23. X

Productum mediale ad latus Rationale applicatum latitudinem efficit Rationalem, sed longitudine incommensurabilem priori lateri.

Sit latus mediale H, eiusque quadratum mediale, sit æquale producto G, contento sub duabus rationalibus D E, & E F potentià tantùm inter se commensurabilibus. Applicetur a postea productum R æquale quadrato ex H, vel spatio G ad latus Rationale M N vt sit reliquum latus M O. Dico M O Rationale esse, & ipsi M N longitudine esse incommensurabile.



Quoniam producta G, & R æqualia sunt, b erit reciprocè latus M N ad E F, vt D E ad M O; & c quadratum ex M N ad quadratum ex E F erit, vt quadratũ ex D E ad quadratum ex M O; Suntque M N, E F, & D E Rationales ex hypothesi, & ideo d saltem potentià commensurabiles Rationali expositę A B, & e inter se: Igitur f quadratum ex D E ad quadratum ex M O eandem commensurabilem rationem habet, quàm quadratum ex M N ad quadratum ex E F; Sed g quadratum ex D E rationali commensurabile est quadrato C expositę Rationalis A B: Igitur h quadratum ex M O commensurabile est eidem Rationali quadrato C; & propterea i latus M O Rationale erit. Postea k fiat quadratum K ex latere N M. Et quia N M Rationalis est, erit l quadratum K Rationale quoque, seu cõmensurabile exposito C Rationali; sed productum R, seu G Irrationale erat, & ideo eidem C incommensurabile: Igitur m K ipsi R incommensurabile erit; Est verò n latus N M ipsi M O, vt quadratum K ad productum R. Ergo o latus N M ipsi M O incommensurabile erit longitudine; vt propositum fuerat.

a pr 20. l. 4. & sch pr 3. huius.
b pr. 14. l. 4 & sch. pr. 3. huius.
c pr. 18 l. 4. & cor. 2. pr. 1. huius.
d def 2 sec. huius
e cor. pr. 17. l. 3.
f cor 3 pr. 8 huius.
g def. 2 sec. huius.
h cor pr. 17. l. 3.
i def 2. sec. huius.
k pr. 34 l. 1. & def 2. huius.
l def. 2. sec. huius.
m cor prop. 12. huius.
n pr. 1. l. 4. & sch pr. 3. huius.
o cor. 3 pr. 8 huius.

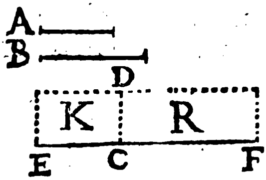
PROPOS. XIV. THEOR. XII.

Eucl 24. 25. X.

Quantitas commensurabilis longitudine, vel potentià tantùm

tùm mediali, medialis est. Et productum ex duabus medialibus longitudine commensurabilibus, mediale est.

Sit primò A latus mediale, & B sit commensurabilis longitudine, aut potentià tantùm ipsi A. Dico B medialem esse. Sit
a pr 20. l. 4. & sch. pr. 3. huius. exposita Rationalis D C, ad quam *a* applicentur spatium, vel productum K æquale quadrato mediali ex media A, & productũ R æquale quadrato ex B. Et quia spatium mediale K applicatur ad latus Rationale DC: Igi-



b pr. 13. huius. tur *b* reliquum latus E C Rationale erit, sed longitudine incommensurabile ipsi D C: Cùmque quadratum ex B ad quadratum ex A commensurabile sit, (eo quod latera B, & A commensurabilia saltem potentià supponuntur), sitque productum K æquale quadrato ex A, atque productum R æquale quadrato ex B: Igitur productum K commensurabile
c pr 1. l. 4. & sch pr. 3. huius. est spatio, vel producto R; Estque *c* E C ad C F, vt K ad R:
Ergo *d* E C ipsi C F longitudine commensurabile est, atque
d c. r. 3 & 2 pr 8 huius. etiam potentià; Sed eidem E C potentià tantùm commensuratur exposita Rationalis D C, cùm E C Rationalis sit quo-
e cor. pr. 17. l. 3. que: Igitur *e* C F Rationali D C saltem potentià commensurabilis erit; & ideo *f* C F Rationalis quoque erit. Et quia
f def 2. sec. huius. duarum C F, & E C longitudine commensurabilium vna E C longitudine incommensurabilis est Rationali D C: *g* Igitur
g cor pr. 12. huius. reliqua C F eidem Rationali D C longitudine incommensurabilis erit; & propterea spatij R latera D C, & C F Rationa-
h pr. 12 huius. lia erunt, & potentià tantùm commensurabilia; & *h* idcirco productum R mediale erit; ideoque latus B medium erit, eo quod potest spatium R mediale.

i pr 14. l. 1. & sch pr. 3. huius. Secundò rectanguli, vel producti R latera sint D C, & F C medialia, quæ inter se longitudine sint commensurabilia. Di-
k pr 13. huius. co R Mediale esse. Fiat *i* quadratum K ex mediali C D, erit-
l pr. 1. l. 4. & sch. pr. 3 huius. que *k* quadratum K medium; Et quia, *l* vt latus C F ad D C, ita est R ad K; estque C F ipsi D C longitudine commensu-
m cor 3. pr. 8 huius. rabile: Igitur *m* R ipsi K commensurabile est. Quare *n* R com-
n par. 1 huius pr 2 mensurabile existens mediali K, Medium erit. Quod erat propositum.

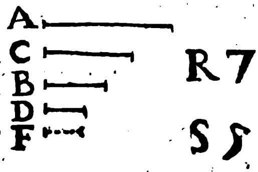
PRO-

PROPOS. XV. PROBL. III.

Eucl 28. X.

Duas mediales inuenire potentià tantùm commensurabiles, quarum productum sit Rationale.

Sit A Rationalis, & sumantur numeri R, & S quorum quilibet sit primus, & ideo *b* non erunt inter se vt numerus quadratus, ad numerũ quadratum; (& *c* fiat vt R ad S, ita A ad F, & inter A, & F reperiatur media proportionalis B: *d* erit quadratum ex A, ad quadratum ex B, vt R ad S): & ideo *e* erũt A, & B Rationales potentià tantùm commensurabiles. postea *f* sit C media proportionalis inter A, & B, & fiat vt A ad B, ita C ad D. Dico C, D esse mediales potentià tantùm commensurabiles, quarum productum Rationale est. Quoniam A, B sunt Rationales potentià tantùm commensurabiles, erit *g* productum ex A in B mediale; *h* sed media proportionalis C potest productum extremarum A, & B; Ergo *i* C medialis est. Cùmque C ad D sit vt A ad B, & A, B potentià tantùm commensurabiles sunt; erit *k* C, ad D tantùm potentià commensurabiles; & propterea *l* D, quę mediali C commensurabilis est, erit quoque medialis. Quapropter inuentæ sunt duę mediales C, & D potentià tantùm inter se commensurabiles. Dico iam C, & D efficere productum Rationale. Quia duę proportiones A ad B, & C ad D eędem sunt, & proportio A ad C ablata ex ratione A ad B eadem est proportioni C ad B ablatę ex ratione C ad D: Igitur *m* residuæ rationes C ad B, & B ad D eædem quoque sunt inter se; *n* & ideo quadratum ex B Rationali ęquale erit producto ex medialibus C, & D (cùm B media proportionalis sit inter C, & D). Vnde productum ex C in D Rationale erit. Quod erat propositum.



a pr. 21. l. 8.
b cor. pr. 37. l. 8.
c pr. 11. 10. l. 4. & sch. pr 3 huius.
d pr. 17. l. 4. & cor 1. pr. 2. huius.
e pr. 8 & def. 2. sec huius.
f 10. 11. l. 4. & sch. pr. 3. huius.
g pr 12. hu.
h cor. 2 pr. 14 l. 4. & sch. pr. 3 hu.
i pr. 12. hu.
k cor. 3. pr. 8 huius.
l pr. 14. hu.
m pr. 21. l. 5
n cor. 2. pr. 14. lib. 4. & sch. pr. 3. hu.

COROLLARIVM I.

Colligitur ex constructione, & demonstratione huius propositionis, quòd si, vt prima quantitas ad secundam, ita fiat media proportionalis inter eas, ad quartam: erunt quatuor illę quantitates continuè proportionales.

Nam

Nam A, C, B, D continuè proportionales ostensę sunt.

COROLLARIVM II.

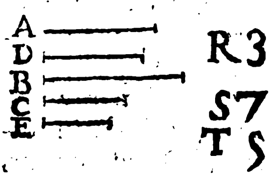
Rursus constat, quòd si vt Rationalis ad Rationalem potẽtià tantùm ei commensurabilem, ita fiat media proportionalis inter eas ad quartam: erunt duæ postremę consequentes mediales potentia tantùm commensurabiles, quarum productum est Rationale.

PROPOS. XVI. PROBL. IV.

Eucl. 29 X.

Duas mediales inuenire commensurabiles potentià tantùm, quarum productum sit mediale.

Sumantur *a* tres numeri R, S, & T, quorum quilibet primus numerus sit, & propterea non habebunt inter se eandem proportionem, quam habent numeri quadrati; Et sicuti in precedenti dictum est, fiat quadratum lateris Rationalis A ad quadratum lateris B, vt numerus R ad S, pariterque vt R ad T, ita quadratum ex A fiat ad quadratum ex C; Erunt *b* A, B, C Rationales potentià tantùm commensurabiles inter se; Iam *c* inter A, & B ponatur D media proportionalis, & fiat, vt D ad B, ita C ad E. Dico D, & E esse mediales potentià tantùm commensurabiles, quę efficiunt productum mediale. Quoniam A, & B sunt Rationales potentià tantùm commensurabiles: Erit *d* productum ex A in B, siue *e* quadratum ex media proportionali D (quod ęquale est tali producto) mediale, & D medialis. Deinde quia, vt D ad B, ita est C ad E, estque A ad D, vt D ad B: Ergo *f* A ad D est, vt C ad E; Et *g* permutando, vt A ad C, ita erit D ad E; & pariter *h* eorum quadrata proportionalia erunt: estque quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus R ad T. quare *i* D, & E potentià tantùm commensurabiles sunt, cùm numeri R, & T non sint inter se, vt duo quadrati numeri; estque D ostensa medialis; Ergo *k* ei commensurabilis E medialis quoque erit. Quapropter D, & E mediales erunt potentià tantùm commensurabiles. Postremo quia D ad B est, vt C ad E; Ergo *l* productum ab extremis D, & E ęquale erit producto ab intermedijs B, & C;



a pr. 21. & cor pr. 37. l. 8.
b pr. 8. & def. 2. sec. hu.
c pr. 1. 11. l. 4. & sch. pr. 3. huius.
d pr. 12. hu.
e cor. 2 pr. 14 lib. 4. & sch pr 3 hu
f pr 7. l 3.
g pr 12. l. 3
h pr 8. l. 4. & cor 2. pr. 1. huius.
i pr. 8. hu.
k pr. 14 hu
l cor 1 pr. 14 l. 4 & sch. pr. 3. hu.

&C; sed *m* productū ex B in C Irrationale, & mediale est. (quā- *m pr. 12. Ku-s*
doquidem B, & C sunt Rationales potentià tantùm commensurabiles): Igitur productum ex D in E mediale est. Vt erat propositum.

COROLLARIVM I.

Hinc constat productum ex duabus medialibus potentià tantùm commensurabilibus esse posse Mediale, vel Rationale.

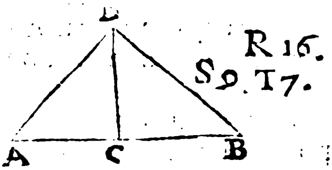
COROLLARIVM II.

Patet etiam si fuerint tres rationales potētià tantùm commensurabiles, & vt prima ad tertiam, ita fiat media proportionalis inter primam, & secundam ad aliam: erunt media proportionalis, & extrema potentià tantùm commensurabiles, quarum productum mediale est.

PROPOS. XVII. PROBL. V. *Eucl. 30. X.*

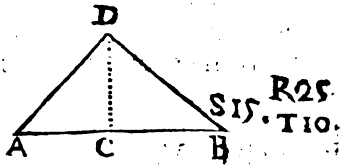
Duas rationales potentià tantùm commensurabiles inuenire tales, vt latus differentiæ quadratorum longitudine commensurabile, vel incommensurabile sit maiori.

Sit exposita rationalis A B, & primò reperiatur *a* numerus *a sch pr 47*
quadratus R, cuius vna portio S sit quadratus numerus, & al- *l. 8.*
tera T non sit quadratus numerus; Postea *b* fiat A B ad B C, vt *b pr. 11. l. 4.*
numerus R, siue numeri S, T, simul sumpti, ad numerum T: *& sch pr. 3.*
erit *c* per conuersionem rationis A *huius.*
B ad A C, vt numerus R ad nume- *c cor pr. 19.*
rum S; & *d* B D fiat media propor- *l 3.*
tionalis inter A B, & B C, atque A *d pr 10 l 4.*
D fiat media proportionalis inter *& sch pr. 3.*
B A, A C. Et quia *e* vt A B ad B C, *huius.*
ita est quadratum ex A B ad qua- *e cor. 2. pr.*
dratum ex B D, & vt A B ad A C, ita est quadratum ex A B ad *17 lib 4. &*
quadratum ex A D; estque A B ad B C, vt numerus quadra- *cor ... pr. 2.*
tus R ad numerum T non quadratum; Igitur quadrata ex A *huius.*
B, & B D non habent proportionem eandem, quam duo qua- *f def. 2. sec.*
drati numeri, sed quam numeri; ideoque *f* A B, & B D sunt *& pr. 8. hu.*



Rationales potentiâ tantùm inter se commensurabiles. & quia quadrata ex A B, & ex A D proportionem habent, quam duo
g pr. 8. huius numeri quadrati, erunt *g* latera A B, & A D longitudine com-
h cor. pr. 22. mensurabilia. Cùmq; *h* quadratum ex A B ad duo quadrata ex
l. 3. B D, & A D sit, vt numerus R ad duos numeros S & T, sitque
i cor. 1 prop. numerus R æqualis numeris S & T, erit *i* quadratum ex A B
16. l. 3. æquale quadratis ex B D, & ex A D: Et propterea quadratum ex A D erit differentia quadratorum ex A B & B D. Quapropter inuentæ sunt duæ Rationales A B & B D potentiâ scilicet quadrato tantùm commensurabiles, & A D latus differentiæ quadratorum commensurabile longitudine est maiori ipsarum A B.

k sch prop. Secundò reperiatur *k* quilibet numerus quadratus R, cuius
45. l. 8. duę portiones S & T non sint quadrati numeri, & ponantur ea, quę superius posita, & constructa sunt. Patet quòd quadrata ex A B, & A D non sunt inter se vt numerus quadratus ad numerum quadratum (cùm numerus S quadratus non sit); & ideò *l* A D, potens



l pr. 8. huius differentiam quadratorum ex A B & B D, longitudine incommensurabilis est maiori A B. Quapropter inuentę erunt duæ rationales A B, & B D potentiâ tantùm commensurabiles, ita vt latus differentię eorundem quadratorum longitudine incommensurabile sit maiori A B. Vt quęrebatur.

Eucl. 31. 32. X.

PROPOS. XVIII. PROBL. VI.

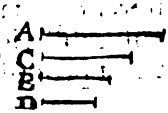
Inuenire duas mediales potentiâ tantùm commensurabiles, quarum productum sit Rationale, vel Mediale, ita vt latus differentię quadratorum illarum longitudine commensurabile sit, vel incommensurabile maiori.

a prop. 17. huius.

Reperiantur primò *a* duę Rationales maior A, & B minor
b pr. 10. 11. potentiâ tantùm commensurabiles, ita vt latus differentię
l. 4. & sch quadratorum earundem A, & B longitudine commensurabi-
pr. 3. huius le sit in primo casu, & incommensurabile in secundo, maiori
c cor 2. pr A; & *b* ponatur C media proportionalis inter A & B, & fiat vt
15 huius. A ad B, ita C ad quartam D. Patet *c* esse C, & D mediales po-
d pr. 1. l. tentiâ tantùm commensurabiles, quarum productum est Ra-
& cor. 2. pr. tionale: Et quia vt A ad B, ita est C ad D, erit *d* quadratũ ex A
1. huius.

ad

ad quadratum ex B, vt quadratum ex C ad quadratum ex D; & per conuersionem rationis, *e* vt quadratum ex A ad differentiam quadratorum ex A, & B, ita erit quadratum ex C ad differentiam quadratorum ex C, & D: ideoque *f* vt A ad latus differentiæ quadratorum ex A, & B, ita erit C ad latus differentię quadratorum ex C, & D; erat autem in primo casu, maior A longitudine commensurabilis lateri differentię quadratorum ex A, & B; in secundo verò longitudine incommensurabilis: Igitur *g* C longitudine commensurabilis erit in primo casu, & incommensurabilis in secundo, lateri differentię quadratorum ex C, & D. Quapropter inuentę sūt duę mediales C, & D potentià tantùm commensurabiles, quarum productum est rationale, ita vt latus differentię quadratorum ipsarum C, & D longitudine commensurabile sit in primo casu, & incommensurabile in secundo, maiori lateri.



e cor pr. 19. l. 5.
f pr 18. l. 4. & cor. 2. pr. 1. huius.
g cor. 3 pr. 8 huius.

