ÆGIDII FRANCISCI DE GOTTIGNIES

BRVXELLENSIS È SOCIETATE IESV

LOGISTICA VNIVERSALIS,

SIVE

MATHESIS GOTTIGNIANA

AMPLECTENS

Arithmeticæ, Geometriæ, aliarumque partium Matheseos

ELEMENTA

BREVISSIMÈ PROPOSITA, AMPLISSIMÈ DECLARATA, LATISSIMÈ PATENTIA, SOLIDISSIMÈ DEMONSTRATA.

Primus liber docet Logisticæ practicæ vsum.
Secundus liber demonstrat speculatiuæ Logisticæ fundamenta.
Tertius liber considerat conuenientias atque differentias.

INTER

Antiquam Mathesim ab Euclide traditam.
Algebram à Vieta, Cartesio, alijsque promotam.
Logisticam, prioribus libris expositam.

AD

ILLVSTRISSIMVM, ET EXCELLENTISSIMVM DOMINVM

D. CAROLVM DE CARDENAS

PRINCIPEM SACRI ROMANI IMPERII,
PRIMVMQVE REGNI NEAPOLITANI
MARCHIONEM, &c.

NEAPOLI M.DC.LXXXVII.

Typis Nouelli de Bonis Typographi Archyepiscopalis.

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO DOMINO.

D. CAROLO DE CARDENAS SACRI ROMANI IMPERII PRINCIPI

Primo totius Regni Neapolitani, & Laini Marchioni, Acerrarum, & Palatino Comiti, Alcaydo perpetuo Vrbis Plutiæ in Regno Siciliæ, Militum grauis armaturæ Præfecto &c.

ÆGIDIVS FRANCISCVS DE GOTTIGNIES SOCIETATIS IESV FELICITATEM.

QVæ ſingula nomina prouocare ſcriptores conſueuerunt ad ſua opera magnis Heroibus conſecranda, conſpirant in vnum omnia, noſque ad hoc Excellentiæ Tuæ nuncupandum prorſus impellunt. Aut enim eximia nobilitas quæritur ad illuſtria Auſpicia conſequenda; aut ſingularis quædam inductio deuinctiſſimi animi: aut magna doctrinæ, quæ in Dedicato volumine pertractatur, notitia: aut demum peculiaris aliquis nexus inter operis argumentum, ac Dotes florentes in Principe, cui opus idem obſequentiſſimè deuouetur. Porro ſi conſentaneum ab inſigni Nobilitate præſidium petitur, quid Tua præſtantius, ad Gothos Hiſpaniarum Reges D. Hermenegildum, & Recaredum originem referente, perpetuoque ſplendore ad præſentem claritatem deducta? Infinitus ſim ineundo conſilium

re-

recensendi Auorum seriem, qui præclarissimam de Cardenas familiam, quæ Te Principem suum agnoscit, gloriosissimis nominibus illustrarunt. Quoniam vix aliquid mihi permittit Modestia Tua, pauca tantum delibare cogor in specimen cæterorum, siue quæ in Hispania primùm, occidua Cœli parte, siue quæ in Italia deinde, atque hoc florentissimo Regno, si conferatur Iberię, vergente ad Orientem Solem inclaruerunt. Nullum Poetæ nobis, aut fabulosa Mythologorum commenta bellatorem exhibent, adeo prodigiosa inclytum strenuitate, vt celebratus ille à syncerissima omnium, qui bella Hispanica posteris tradidere, scriptorum fide Cardenius Dux, non vna aut altera, sed innumeris, sanguine barbarorum irrigatis, palmis præcinctus, eaque demum immortalis famæ Regnum adeptus qua in atrocissimo prælio irrumpens vnus Maurorum innumerabilium exercitum Manusam eorumdem Regem sua ipse manu confodit, cuius occumbentis fatum sequuta est barbarorum omnium clades. Ex prosequutis Aragonios principes ad Neapolitanum Regnum capessendum Cardenijs Heroibus ambigi meritò potest, maiorne Sago, an Toga, consilio, an manu, in Regia fuerit, an in arena Alphonsus, Ferdinandi, & Annæ Emanuelis ex Regibus Castellæ filius, & Alphonsi Magni Magistri ordinis D. Iacobi, & Guttieris Magni Legionis Commendatoris consobrinus; illum enim, quia prudentia, regnandique artibus excultissimum, Alphonsus Primus Rex à Concilijs elegit, summoque in amore, ac precio habitum Magni Camerarij munere, ac Proregia Caietæ administratione donauit: Plutiæ mox Vrbis Alcaydum dixit: eumdemque, vt armis clarissimum, supremum militiæ Præfectum tueri iussit partem illam Regni, quæ obijcitur Latio, quam prouinciam eximia cum solertiæ obiuit, ac fortitudinis laude. Quid eius filium Ferdinandum memorem, ad quem ornandum gloriæ certamen iniuerunt in Hispania, Italiaque Ferdinandus Catholicus, ac Federicus Reges: perinde ac secum ipse pugnauit Cardenius,

in-

incertum relinquens, plurane Hispanis, aut Italis consignauerit suæ monumenta virtutis, debellatis ibi sæpissimè Mauris clarissimus, Almeriæque idcircò renunciatus Alcaydus: hic tam illustribus Federici gratiam gestis promeritus, vt ab illo Laini Marchio, atque Acerrarum Comes institutus fuerit; Hoc enim solemne habuerunt Cardenij Principes, vt licet Regibus in delicijs, ijsque gratiosissimi, nihil tamen gratia, sed omnia singularis virtutis merito compararuerint. Eiusdem præmium fuit, ac præcipuè sublimis in armorum tractatione prerogatiuæ, supremus ille apud Hispanos honor quo à Carolo Quinto fuit affectus Bononiæ, Neapoli, ac Tuneti alter Cardenius Ferdinandus inter eos Magnates recensitus, quibus tantummodo licet, suum alloqui Regem operto capite. Ante annos mille Regium fontem sortitam fuisse, perque omnia deinde secula maximis viris inclaruisse, Gentem Tuam, satis disertè testantur fide dignissimi plures historici, distinctius enarrantes splendorem Familiæ Tuæ, cuius quia Nomen à nemine ignorabatur, sciebant quod omnibus gratissimæ acciderent, quas fusius prosequebantur magis accuratæ eius cognitiones: quarè tametsi pauca admodum sint quę innuimus, ex immenso viridario Tuorum Maiorũ, Te renitente potius festinanter decerpta, quam diligentius collecta: abundè tamen sufficient vt omnibus innotescat illa eximia nobilitas quæ nos inuitauit ad huius operis Nuncupationem, licitumque negari non possit, reliquis prætermissis, ex Tuis ad Te, aliaque huius Nuncupationis nomina festinare.