Postea *h* reperiantur duæ Rationales A, F potentià tantùm commensurabiles, ita vt latus differentiæ quadratorum ex A, & F longitudine commensurabile sit maiori A in tertio casu, & incommensurabile longitudine eidem A sit in quarto casu. Et vt numerus primus V ad primum numerum X, ita fiat quadratum ex rationali A ad quadratum ex B: erunt A, & B rationales potentià tantùm commensurabiles, sicuti in prop. 15 huius ostensum est. Et *i* ponatur C media proportionalis inter A, & B, & vt C ad B ita fiat F ad D. Dico C, D esse mediales potentià tantùm commensurabiles, quarum productum est mediale, & latus differentiæ quadratorum commensurabile est, vel non, maiori. Quia vt C ad B, ita est F ad D, & A ad C est, vt C ad B: Ergo *k* A ad C est, vt F ad D; Et permutando, *l* vt A ad F, ita erit C ad D: Cùmque sint tres Rationales A, B, F potentià tantùm commensurabiles, & vt prima A ad tertiam F, ita est C (quæ media proportionalis est inter primam A, & secundam B) ad postremam D: *m* erunt C, & D commensurabiles potentià tantùm, quarum productum mediale est: Postea quia A ad F est, vt C ad D: Igitur, *n* vt ostensum est, maior A ad latus differentię quadratorum A, & F, erit vt C ad latus differentiæ quadratorum ex C, & D; Sed maior A commensurabilis longitudine est in tertio casu, & incommensurabilis in quarto, lateri differentię quadratorum ex A, & F.

A	
C	V 7
B	
F	X 5
D	

h pr. 17. huius.
i pr. 10. 11. l. 4 & sch. pr 3. huius.
k pr 7 l. 3.
l pr. 12. l. 3.
m cor 2 pr. 10. huius.
n par 1 huius pr.

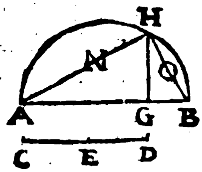
& F. Ergo maior C commensurabilis longitudine erit lateri differentię quadratorum ex C, & D in tertio casu, & incommensurabilis longitudine eidem differentiæ in quarto casu. Vt erat propositum.

Eucl. 33. X.

PROPOS. XIX. PROBL. VII.

Duo latera potentià incommensurabilia reperire, quorum summa quadratorum Rationalis sit; productum verò mediale.

a pr. 17. hu. Reperiantur a duę quantitates, A B maior, & C D minor Rationales potentià tantùm commensurabiles, ita vt maior A B incommensurabilis sit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum ipsarum A B, & C D; Et b maior A B secetur in G, ita vt C E semissis minoris, vel ei ęqualis H G media proportionalis sit inter segmenta A G, & G B; & c inter A B, & A G reperiatur media proportionalis N, pariterque O sit media proportionalis inter A B, & B G. Dico N, & O esse quæsitas in propositione. Quoniam maior A B secta est in G, ita vt sit C E semissis minoris media proportionalis inter segmenta A G & G B, atque maior A B longitudine incommensurabilis facta est lateri potenti differentiam quadratorum ex A B, & C D, & d eiusdem lateris differentialis, & maioris A B semisumma est A G, & semidifferentia est G D: Ergo segmenta A G, & G B longitudine sunt incommensurabilia. Et quia e vt G A ad A B, ita est quadratum ex N ad quadratum ex A B (cũ N media proportionalis sit inter G A, & A B), & sicuti A B ad B G, ita est quadratum ex A B ad quadratum ex O. Igitur ex f compositione ordinata erit quadratum ex N ad quadratum ex O, vt A G ad G B: Quare g quadratum ex N incommensurabile erit quadrato ex O, sicuti A G ipsi G B incommensurabilis erat longitudine; & propterea h latera N, & O potentià incommensurabilia erunt; & sunt i duo quadrata ex N, & ex O ęqualia quadrato Rationali ex A B: Ergo aggregatum quadratorum ex N, & ex O Rationale est. Tandem quia H G media proportionalis est inter segmenta A G, & G B, atque N, & O mediæ proportionales sunt inter totam A B, & eius segmenta A G, & G B: Igitur k productum ex A B in



b cor. 3 pr. 10. huius.
c pr. 10. l. 4. & sch pr. 3 huius.
d pr. 10. hu. eiusq; cor 4.
e cor 3 pr. 17. lib 4 & cor. 1. pr. 1. huius.
f pr. 10. l 3.
g cor 3 pr 8. huius
h def. 4. hu.
i pr. 18. l 5. & pr 4. hu.
k prop. 9. & cor 1 pr 14 l. 4 & pr. 4. huius.

HG

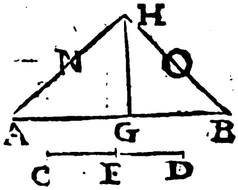
H G çquale erit producto ex N in O; est *l* autem productum ipsius A B in H G dimidium producti ex A B in C D (cùm C D dupla sit ipsius H G). atque *m* productum ex A B in C D mediale est (eo quod A B, & C D Rationales sunt potentiâ tantùm commensurabiles): Ergo *n* productum ex A B in H G ei commensurabile, mediale quoque erit; & propterea huic çquale productum ex N in O mediale erit. Quapropter duæ N, & O potentiâ incommensurabiles sunt, & summa quadratorum ex eis Rationalis est, at productum ex N in O mediale. Vt quçrebatur. *l pr. 1. l. 4. & sch pr. 3. huius. m pr. 12. huius n pr. 14. hu.*

PROPOS. XX. PROBL. VIII.

Eucl. 34. 35 X.

Duo latera potentiâ incommensurabilia reperire, ita vt aggregatum ex eorum quadratis sit mediale, productum verò rationale; vel productum sit mediale, & incommensurabile aggregato quadratorum.

Reperiantur *a* duæ mediales A B maior, & C D minor potentiâ tantùm commensurabiles, quç primò Rationale contineant, ita vt maior A B longitudine incommensurabilis sit lateri, potenti differentiam quadratorum ipsarum A B, & C D. Et reliqua perficiantur, vt in præcedenti propositione factum est: erunt, vt antea N, & O potentiâ incommensurabiles. Et quia *b* quadrata ex N, & O çqualia sunt quadrato ex mediali A B: Igitur *c* aggregatum quadratorum ex N, & O mediale erit. Deinde *d* quia productum ex H G in A B æquale est producto ex N in O, atque *e* productum ex H G in A B dimidium est producti ex A B in C D; hoc autem productum Rationale est ex constructione: Igitur *f* productum ex N in O (quod est commensurabile producto ex A B in C D, cùm sit eius semissis) Rationale quoque erit. Quare duæ N, & O sunt incommensurabiles potentiâ, & eorum quadratorum aggregatum Mediale est, at eorum productum Rationale. *a pr. 18. hu. b pr. 4. hu. c pr. 12. hu. d pr. 4. hu. e pr. 1. l. 4. & sch. pr. 3. huius f def 4. sec. huius.*



Secundò *g* reperiantur eçdem mediales A B, & C D cum omnibus dictis conditionibus, sed eorum productum sit mediale, & complerà constructione, vt prius erunt rursus N, & O potentiâ incõmensurabiles, & quadratorum *h* aggregatum *g pr. 18. hu. h prop 4. & 12 huius.*

earum-earundem mediale erit, cum sit equale quadrato medialis A B. Postea quia productum ex A B in C D mediale est ex constructione: Ergo *i* productum ex N in O mediale erit, eo quod est cõmensurabile, scilicet dimidium est producti ex A B in C D. Tandem quia factę sunt A B; & C D longitudine incommensurabiles, erit *k* quadratum ex A B incommensurabile producto ex A B in C D; estque productum ex N in O dimidium producti ex A B in C D, vt dictum est. Igitur *l* quadratum ex A B, seu aggregatum quadratorum ex N & O, incommensurabile est producto ex N in O. Et propterea repertæ erunt duæ N, & O potentià incommensurabiles, cum omnibus conditionibus quæsitis. Vt fuit propositum.

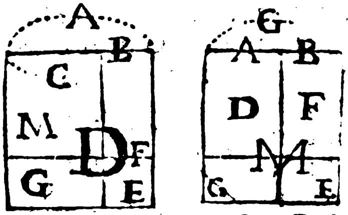
i pr. 1. l. 4. sch. pr 3. & pr. 14. huius
k pr. 1. l 4. sch. pr 3. & cor. 3 pr. 8. huius.
l cor. pr. 12. huius.

PROPOS. XXI. THEOR. XIII.

Eucl. 36. 73. X.

Duarum Rationalium potentià tantùm commensurabilium summa, vel differentia Irrationalis est. Vocetur autem summa Binomium; At earundem differentia Residuum; Atque Rationales illę Binomium, aut Residuum componentes vocentur Nomina.

Sint duę Rationales A, & B potentià tantùm commensurabiles. Dico ipsarum A, & B summam, vel differentiam C Irrationalem esse. Fiat *a* M quadratum ipsius C, & D sit quadratum ipsius A, & E sit quadratum ipsius B, & tam G, quàm F sit productum ex A in B. Manifestum est quando C est aggregatum ipsarum A, & B, vt in prima figura, esse *b* quadratum M ex aggregato laterum ęquale duobus quadratis laterum, scilicet D & E, & duplo producti ex lateribus A in B, scilicet ipsius G, & F, vel duplo producti F, & propterea quadratum M ęquale erit aggregato duorum quadratorum D & E, & dupli producti F; At quando C est differentia eorundem laterum, vt in secunda figura, *c* quadratum M ex differentia laterum minus erit, quàm duo quadrata D & E, & defectus erit duplum producti F; Et quoniam A, & B ponuntur potentià tantùm commensurabiles, erunt *d* ipsę incommensurabiles longitudine, & *e* eorum productum F mediale erit, atque *f* eorum quadrata, scilicet D, & E rationalia erũt,



a pr. 34. l. 1. & def. 2. & 1. huius.
b cor. 2. pr. 19 l 5 & pr. 2. huius.
c cor. 1. pr. 20. l. 5 & pr 2. huius.
d def. 4. huius
e pr 11 huius.
f def. 2. sec. huius.

&

& inter se commensurabilia: Quare g mediale, seu irrationale productum F incommensurabile est rationali quadrato D; & h sunt duo quadrata D, & E, simul sumpta, commensurabilia cuilibet eorum; scilicet quadrato D (eo quod quadrata D, & E commensurabilia inter se ostensa fuerunt): igitur i productum F incommensurabile est aggregato quadratorum D, & E; est verò duplum producti F commensurabile eius medietati, scilicet producto F. Igitur k duplũ producti F incommensurabile est summę quadratorum D, & E; Cùmque totum quadratum M aggregatum sit, in primo casu, & differentia in secundo, summæ quadratorum D, & E, & dupli producti F; Ergo l tam aggregatum, quàm differentia M incommensurabilis est summę quadratorum D, & E; Sed quadratum D commensurabile est summę quadratorum D, & E: Ergo m quadratum M, totale, vel differentiale, est incommensurabile quadrato D, erat autem ex hypothesi quadratum D Rationale: Igitur n quadratum M Irrationale erit; & propterea o C summa, vel differentia ipsarum A & B, Irrationalis erit, vt propositum fuerat. Vocetur autem summa C Binomium; & differentia C Residuum, vel Apotome. Et tam A, quàm B: vocentur Nomina Irrationalis C.

g pr. 12. & def. 3 sec. huius.
h cor. 1 pr. 10 huius.
i cor. pr. 12. huius.
k cor. pr. 12. huius.
l cor. 2. pr. 10. huius.
m cor prop. 12. huius.
n def. 4. sec. huius.
o def. 5. sec. huius.

COROLLARIVM.

Manifestum est nominum eiusdem Binomialis, aut Residuæ summam duorum quadratorum ex eis, Rationalem esse, & incommensurabilem mediali duplo producti eorundem nominum. Nam nominum A, & B Binomij, vel Residui C summa quadratorum, scilicet D, & E ostensa est in hac propositione, Rationalis, & incommensurabilis duplo producti medialis F eorundem nominum.

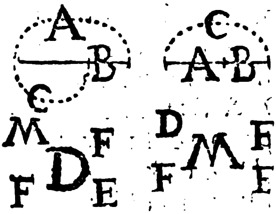
PROPOS. XXII. THEOR. XIV.

Eucl. 37. 74. X.

Duarum medialium potentiâ tantùm comensurabilium, quarum productum sit Rationale, summa, vel differentia Irrationalis est; Vocetur autem summa Bimedialis prima; Differentia verò vocetur Residua medialis prima; Et duæ illę partes Bimedialem primam, aut Residuam medialem primam efficientes: vocentur Nomina.

Sint

Sint duę mediales A, & B potentiâ tantùm commensurabiles, quarum productum, quod sit F, Rationale sit (quę reperiri posse constat ex pr. 15. huius), & C sit summa in primo casu, & differentia in secundo earundem A, & B. Dico C Irrationalem esse. Sit rursus D quadratum ipsius A & E sit quadratum alterius B, atque M sit quadratum ipsius C aggregati, vel differentię earundem A, & B. Patet *a* esse quadratum M, in primo casu, aggregatum summæ quadratorum D, & E, atque dupli producti F: At in secundo *b* M erit differentia duorum quadratorum D, & E simul sumptorum, & dupli producti F. Quoniam A, & B potentiâ tantùm sunt commensurabiles, erit *c* A ipsi B longitudine incommensurabilis; sed *d* vt B ad A, ita est productum ex A in B, scilicet F ad productum ex A in se, scilicet ad quadratum D: Igitur *e* productum F incommensurabile est quadrato D; Sed duplum ipsius F commensurabile est ipsi F; Igitur *f* duplum ipsius F incommensurabile erit quadrato D; estque summa quadratorum D, & E commensurabilis quadrato D, (eo quod A, & B supponuntur potentiâ tantùm commensurabiles); Igitur *g* duplum ipsius F incommensurabile est summæ quadratorum D, & E; ideoque *h* quadratum M, quod est aggregatū, vel differentia dupli ipsius F, & summæ quadratorum D & E, incommensurabile erit vtrique ipsorum; idest quadratum M incommensurabile erit duplo ipsius F; sed duplum ipsius F Rationale est (cùm F productū ex A in B Rationale sit ex hypothesi): Ergo *i* quadratum M, & eius latus C Irrationale erit, vt fuit propositum. Vocetur autem ipsarum A, & B summa C, Bimedialis prima, & earundem differentia C: Vocetur residua medialis prima.



a cor. 2. pr. 19. l. 5. & pr. 1 huius

b cor. 1 pr. 20. lib 5. & pr 2. huius.

c def 4 huius.

d pr 1 l. 4. & sch. pr 3. huius.

e cor 3. pr. 8 huius.

f cor. pr. 12. huius.

g cor. pr. 12. huius

h cor. 2 pr. 10. huius.

i def. 4. 5 sec. huius.

COROLLARIVM.

Manifestum est Bimedialis primę, vel Residuę medialis primę summam quadratorum ex nominibus factorum medialem esse, & incommensurabilem Rationali duplo producti eorundem nominum.

Nam Bimedialis primæ, vel Residuę medialis primę duo nomina in hac propositione fuerunt A, & B, & ostensa fuit summa quadratorum D, & E incommensurabilis duplo pro-

ducti

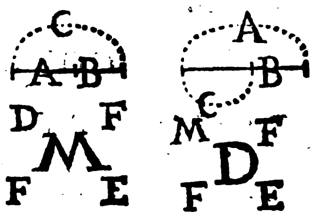
ducti F eorundem nominum A, & B; estque summa quadratorum D, & E Medialis, cùm sit commensurabilis quadrato Mediali D ex latere Mediali A.

PROPOS. XXIII. THEOR. XV.

Eucl. 38. 75. X.

Duarum Medialium potentià tantùm commensurabilium, quarum productum sit mediale, summa, vel differentia Irrationalis est: Vocetur summa Bimedialis secunda; Differentia verò vocetur Residua medialis secunda. Et illæ, quæ has Irrationales efficiunt, vocentur Nomina eius.

Sint duæ mediales A, & B potentià tantùm commensurabiles, quarum productum, quod sit F, mediale sit, quæ repertę fuerunt in pr. 16. huius; & reliqua perficiantur, vt in præcedenti propositione dictum est. Et quia A, & B potentià tantùm commensurabiles sunt. Ergo vt prius, ostendetur summam quadratorum D, & E incommensurabilē esse duplo producti F: Estque summa [a] quadratorū Medialium D, & E commensurabilis mediali quadrato D (cùm A, & B supponantur mediales potentià tantùm commensurabiles) Igitur [b] summa quadratorum D, & E medialis est: pariterque duplum producti ipsius F medialis, erit quoque mediale (eo quod mediali F commensurabile est eius duplū). Postea exponatur Rationalis N O, & [c] ei applicetur productum R ęquale summæ quadratorum D, & E, quod efficiat latitudinē OP. Et quia summa quadratorum D, & E medialis est, erit [d] R mediale, quod applicatum ad Rationalem N O efficiet [e] latus O P Rationalę incommensurabile longitudine ipsi N O: Simili modo ad Rationalem N O applicetur productum S ęquale duplo ipsius F medialis, quod similiter mediale erit, & ideo efficiet latus Q O Rationale; & longitudine incommensurabile ipsi N O. Et quoniam summa quadratorum D, & E incommensurabilis ostensa est duplo ipsius F, estque R ęqualis summę quadratorum D & E, atque S æqualis duplo ipsius F: Igitur R ipsi S incommensurabilis est, sed [f] vt R ad S, ita est latus O P ad O Q. Ergo [g] latus O P longitudine incommensurabile est lateri O Q, & sunt Rationa-



a cor. 1. pr. 10. huius.

b pr. 14. huius.

c pr 20. l. 4 & sch. pr. 3. huius.

d pr. 12. hu.

e pr. 13. hu.

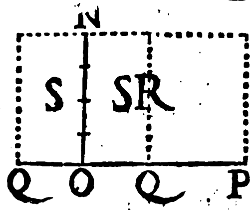
f pr 1 l. 4. & sch pr. 5. huius.

g cor. 3. pr. 8. huius.

h def 2. sec. huius, & cor. pr 17. l 3 i pr. 21, hu.

lia, vt dictum est: Igitur h tantum commensurabilia potentiâ inter se erunt O P, & O Q: Quare i P Q summa, vel differentia earum Irrationalis erit, quæ vocatur Binomialis, vel Residua. Tandem quia summa productorum Medialium R, & S, vel eorum differentia applicata ad Rationalem N O, efficit alterum latus P Q Irrationale: erit summa, vel differentia Medialiũ R, & S Irrationalis (Nam k si Rationalis esset applicata ad Rationalem N O, efficeret latitudinem P Q Rationalem, quod non ponitur); Sed quadratum M æquale est summæ in primo casu, & differentiæ in secundo Medialium R, & S. Igitur l quadratum M Irrationale est, & propterea eius latus C Irrationale erit; Vt erat propositum. Vocetur summa C Bimedialis secunda. Et differentia C earundem A, & B: Vocetur Residua Bimedialis secunda.

k cor. pr. 11. huius.



l def 4 & 5. sec. huius.

COROLLARIVM I.

Patet si duo producta Medialia incommensurabilia ad eandem Rationalem applicentur, efficere reliquorum laterum summam Binomialem, differentiam verò Apotomen.

COROLLARIVM II.

[illegible] 27. X.

Manifestum est summam, vel differentiam duorum productorum Medialium, Irrationalem esse.

Ostensa enim fuit in hac propositione summa, vel differentia Medialium productorum incommensurabilium R, & S Irrationalem esse. At si medialia R, S fuerint commensurabilia, erit m eorum summa, vel differentia commensurabilis vni ipsorum S; sed n quadratum ex rationali N O (cui applicata supponũtur producta medialia) incõmensurabile est mediali S: ergo o summa, vel differentia medialium R, S incommensurabilis est quadrato rationalis N O: & ideo p summa, vel differentia R, & S irrationalis erit.

m cor. 1. pr. 10. huius. n def. 4. sec. huius. o cor. pr. 12 huius. p def 4. sec. huius.

COROLLARIVM III.

Similiter constat Bimedialis secundę, & Residuæ medialis secun-

secundę, si summa duorum quadratorum, ex nominibus eius ad eandem Rationalem applicatur, ad quam duplum producti eorundem nominum applicatur: efficere duorum reliquorum laterũ summam Binomialẽ, differentiã verò Apotomẽ.

Nam duorum nominum Bimedialis secundæ C, & Residuæ medialis secundæ C, summa quadratorum D & E applicata ad Rationalem N O facit latus O P, atque duplum producti F applicatum ad eandem Rationalem N O latitudinem facit O Q. Et ostensa fuit in hac propositione summa latitudinum P Q Irrationalis, quæ Binomialis dicitur, & differentia earundem P Q irrationalis, quæ Residua dicitur.

PROPOS. XXIV. THEOR. XVI.

Eucl. 39. 40. X.

Duarum quantitatum potentiâ incommensurabilium, quarum quadrata, simul sumpta, Rationale constituant, & eorum productum sit Mediale; summa vel differentia Irrationalis est: vocetur autem summa Maior; & differentia Vocetur Minor. Et illæ, quæ has irrationales efficiunt vocentur Nomina earum.

Sint a duę quantitates A, & B potentiâ incommensurabiles, quarum quadrata D, & E, simul sumpta, Rationale efficiant, at productum ex A in B, quod sit F, Mediale sit. Dico ipsarum A, & B summam, vel differentiam C Irrationalem esse. Quoniam productum F ponitur Mediale, & est duplum ipsius F commensurabile eidem F: Igitur b duplum ipsius F Mediale est; & ideo irrationale: erat autem summa duorum quadratorum D, & E Rationalis. Ergo c summa duorum quadratorum D, & E incommensurabilis est duplo producti F: Quare d quadratum M, quod est ęquale, vt dictum est, aggregato, vel differentię summę quadratorũ D, & E, & dupli producti F, erit incõmensurabile summę quadratorũ D, & E; estque talis summa quadratorum D, & E Rationalis: Igitur e quadratum M Irrationale erit, cùm eidem summę incommensurabile sit. Quapropter f eius latus C summa, vel differentia ipsarum A, & B irrationalis erit. Vt erat propositum. Vocetur summa C Maior, & differentia C vocetur Minor.

a ex pr. 15. huius.

b pr. 14 & 11. huius.

c def. 3. & 4 sec. huius, & cor. 2. pr. 10. huius.

d def. 4 sec. huius.

e def. 4 sec. huius.

f def. 5. sec. huius.

COROLLARIVM.

Patet Irrationalis, quæ Maior, aut Minor vocatur summā quadratorum ex eius nominibus Rationalē esse; Et duplum producti eorundem nominum, Mediale.

Eucl 40.77. X.

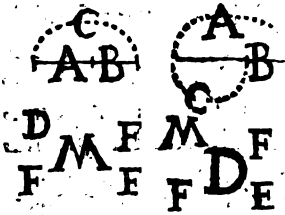
PROPOS. XXV. THEOR. XVII.

Duarum quantitatum potentià incommensurabilium, quarum summa quadratorum Medialis sit, & earum productum sit Rationale, summa, vel differentia Irrationalis est. Vocetur autem summa Rationale, ac medium potens. At differentia vocetur Faciens cum rationali totum mediale. Et ipsæ efficientes vocentur Nomina earum.

a ex pr. 20. huius.

Sint a duę quantitates A, & B potentià incommensurabiles, & facta eadem constructione, summa quadratorum D, & E Mediale compositum efficiat, at productum F ex A in B sit Rationale. Dico ipsarum A, & B summam, vel differentiam C Irrationalem esse. Quoniam summa duorum quadratorum

b def. 4. sec. huius.



D, & E Mediale compositum efficit, & duplū b producti F est Rationale, cùm eius dimidium F supponatur Rationale: erit summa duorum quadratorum D, & E incommensurabilis duplo producti F: Igitur c aggregatum, vel differentia summæ quadratorum D & E, atque dupli producti F, scilicet quadratum M, incommensurabile erit duplo producti F; estque duplum producti F Rationale; Ergo d quadratum M Irrationale est; & ideo eius latus C, quod est summa, vel differentia ipsorum A, & B, Irrationale erit; Vt erat propositum. Vocetur summa C Rationale, ac medium potens; At differentia C vocetur Faciēs cum rationali totum mediale.

c cor. 2. pr. 10. huius.

d def. 4. & 5. sec. huius.

Eucl. 41. 78. X.

PROPOS. XXVI. THEOR. XVIII.

Duarum quantitatum potentià incommensurabilium, quarum summa quadratorum Medialis sit, & earum productū Mediale, incommensurabileque summę quadratorum:

erit

erit summa, vel differentia Irrationalis. Vocetur autem summa Bina media potẽs. At differentia C vocetur Efficiẽs cum mediali totum mediale. Et quæ eas efficiunt, vocentur Nomina earum.

Sint a duę quantitates A, & B potentià incommensurabiles, & facta eadem constructione, summa quadratorum D, & E Mediale compositum efficiat, at productum F sit pariter mediale, sed sit incommensurabile summę quadratorum D, & E. Dico ipsarum A, & B summam, vel differentiam C Irrationalem esse. Quoniam b duplum producti F Mediale est, eo quod eius dimidium F Mediale ponitur; atque summa quadratorum D, & E Medialis est: Igitur c quadratum M, (quod est ex superius dictis, aggregatum, vel excessus duarum Medialium, scilicet summæ duorum quadratorum D, & E, atque dupli producti F) Irrationale est; ideoque d eius latus C Irrationale erit; Vt erat propositum. Vocetur summa C Potens bina media; At differentia C vocetur Efficiens cum mediali totum mediale.

C A B
2 F
M D E

a ex pr. 20. huius.
b pr. 14. huius.
c cor 2. pr. 23. huius.
d def. 5. sec. huius.

COROLLARIVM.

Patet etiam, quòd Potentis bina media, aut Efficientis cum mediali totum mediale, si summa duorum quadratorum ex nominibus ad eandem Rationalem applicetur, ad quam duplum producti eorundem nominum applicatur: efficietur duorum reliquorum laterum summa, vel differentia Binomialis vel Residua. Nam, vt ostensum est e duo Medialia inter se incommensurabilia, scilicet summa quadratorum D, E, & duplum producti F, ad Rationalem applicata, efficiunt latitudines Rationales, quæ longitudine incommensurabiles sunt inter se; & propterea prædictæ latitudines Rationales erunt potentià tantùm commensurabiles: quare f component Binomialem, aut Residuam.

e pr. 23. huius.
f pr. 21. huius.

PROPOS. XXVII. THEOR. XIX.

Eucl 42. 43. 44. 45. 46. 47. 79. 80. 81. 82. 83. 84. X.

Quælibet ex dictis duodecim Irrationalibus resolui non potest in nomina inęqualia ijs, ex quibus genita fuit.

Sit

a in 6. præced prop. Sit quælibet ex duodecim a dictis Irrationalibus C orta ex summa, aut subtractione nominum A, & B. Dico eam resolui non posse in alia nomina inæqualia ipsis A, & B. Si enim hoc verum non est, resoluatur C in nomina G, & H inæqualia ipsis A, & B. Et fiat b M quadratum ipsius C, & sint D, E quadrata nominum A & B, atque duplum F sit duplum producti ex A in B; pariterque O, & P sint quadrata nominũ G & H, & duplũ R sit duplum producti ex G in H. Et primò sit C Binomialis aut Residua, vel certè irrationalis, quæ vocatur Maior, vel Minor. Quoniam tam c summa quadratorum D, & E, quàm summa quadratorum O, P Rationalis est: & tam duplum producti F, quàm duplum producti R Mediale est: erit d differentia dupli F Medialis à duplo R Medialis, Irrationalis; & quia eadem quantitas C diuiditur intra, aut extra, bis inæqualiter; ergo e eadem est differentia inter duplum producti F, & duplum R, quæ inter quadratorum summam D, E, & O, P: igitur cùm differentia Medialium dupli F, & dupli R sit Irrationalis; erit quoque differentia inter D E, & O P Irrationalis, quod est absurdum. Differentia enim Rationalium D E, & O P commensurabilis vtrique f rationalium est Rationalis. Quare C resolui non potest in alia nomina præter A, & B.

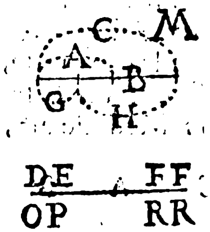
b pr 34. l. 1 pr. 20 l. 4. & def. 1. 2. huius.

c cor. pr. 21. & cor pr. 24 huius.

d cor. 2 pr. 23. huius.

e pr. 5. huius

f cor. 1. pr. 10. & def. 4 sec. huius.

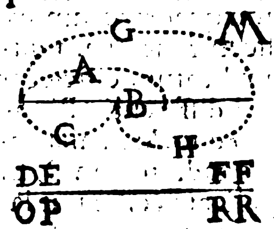


Secundò sit C Bimedialis prima, vel Residua Medialis prima, vel C sit Rationale, ac medium potens, vel Faciens cum rationali totũ mediale. Quoniam tam duplum g producti F, quàm duplum producti R Rationale est, atque tam summa quadratorum D, E, quàm summa quadratorum O, P est Medialis; estque h differentia dupli F à duplo R æqualis differentiæ D, E ab O, P: Ergo sicuti differentia Rationalium dupli F, & dupli R est, Rationalis, ita differentia D E ab O R Rationalis est: Igitur differentia duorum Medialium D, E, & O, P Rationalis est, quod i est absurdum. Non ergo C, H inæqualia ipsis A, B possunt esse nomina ipsius C.

g cor pr 22. & ex pr. 25 huius.

h pr. 5 huius

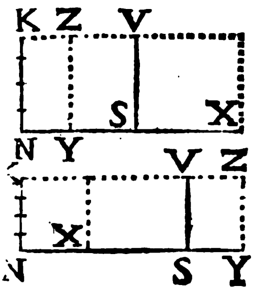
i cor. 2 pr. 23. huius.



Tertiò sit C Bimedialis secunda, vel Residua medialis secunda; Vel certè C sit Potens bina media, aut Efficiens cum mediali totum mediale. Ad eandem rationalem K N applicetur

tur k productum K X equale quadrato M, & K S equale quadratis D, E, nec non K Y equale duobus quadratis O, P. Et quoniam in primo casu l tam summa quadratorum D, E, & dupli producti F, quam summa quadratorum O, P, & dupli producti R equalis est eidem quadrato M: At in secundo m casu tam excessus quadratorum D, E supra duplum producti F, quàm excessus quadratorum O P supra duplum R equalis est quadrato M: Ergo residuum V X equale erit duplo producti F, & Z X equale erit duplo producti R. Quare n ex applicatione summe quadratorum D, E, & dupli producti F, nominum Binomialis secundæ, & Residuæ medialis secundæ, o vel Potentis bina media, & Efficientis cum mediali totum mediale ad eandem Rationalem K N, efficientur duo latera, seu nomina N S, S X, nec non N Y, Y X ex applicatione facta, quorum summa N X Binomialis, & differentia Residua erit: & ideo eiusdem Binomialis N X, aut Residuæ nomina erunt, nedùm N S, S X sed etiam N Y, Y Z, p quod est impossibile: Non igitur irrationalis C resolui potest in alia nomina diuersa ab ipsis A, & B, quod erat ostendendum.

k pr. 20 l. 4 & sch pr. 20 huius.
l cor. 2. pr. 19 lib 5 & pr. 1 huius.
m cor. 1. pr. 20 l. 5. & pr 2. huius.
n cor 3. pr. 23 huius.
o cor pr. 26 huius.
p par. 1. huius pr.



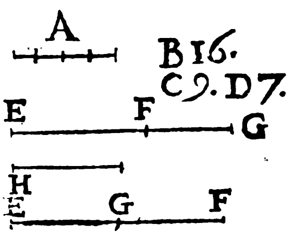
PROPOS. XXVIII. PROBL. IX.

Eucl. 48. 85 X.

Binomialem, aut Residuam reperire, cuius maius nomen commensurabile longitudine sit, nedùm expositæ Rationali, sed etiam lateri potenti differentiam quadratorum eorundem nominum: Vocetur illa Binomialis prima; hęc verò Residua prima.