Vtque ad illa, quæ me maximè attingunt, gratique sensus animi excitant, gradum faciam secundam consecrandorum voluminum causam expendens, quidni hoc Tibi, veluti præsidi inter mortales numini, obsequio amantissimo dicem, cui non modo Voluminis huius editionem debeo, sed etiam spiritum ipsum, & vitam ad magnam operis partem scribendam, vniuersumque meliorem in formam reuocandum. Nostro semper obuersatur animo Humanitas illa mirifica,

qua

qua, statim atque affectum ægritudine cognouisti huiusce, quam paulò ante delibaueras, Nouæ in Mathematicis studijs proficiendi Methodi Auctorem, illico eum humanissimè dignatus es inuisere, neque semel tantum, aut iterum, sed frequentissimè, ac ferè perpetuo decumbenti adesse, & alloquio suauissimo recreare: quod licet quauis medela efficacius esset ad sospitatem instaurandam, nō tamen desiderari passus es quidquam ex ijs, quæ ad morbi vires, aut partam ex illo mestitiam propulsandam conducere possent omnia liberalissimè suggerens Laboranti; quem præterea incredibili officiosissimi animi benignitate deferre voluisti ad suburbanas Ædes Tuas, & quo fruuntur aerem liberiorem: vbi ea illi solicitudine, & amore adfuisti, quo, persuasum Tibi esse, opinari liceret, in huius Methodi Auctore discrimini vitæ obnoxiam esse Mathesim, ipsam naturalium scientiarum præstantissimam, atque à Te maximè adamatam. An forte illud etiam in causa fuit, quod ex quinque vel sex colloquijs, quæ antequam ægritudine corriperer, de hac Methodo habueramus, illius præstantiam probè perspexeras? hoc certè constat, satis illa Tibi superque fuisse colloquia, vt in ijs, quas animi gratia inquirebas problematum solutiones, aut exarabas Mathematicarum propositionum demonstrationes, fatereris Te experiri maximam facilitatem, potissimum resultantem ex Logisticæ nostræ regulis inuentioni seruientibus, quarum in vsu consistit præcipua huiusce Methodi pars. Quid de illo referam flagranti desiderio Tuo, vt hæc Methodus in publicum prodiret numeris suis omnibus absoluta, adeo vt nihil aliunde mutuandum esset, immo ne illa quidem ante iacta, præsumenda, vtque dici consueuit, supponenda essent, quæ prius de eadem Methodo ab eius Auctore conscripta lucem aspexerant; intelligebas enim, hoc melius pacto consultum iri vtilitati & compendio cupientium discere Mathesim, quibus molestum accidit, ad diuersa remitti volumina. Animaduerteras præterea, eo quo præstas mentis acumine, in

illa

illa, quæ de hac Methodo scripta prodierant, aliqua irrepsisse, quibus acrius ingenium Tuum non satis acquiescebat. Neque verò arduum, aut iniucundum accidit mihi, Tuæ illi, publico bono studenti, voluntati obtemperare, quam præterea incendebat generosa munificentia Tua, vltro ingerens omnia, quæ nostræ deerant tenuitati.

Iamq; iucundissima cõmemoratio eorum, quibus me deuinxit regalis Indoles Tua, in medium protulit Tertiam consecrandi voluminis Caussam, insignem videlicet in Mathematicis Doctrinam Tuam, quam scientiam præ reliquis excolendam suscepisti, licet in omni Literarum, Scientiarumque genere versatissimus, Musis amicus, de Te optimè meritis, nobilibus alijs omnibus disciplinis ita eruditus, ac si animum ac studium singulis tantummodo addixisses; vt mirum proinde non sit, quod tanto earum cultores amore prosequaris; nobiles enim facultates ab ijs solum contemnuntur, qui ob earum inscitiam nolunt sibi videri infelices. Te verò ea commendat omnium cognitio, quæ vel in priuato lacesseret admirationem sui: atque hæc, quæ Te olim Alumno gloriata fuit Academia, perpetuis deinceps Te plausibus in cœlum efferet.

Superest Quartum nomen, quod nobis ad huiusmodi nuncupationem illustre addidit calcar, Nexus videlicet Tuas inter eximias prærogatiuas, & qualescunque nostræ Methodi proprietates. Illud in hac præcipuum est, quod sublato scabro, & salebroso, & præcipitijs, abiectoque itinere Elementorum antiquæ Matheseos, hoc est viæ conducentis ad Mathematicas scientias, præter quam alia nulla ad hæc vsque tempora cognoscebatur; aliam scientiæ huius amatoribus exhibemus planam, & commodam, qua ex omnimoda eius ignorantia facilè perueniri potest ad eius intelligentiam non vulgarem. Hanc aperiri semitam in Methodo quam Logisticam inscribimus, aliquot annorum experientia comprobauit in mearum prælectionum auditoribus, scriptorumque studiosis. Noua hæc dici Methodus poteſt, quemadmodum ex antiquioribus, rudioribuſque lapidibus, recenter elaboratis, inque non vſitatam formam compoſitis, extructum Ædificium, appellatur nouum. Antiqua verò cenſeri poteſt, quatenus antiquitatem ſingulæ illius redolent partes: quippe ex antiquorum Mathematicorum monumentis deſumptæ, vel vt verius dicam effoſſæ ſunt, eo ferè modo, quo ex fodinis precioſum, ſed rude, aurum eruitur. Recentes ita, & vetuſtiſſimæ haberi poſſunt Dotes Tuæ, vt hauſtæ à Præſtantiſſimis, ac regalibus Auis, ſed in Te rariſſimo admirandoque laudum omnium conſortio conſpirantes. Nam præter illa, quæ innuimus, Ingenij, & natæ ad demerendum omnium animos Indolis ornamenta, egregia Te commendat in ſuperos religio, ſingularis à primis annis, ac perpetua morum condidiſſimorum integritas, conſtantia, & fortitudo animi, regali origine digna, eidemque reſpondens Munificentia, & Comitas, deterens nihil, ſed potius in maius perpetuò prouehens magnitudinem Tuam. Enim verò ſi propoſitum aſſequuntur conatus Authoris, noua hæc vetuſtis ex ruderibus in Matheſi erecta Moles, quodammodo dici poterit emulatrix gloriæ Tuæ, qui viuum in Te, recenſque virtutum omnium Portentum noſtro huic ſeculo exhibuiſti. Hos verò qualeſcunque conatus noſtros tantis nominibus ad Te ſpectantes noſtraque omnia Tibi obſequio amantiſſimo conſecramus. Vale, & ad præſidium doctrinarum, noſtrique ſeculi Decus diutiſſimè viue.

Ægi-

Ægidij Francisci de Gottignies Bruxellensis è Societate Iesu Logistica vniuersalis siue Gottigniana Mathesis amplectens Arithmeticę, Geometrię, aliarumq; partium Matheseos elementa breuissimè proposita, amplissimè declarata, latissimè patentia, solidissimè demonstrata. Primus liber docet Logisticæ practicæ vsum. Secundus liber demonstrat speculatiua Logisticæ fundamenta. Tertius liber considerat conuenientias atque differentias inter antiquam Mathesim ab Euclide traditam, Algebram à Vieta, Cartesio, alijsque promotam, Logisticam prioribus libris expositam.

Dominus Canonicus Matina reuideat, & in scriptis referat. 22. Maij 1685.

Franciscus Verde Vic. Cap.

REVERENDISSIME DOMINE.

IN Libro ex delegatione tua recensito, cuius Epigraphes Ægidius de Gottignies Bruxellensis è Societate Iesu, Logistica, siue Gottigniana Mathesis vniuersalis, cum nihil existat Fidei Orthodoxæ, vel probis moribus aduersum, ideò ad publicam vtilitatem, cum verè dici possit Opus omnibus numeris absolutum, typis committendum autumo, Tibique demum Reuerendiss. Domine, incolumitatem, & æquitatem à Superis apprecor. 8. Iunij 1685.

Dominationis tuæ Reuerendiss.

Deuotus Cliens
Canonicus Antonius Matinas.

Visa præsenti relatione imprimatur. 22. Iunij 1685.

Franciscus Verde Vic. Cap.

ILLVSTRISS. ET ECCELLENTISS. SIGNORE.

Nouello de Bonis Stampatore in questa Fedelissima Città di Napoli supplicando fà intendere à V.E. come desidera stampare trè libri del M.R.P. Egidio Francesco de Gottignies della Compagnia di Giesù. Il primo è intitolato, *Docet Logisticæ vniuersalis vsum practicum*. Il secondo, *Demonstrat speculatiua eius fundamenta*. Il terzo. *Considerat conuenientias, atque differentias &c.* Per tanto supplica l'Eccellenza Sua resti seruita ordinare li siano concesse le solite licenze, che l'hauerà à gratia, vt Deus, &c.

Reuerendus Pater D. Franciscus Maria Aste videat, & in scriptis referat.

Carrillo R. Soria R. Miroballus R. Iacca R. Prouenzalis R.

EXCELLENTISSIME DOMINE.

IVssu Excellentiæ tuæ attentè perlegi elaboratos Libros R.P. Ægidij Francisci de Gottignies Societatis Iesu, quorum primus docet Logisticæ vniuersalis vsum practicum, secundus demonstrat speculatiua eius fundamenta, tertius considerat conuenientias atque differentias &c. et cum Regiæ Iurisdictioni politicoque regimini non aduersentur, ad Orbis vtilitatem prælo æternitati censeo dari posse. Datum Neapoli in Æde Sanctæ Mariæ Angelorum Kalendis Septembris 1685.

Addictissimus Seruus

D. Franciscus Maria de Aste ex Clericis Regularibus.

Imprimatur, verum in publicatione seruetur Reg. Prag.

Carrillo R. Soria R. Miroballus R. Iacca R.

PRÆ-

PRÆFATIO
AD LECTOREM.