Sit a quantitas E F commensurabilis longitudine expositæ Rationali A: Et b sumatur quadratus numerus B, cuius portio C sit numerus quadratus, at portio D non sit quadratus numerus; & c vt numerus B ad D, ita fiat quadratum ex E F ad quadratum ex F G, atque vt idem numerus B ad C, ita fiat idem quadratum

a ex pr. 9. huius.
b sch pr. 45 l. 8.
c ex cor. 3. pr. 17. l. 4. & sch pr. 3. huius.



d cor. pr. 22. lib. 3. dratum ex E F ad quadratum ex H. Et quoniam d vt numerus B est ad duos numeros C, & D, ita est quadratum ex E F ad duo quadrata laterum F G, & H; estque numerus B ęqualis numeris C, & D. Ergo e quadratum ex E F ęquale erit quadratis ex F G, & ex H, ideoque E F maior erit, quàm F G, & H erit latus potens differentiam quadratorum ex E F, & F G: estque f H ipsi E F longitudine commensurabilis, eo quod quadratum ex H ad quadratum ex E F est, vt numerus quadratus C ad numerum quadratum B; & E F, & F G sunt potentià tantùm commensurabiles, non autem longitudine, eo quod eorum quadrata habent eandem proportionem, quam numerus quadratus B ad non quadratum D, & g sunt Rationales, eo quod E F expositæ Rationali A commensurabilis est: Igitur h nominum E F, & F G summa E G erit Binomialis, & differentia Residuum erit, & est maius nomen E F commensurabile longitudine nedùm expositę Rationali A, sed etiam lateri H, quod potest differentiam quadratorum nominum E F, & F G; Et hoc erat faciendum. Vocetur summa E G Binomialis prima. Et differentia E G Residua prima.

e cor. 1. pr. 16. l. 3.

f pr 8 huius

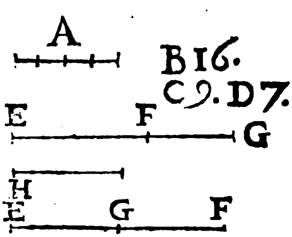
g def 2. sec. huius.

h pr. 21 hu.

PROPOS. XXIX. PROBL. X.

Eucl. 49. 86. X.

Binomialem, aut Residuam inuenire, cuius minus nomen expositæ Rationali commensurabile sit longitudine. At maius nomen commensurabile sit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum eorundem nominum. Vocetur illa Binomialis secunda; reliqua verò Residua secunda.



Sit F G expositę Rationali A cõmensurabilis longitudine, positisq; eisdē a numeris præcedentis propositionis fiat, b vt numerus quadratus B ad eius portionem nõ quadratam D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex data F G, & vt numerus B ad C, ita fiat quadratum ex E F ad quadratũ ex H. Quia c E F, & F G sunt Rationales, & inter se potentià tantùm cõmensurabiles (eo quod sunt inter se vt numeri B, & D, licet non, vt duo numeri quadrati) & est minor G F expositę Rationali A longitudine com-

a sch. pr. 45. lib 8.

b ex cor. 3. pr. 17. l. 4. & sch. pr. 3. huius.

c prop. 8 & def 2 sec. huius.

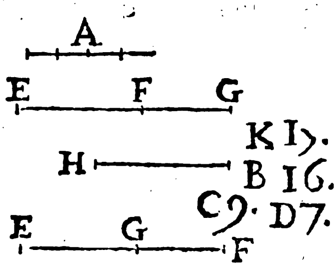
commensurabilis: Igitur *d* summa E G est Binomium, & differentia Residuũ, cuius minus nomen longitudine commensurabile est expositę Rationali, at maius nomen est commensurabile longitudine lateri H, quod potest differentiam quadratorum nominum. quod faciendum erat. Vocetur summa E G Binomialis secunda, & differentia E G Residua secunda. *d pr. 21. hu.*

PROPOS. XXX. PROBL. XI.

Eucl. 50. 89. X.

Binomialem, aut Residuam reperire, cuius duo nomina non sint longitudine commensurabilia expositæ Rationali, & maius nomen longitudine commensurabile sit lateri potenti differentiam quadratorum nominum. Vocetur illa Binomialis tertia, & reliqua Residua tertia.

Reperiatur *a* numerus quadratus B, cuius portio D non sit quadratus, & sit numerus impar & primus, & portio C sit numerus quadratus, ponaturque quilibet alius numerus primus K, maior quàm B. Patet numerum K quadratum non esse, alias primus numerus K ab eius latere, scilicet ab aliquo numero metiretur; Postea *b* vt numerus primus K ad B, ita fiat potestate Rationalis A ad E F, atq; vt numerus B ad D, ita fiat E F ad F G potentià, nec non vt numerus B ad C, ita fiat E F ad H potentià. Et quia quadrata ex E F, & ex A sunt, vt quadratus numerus B ad non quadratum K; erit *c* E F expositę Rationali A potentià tantùm commensurabilis; cùmque duo quadrata ex E F & F G habeãt rationem eandem, quam numeri B, D, qui vt duo quadrati non sunt: erunt E F, & F G potentià commensurabiles tantummodo; Et quia vt numerus K ad B; ita erat quadratum ex A ad quadratum ex E F; & vt numerus B ad D, ita erat quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Ergo *d* ex compositione ordinata erunt quadrata ex A, & ex F G inter se, vt duo numeri primi K & D, & ideo *e* non vt numeri quadrati; quare *f* F G, & A potentià tantùm commensurabiles sunt; igitur nec E F, nec F G est longitudine commensurabilis expositę Rationali A: sed tantũmodo potentià; & ideo *g* duarum



a ex cb pr 45 & ex pr. 21. lib. 8.
b ex cor. 5. pr 17. lib 4. & sch. pr. 3. huius.
c pr. 8. hu.
d pr. 19 l. 3.
e cor pr. 37. lib. 8.
f prop 8. hu.
g pr. 21. hu.

Rationalium E F, F G potentià tantùm commensurabilium summa E G Binomialis est, differentia verò Residua, cuius h pr.8.huius maius nomen E F longitudine b commensurabile est lateri H, quod potest, vt prius dictum est, differentiam quadratorum nominum (cùm sit E F ad H potentià, vt numerus quadratus B ad numerũ quadratũ C); & neq; E F, neq; F G lõgitudine est commensurabile expositæ Rationali A. Et hoc erat faciendum. Vocetur summa E G Binomialis tertia; Et differentia E G Residua tertia.

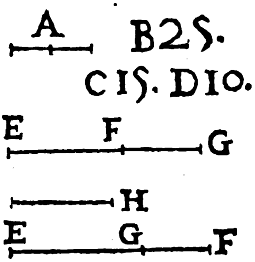
Eucl.51.90. X.

PROPOS. XXXI. PROBL. XII.

Binomialem, aut Residuam quantitatem reperire, cuius maius nomen commensurabile sit longitudine expositę Rationali, at lateri quadrati differentialis quadratorum nominum, sit longitudine incommensurabile. Vocetur summa Binomialis quarta; Et differentia Residua quarta.

a sch pr.45. lib.8. Ponatur rursus E F longitudine commensurabilis expositę Rationali A: Et a numerus quadratus B distribuatur in duos numeros C, & D, quorum neuter quadratus sit, & vt antea fiat, vt numerus B ad D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G. Patet b esse E F, & F G Rationales potentià tantùm inter se commensurabiles, eo quod eorum quadrata habent proportionem eandem, quam duo numeri D, & B, qui non sunt, vt duo quadrati; & sunt F G, & E F Rationali expositę A commensurabiles:

b cor.pr.12. def 2 sec.& pr.8.huius.



c pr.21.hu. Quare c summa nominum E G Binomialis erit, & differentia erit Residua: Cumque quadratum ex E F sit ad differentiam quadratorum ex E F, & F G, vt numerus B quadratus ad non d pr.8.huius quadratum C, erit d maius nomen E F incommensurabile lõgitudine lateri quadrati differentialis quadratorum eorundem laterum, quod sit H. Reperta ergo est Binomialis, aut Residua, cuius maius nomen commensurabile est longitudine expositę Rationali, pariterque nomen eius maius longitudine incommensurabile est lateri potenti differẽtiam quadratorum nominum. quod erat faciendum. Vocetur summa

summa

ma A G Binomialis quarta; & differētia A G Residua quarta.

PROPOS. XXXII. PROBL. XIII.

Eucl. 52. 91. X.

Binomialem, aut Residuam inuenire, cuius minus nomen expositę Rationali commensurabile sit longitudine, at maius nomen incommensurabile sit longitudine lateri potenti differentiam quadratorum nominum. Vocetur summa Binomialis quinta; differentia verò Residua quinta.

Sit F G expositę Rationali A commensurabilis longitudine, & positis ijsdem numeris pręcedentis propositionis, fiat, vt [a] numerus B ad D, ita quadratum ex E F ad quadratum ex F G, & reliqua perficiantur vt prius. Quoniam quadrata ex E F, & F G sunt inter se, vt duo numeri B, & D, qui vt duo quadrati non sunt: Igitur [b] E F, & F G potentià tantùm commensurabiles sunt, & [c] sunt Rationales, eo quod F G expositę Rationali A commensurabilis erat: Igitur [d] summa nominum F G erit Binomialis, & differentia erit Residua; & [e] est maius nomen E F incommensurabile longitudine ipsi H, quod est latus potens differentiā quadratorū ex E F, & F G, eo quod vt prius prædicta quadrata ex E F, & ex H sunt inter se, vt duo numeri B, C qui non sunt, vt duo quadrati numeri: Igitur Binomialis, aut Residua E G habet minus nomen F G longitudine commensurabile expositæ Rationali A, atque maius nomen eius incommensurabile est longitudine lateri potenti differentiā quadratorū nominū. Et hoc erat faciēdū. Vocetur summa Binomialis quinta, differentia verò Residua quinta.

a ex cor. 8. pr. 17. l. 4. & sch. pr. 3. huius.
b pr. 8. hu.
c cor. pr. 12. & def. 2. sec. huius.
d pr. 21. hu.
e pr. 8. huius.

PROPOS. XXXIII. PROBL. XIV.

Eucl. 53. 92. X.

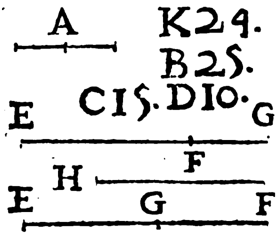
Binomialem, aut Residuam reperire, cuius duo nomina expositę Rationali incommensurabilia sint longitudine, & maius nomen sit longitudine incommensurabile lateri potenti differentiam quadratorū nominum. Vocetur autem summa Binomialis sexta, & differentia Residua sexta.

Diuiso rursus [a] quadrato numero B in duos numeros C, & D non quadratos, ponatur [b] numerus primus K maior, quàm B, & [c] vt k ad numerum B, ita fiat poteſtate exposita Rationalis A ad E F, & vt B ad D, ita fiat potentià E F ad F G, atque

a sch. pr. 49. l. 8.
b ex pr. 21. l. 8.
c ex cor. 8. pr. 17. l. 4. & sch. pr. 3. huius.

vt B ad C, ita fiat E F ad H potestate: erunt (vt dictum est in 30. propos. huius) E F & F G commensurabiles potentià tantùm eidem Rationali A, non autem longitudine; & propterea d E F, & F G Rationales erunt, & e inter se potentià tantùm commensurabiles, estque f E F longitudine incommensurabilis ipsi H lateri differentię quadratorum ex E F, & F G; propterea quod quadrata ex E F, & ex H sunt inter se, vt numeri B, & C, qui non sunt, vt duo numeri quadrati: igitur g summa E G est Binomialis, & differentia E G est Residua, cuius duo nomina incommensurabilia sunt longitudine expositæ Rationali A, atque maius nomen eius E F incommensurabile est longitudine lateri quadrati differentialis inter quadrata nominum. Et hoc erat faciendū.

d def. 2. sec. huius.
e cor. pr. 17. lib. 1.
f pr. 8 huius
g pr. 21. hu.



Vocetur autem summa E G Binomialis sexta; & differentia E G Residua sexta.

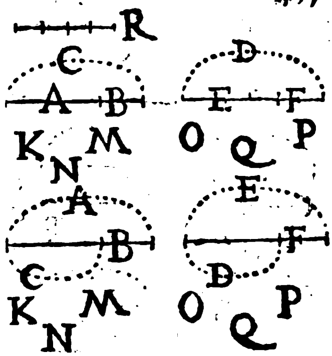
PROPOS. XXXIV. THEOR. XX.

Eucl. 66. 67. 68. 69 70. 103. 104. 105. 106. 107. X.

Quęlibet quantitas commensurabilis cuilibet ex dictis Irrationalibus, & ipsa Irrationalis est eiusdem denominationis, & ordinis. Et illa quæ longitudine commensurabilis fuerit cuilibet speciei Binomialium, vel Residuarum: & ipsa Binomialis, aut Residua erit eiusdem denominationis, & speciei.

a in 12 preced. pr.
b pr. 11 l. 4. & sch. pr. 3. huius.
c pr. 15. l. 3.
d pr. 12. l. 3.
e cor. 3. pr. 8. huius.
f pr. 34. l. 1. & sch. pr. 3. huius.
g cor. 3. pr. 3. huius.

Sit primò quælibet ex Irrationalibus iam a expositis C, cuius nomina A, & B; sitque quęlibet quantitas D commensurabilis ipsi C, siue longitudine, siue potentià tantùm. Dico D Irrationalem esse eiusdem denominationis cum ipsa C. Fiat vt b C ad D, ita B ad F: erit residua, c vel summa A ad residuam, vel summam E, vt C ad D; & ideo permutando, d vt A ad B, ita erit E ad F: quare e A ipsi B, atque E ipsi F vnà commensurabiles sunt potentià, vel vnà incommensurabiles. Postea fiant f quadrata k ipsius A, M ipsius B, O ipsius E, & P ipsius F; Insuper N sit productum ex A in B, & Q sit productum ex E in F. Quoniam vt C ad D, ita est A ad E, atque B ad F; Ergo quam rationem commensurabilem habet C ad D, siue longitudine & potentià, siue potentià tantùm g eandem commensura-

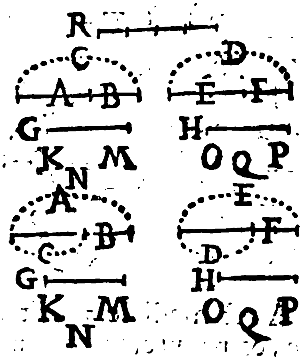


ſurabilem rationem habebit A ad E, atque B ad F; ideoque *h* eorum quadrata k ad O, & M, ad P & *i* ſummę K, O ad M P, nec *k* nõ productum N ad ei ſimile Q eandem cõmenſurabilem rationem habebunt, quam quadratum ex C ad quadratum ex D habet. Iam ſi maius nomen A commenſurabile exiſtens expoſitæ Rationali R, fuerit Rationale, *l* erit E quatenus commenſurabile eſt, Rationali A pariter Rationale; ſimiliter, quando A eſt mediale *m* erit ei commenſurabile E mediale quoque, & propterea eorum quadrata K & O erunt vnà rationalia; vel vnà medialia; eadem ratione nomina B & F erunt vna Rationalia, vel vnà medialia, atque eorum quadrata M, & P erunt vnà rationalia, vel vnà medialia, pariterque quadratorum ſummę K, M, & O, P erunt vnà rationales, vel vnà mediales; nec non producta N & Q erunt vnà rationalia, vel vnà medialia. poſtea quia vt quadratorum ſumma K, M ad ſummam O, P ita erat productum N ad Q; permutando *n* k M ad N, erunt vt O, P ad Q; & ideo *o* K, M, ipſi N, atque O, P, ipſi Q vnà commenſurabilia, vel vnà incommenſurabilia erunt. Et quoniam in qualibet ex dictis Irrationalibus, aut nomina A, & B *p* ſunt Rationalia potentià commenſurabilia, aut ſunt *q* Medialia potentià tantùm commenſurabilia, aut ſunt *r* potentià Incommenſurabilia, & ſumma quadratorum K, & M Rationalis eſt vel Medialis, productum verò N, aut Rationale eſt vel Mediale, quod aut commenſurabile eſt, vel incommenſurabile ſummæ quadratorum K & M, Sed nomina E, & F oſtenſa ſunt eodem modo Rationalia, vel Medialia, vel potentià incommenſurabilia; & habere omnes conditiones, quas habent nomina A, & B. Igitur Irrationalis quantitas D eiuſdem denominationis eſt cum Irrationali C; ſcilicet ſi C fuerit Binomialis, erit quoque D Binomialis, & ſi C fuerit Maior, erit quoque D Maior, & ſi C fuerit Reſiduum mediale primum, erit quoque D Reſiduum mediale primum, & ſic de reliquis.