MAtheseos obiectum constitui à quantitate, verissimum est & ab omnibus concessum: quid in hac assertione per vocem *quantitas* intelligendum sit, neque obuium arbitramur, neque passim declaratum, sed quamplurimis, etiam qui suis scriptis meruerunt Matheseos magistris annumerari, non satis cognitum. Si vox *quantitas* intelligatur in ea significatione, quam illi concedendam docet nostra Logistica: propemodum nihil remanet in rerum natura, quod quantitatis ditioni non subijciatur: atque dicendum est, Matheseos obiectum eosdem ferè limites habere cum ipsa natura; huius obiecti sui proprietatibus contemplandis vacat Mathesis: quæ desumpta differētia à quantitatibus quas considerat, nonnullas admittit restrictiores appellationes maximè vsitatas; ità Mathesis contemplans continuam quantitatem, communiter dicitur Geometria: Arithmetica verò nominatur, Mathesis contemplans discretam quantitatem: huiusmodi alia passim vsitata nomina non inueniuntur, quæ indicent Mathesim contemplantem maximè vniuersalem, aut aliam quantitatem genere differentem à continua & discreta, licet illarum omnium contemplationes pertineant ad scientiam quæ appellatur Mathesis: ad quam propriè spectant omnium omnino quantitatum proprietates: quàm multæ sint, & mirabiles pulchritudine, & vtilitate æstimabiles, neque intelligere, neque credere, neque suspicari potest Matheseos ignarus. Humanæ menti nihil accidit magis gratum, magis iucundum, clara veritatum cognitione; præsertim si nouæ, si vtiles, & inexspectatæ sint. De Mathesi licet liberè pronunciare, quod longo interuallo superet reliquas naturales scientias omnes, abundantia veritatum quæ mentem recreent rara pulchritudine; multiplici vtilitate diuitem reddant; quæ adeò nouæ atque inopinatæ aduenìant, vt meritò admitti non possint nisi assensus violentè extorqueatur ineluctabili demonstratione.

Pro aliarum scientiarum conclusionibus, formidolosum atque de opposito adhuc dubitantem assensum, congestis pluribus argumentis impetrare, non parum præstare est. Conclusiones suas certas, atque vnico, sed demonstratiuo argumento indubitatas reddere, magis proprium est scientijs Mathematicis: illæ veluti ruinam minitantes fabricæ, inclinatæ non corruunt, quia multiplici sustentaculo fulciuntur: istæ validioribus fundamentis benè innixæ, firmæ erectæque consistunt: illæ claudicantibus, istæ firmo gressu incedentibus similes sunt: illis auxilium,

istis

istis impedimentum afferunt fulcra plurima, siue argumenta confirmantia conclusionis probationem. In hac certitudine atque infallibilitate, potissimum consistit Matheseos dulcedo atque amænitas mentem recreans. Potest aliquis conclusionum Mathematicarum vtilitatem cognoscere atque illa frui, independenter à commemorata dulcedine cognitionis: etenim illa non rarò comitatur practicam Mathesim: hæc inseparabilis est à Mathesi speculatiua.

Vtramque istam Mathesim practicam & speculatiuam docet nostra Logistica, methodo quantum arbitror facili, sed non vsitata, adeòque noua: in hac scribenda, nihil Mathematicum aliundè cognitum supponitur: tum quia discentibus id magis commodum videbatur: tum etiam quia noluimus illis aliquid propinare non satis defæcatum: fateorque me ignorare, quo loco Logisticæ nostræ cum alienis communia, inueniantur, non permixta, aut inutilibus atque superfluis, aut etiam noxijs, præsertim ad Matheseos studium recenter accedentibus, quos facile est seducere à rectiori breuiorique via ad Matheseos penetralia.

Primus Logisticæ nostræ liber, totus practicus est: duplicem tamen praxim continet, alteram humiliorem magisque cognitam, quæ vt ita dicam, cæcam, hoc est nullo sublimiori discursui innixam, executionem docet: alteram eminentiorem minusque cognitam, maximeque oculatam, quæ practicam inuentionem pro fine habet, atque requirit firmam ratiocinationem, siue vt propositi problematis solutionem inferat, siue vt oblatæ propositionis veritatem aut falsitatem euincat ex Logisticæ elementis. Hos discursus dirigentes practicæ regulæ, tres diuersę proponuntur, quæ Logisticæ, atque inuentionis regulæ appellantur, quia vtiles sunt vt legitimè concludatur quod inferendum est, quando satis non patet quomodo ex Logisticæ elementis inferri possit. In hunc modum primus liber docet vsum practicum elementorum nostræ Logisticæ, quæ supponit certa atque indubitata, quemadmodum quælibet alia practica, sua fundamenta propriasque regulas supponendo, tota occupatur in executione.

Secundus liber ostendit, elementorum Logisticæ subsistentiam, atque ex terminorum intelligentia demonstratiuis discursibus probat vera esse, quæ non videntur satis immediatè manifesta ex terminis: siue sint elementaria theoremata, vt sunt omnia & sola illa quæ continentur libri secundi tribus capitibus, immediatè primum subsequentibus, & enumerantur capite octauo libri primi: siue sint alia theoremata, quæ propter maiorem discentium commoditatem placuit annotare in primo libro, aut his addere in secundo libro; siue sint praxes aut problemata quæ similem ob causam proponuntur in primo libro. Hæc omnia admodum pauca esse nusquam asserimus, tamen, in huius operis fronte, breuissima affirmamus nostræ Logisticæ elementa, illorumque nonnullas alias pro-

prie-

prietates asserimus: breuissima negari non possunt, quæ pauciora quam triginta theoremata continent; neque huic breuitati aduersantur illa plurima quæ pertinent ad elementorum declarationem, quæ asseritur amplissima. Quam latè pateant breuia hæc elementa, colligendũ est ex ijs ad quæ vtilia sunt, seruiunt verò vt minime aspero, sed facili itinere perueniatur ad illa omnia ad quæ maximo laborioso conatu, nonnulli ex præstãtioribus Matheseos principibus assurrexerũt ex Euclideis elemẽtis: seruiunt etiam ad alia quamplurima, ad quæ nullatenus sufficiunt quæ docet Euclides: quæque in suis elementis, per aliquot centena theoremata, firma & demonstratiuis discursibus stabilita reddere conatus est; hanc firmitatem atque subsistentiam, nequidem omni ex parte illis concedendam arbitrantur doctiores Euclidis interpretes atque expositores, sed diuersi notant diuersa, quibus non satis acquiescunt, quæque existimant insufficientia pro ea firmitate quam requirunt Matheseos elementa: quoniam verò existimamus tali insufficientia non laborare elementa nostræ Logisticæ, asseruntur à nobis solidissimè demonstrata. His addi potest, quod elementa Euclidea non nisi satis humilia contineant, ex quibus maximè arduum est eniti ad reliquas Matheseos doctrinas, ad quas potius ex generalioribus cõmodè descendendo peruenitur ex elementis propositis in nostra Logistica: quæque fortassis melius comparari possunt copiosissimæ aquarum scaturigini, ex qua originem habent sponte defluentes aquæ, facilè per canales vel riuulos quaqua versus deriuabiles: quam rudioribus substructionibus alicuius fabricæ tantum sustentantibus reliquam ipsis impositam molem elegantiorem, quibus aliqui non malè assimulantur Matheseos elementa quæ appellantur Euclidea.