Secundò ſit C vna ex ſex ſpeciebus Binomialium, *ſ* aut Reſiduum; & D ſit longitudine commenſurabilis Irrationali C. Dico D eſſe Irrationalem, eiuſdem denominationis, & ſpecici,

h pr. 18. l. 4. cor. 2 pr. 1. & cor 3. pr. 8. huius.
i pr. 15. l. 3.
k pr. 18. l. 4. & ſch pr. 3. huius.
l def 2. ſec. huius.
m pr. 14 hu.
n pr. 12. l. 3
o cor. 3. pr. 8. huius.
p pr 21. hu.
q pr 22. & 23. huius.
r pr 24. 25. 26. huius.
ſ pr 28. 29. 30. 31. 32. 33. huius.

ciei, scilicet ambæ erunt Binomiales primæ, aut ambæ Binomiales secundæ &c. Sit G latus potens differentiam quadratorum K, & M nominum A, B; pariterque H sit latus potens differentiam quadratorum O, & P nominũ E F. Et quia, vt dictum t est, quadratum K ad quadratum O, est vt quadratum M ad quadratum P; erit u reliquum quadratum ex G ad reliquũ quadratum ex H, vt totum quadratum K ad totum quadratum O. Et permutando x quadratum k ad quadratum ex G erit, vt quadratum O ad quadratum ex H; & y propterea latus prioris, scilicet A ad G erit, vt E ad H: Pari modo ostendetur B ad G, vt F ad H; Quare si maius nomen A commensurabile longitudine, vel incommensurabile fuerit ipsi G, potenti differentiam quadratorum nominum; Simili z modo maius nomen E commensurabile longitudine, aut incommensurabile erit lateri H, potenti differentiam quadratorum nominum E, & F: Et si quidem maius nomen A, vel minus B longitudine commensurabile, vel incommensurabile fuerit expositæ Rationali R; cùm nomina E, & F longitudine commensurabilia sint nominibus A, & B (eo quod in eadem sunt ratione commensurabili, quã D habet ad C), erunt quoque a nomina, E vel F eodem modo longitudine commensurabilia, aut incõmensurabilia Rationali R. Igitur b qualiscunque ex sex Binomialibus, aut Residuis fuerit C, erit D eiusdem speciei. Vt propositum fuerat.



t per. 1. huius pr.

u pr. 19. l. 5.

x pr. 12. l. 5.

y pr. 18. l. 4. & cor. 2. pr. 1. huius.

z cor. 3. pr. 8. huius.

a cor. pr. 17. l. 3 & cor. 3 pr. 8. huius.

b pr. 28 vsq; ad 33. huius

PROPOS. XXXV. THEOR. XXI.

Eucl. 54. 91. 55. 92 56. 93 57. 94 58. 95. 59. 96. X.

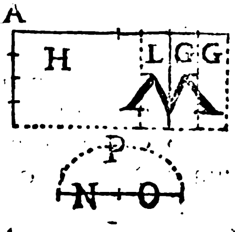
Si inter Rationalem, & vnam ex sex speciebus Binomialium, aut Residuarum media proportionalis ponatur, erit illa vna ex prioribus 12 Irrationalibus.

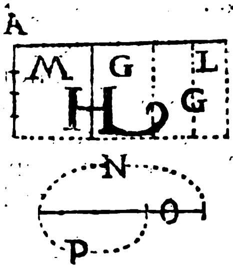
Sit exposita Rationalis A, & M sit vna ex 6 speciebus Binomialium, aut Residuarum, cuius nomina sint H L maius, & 2 G minus, sitque P media proportionalis inter A, & M. Dico P esse vnam ex 12 Irrationalibus expositis in prop. 21. 22. 23. 24. 25, & 26. Ponatur a 1 G semissis minoris nominis media

a pr. 10. l. 4. cor. 3. pr. 10. huius, & sch. pr. 3. huius.

dia

dia proportionalis inter segmenta H & L nominis maioris, & ponatur inter H, & A media proportionalis N, & inter L & A media proportionalis O. Quoniam in qualibet specie *b* Binomialium, aut Residuarum nomina H L & 2 G sunt Rationalia inter se potentiâ tantùm commensurabilia, estque G commensurabilis longitudine eius duplo 2 G: Ergo *c* G erit Rationalis, & non longitudine, sed potentiâ tantùm commensurabilis erit nomini H L; Et quia G semissis minoris nominis est media proportionalis inter maioris nominis segmenta H, & L: Ergo *d* H est semisumma, & L semidifferentia maioris H L, & lateris potentis differentiam quadratorum ex H L & 2 G: sed in 3 prioribus speciebus *e* maius nomen H L longitudine commensurabile est lateri potenti differentiam quadratorum nominum, & *f* in 3 posterioribus eidem lateri est incommensurabile longitudine: Ergo *g* in tribus posterioribus speciebus Binomialium, & Residuarum H, & L sunt longitudine incommensurabilia inter se, & in tribus prioribus speciebus segmenta H, & L sunt longitudine inter se commensurabilia; & propterea *h* erit Rationalis summa H L vtrique H, & L longitudine commensurabilis; & ideo tam H, quàm L Rationales erunt longitudine inter se commensurabiles.





b pr. 28. 29. 30. 31. 32. 33. huius.
c def. 2. sec. & cor prop. 12. huius.
d cor. 4. pr. 10. huius.
e pr. 28. 29. 30. huius.
f pr. 31. 32. 33. huius.
g pr. 10. hu.
h cor. 1. & 2 prop 10. & def. 2 sec. huius.

Et verò quoniam *i* in Binomiali, aut Residua prima maius nomen H L longitudine commensurabile est expositæ Rationali A: Ergo Rationalis H, quæ longitudine commensurabilis ostensa est nomini H L, erit *k* quoque longitudine commensurabilis Rationali A; & propterea N, media proportionalis inter A, & H, erit *l* quoque Rationalis: sed quia continuè proportionales sunt A, N, H, & A, O, L, atq; *m* H, G, L; erit N ad O, vt H ad G; & ideo *n* eodem modo N ipsi O potentiâ tantùm commensurabilis erit, sicuti H ipsi G cõmensurabilis ostensa est; & fuit N Rationalis: Ergo *o* ei commensurabilis O Rationalis quoque erit. Quapropter *p* nominum N, & O summa P Binomialis erit, & differentia Residua.

i pr. 28 hu.
k cor. pr. 17 l 3.
l ex pr. 11. huius.
m ex cor. 2. pr 1. l 5. & pr. 1 hu.
n cor 3 pr. 8 huius.
o def 2. sec. huius.
p pr. 21. hu.

Secundò quoniam in Binomiali, aut Residua secunda ex

prop.

prop. 29. huius, eidem expositę Rationali A maius nomen Rationale H L incommensurabile est longitudine, & Rationale minus nomen 2 G longitudine commensurabile est, erunt q Rationalia segmenta H, & L (quæ r longitudine commensurantur summæ H L) non longitudine, sed potentià tantùm commensurabilia Rationali A; atque G semissis Rationalis 2 G, erit longitudine commensurabilis Rationali A. Quare s N & O (quæ mediæ proportionales sunt inter A, H, & A, L Rationales potentià commensurabiles) erunt Medialia, & productum ex N in O, quod t est æquale producto ex A in G, Rationalibus longitudine commensurabilibus, erit u Rationale. Quare nominum N, & O summa P erit x Bimedialis prima, & differentia erit Residua medialis prima.

q cor. pr. 12. huius.
r cor. 1. pr. 10 huius.
s pr. 21. hu.
t cor. 2. pr. 14. lib. 4. & sch. pr. 3. hu.
u pr. 11. hu.
x pr. 22. hu.
y pr. 30. hu.

Tertiò quoniam y in Binomiali, aut Residua tertia ambo Rationalia nomina H L, & 2 G sunt longitudine incommensurabilia expositę Rationali A, erunt z Rationalia segmenta H, L & G (quæ longitudine commensurabilia erant ipsis H L, & 2 G) longitudine incōmensurabilia Rationali A: Quare a N & O medialia erunt, eo quod sunt media proportionalia inter Rationales potentià tantùm commensurabiles; pariterque productum ex N in O Mediale erit, quia vt dictum est, ęquale est producto ex Rationalibus potentià tantùm commensurabilibus A, & G. Et propterea b nominum N, O summa P erit Bimedialis secunda, differentia verò Residua medialis secunda.

z cor. pr. 12. huius.
a pr. 12. hu.
b pr. 23. hu.

Quartò quoniam c in Binomiali, aut Residua quarta maius nomen H L longitudine est commensurabile expositæ Rationali A: erit d productum ex A in H L Rationale, & sunt continuè proportionales A, N, H, & A, O, L: Ergo e quadratum ex N æquale est producto ex A in H, & quadratum ex O ęquale est producto ex A in L; & propterea summa quadratorum ex N & O ęqualis erit producto Rationali ex A in H L, & ideo summa quadratorum Rationalis erit: postea quia minus nomen 2 G Rationale, & incommensurabile longitudine est Rationali A: erunt 2 G & A Rationalia potentià tantùm commensurabilia; & ideo f productum ex A in 2 G Mediale erit, & g eius semissis, scilicet productum ex G in A, seu h ei ęquale productum ex N in O Mediale erit: i suntq; N & O potentià, vt est longitudine commensurabilis H ad L:

2 G
M H L
P NO
A

c pr. 31. hu.
d pr. 11 hu.
e cor. 2. pr. 14. lib. 1. & sch. pr. 3. hu.
f pr. 12. hu.
g pr 14. hu.
h cor 1. pr 14. lib. 4 & sch pr 3 hu
i ex cor. 3 pr. 17 & 4 pr. 1. & cor. 3 pr 8. hu.

Igitur

Igitur k nominum N & O summa P Irrationalis est, quę Maior vocatur, differentia verò minor. k pr. 24 hui.

Quintò quoniam l Binomialis, aut Residuæ quintæ minus nomen 2 G cōmensurabile est longitudine expositę Rationali A: erit m eius semissis G Rationalis longitudine commensurabilis Rationali A; & ideo n productum ex A in G, seu o ex N in O Rationale erit: Et quia H L Rationalis est, & longitudine incommensurabilis Rationali A, erunt H L & A Rationales potentià tantùm commensurabiles; & ideo p productum ex A in H L, seu ex A in H, & ex A in L Medialia erunt; sūtque quadrata ex medijs proportionalibus ex N & O ęqualia productis ex A in H & in L: Ergo summa quadratorum ex N, & O medialis est. Tandem quia N ad O potentià est vt H ad L longitudine, hæ autem sunt longitudine incommensurabiles: Ergo N & O potentià sunt incommensurabiles. Et propterea q nominum N O summa P erit Potens rationale ác medium, differentia verò Efficiens cum rationali totum mediale.

l pr. 32. hu. m cor. pr. 17 l. ... & def. 2. sec. huius. n pr. 12. hu. o cor. 1 pr. 14 lib 4 & sch pr. 3 hu. p pr 12. & sch pr 3. hu. q pr. 25. hu.

Sextò quoniam r Binomialis, aut Residuę sextę ambo Rationalia nomina non longitudine, sed potentià tantùm commensurabilia sunt expositę Rationali A: Ergo s productum ex A in H L, seu ex A in H, & ex A in L simul, Mediale conficiunt, suntque t quadrata ex medijs proportionalibus N & O ęqualia productis ex A in H, & ex A in L: Ergo quadratorum ex N & O summa Medialis erit. Similiter u G semissis minoris nominis potentià tantùm commensurabilis erit Rationali A; & ideo productum ex A in G, seu x ex N in O Mediale erit: Estque Binomialis, aut Residuæ maius nomen H L lōgitudine incōmēsurabile minori nomini 2 G, & eius semissi G: Igitur y producta ex A in H L, & ex A in G incommensurabilia sunt; & proptérea summa quadratorum ex N & O æqualis priori producto incommensurabilis erit producto ex N in O, ęquali secundo producto. Tandem quia N ad O potentià est, vt H ad L longitudine, vt dictum est, & fuit H longitudine incommensurabilis ipsi L: Ergo N ipsi O potentià incommensurabilis est. Quapropter z nominum N & O summa P, erit Potens bina media, & differentia erit Efficiens cum mediali totum mediale. Quæ erant ostendenda.

r pr. 33. hu. s pr 12. hu. & sch. pr. 1. l. 4. & sch. pr 3 huius. t cor 2. pr. 14 lib 4 & sch pr 3. hu. u cor pr. 12. huius. x cor 1. pr. 14. lib 4 & sch pr 3 & pr 12 hu. y pr 1 l. 4. schol pr. 3. & cor 1. pr. 8 huius. z pr. 26 hu.

Eucl. 60. 97. 61. 98. 62. 99. 63. 100. 64. 101. 65. 102. X.

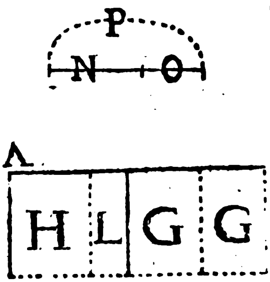
PROPOS. XXXVI. THEOR. XXII.

Si vt Rationalis ad aliquam ex duodecim prioribus Irrationalibus, ita hæc fiat ad tertiam proportionalem, erit postrema vna ex speciebus Binomialium, aut Residuarum.

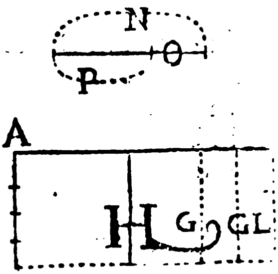
a pr. 10 11. l 4. & sch. pr 3. huius.
b pr. 15 l. 3 & pr. 1. 2 hu.

Sit exposita Rationalis A, & sit P quelibet ex 12 prioribus Irrationalibus, cuius nomina sint N maius, & O minus, & vt A ad N *a* ita fiat N ad H, & O ad G, atque vt A ad O, ita fiat O ad L, & N ad G. Patet *b* esse summam, vel differentiam H L, & 2 G tertiam proportionalem Rationalis A, & summæ, vel differentię nominum N & O, & sit M ęqualis summæ, vel differentię ipsarum H L, & 2 G. Quoniam G semissis ipsius 2 G media proportionalis est inter portiones H, & L: Ergo duę G *c* minores sunt, quàm duę H & L; *d* & H est semisumma, & L semidifferentia maioris H L, & lateris potentis differentiam quadratorum inęqualium H L, & 2 G; & *e* propterea H ipsi L, nec non maius latus H L lateri potenti differentiam quadratorum ipsarum H L, & 2 G vnà commensurabilia erunt lõgitudine, vel vnà incommensurabilia. Rursus quoties G Rationalis fuerit potentià tantùm commensurabilis ipsi H L, erit *f* quoque eius duplum 2 G Rationale, & potentià tantùm commensurabile ipsi H L; & quando H, & L fuerint commensurabiles inter se longitudine, & Rationales, erit eorum summa H L (quę vtrique ipsarum commensurabilis est longitudine) Rationalis quoque.

c cor. 2. pr. 26. l 3.
d cor. 4. pr. 10. huius.
e pr. 10. hu.



f cor pr 12. & def 2 sec. huius.



g pr. 21. & def 2 sec hu.
h cor. 3. pr. 17. l. 4. & cor 1. pr 1. huius.
i cor pr. 17. l. 3.
k cor. 1. pr. 10 & par. 2 huius. pr.

Iam quia Binomialis, *g* aut Residuæ nomina N & O Rationalia saltem potentià, commensurabilia sunt exposite Rationali A, & sunt potentià tantùm inter se commensurabilia, atque *h* sunt tertiæ proportionales H, & L, longitudine ad eandem A, vt N & O potentià commensurabiles sunt ad A: Ergo H, & L Rationales sunt longitudine commensurabiles eidem A; & ideo *i* inter se quoque cõmensurabiles, & *k* summa

ma

ma H L nedùm Rationali A longitudine, sed etiam lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex duplo mediæ proportionalis inter H & L longitudine commensurabilis erit; cùmque *l* G ad H sit, vt O ad N, quæ sunt potentià tantùm commensurabilia: Ergo *m* G, & eius duplum 2 G potentià tantùm commensurabilis erit ipsi H, & ideo erit Rationalis; estque *n* summa H L commensurabilis longitudine H, vel L inter se longitudine commensurabilium: Ergo *o* minus nomen 2 G Rationale, & potentià commensurabile est maiori nomini H L. Quapropter *p* nominum H L, & 2 G summa M Binomialis prima erit, & eius differentia Residua prima.

Secundò quia *q* Bimedialis primæ, aut Residuæ medialis primę nomina N, O medialia sunt potẽtià tantùm commensurabilia, quorum productum est Rationale, & sunt N, O media proportionalia inter expositam Rationalem A & H, L: Ergo *r* H & L Rationalia sunt non longitudine, sed potentia tantùm commensurabilia ipsi A, & *s* eorum summa H L potentià tantùm commensurabilis ipsi A, Rationalis erit, estq; vt N ad O cõmẽsurabilis potẽtià, ita H ad L longitudine, vt dictum est: Ergo H ipsi L longitudine commensurabilis erit, & ideo *t* summa H L longitudine commensurabilis erit lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex duplo mediæ proportionalis G. Tandem quia productũ ex N in O, *u* seu ex A in G Rationale est: Igitur *x* G eiusque duplum Rationale erit, & longitudine commensurabile ipsi A. Quare *y* nominum H L & 2 G summa M Binomialis secunda erit, & differentia Residua secunda.

Tertiò quoniam *z* Bimedialis secundæ, & Residuæ medialis secundæ nomina N O medialia sunt potentià tantùm commensurabilia, quorum productum est mediale, erũt, *a* vt dictum est H, & L Rationalia non longitudine, sed potentià tantùm commensurabilia expositę Rationali A, & eorum summa H L Rationalis, & potẽtià tantùm cõmensurabilis Rationali A; estq; vt N ad O potẽtià, ita H ad L longitudine: Ergo H ipsi L longitudine commensurabilis erit, & ideo latus *b* H L longitudine commensurabile erit lateri potenti differentiam quadratorum ex H L & ex 2 G. Tandem quia productum ex N in O, seu *c* ei ęquale ex A in G mediale est, erit *d* latus G eiusque duplum 2 G Rationale, & longitudine

		2 G	
M	H		L
P		N O	
		A	

l cor. 3. pr. 19 l. 3.
m cor. pr. 18 & def. 2 secun huius.
n cor. 1. pr. 10 huius.
o cor. pr. 17. l. 3. & def. 2 sec. huius.
p pr. 28 huius.
q pr. 22 huius.
r pr. 15. huius.
s cor. pr. 12. & def. 2 secun. huius.
t par. 1. huius pr.
u cor. 1. pr. 14 lib. 4. & sch. pr. 3 huius.
x pr. 11. huius.
y pr. 29. huius.
z pr. 23 huius.
a par. 2. huius pr.
b par. 1. huius pr.
c cor. 1. pr. 14 lib. 4. & sch. pr. 3. huius.
d cor. 13. 14. huius.

> e pr. 30. hu.

incommensurabile expositæ Rationali A. Quare e nominum H L, & 2 G summa M Binomialis tertia erit, & differentia Residua tertia.

> f pr. 24. hu.
> g cor. 2 pr. 14 & sch. pr. 1. l. 4 & sch pr. 3 hu.
> h pr. 11. hu.
> i cor. 2 pr. 27. lib. 4 & cor. 1. pr. 1. & cor. 3. pr. 8 huius.
> k par. 1. huius pr.
> l pr. 13. 14. huius.
> m pr. 31. hu

Quartò quia f Maioris, aut Minoris nomina N, O potentiá incommensurabilia sunt, quorum quadrata Rationale, & productum Mediale efficiunt, suntque g quadrata ex N & O ęqualia productis ex A in H, & ex A in L scilicet producto ex A in H L: Igitur productum ex A in H L Rationale erit; & ideo h latus H L Rationale, & longitudine commensurabile erit expositę Rationali A. Et quia i vt N ad O est potentiá incommensurabilis, ita H ad L longitudine incommensurabilis est, propterea k H L longitudine incommensurabilis erit lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G. Tandem quia productum ex N in O, seu ex A in G Mediale est, erit reliquum l latus G, & eius duplum 2 G Rationale, & longitudine incommensurabile expositæ Rationali A. Quare m nominum H L & 2 G summa M Binomialis quarta erit, differentia Residua quarta.

> n pr. 25 hu.
> o par. 4. huius pr.
> p pr. 13. hu.
> q par. 4. huius pr.
> r par. 1. huius pr.

Quintò quia n Potentis rationale ac medium, vel efficientis cum rationali totum mediale, nomina N & O potentiá sunt incommensurabilia, quorum productum est Rationale, & quadratorum summa medialis; suntque quadrata ex N & O æqualia producto ex A in H L, vt o dictum est, Ergo p producti medialis ex A in H L latus H L Rationale est longitudine incommensurabile expositę Rationali A. Et quia vt N ad O est potentiá incommensurabilis, ita H ad L longitudine incommensurabilis q ostensa est: Ergo r H L longitudine incommensurabilis est lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G. Tandem quia productum ex N in O, seu ex A in G est Rationale: erit s reliquum latus G eiusque duplum 2 G rationale, & longitudine commensurabile expositæ Rationali A. Quapropter t nominum H L, & 2 G summa M Binomialis quinta est, & differētia residua quinta.

2 G
M H L
P N O
A

> s pr. 11. hu.
> t pr. 32. hu.
> u pr. 26. hu.
> x par. 4. 5. huius pr.
> y pr. 13. hu.

Sextò quia u Potentis bina media, vel Efficientis cum mediali totum mediale nomina N, O, sunt potentiá incommensurabilia, quorum summa quadratorum medialis est, & productum mediale incommensurabile summæ quadratorum; estque x summa medialis quadratorū ex N & O æqualis producto ex A in H L, vt dictum est: Ergo y latus H L Rationale est,

est, & longitudine incommensurabile expositæ Rationali A; Et quia vt N ad O est potentiâ incommensurabilis, ᵃ ita ostensa est H ad L longitudine incommensurabilis: Ergo ᵃ H L longitudine incommensurabilis est lateri potenti differentiam quadratorum ex H L, & ex 2 G: Postea quia productum ex N in O, seu ex A in G est mediale, erit ᵇ reliquum latus G eiusque duplum 2 G Rationale, & longitudine incommensurabile Rationali A. Tandem quia summa quadratorum ex N & O incommensurabilis est producto ex N in O, seu ex A in G, & fuit productum ex A in H L ęquale quadratis ex N & C: Ergo productum ex A in H L incommensurabile est producto ex A in G, & ideo ᶜ H L incommẽsurabile longitudine erit ipsi G, eiusque duplô 2 G, & ᵈ propterea nominum H L & 2 G summa M Binomialis sexta erit, differentia verò Residua sexta. Quæ erant ostendenda.

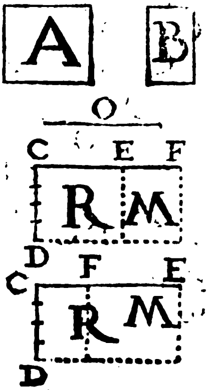
a par. 4. 5. huius pr.
a par. 1 huius pr.
b pr. 13. hu.
c pr. 1. l. 4. sch pr 3. & cor 3. pr. 8. huius.
d pr. 33 hu.

PROPOS. XXXVII. THEOR. XXIII.

Eucl 71. 108 109. X.

Latus potens summam, vel differentiā Rationalis, & Medij, Irrationale est vnum ex octo prioribus.

Sit productum Rationale A, & latus ipsum potens sit R, productum verò B sit Mediale, eumque possit latus M, & ᵃ vt exposita Rationalis D C ad R, ita ponatur R ad C E, atque vt D C ad M, ita ponatur M ad E F. Et quia æquè altis productis eiusdem D C in C E, & in E F ᵇ æqualia sunt quadrata ex medijs proportionalibus M, & R, seu producta A & B: Ergo ᶜ summa, vel differentia ipsorum A & B æqualis erit producto ex D C in C F summam, vel differentiam ipsarum C E & E F; sitque O potens summam, vel differentiam productorum A & B: manifestum est ᵈ O mediam proportionalem esse inter D C, & C F summam, vel differentiam ipsarum C E, & E F. Dico iam O esse Binomialem, aut Bimedialem primam, vel Maiorem, aut Potentem Rationale, ac Medium, vel certè earundem Residuam aliquam. Quoniam productum ex D C in C E æquale est Rationali A: erit ᵉ C E Rationale, & longitudine commensurabile expositę Rationali D C; pariterque quia productum



a pr 10 l. 4. & sch. pr. 3. huius.
b cor. 2. pr. 14. lib 4. & sch. pr 3 hu.
c sch. pr. 1. l 4 & sch. pr. 3. huius.
d cor. 2. pr. 14. lib 4 & sch pr 3. huius.
e cor. pr. 21. huius.

ex D C

f pr.13.hu. ex D C in E F æquale est Mediali B; erit f E F Rationale, at longitudine incommensurabile erit expositæ Rationali D C, & g cor.pr 12. & def. 2 sec huius. ideo g C E, E F erunt Rationales non longitudine, sed potentià tantùm commensurabiles inter se, & propterea inæquales erunt. Sit primo loco C E maior reliqua, & longitudine commensurabilis lateri potenti differētiam quadratorum earundem C E, & E F, et erat C E longitudine commensurabilis expositæ Rationali D C: Igitur h nominum C E, et E F h pr 28 hu summa C F erit Binomialis prima, et differentia Residua prima: i pr. 35. hu. Quare i O media proportionalis inter Rationalem D C, et Binomialem, aut Residuam primam C F: erit Binomialis, aut Residua.

Secundò, reliquis manentibus, sit maius nomen C E longitudine incommensurabile lateri potenti differentiam quak pr. 31 hu dratorum ex C E, et E F. Patet k C F summam, vel differentiam eorundem nominum Binomialem, aut Residuam quarl pr. 35. hu. tam esse, et l mediam proportionalem O inter E F, et Rationalem D C Irrationalē esse Maiorem, aut Minorem dictam.

Tertiò sit nomen E F maius, quàm C E, & E F commensurabile sit lōgitudine lateri potenti differentiam quadratorum nominum; cùmque minus nomen C E longitudine commenm pr. 29 hu surabile sit expositæ Rationali D C: erit m Rationalium potentià commensurabilium summa C F Binomialis secunda, n pr 35. hu. & differentia Residua secunda: Igitur n media proportionalis O erit Bimedialis prima, aut Residua medialis prima.

Quartò sit maius nomen E F longitudine incommensurabile lateri potenti differentiam quadratorum nominum (reliquis manentibus) erit o summa nominū C F Binomialis quinta, & differentia Residua quinta; & propterea p O media proportionalis inter Rationalem D C, & dictam Irrationalem, erit Potens Rationale ac Medium, vel efficiens cum Rationali totum Mediale. Vt propositum fuerat.

o pr. 32. hu.
p pr. 35 hu.

A B
O
C E E F
R M
D C

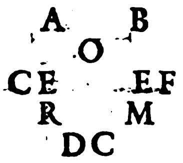
Eucl 72. 110. X.

PROPOS. XXXVIII. THEOR. XXIV.

Latus potens summam, vel differentiam duorum Medialium inter se incommensurabilium, vnum est ex quatuor irrationalibus postremis expositis.

Sint

Sint A, & B Medialia inter se incommensurabilia, & R possit productum A, sed M possit productum B, & facta eadem constructione præcedentis propositionis, O possit summam, vel differentiam Medialium A & B, seu productorum eiusdem altitudinis D C in C E, & E F. Dico O esse Bimedialem secundam, vel Potentem bina media, siue earundem Residuam aliquam. Quoniam Medialia A B, seu producta illis æqualia, D C in C E, & D C in E F ponuntur incõmensurabilia, erunt inæqualia; & ideo a C E, & E F incommensurabiles longitudine, & inæquales erunt. Sit iam primò C E maior, & longitudine commensurabilis lateri potenti differentiam quadratorum inæqualium C E, & E F. Cùmque producta ex D C in C E, & E F æqualia sint Medialibus A & B, erunt b latera C E, & E F Rationalia, & expositę Rationali D C incõmensurabilia longitudine, vt prius inter se longitudine incommensurabilia ostensa fuerunt; & ideo Rationalia C E, & E F, potentià tantùm commensurabilia erunt. Quare c nominum C E, & E F summa C F Binomialis tertia erit, differentia verò Residua tertia. Igitur d O media proportionalis inter C F, & Rationalem D C, erit Bimedialis secunda, vel Residua medialis secunda.



a pr.1 l.4. sch.pr 3. & cor 3. pr.8. huius.

b pr.22 hu.

c pr.31 hu.

d pr.35.hu.

Sit secundò maius nomen C E longitudine incommensurabile lateri potenti differentiam quadratorum nominum; cùmque ambo medialia nomina incommensurabilia sint lõgitudine expositę Rationali C D: erit e summa nominũ C F Binomialis sexta; differentia verò Residua sexta. Quare f O media proportionalis inter Rationalem C D, & C F erit Potens bina media, vel Efficiens cum mediali totum mediale. Vt fuit propositum.

e pr.33.hu.

f pr.35.hu.

PROPOS. XXXIX. THEOR. XXV.

Eucl.111.X

Eadem quantitas non potest esse Residua, & Binomialis.

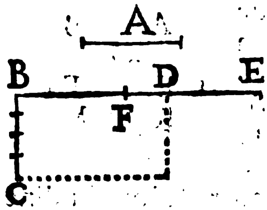
Sit A quælibet Residua. Dico A esse non posse Binomialem. Si enim hoc verum non est, sit A, nedùm Residua, sed etiã Binomialis, & a vt exposita Rationalis B C est ad A, ita fiat A ad B D. Et quoniam A Residua est, erit b latitudo B D Residua prima: Sitque D E minus nomen eius. Ergo c erunt nomina

a pr.10.l.4. & sch.pr.3. huius.

b pr 36 hu.

c pr.28.hu.

mina B E, D E Rationalia potentià tantùm commensurabilia, & B E longitudine commensurabile erit nedùm Rationali B C, sed etiam lateri potenti differentiam quadratorum nominum B E & D E. Postea quia A supponitur quoque Binomialis, & fuit B D tertia proportionalis expositæ Rationa-



d pr. 28 hu. lis B C, & A; igitur d B D est Binomialis prima, cuius maius nomē sit B F: quare B F, F D erūt Rationales potentià tātū commensurabiles, atque B F longitudine commensurabilis erit nedùm Rationali B C; sed etiam lateri potenti differentiam quadratorum ex B F, & F D; Itaque tàm B E, quàm B F eidem B C commensurabiles

e cor pr. 17. l. 3. sunt longitudine: Ergo e B E, & B F inter se commensurabiles quoque longitudine erunt; & propterea f B E ipsi F E reli-
f cor. 1 pr. 20. huius ctæ longitudine commensurabilis erit: Cùmque B E Ratio-
g def. 2. sec. huius. nalis sit, erit quoque g F E Rationalis: Et quia duarum B E, F E longitudine commensurabilium ipsa B E longitudine incommensurabilis est ipsi D E (eo quod sunt potentià tantùm
h cor. pr. 12. huius. commensurabiles) erit h quoque altera F E eidem D E incommensurabilis longitudine, & fuerunt ambæ ostensæ Rationales; Igitur F E, & D E Rationales sunt potentià tantùm
i pr. 21. hu. commensurabiles; ideoque i eorum differentia F D Irrationalis erit, quę Residua dicitur, ostensa autem fuit Rationalis, quod est impossibile. Non ergo A esse potest simul Residua, & Binomialis. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Ex dictis colligitur Binomialem, atque Residuam, & reliquas declaratas Irrationales, neque Mediali, neque inter se
k pr. 13. hu. easdem esse. Nam k quadratum Medialis ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Rationalem, & longitudine in-
l pr. 36. hu. commensurabilem eidem Rationali; Sed l quadratum Binomialis, aut Residuæ ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Binomialem primam, aut Residuam primam.

Et quadratum Bimedialis primæ, vel Residuę Medialis primæ ad Rationalem applicatum latitudinem efficit Binomialem secundam, aut Residuam secundam.

Quadratum verò Bimedialis secundæ, vel Residuæ Medialis secundę ad Rationalem applicatum latitudinem facit

Bino-

Binomialem tertiam, vel Residuam tertiam.

Atque quadratum Maioris, vel Minoris ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem quartam, aut Residuam quartam.

Quadratum verò Potentis rationale, ac medium, vel eius, quę cum Rationali totum Mediale efficit ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem quintam, vel Residuam quintam.

Tandem quadratum Potentis bina medialia, vel eius, quæ cum Mediali totum mediale efficit ad Rationalem applicatum latitudinem facit Binomialem sextam, aut Residuam sextam.

Cùmque hę latitudines differant à latitudine Medialis, & inter se: à latitudine quidem Medialis, quia hęc Rationalis est, illę verò Irrationales; inter se verò quia non sunt eędem ordine, aut specie ex Binomialibus, & Residuis, neque Binomialis vlla eadem est cum Residua. Vnde manifestum est omnes Irrationales quantitates huc vsque traditas inter se diuersas esse.

Ex his sequitur, quòd exposita qualibet Rationali tredecim numero erũt quantitates Irrationales hactenus considerate, quarũ prima est Medialis, secunda Binomialis (quę in sex species diuisa est) tertia Bimedialis prima, quarta Bimedialis secunda, quinta Maior, sexta Potens rationale, ac Mediale; Septima Potens bina medialia, octaua Residua, cuius sex species inuentę sunt, nona Residua medialis prima, decima Residua medialis secunda, vndecima Minor, duodecima Efficiens cum rationali totum mediale, decima tertia Efficiẽs cum mediali totum mediale.

PROPOS. XL. THEOR. XXVI.

Eucl. 112. 113 X.

Quadratum Rationalis ad Binomialem applicatum latitudinem efficit eiusdem speciei Residuam; & ad Residuam applicatum latitudinem efficit Binomialem eiusdem speciei, quorum nomina sunt proportionalia, & longitudine commensurabilia.