Tertius liber, potissimum vtilis est, desiderantibus profundiorem intelligentiam Mathematicarum scientiarum; tum quia Logisticæ nostræ methodum confert cum celeberrima duplici altera methodo: ex qua collatione melius innotescit eius præstantia; nihil enim bonum nisi comparatum: præferri autem ijs quæ habentur meliora, probat maximè eminentem gradum bonitatis. Tum etiã quia Mathematicarũ scientiarũ prima elementa, ex quibus reliqua deriuantur atque originem habent, consistunt in terminorum intelligentia: de hac in libro tertio, & spontè & opportunè sese offert occasio, agendi fusius, atque melius ostendendi non pauca, quæ maximè conducunt ad speculatiuæ Matheseos intelligentiam.

Terminorum expositio vsitata in nostra Logistica à nobis existimatur proximè conformis intelligentiæ terminorum, quam supponunt, vel requirunt, præcipuorum antiquorum Mathematicorum nobiliora scripta Mathematica: hic tamen multorum terminorum sensus, non satis declaratus inuenitur, vbi ab alijs ex professo exponuntur termini: immo

ex

ex eo quod sufficiens atque necessaria terminorum declaratio non inueniatur in vsitatis Matheseos elementis, factum arbitramur, vt Matheseos magistris remanserit maximè noxia libertas ludendi in verbis, atque discentes illudendi, suamque ignorantiam celandi in reliquis doctrinis; & loco subsistentis demonstrationis, subindè obtrudendi ludum verborum. Vtrum in hunc modum aliquando discentes potius illudant quam instruant, colligi potest ex multis in tertio libro annotatis. Si aliquis opinetur, nihil simile suspicari posse de antiquissimo probatissimoque Matheseos magistro Euclide, inquirat quid intelligendum sit per voces *totum, pars, quantitas, ratio &c.* & expendat quid de illis dicatur in libro tertio nostræ Logisticæ. Si tali crimine vacare videatur, hisce temporibus celeberrima magisque exculta Algebra, saltem in ijs quæ habet magis propria, atque Euclideis addita: consideret ipsi propriam à nihilo descendentem progeniem antiquorum quantitatibus annumeratam, atque illarum proprietatibus male dotatam, vel potius laruatam, quam in primo limine discentibus ostentat: quodque mirandum, huiusmodi laruatis monstris quæ plano ore, ac palam appellat falsas quantitates, seducit amatores veritatis. Falsis fictisque quantitatibus laruas detrahere, deceptiones indicare, veritatem exhibere, tutam, rectamque ac facilem ad Mathematicas scientias ducentem, atque per illas excurrentem viam ostendere, conatur nostra Logistica, cui Mathematicum

Nullum problema insolubile

Nullum theorema indemonstrabile

Eo titulo asseri potest, quia valet præstare, & omne illud quod haberi potest, vel Euclidea siue antiqua, vel Algebræ recentioris methodo, & alia non pauca. Scio quidem apud modernos vsitatum esse, Algebræ foribus inscribere

Nullum non problema soluere

Quasi verò hæc methodus præ reliquis aliquid posset in scientijs Mathematicis; ignoro tamen, vtrum talis assertionis aliud solidius fundamentum inueniatur, quam, quod post contractam familiaritatem cum falsis atque Algebræ maximè proprijs quantitatibus, eius doctores incipiant non erubescere maximè falsas assertiones. In Algebra supponi antiquam Mathesim docent eius magistri: ab Algebra antiquam Mathesim euerti, probat Logisticæ nostræ liber tertius: atque proponit, etiam facilè solubilia problemata, ad quæ non sufficiunt quæcunque aut propria aut ex antiqua Mathesi mutuata habet Algebra: ostenditque, ex eius fundamentis legitimè inferri vera, falsa, contraria, & cōtradictoria.

Hæc

Hæc, atque his similia de non suis probare contendit nostra Logistica in libro tertio: de eius documentis audiendum est aliorum iudicium: hoc intelligere, semper maximè exoptaui, potissimum vt in scriptis proprijs emendare possem quod intelligerem defectuosum. De tali meo desiderio certior Admodum Reuerendus Pater F. Michael Angelus Fardella, Siculus, Tertij Ordinis Sancti Francisci Sacræ Theologiæ Magister, nec non in Mutinensi Gymnasio Philosophiæ & Matheseos professor, qui ad Logisticæ nostræ studium sese conuerterat, quia neque in Euclidea, neque in Cartesiana siue Algebræ recentioris methodo inuenerat, quo satisfaceret perspicaci ingenio suo: captus verò, vt aiebat, facilitate, soliditate, ordine, atque vniuersalitate Logisticæ, illi erat addictissimus; hic inquam vir præstantissimus, vt melius mihi faueret & gratificaretur, anno 1683. Romæ typis euulgauit, de Logisticæ methodo conclusiones, propugnandas, vel viua voce, vel scripto, prout magis placeret impugnatoribus; eo enim tempore satis felici successu per plures annos meis auditoribus à me tradita fuerat hæc methodus, & de varijs eius partibus conscripti aliqui libelli lucem viderant: atque ex vicino & longinquo audiebantur non satis articulatæ voces, clarè tamen indicantes, non leuem indignationem contra hanc nouam methodum. Videbantur maximè vtiles commemoratæ conclusiones, vt mussitabundos inducerent ad intelligibilius loquendum; atque mihi impetrarent desideratam censuram alicuius magis defectuosæ partis meæ Logisticæ; existimabat enim vir religiosissimus, omnino temerarium credere, tantum emulationis, aut zeli prepoſteri, aut ignorantiæ voces esse quæ audiebantur. Non omni ex parte eum fefellit hæc cogitatio: etenim præter illa quæ in pluribus atque productioribus concertationibus intellexit, etiam collegit scripta plurima: dolendum quod in his omnibus nihil à me desideratum inuenerit: aduertit quidem bilem plurimam, sed bilem curare Medicorum est, non Mathematicorum: argumentis verò nihil euincebatur, nisi aliquorum oppugnatorum, & Matheseos satis mediocris peritia, & propemodum omnimoda ignorantia nouæ Logisticæ. Alij non pauci, rogati vt conclusionibus aliquid dignarentur opponere, rescripserunt, se paratos ad propugnandas conclusiones, nihil verò habere illis contrarium; inter hos P. Iosephus Ferronius, qui ne gratis dicere videretur, quod asserebat, suis literis Bononiæ datis 3. Nouembris anni 1683. additum transmisit subsequens de Logistica iudicium.

R. P. Iosephi Ferronij Societatis Iesu iudicium in Logistica noua.

ERatosthenes Ægiptiorum Regum Alexandriæ bibliothecarius, insignis mesolabio, in solutione Delphici problematis, insignior ambitu terræ dimenso, per vmbras gnomonum solstitiales, teste Plinio, tam subtili ratione deprehenso, vt pudeat non credere: Ptolomæo Regi petenti Regiam ad Geometriam viam, respondisse fertur: non est regia ad Geometriam via. Si nostro æuo superstes viueret Eratosthenes, nunc posset è balneo nudus exilire præ gaudio, & per compita Alexandrina Archimedeum, *inueni*, magnis vocibus inclamare ac profiteri palam, inuentam esse Regiam ad Geometriam viam: ea est noua Logistica R.P. Ægidij Francisci de Gottignies, Romæ typis edita.

Hactenus quinque substratæ sunt ad Geometriam à nostris artificibus viæ; harum nulla nedum Regia est, sed ne quidem militaris & complanata, adeò vt inoffenso pede teratur; imò illarum quælibet lubrico solo fallente vestigium ab incessu deterret.

Prima via est Antiquorum, partim negatiua deducendo aduersarium ad contradictoria, partim positiua per explosum excessum atque defectum; hanc triuere veteres Geometriæ Principes, ex quibus Archimedes, proinde à Ioanne Keplero appellatur spinosus; & à Iosepho Scaligero, Geometriæ tyrannus, eo quod longissimis demonstrationum ambagibus crucem figat ingenijs.

Secunda via est Caualeriana, indiuisibilium methodus, quam eximius Torricellus huius Regni finibus etiam ad induisibilia curua prolatis, vocat Regiam ad Geometriam viam; sed pace tanti viri, nego hanc viam esse Regiam, quæ vniuersalis non est: siquidem cum procedat per quantitatum exhaustionem à quantitatibus heterogenes; superficies exhauriendo lineis, & solida superficiebus: in ijs tantum casibus valet, in quibus quantitates exhauriri possunt à quantitatibus homogeneis: hinc, vt aduertit P. Andreas Taquet, cylindricorum & annularium lib. 1. ad scholium propositionis 12. hac ratiocinandi methodo nihil conficitur, nisi ad homogenea reuocetur.

Tertia via est per exhaustionem à quantitatibus homogeneis inscriptis, cum superficies superficiebus, & solida solidis exhauriuntur; quam viam calcauit egregiè nostri seculi Archimedes P. Gregorius à S. Vincentio, eiusque emulator eximius P. Andreas Taquet; huic tamen viæ ego illud opponerem, quod semper aliquis remaneat defectus: insensibilis ille quidem, & physicè contemptibilis, vtpote minor quauis magnitudine data: sed in hac ipsa contemtibili quantitate, videtur contemni subtilitas Geometrica; nam similia polygona demonstrantur esse in duplicata ratione laterum, non secus ac circuli diametrorũ, & quia polygona tandem in circulum desinunt, sequetur circulum esse polygonum infinitorum laterum, quod est contra definitionem, & genesim circuli.

Quarta via est arcanum Guldini Geometricum de centro grauitatis; sed hæc via nimis angusta est, quia vt plurimum restringitur ad genesim rotundorum; & quia in quamplurimis superficiebus ignotum nobis est centrum grauitatis, in quo tamen huius viæ omne momentum vertitur;

itâ

ità ignotum est centrum grauitatis semicirculi, quod est vltimum punctum volutæ lunatæ Dinostrati: quo dato, daretur circuli tetragonismus.

Quinta via est Algebra speciosa Vietea, quæ fastosum illud problema problematum sibi arrogat, *nullum non problema soluere*. Huius adminiculo Vieta Analyticæ illius artis inuentor, resoluto Adriani Romani problemate de quadraginta sex lineis circulo inscriptis, alterne negatis & affirmatis, gloriatur se trihorio euasisse Geometram. Ego Algebram Vietæ semper suspicio & admiror, & prædico tanquam longè vtiliorem veteri numerica Diophantea. In hoc tamen mihi videtur Logistica Algebræ præferenda, quod Logistica facit & format, Algebra factum formatumque supponit esse Geometram. Nullus Algebricam illam cistam Isidis reserabit sine claui Geometrica Euclidea; at Logistica noua nullius indiga, est sibimet ipsi clauis: cum quæcunque Euclides & Archimedes demonstrarunt, è suis principijs Logistica noua demonstret.