Sit Rationalis exposita A, & Binomialis, aut Residua BC; cuius nomina sint BD maius, & DC minus, & ad BC, atque ad eius minus nomen DC applicata sint producta M & O ęqualia quadrato ex Rationali A, quę faciant latitudines C E, & C G. Dico quando B C est Binomialis, vt in primo casu, esse C E Residuam; at quando B C est Residua, vt in secundo casu, esse C E Binomialem, & erunt nomina ipsius C E proportionalia, & longitudine commensurabilia nominibus ipsius B C, atque C E erit Irrationalis eiusdem speciei, ac est

a pr. 11. l. 4. & sc. pr. 3 huius. B C. Vt a G E ad E C, ita fiat E H ad H C. Quoniam producta M, & O ęqualia sunt eidem quadrato ex Rationali A, erunt illa inter se ęqualia; & propterea b B C ad C D erit, vt G C ad

b cor. 2. pr. 14. lib. 4. & sch. pr. 3 hu. C E, & diuidendo, c vel componendo B D ad D C erit, vt G E ad E C, vel vt E H ad H C; & propterea d E H ipsi H C potentià tantùm commensurabilis erit, veluti maius nomen B

c pr. 13. 14 lib. 3. D minori nomini D C potentià tantùm commensurabile est.

d cor. 3. pr. 8 huius. Postea quia G E ad E C est, vt E H ad H C; Ergo e homologarum summę vel differentię, scilicet G H ad H E erit, vt E H

e pr. 15. l. 3. ad H C; cùmque sint tres continuè proportionales G H, H E,

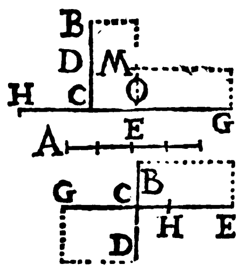
d cor 3 pr. 17. lib 4. & cor. 1. pr. 1. huius. H C, erit d quadratum ex H E, ad quadratum ex H C, seu vt quadratum ex B D ad quadratum ex D C in eadem ratione, ac est G H ad H C; est verò quadratum ex D B ad quadratum ex D C, seu quadratum ex E H ad quadratum ex H C commensurabile, proptèrea quod nomina B D, & D C potentià

e cor. 3. pr. 8. huius commensurabilia supponuntur: Igitur e G H longitudine cōmensurabilis est ipsi H C, & propterea f eius Residuum G C

f cor. 1. pr. 8 huius. longitudine commensurabile erit ipsi H C, sed g G C Rationalis est, & longitudi-

g cor. pr. 11. huius. ne commensurabilis Rationali C D (propterea quod ad Rationalem C D applicatum est productum O Rationale ęquale

h cor. pr. 17. l. 3. & def. 2 sec. huius. le quadrato ex A, efficiens latitudinem C G); Ergo h H C Rationalis quoque erit, & longitudine commensurabilis eidem Rationali C D: Et quia vt B D ad



D C, ita erat E H ad H C, i permutando B D ad E H erit vt D

i pr. 12. l. 3. C ad C H; suntque D C, & H C Rationales, & longitudine

k cor. 3. pr. 8 huius. commensurabiles inter se; Igitur k Rationali B D longitudine commensurabilis erit E H, & ideo, l Rationalis quoque

l def. 2. sec. huius. erit. Cùm ergo E H, & H C sint Rationales, & potentià tantùm inter se commensurabiles, vt prius dictum est: erit m C

m pr. 21. hu E nominum differentia in primo casu Residua, & summa C E in secundo Binomialis, eiusque nomina E H, & H C sunt proportionalia, & longitudine commensurabilia nominibus

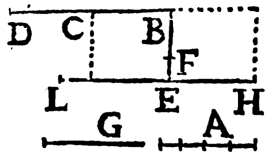
bus

bus B D, & D C alterius Irrationalis B C. Tandem *n* quoniam duæ summæ, vel duæ differentiæ nominum B D, D C, & E H, H C efficiũt Binomiales aut Residuas eiusdem ordinis, & speciei, eo quod commensurabilia sunt longitudine nomina inter se; & ideo eorum summæ, vel differentiæ commensurabiles sunt longitudine inter se; sed eorundem nominum E H, & H C summa, & differentia efficiunt Binomialem, & Residuam eiusdem speciei, vt ostensum est in propositione 34 huius. Ergo Binomialis B C, & Residua C E, vel Residua B C, & Binomialis C E eiusdem speciei sunt. Vt erat propositum. *n pr. 34. hui.*

PROPOS. XLI. THEOR. XXVII. *Eucl. 113. X.*

Media proportionalis inter Binomialem & Residuã, quę habeant nomina proportionalia, & inter se longitudine commensurabilia, Rationalis est.

Sit B C Residua, cuius nomina B D & D C, atque B E sit Binomialis, cuius maius nomen B F, minus F E; Sitque B D ad B F, vt C D, ad F E, & sit tam B D ipsi B F, quàm C D ipsi F E longitudine commensurabilis, & inter C B & B E posita sit media proportionalis G. Dico G Rationalem esse. Fiat *a* B E ad expositam Rationalem A, vt A ad E H. manifestum est *b* productum ex B E in E H, (quod æquale est quadrato Rationalis A) efficere latitudinẽ E H Residuam, cuius nomina, quæ sint H L, & L E, proportionalia erunt, & longitudine commensurabilia nominibus B F, & F E; Sed ex hypothesi nomina D B, & D C longitudine commensurabilia, & proportionalia sunt nominibus B F, & F E; Igitur *c* L H ad L E est, vt D B ad D C, atq; L H ipsi B D, nec non L E ipsi D C longitudine commensurabile erit: Quare permutando *d* L H ad B D erit, vt L E ad D C, ideoque *e* Residua E H ad Residuam C B erit, vt tota H L ad totam B D, & propterea *f* E H, & C B longitudine commensurabiles erunt: Cùmque *g* productum ex B E in E H, scilicet quadratum ex A, ad productum ex E B in B C, seu ad ei *h* æquale quadratum ex G; Sit vt latitudo E H ad latitudinem C B, cùm B E sit altitudo communis; fuerunt autem huiusmodi latitudines ostensę commensurabiles inter se longitudine.



a pr. 10. 6. & sch. pr. 3. huius.
b cor. 2. pr. 14. l. 4 sch. pr 3. & pr 40. huius.
c pr op7. & cor. pr. 17. lib. 3.
d pr. 12. l. 3.
e pr. 15. l. 3.
f cor. 3. pr 8 huius.
g pr. 1. l. 4. & sch. pr. 3. huius.
h cor. 2. pr. 14. lib. 4. & sch. pr. 3. hu.

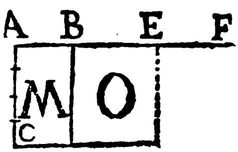
Igitur quadratum ex Rationali exposita A commensurabile
i def. 2. sec. huius. erit quadrato ex latere G; & propterea i latus G medium proportionale inter Residuã C B, & Binomialem B E Rationale erit. Quod erat ostendendum.

Eucl. 115. X.

PROPOS. XLII. THEOR. XXVIII.

A Mediali infinitę Irrationales fiunt, & nulla alicui expositarum est eadem.

Sit Medialis A B. Dico ex illa oriri posse infinitas quantitates Irrationales, quarum nulla eadem erit alicui ex tredecim Irrationalibus superius expositis. Sit enim exposita Rationalis A C, & ex Rationali A C in Medialem A B fiat productum
a pr. 21. hu. M. Patet productum M Irrationale esse (eo quod a si Rationale concedatur efficeret latitudinem A B Rationalem, quod non ponitur, concessa enim fuit A B Medialis: Sit iam b B E latus quadrati ęqualis producto M; Erit ergo c B E Irrationalis. Dico quòd B E nõ est aliqua ex tredecim Irrationalibus iam declaratis; Si enim B E est medialis, d eius



b pr. 21. l. 4. & sch. pr. 3. huius. c def. 9. sec. huius. d pr. 13. hu.

quadratum ad Rationalem A C applicatum efficiet latitudinem A B Rationalem; at si B E credatur vna ex duodecim
e pr. 35. hu. expositis irrationalibus e eius quadratum ad Rationalem A C applicatum efficiet latitudinem A B Binomialem aut Residuam; estque A B Medialis ex hypothesi: Ergo eadem quãtitas A B est Medialis & simul Binomialis aut Residua, aut
f cor. pr. 39. huius. alia Irrationalis diuersa; quod f est impossibile. Igitur Irrationalis B E diuersa est ab omnibus Irrationalibus expositis.

Postea fiat productum O ex Rationali A C & inuentà Ir-
g pr. 10. & cor. 2. pr 14. l 4. & sch. pr 3 huius. rationali B E, atque g latus E F possit productum O. Manifestum est h productum O ex Rationali A, & Irrationali B E esse Irrationale: & propterea i latus E F, potens productum O
h ex pr. 18. huius. Irrationale erit. Dico iam E F non esse aliquam ex declaratis
i def 5 sec. huius. tredecim Irrationalibus, nec esse eandem ipsi B E. Quoniam quadratum ex E F ad Rationalem A C applicatum efficit latitudinem B E; sed quadrata declaratarum Irrationalium, atque ipsiusmet B E latitudines faciunt in eadem applicatione diuersas ab ipsa B E, vt dictum est. Eodem modo alię infinitę Irrationales inueniri possunt, quæ & inter se, & à di-

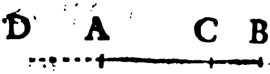
ctis

ctis Irrationalibus differunt. Quare patet propositum.

PROPOS. XLIII. THEOR. XXIX. Eucl. 8. XIII.

Cuiuslibet lineę extrema ac media ratione diuisę vtrumque segmentum Irrationale est, quod vocatur Residuum.

Sit linea Rationalis A B diuisa in C extrema ac Media ratione, ita vt sit tota A B ad maius segmentum eius A C, vt est A C ad minus segmentum C B. Dico vtrunque segmentum A C, & C B Irrationale esse, quod vocatur Residuum. Addatur maiori segmento A C ipsa D A, quæ ęqualis sit dimidiæ totius A B. Quoniam *a* quadratum ipsius C D quintuplum est quadrati ipsius D A, erunt *b* quadrata ex C D, & ex D A commensurabilia, & propterea latera C D, & D A commensurabilia erunt potentià tantùm, quandoquidem eorum quadrata sunt inter se, vt, duo numeri 5 & 1, qui *c* non sunt vt duo numeri quadrati, cùm sint numeri primi; & *d* est D A Rationalis, cùm dimidia sit Rationalis A B: Igitur C D commensurabili potentià tantùm ipsi D A Rationali, erit quoque Rationalis; Cùmque A C sit differentia duarum Rationalium C D, & D A potentià tantùm commensurabilium, erit *e* ipsa A C Irrationalis, quę Residua vocatur. Et siquidem ipsa A B fuerit exposita Rationalis, vel ipsa A B longitudine commensurabilis sit expositę Rationali, erit eius semissis D A expositæ Rationali longitudine commensurabilis; Cùmque maius nomen C D quintuplum possit minoris nominis D A, erit quadratum differentiale eorundem nominum quatuor partes earum, quarum quadratum D C est quinque partes; & propterea huiusmodi quadrata erunt, vt 5 ad 4, qui *f* duo numeri non sunt ambo quadrati; & propterea maius nomen C D longitudine incommensurabile erit lateri, potenti differētiam quadratorum nominum, & est minus nomen D A longitudine commensurabile expositę Rationali, vt dictum est. Ergo *g* A C erit Residua quinta.



a pr. 7. l. 9.
b pr. 8. hu.
c cor. pr. 37. lib. 8.
d def. 2. sec. huius.
e pr. 2 1. hu.
f ex sch. pr. 45. l. 8.
g pr. 32 hu.

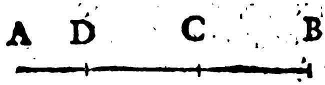
Rursus quia *h* productum ex A B in B C ęquale est quadrato Medię proportionalis A C: Igitur quadratum ex A C applicatum ad Rationalem A B efficit latitudinē B C; *i* Sed quadratum Residuę A C applicatum ad Rationalem A B efficit latitu-

h pr. 25. & cor. 2. pr. 14 l. 4.
i pr. 36. hu.

latitudinem Residuam primam. Igitur segmentum minus C B Residuum primum erit. Quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Deducitur ex hac propositione, quòd si maius segmentum lineæ diuisę extrema, & media ratione fuerit Rationale: erit minus segmentum eius Residuum.



k cor. pr. 25 lib. 4. Nam si ex maiori segmento A C abscindatur portio C D æqualis minori segmento C B, erit k A C diuisa in D extrema, ac media ratione, cuius maius segmentum est D C, & propterea existente A C Rationali, erit ex hac propositione C D, seu C B Residua.

PROPOS. XLIV. THEOR. XXX.

Iuxta 11. XIII.

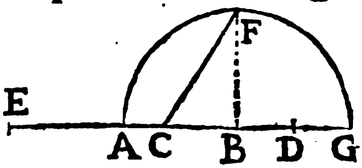
Si diameter circuli Rationalis fuerit; Pentagoni latus erit Irrationalis linea, quæ vocatur Minor.

Sit circulus A F G, cuius diameter A G, vel radius A B Rationalis sit. Secetur a radius A B in puncto C extrema, ac media ratione, ita vt C B sit maius segmentum eius, & b ducta perpendiculari B F, coniungatur recta C F. Quia c radius circuli A B equalis est inscripto lateri hexagoni regularis, & secatur in C extrema, ac media ratione: Igitur d maius eius segmentum C B erit latus inscripti decagoni regularis; Sed e latus pentagoni potest & latus hexagoni, & latus decagoni: Igitur C F, potens radium F B, seu A B, & C B, erit latus inscripti pentagoni. Dico iam C F Irrationalem esse, quę vocatur Minor. Secetur radius B G bifariam in D, & producatur diameter G A in E, vt sit E A ęqualis radio A B Quoniam D B semissis est radii B G, seu ei ęqualis E A, erit D B quarta pars diametri Rationalis A G, seu ei æqualis E B; & propterea D B quinta pars erit totius E D; & ideo f E D Rationalis erit longitudine commensurabilis expositę Rationali A G. Postea quia A B secatur in C extrema, & media ratione, & maiori eius segmento C B additur B D semissis totius A B; ergo g quadratum ex C D quintuplum est quadrati B D semissis totius; erat autem longitudine E D quintupla eiusdem

a pr. 25. l. 4.
b pr. 10 l. 1.
c sch pr. 3. lib. 5.
d sch. pr. 8. lib. 5.
e pr. 32. l. 5.
f def. 2. sec. huius.
g pr. a2 l. 5.

dem

dem B D: ergo *h* E D, D C, & B D proportionales sunt, & ideo quadratum ex E D quintuplum erit quadrati ex C D; Quare C D potentiâ tantùm commensurabilis Rationali E D, *i* vt dictum est, Rationalis *k* quoque erit; estque E D longitudine incommensurabilis lateri differentiæ quadratorum ex E D, & ex C D (eo *l* quod eorum quadrata sunt inter se, vt numeri 5, & 4, sicuti in precedenti prop. dictum est, qui ambo quadrati non sunt), atque maior E D longitudine commensurabilis fuit expositę Rationali A G. Ergo *m* nominum E D, & D C differentia, E C Residua quarta est. Iam quia *n* rectangulum C E A æquale est quadrato ex E A, vel ex F B vnà cum Rectangulo E A C, siue ei æquali B A C, vel *o* huic ęquali quadrato ex C B: Ergo rectangulũ C E A ęquale est duobus quadratis ex F B latere hexagoni, & ex C B latere decagoni: Quare *p* rectangulum C E A æqualę erit quadrato ex C F latere pentagoni, quod illis duobus quadratis ęquale est; & ideo latus *q* pẽtagoni medium proportionale est inter radium circuli A E & rectam C E: sed *r* media proportionalis inter Rationalem E A, & Residuam quartã E C Irrationalis quantitas est, quę vocatur Minor. Igitur latus pentagoni C F Irrationalis quantitas est, quę Minor vocatur. Vt erat propositum.



h cor. 3. pr. 17. l. 4.
i in præced. prop.
k def. 2. sect. huius.
l pr. 8. huius & scb pr. 45. lib 8.
m pr. 31. huius.
n scb pr. 1. & or. 1. l. 4.
o pr. 25. & cor. 2 pr. 14 l. 4.
p pr. 32. l. 5
q cor. 2. pr. 14. l. 4.
r pr. 36. huius.

PROPOS. XLV. THEOR. XXXI.

Eucl. 16. 18. XIII.

Si diameter sphęrę Rationalis fuerit, erit latus inscripti Icosaedri Irrationalis linea, quę vocatur Minor; Et latus Dodecaedri erit linea Irrationalis, quæ vocatur Residua.

Quoniam *a* sphęrę diameter potestate est ad latus Icosaedri, vt quintuplum quadrati lateris hexagoni; ad quadratum lateris pentagoni, sed existente *b* latere hexagoni, seu radio circuli Rationali, est *c* latus inscripti pentagoni Irrationalis linea, quę vocatur Minor, & est quintuplum quadrati lateris hexagoni commensurabile quadrato eiusdem lateris hexagoni: Igitur *d* quintuplum quadrati prædicti lateris hexagoni Rationale quoque erit; Sed *e* quintuplo huius quadrati ęquale est quadratum diametri sphęrę: Igitur quadratum diametri sphęræ Rationale erit, & propterea *f* diameter ipsa Rationalis.

a cor. 1. pr. 4 l. 7.
b scb. pr. 3. l. 5.
c pr. 44. huius.
d def. 4. sect. huius
e ex pr. 4. l. 7.
f def. 2. sect. huius.

nalis. Quapropter existente sphęrę diametro Rationali, erit latus Icosaedri linea Irrationalis, quę Minor vocatur.

g cor. 2. pr. 8. l. 7. h sch. pr. 3. l. 5. i ex prop. 44. huius. k def. 4 sec. huius. l ex pr. 5. l. 7.