Vnica proinde Logistica est, quæ nihil præsupponit antè præcognitum, sed tyronem rudem accipit, eumque per suæ scalæ gradus securo & placido assensu deducit ad Geometriæ altissima quæque fastigia, ad quæ animus velit eniti. Hæc profectò laus nulli ex quinque vijs enumeratis congruit, sed est laus propria Logisticæ, quod nullius indiga, sibi ipsi sufficiat: constat autem quod quanto magis ab indigentia recedimus, tanto magis ad diuinitatem accedimus.

Animaduertit & notat Renatus Cartesius, Mathematicas omnes scientias, etiamsi circa diuersa obiecta versentur, in hoc tamen omnes cõuenire, quod nihil aliud examinent quã relationes siue proportiones quasdam quæ in ijs reperiuntur: atqui Logistica quantitates rationum, & relationes quantitatum optimè enucleat, definit, enumerat, atque componit; imò per rationes compositas, & per quinque ductus Geometricos, suas demonstrationes pulchrè molitur: ergo sola Logistica in se vna colligit Geometriæ elixir ex alijs scientijs distillatione prolectum, & in id vnicè incumbit, quod aliæ partes Matheseos, Renato teste, diuersimodè consectantur. Logistica est lapis philosophorum Lullianus, cuius adminiculo breuiter & expeditè conficitur aurum illud Geometricum, quod aliæ Geometrizandi artes, adactis tam profundè ligonibus, tam lacertoso conatu, tanto sudore frontium, ex infernis speculis operosè nimis eruderant.

Quæ cum ità sint, quis non miretur, imò quis potius non indignetur: fuisse quosdam qui senserint, & literis ad suos moderatores datis expostulauerint, Logisticam hanc è scholis amouendam atque in exilium ablegandam. Licet opinari eos qui ità sentiunt, & postulant, esse de stirpe plebis Atheniensium, quæ nunquam magis est visa insanire, quam cum Themistoclem omnium ciuium optimũ Ostracismo iniquissimo in exilium amandauit. O quam rectius ablegarentur à nostris scholis tot Philolosophorum quæstiones inutiles, atque quisquiliæ, quæ sunt mera verborum ludibria? Mihi quidem post viginti quinque annorum in Mathesi exantlatos labores, & in ea tradenda publicè, Romæ, Mantuæ, Bononiæ auditoribus meis, post recentiorum & veterum monumenta Geometrica in tam longo otio, maxima animi contentione euoluta, vbi primum ad manus venit Logistica, eam auidissimè deuoraui, imò eius manuale Enchiridion mihi compendiaria ratione transcripsi, vt tam expedita ratiocinandi via mihi esset ad manus, qua tanquam scala serica, modico inuolucro portabili, & vbi opus esset explicabili, possem in obsessam Geometriæ arcem ascensum moliri.

Ne sim longior, & vt præproperè & festinatè scriptionis tædium releuem, fabella pereleganti concludam. Quidam emotæ mentis & stolidè ferox iuuenis, fuit à suis domi detrusus in carcerem viridario satis attiguum. Carcer erat non muro lateritio cinctus, sed vimineis cratibus, & storeis gypso superinducto tenaciter loricatis contextus. Ibi maniacus adolescens videns se tanquam feram inclusam cauea, ecquid inquit hic moror? satius est semel perire & infelicis vitæ stamen abrumpere, quam fœdissimi carceris pedore quotidie cōfici. Sic deliberata morte ferocior, cursu concitato, capite ad arietandum prono, tam valido ictu caput illisit in murum, vt eius stramineam contexturam diffregerit; per patentem minæ hiatum, videt extra carceris sui pomerium amænissimum viridarium: perpetuos vernans in flores, aureis Pomonæ citreis exuberans, perennibus aquis irriguum, sonorum fontibus, tonsilibus syluis & topiarijs vagum, in quibus canoræ auiculæ numeroso garritu musicabantur; attonitus amænitate loci, nolo inquit amplius emori, volo in hac beata musarum Parnasside, in his hortis Alcynoi, in hac Hesperidum Regia spatiari.

Vos alloquitur hæc fabella Geometriæ studiosos iuuenes, hactenus fuistis inclusi carcere Euclideo, in quo miror si penitus non insanistis. Frangite hunc carcerem, & per Logisticæ ambulacra virentia spatiamini, nam sine mærore animi, sine dolore capitis, breui euadetis Geometræ. Hæc P. Iosephus Ferronius.

Quod postremo loco concludit Ferronius de abijcienda maximè vsitata Methodo Euclidea, omnino consonum non est conclusioni, quam alius non vulgaris nominis, ac publicus Matheseos professor, affert in suo de Logisticæ nostræ methodo iudicio, quod & optimè fundatum prudentissimumque negare non possumus. Asserebat ille, nostræ Logisticæ methodum, non paucis Matheseos magistris, pessimam esse, minimeque probandam: eam tamen Mathesim discere cupientibus, optimam esse, & præ reliquis eligendam. Vtriusque partis huius suæ conclusionis causam eamdem afferebat: quia nimirum iudicabat Logisticæ nostræ methodo, paucis mensibus peruiniri posse ad eam Matheseos intelligenligentiam, quæ alia methodo acquiri non potest intensiori studio per plures annos continuato: quod idem & pluribus magistris pessimum,& discentibus optimum iudicabat: etenim,inquiebat, dum paruo tempore multum proficitur, imminuuntur magisterij fructus, quia stipendij tempus contrahitur, & tamen magisterij labor atque molestia non parum augetur: quippe laborandum magistro vt discipulorum interrogationibus pro munere suo satisfaciat: immo si fortè in Mathematicis parum versatus sit, suosque non multum antecedat, fieri poterit vt illi ad defatigationem erit properandum, ne præstantioris ingenij discipuli, aut assequantur, aut post se relinquant magistrum suum. Ad velociorem profectum consequentes huiusmodi fructus,negari non possunt pro discentibus optimi, sed pessimi pro magistris, magis (vt sæpe accidit) amantibus, aut commoditatem, aut vtilitatem propriam, quam discipulorum profectum: ex quibus tandem inferebat, Euclideam methodum (quam Ferronius de profectu in scientijs Mathematicis vnicè solicitus, absolutè dixerat abijciendam) pro viribus retinendam à pluribus Matheseos magistris, tantoque tenacius, quanto imbecilliores sunt, vt doceant minori molestia atque labore, possintque sustinere magisterij munus, licet in Mathematicis non multum versati sint, quos iuuant tenebræ, & cum Lippis iure merito possunt sibi molestam lucem auersari.