Secundò quoniam g sphęrę diameter potestate ad latus Dodecaedri est, vt triplum quadrati lateris hexagoni ad quadratum lateris Decagoni; Et existente latere hexagoni, h seu radio sphærę Rationali, i erit latus Decagoni Irrationalis linea, quę Residua vocatur. Estque k triplum quadrati lateris hexagoni Rationale quoque, vtpote illi commensurabile, sed l triplo huius quadrati ęquale est quadratum diametri sphærę; Quare sphęrę diameter Rationalis quoque erit; & tunc latus Dodecaedri linea Irrationalis erit, quę vocatur Residua. Quod erat ostendendum.

FINIS.

EVCLIDIS PROPOSITIONES

juxta methodum Theonis vulgatam, cum locis huius operis, in quibus eædem Eucl. propositiones exponuntur.

LIBER I.

a rint,

vlte-

3 *Si recta linea secta sit vtcunque, rectangulum sub tota & vno segmentorum comprehensum, æquale est & illi, quod sub segmentis comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à prędicto segmento describitur, quadrato. lib.4. schol. prop.1.* 165

4 *Si recta linea secta sit vtcunque: quadratum, quod à tota describitur, æquale est & illis quę à segmentis describuntur quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo. lib.5. cor.2.prop.19.* 227

5 *Si recta linea secetur in ęqualia & non ęqualia: rectangulum sub inęqualibus segmentis totius comprehensum vnà cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, æquale est ei quod à dimidiæ describitur, quadrato. lib.5. cor.prop.22.* 233

6 *Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quędam linea in rectum adijciatur, rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta & adiecta, simul cum quadrato à dimidia, æquale est quadrato à linea, quæ tum ex dimidia, tũ ex adiecta componitur, tanquam ab vna descripto. lib.5. cor.prop.22.* 233

7 *Si recta linea secetur vtcunque: quod à tota, quodque ab vno segmentorum, vtraque simul quadrata, æqualia sunt & illi, quòd bis sub tota & dicto segmento comprehenditur, rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit, quadrato. lib.5.cor.1.prop.20.* 229

8 *Si recta linea secetur vtcunque: rectangulum quater comprehensum sub tota & vno segmentorum, cum eo, quod à reliquo segmento fit, quadrato, ęquale est ei, quod à tota & dicto segmento, tanquam ab vna linea describitur, quadrato. lib.5. cor.1.prop.21.* 231

9 *Si recta linea secetur in ęqualia & non ęqualia: quadrata quę ab inęqualibus totius segmentis fiunt, duplicia sunt & eius quod à dimidia, & eius quod ab intermedia sectionum fit, quadratorum. lib.5. prop.23.* 233

10 *Si recta linea secetur bifariam, adijciatur autem ei in rectum quępiam recta linea: quod à tota cum adiuncta, & quod ab adiuncta, vtraque simul quadrata, duplicia sunt & eius quod à dimidia, & eius quod à composita ex dimidia & adiuncta, tanquam ab vna descriptum sit, quadratorum. lib.5. prop.23.* 233

11 *Datam rectam lineam secare, vt comprehensum sub tota & altero segmentorum rectangulum, æquale sit ei, quod à reliquo segmento fit, quadrato. lib.4.pr.25.* 195

12 *In amblygonijs triangulis, quadratum quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis quæ fiunt à lateribus obtusum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehensi, & ab vno laterum quæ sunt circa obtusum angulum, in quod, cùm protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum. lib.5. cor.1. prop.28.* 240

13 *In oxygonijs triangulis, quadratum à latere angulum acutum subtendente, minus est quadratis quæ fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, pro quantitate rectanguli bis comprehensi, & ab vno laterum*

LIB. V.

1 *Si sint quotcunque magnitudines quotcunque magnitudinum equalium numero, singule singularum eque multiplices, quàm multiplex est vnius vna magnitudo, tam multiplices erunt & omnes omnium. ex lib.3. prop.15.* 143

2 *Si prima secunde eque fuerit multiplex, atque tertia quarte, fuerit autem & quinta secunde eque multiplex, atque sexta quarte: erit & composita prima cum quinta, secunde æque multiplex, atque tertia cum sexta, quarte. ex lib.3. prop.22.* 153

3 *Si sit prima secunde eque multiplex, atque tertia quarte, sumantur autem eque multiplices primæ & tertiæ: erit & ex equo sumptarum vtraque vtriusque eque multiplex, altera quidem secunde, altera autem quartæ. ex lib. 3. prop. 17.* 146

4 *Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, & tertia ad quartam: etiam æque multiplices prime & tertie, ad eque multiplices secundæ & quartæ iuxta quanuis multiplicationem eandem habebunt rationem, si prout inter se respondent, ita sumptæ fuerint. lib.3. cor.1. prop.14.* 150

5 *Si magnitudo magnitudinis eque fuerit multiplex, atque ablata ablatæ: etiam reliqua reliquæ ita multiplex erit, vt tota totius. ex lib.3. pro. 15.* 143

6 *Si due magnitudines, duarum magnitudinum sint eque multiplices, & detracte quedam sint earundem æque multiplices: & relique eisdem aut equales sunt, aut eque ipsarum multiplices. ex lib. 3 cor. prop. 22. & cor. 1. prop. 15.* 144

7 *Æquales ad eandem, eandem habent rationem: & eadem ad equales. lib.3. prop. 3.* 132

8 *Inequalium magnitudinum, maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quàm ad maiorem. lib.3. prop. 2.* 131

9 *Quæ ad eandem, eandem habent rationem, equales sunt inter se: & ad quas eadem, eandem habet rationem, ee quoque sunt inter se equales. lib.3. prop.4.* 133

10 *Ad eandem magnitudinem, rationem habentium, que maiorem rationem habet, illa maior est. ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est. lib.3. prop.5.* 134

11 *Que eidem sunt eedem rationes, & inter se sunt eedem. lib. 3. prop. 7.* 135

12 *Si sint magnitudines quotcunque proportionales, quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium, ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes. lib.3. prop.15.* 143

13 *Si prima ad secundam, eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, tertia verò ad quartam, maiorem rationem habuerit, quam quinta ad sextam: prima quoque ad secũdam maiorem rationem habebit, quam quinta ad sextam. lib.3. prop.6.* 134

14 *Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam, prima verò quàm tertia maior fuerit: erit & secunda maior quam quarta. Quòd si prima fuerit equalis tertie, erit & secũda equalis quarte: si verò*

LIB. VI.

LIB. VII.

quis

11 *Duo-*

15 Si

15 *Si quatuor rectę proportionales fuerint, possit autem prima plusquàm secunda tanto quantum est quadratum lineę sibi commensurabilis longitudine: tertia quoque poterit plusquam quarta tanto quantum est quadratum lineę sibi commensurabilis longitudine. Quòd si prima possit plusquàm secunda quadrato lineæ sibi longitudine incommensurabilis: tertia quoque poterit plusquàm quarta quadrato lineę sibi incommensurabilis longitudine. ex lib.9.prop.10.* 405

16 *Si duę magnitudines commensurabiles componantur, tota magnitudo composita singulis partibus commensurabilis erit. Quòd si tota magnitudo composita alterutri parti commensurabilis fuerit, illæ duę quoque partes commensurabiles erunt. lib.9. cor.1. prop.10.* 406

17 *Si duæ magnitudines incommensurabiles componantur, ipsa quoque tota magnitudo singulis partibus componentibus incommensurabilis erit. Quòd si tota alteri parti incommensurabilis fuerit, illæ quoque primę magnitudines inter se incommensurabiles erunt. lib.9. cor.2.prop.10.* 407

18 *Si fuerint duę rectę lineę inęquales, & quartæ parti quadrati quod describitur à minore, ęquale parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: si præterea parallelogrammum sui applicatione diuidat lineam illam in partes inter se commensurabiles lõgitudine: illa maior linea tanto plus potest quàm minor, quantum est quadratum lineę sibi cõmensurabilis longitudine. Quòd si maior plus possit quã minor, tanto quantum est quadratum lineę sibi commensurabilis longitudine, & pręterea quartę parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua maiore tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius parallelogrammi: parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se longitudine commensurabiles. lib.9. prop.10* 405

19 *Si fuerint duæ rectæ inęquales, quartę autẽ parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum secundum lineam maiorem applicetur, ex qua linea tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus eiusdem parallelogrammi: si parallelogrammum prӕterea sui applicatione diuidat lineã in partes inter se longitudine incommensurabiles: maior illa linea tanto plus potest quam minor quantum est quadratum lineę sibi maiori incommensurabilis longitudine. Quòd si maior linea tanto plus possit quàm minor, quantum est quadratum lineę incõmensurabilis sibi lõgitudine: & pręterea quartæ parti quadrati lineæ minoris ęquale parallelogrammum applicetur secundum maiorem, ex qua tantum excurrat extra latus parallelogrammi, quantum est alterum latus ipsius: parallelogrammum sui applicatione diuidit maiorem in partes inter se incommensurabiles longitudine. lib.9. prop.10.* 405

20 *Superficies rectangula contenta ex*

com-

57 Si

bilis

prop.

eadem

eadem sunt altitudine, quorum insistentes lineæ in iisdem collocantur rectis lineis, illa sunt inter se æqualia. lib.6.cor.1.pr.29. 291

30 Solida parallelis planis circunscripta, quę super eandem basin & in eadem sunt altitudine, quorum insistentes lineę non in iisdem reperiuntur rectis lineis, illa sunt inter se æqualia. lib.6.cor.1.pr.29. 291

31 Solida parallelis planis circunscripta, quę, in eadem sunt altitudine, ęqualia sunt inter se. lib.6.cor.1. prop. 29. 291

32 Solida parallelis planis circunscripta quę eiusdem sunt altitudinis, eam habent inter se rationem, quam bases. lib.6.cor.pr.31. 294

33 Similia solida parallelis planis circunscripta, habent inter se rationem homologorum laterum triplicatam. lib.6.pr.37. 302

34 Æqualium solidorum parallelis planis contentorum bases cum altitudinibus reciprocantur. Et solida parallelis planis contenta, quorum bases cum altitudinibus reciprocantur, illa sunt æqualia. lib.6.pr.32. 294

35 Si duo plani sint anguli ęquales, quorum verticibus sublimes rectæ lineę insistant, quæ cum lineis primò positis angulos contineant æquales, vtrunque vtrique, in sublimibus autem lineis quælibet sumpta sint puncta, & ab his ad plana, in quibus consistunt anguli primùm positi, ductæ sint perpendiculares, ab earum verò punctis, quæ in planis signata fuerint, ad angulos primùm positos adiunctę sint rectę lineę, hę cum sublimibus ęquales angulos comprehendent. lib.6. prop.15. 265

36 Si rectę tres lineę sint proportionales, quod ex his tribus fit solidum parallelis planis contentum, æquale est descripto à media linea solido parallelis planis comprehenso, quod æquilaterum quidem sit, sed antedicto æquiangulum. lib.6. pr.33. 295

37 Si rectę quatuor lineę sint proportionales, illa quoque solida parallelis planis contenta, quę ab ipsis lineis & similia & similiter describuntur, proportionalia erunt. Et si solida parallelis planis comprehensa, quę & similia & similiter describuntur, sint proportionalia, illę quoque rectę lineæ portionales erunt. ex lib. 6. pr.37. & ex lib.3.pr. 19.

38 Si planum ad planum rectum sit, & à quodam puncto eorum quæ in vno sunt planorum perpendicularis ad alterum ducta sit, illa quę ducitur perpendicularis, in communem cadet planorum sectionẽ. lib.6.cor.2. pr.5. 255

39 Si in solido parallelis planis circunscripto, aduersorum planorum lateribus bifariam sectis, educta sint per sectiones plana; communis illa planorum sectio, & solidi parallelis plani circunscripti diameter, se mutuò bifariam secant. ex lib.6. cor.1. prop.29. 291

40 Si duo sint ęqualis altitudinis prismata, quorum hoc quidem basim habeat parallelogrammum, illud verò triangulum, sit autem parallelogrammum trianguli duplum, illa prismata erunt ęqualia. lib.6. sch.pr. 28. 289

LIB. XII.

1 Similia quæ sunt in circulis polygona, rationem habent inter se quam

minoris sphere superficiem non tangat. lemma omissum.

18 Sphere inter se rationem habent suarum diametrorum triplicatam. lib. 6. pr. 37. 302

LIB. XIII

1 Si recta linea per extremam & mediam rationem secta sit, maius segmentum quod totius linee dimidium assumpserit, quintuplum potest eius quadrati, quod à totius dimidia describitur. lib. 5. pr. 27. 237

2 Si recta linea sui ipsius segmenti quintuplum possit, & dupla segmenti huius linea per extremam & mediam rationem secetur, maius segmentum reliqua pars est linee primùm posite. lib. 5. pr. 27. 237

3 Si recta linea per extremam & mediam rationem secta sit, minus segmentum quod maioris segmenti dimidium assumpserit, quintuplum potest eius, quod à maioris segmenti dimidio describitur, quadrati. lib. 5. prop. 26. 236

4 Si recta linea per extremam & mediam rationem secta sit, quod à tota, quodque à minore segmento simul vtraq; quadrata, tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur, quadrati. lib. 5. pr. 24. 234

5 Si ad rectam lineam, que per extremam & mediam rationem secetur, adiuncta sit altera segmento maiori equalis, tota hec linea recta per extremam & mediam rationem secta est, estq; maius segmentum linea primùm posita. lib. 4. cor. pr. 26. 197

6 Si recta linea rationalis, per extremam & mediam rationem secta sit, vtrunque segmentorum irrationalis est linea, que dicitur Residuum. lib. 9. pr. 43. 453

7 Si pentagoni equilateri tres sint æquales anguli, siue qui deinceps, siue qui non deinceps sequuntur, illud pentagonum erit equiangulum. ex lib. 5. sch. prop. 7. 209

8 Si pentagoni equilateri & æquianguli duos qui deinceps sequuntur angulos recte subtendant linee, ille per extremam & mediam rationem se mutuò secant, earumque maiora segmenta, ipsius pentagoni lateri sunt equalia. lib. 5. prop. 7. 208

9 Si latus hexagoni & latus decagoni eidem circulo inscriptorum composita sint, tota recta linea per extremã & mediam rationem secta est, eiusque segmentum maius, est hexagoni latus. lib. 5. prop. 8. 210

10 Si circulo pentagonum equilaterum inscriptum sit, pentagoni latus potest & latus hexagoni & latus decagoni, eidem circulo inscriptorum. lib. 5. pr. 32. 245

11 Si in circulo Rationalem habente diametrum, inscriptum sit pentagonum equilaterum, pentagoni latus irrationalis est linea, que vocatur Minor. lib. 9. pr. 44. 454

12 Si in circulo inscriptum sit triangulum equilaterum, huius trianguli latus potentia triplum est eius linee, que ex circuli centro ducitur. lib. 5. pr. 30. 242

13 Pyramidem constituere, & data sphera complecti, atque docere illius sphere diametrum potentia sesquialteram esse lateris ipsius pyramidis. lib. 7. pr. 1. 306

Finis elementorum Euclidis, ex traductione St. Gracilis.

Imprimatur si ita videbitur Reuerendiss. Patri Inquisitori Pisarum.

Ab. Ioannes Pinoc. Vic. Gen.

Videat, & referat Adm. R. P. Magister Hieronymus Peri de Burgo S. Laurentij Theologus publicus Pisarum hac die 11. Decemb. 1657.

Fr. Hieronymus de Lugo Inquisitor Pisarum.

Iussu Reuerendissimi Patris Magistri Hieronymi Baroni de Lugo ordinis Minorum Conu. Inquisitoris Generalis Pisarum, Vidi librum inscriptum. Euclides Restitutus. Auctore Perillustri, & Excellentissimo D. Io: Alphonso Borellio, in Messanensi pridem, nunc verò in Pisano Gymnasio Matheseos Professore. In quo nedùm Euclidem Restitutum, & elegantiùs reformatum, verùm etiam Archimedem è Sicilię oris denuò erùmpentem suspicatus sum. Rediuiuo perennitatem auguror. Cumque in suis demonstrationibus nihil fidei, moribusque aduersum indigitet, dignissimum, qui prælo detur existimo.

F. Hieronymus Peri Ordinis Minorum Conu. in Vniuersitate Pisana S. Theologiæ Professor, & Sanctiss. Inquisitionis Consultor.

Stante prædicta attestatione Imprimatur.

F. Hieronymus de Lugo Inquisitor Generalis Pisarum.

Alexander Victorius Senator Ser. M. Ducis Aud.