Hæc de nostræ Logisticæ methodo accepi, quando tantum exstabant aliqua eius specimina contenta prius editis à nobis libellis, qui licet in multis essent defectuosi,tamen pluribus non parū profuerunt.His tribus libris,magis ordinata atq;fundata proponitur Logisticæ nostræ methodus. Si tibi amice Lector occurrat aliquid vlterius emendandum in hac methodo: enixè rogaris, vt quantocius moneas eius authorem,desiderosum sua à reliquis defectibus expurgando, magis proficua reddere Matheseos amatoribus: etenim quamuis ipse, pro munere quo ex moderatorum suorum imperio, ab anno huius seculi sexagesimo secundo fungitur in Romano Collegio, teneatur alios docere: tamen ad discendum maiorem habet animi propensionem. Deniq; si placet proposita de Logisticæ methodo tractatio, illa fruere, atque omnipotentem Deum deprecare,vt dignetur eius authori vel pristinam restituere,vel saltem eam quam ex periculoso morbo recuperauit valetudinem conseruare, atque vlterius de Mecenate prouidere: sic enim breui habebis,hisce vniuersalioribus elementis innixas plurimas alias materias, vel ad speculatiuam practicamue Mathesim spectantes; vel huic Mathesi subordinatas aut subalternas mixtasque ex Physicis & Mathematicis,simili methodo non maximè vsitata propositas, quæ inter priuata eius scripta expectant publicitatem.

Ordo

Ordo commodus pro studio nostræ Logisticæ.

IN vsu regularum inuentioni seruientium, quæ proponuntur cap. 10. lib. 1. Logisticæ, consistit vt ità dicam finis, siue præcipua vtilitas illius partis nostræ Logisticæ, quam practicam appellamus: & præcedere debet alterā eius partem quam dicimus speculatiuam: in ordine ad hunc finem, siue practicum vsum commemoratarum regularum nostræ Logisticæ: media, siue necessaria, siue vtilia, continentur reliqua quæ continentur libro primo. Quare, si ab ijs qui in Mathematicis nullatenus versati accedunt ad studium nostræ Logisticæ, audiendus sum, de modo eam commodius addiscendi: suadeo, vt ante omnia procurent practicam notitiam Additionis, Subtractionis, Multiplicationis, Diuisionis, & Regulæ aureæ, circa numeros vulgares: post hanc notitiam, immediatè aggrediantur Logisticæ regulas propositas capite 10. lib. 1. ità tamen vt à prima regula sumatur exordium, & ad subsequentem non procedatur, nisi antecedentis regulæ vsus, exercitio redditus sit satis familiaris; sic vt descripto solo titulo, non cuiusuis, sed pro regulæ exemplo in hoc primo libro à nobis propositi problematis, addere possint solutionem illatam discursu proprio marte exarato qui regulæ præscriptis conformis sit: quæ enim regulæ præscriptis conformia non sunt, etiam non iuuant ad nostræ Logisticæ intelligentiam. Discursus regulæ conformes, quibus singulorum problematum solutiones inferimus, Logisticam nostram discentibus tantum vtiles sunt, vt studiosum hæsitantem iuuent; & ex illis intelligant, quomodo præstari possit, quod ab ipsis proprio marte faciendum est; quando non occurrit modus illud præstandi.

Hoc studium incipiendo ab illis regulæ exemplis quæ faciliora sunt, & ex reliquis omnibus, quæ Logisticæ nostræ libris continentur nihil curando, nisi in quantum necessarium, vel vtile est, in ordine ad efformandos discursus conformes regulæ cuius studio aliquis occupatur: & commodè sibi reddet familiarem regularum vsum, & melius discet reliqua ad regularum vsum aut necessaria aut vtilia: faciliusque intelliget, quantum ex illis medijs, alia præ alijs vtilitatem habeant, atque vsum frequentiorem.

Cognita atque acquisita in hunc modum notitia practica regularum inuentioni seruientium, eorumque quæ in nostræ Logisticæ libro primo proponuntur, tanquam media ad hunc finem: procedendum est ad ea quæ docentur in secundo libro, & diligentius inquirendum, quare veræ atque legitimæ sint; aut assertiones, aut praxes, quæ in libro primo annotantur sine vlla vlteriori probatione. Huiusmodi aut veritatum aut praxium probationes non requiruntur pro practica Logistica, sed requiruntur pro Logistica speculatiua, de qua agunt primum subsequentes libri, & benè d.sci non possunt, nisi præcedat primo libro propositæ Logisticæ notitia practica: nisi enim prius intelligatur quid verum asseratur, & quæ ex tali veritate resultet vtilitas: periculum est, ne in huiusmodi cæca vt ità dicam, vel sine delectu facta veritatum inquisitione, parum fructuosè consumantur bonæ horæ: & quæ vtiliter impendi poterant, inquirendis veritatibus ad propositum finem conducentibus, dilapidentur atque perdantur, allaborando examini vel culturæ veritatum, quæ aut planè steriles sunt, aut parum fructuosæ.

Quando in commemorato studio, occurrit aliqua scriptio Logistica, siue character, adhuc non satis legibilis aut familiaris: ex ijs quæ traduntur, in parte 2. cap. 1. lib. 1. Logisticæ de his characteribus, difficile non erit talem difficultatem superare. Si occurrat vox aliqua non satis cognitæ significationis, consulendus est index. Vt habeantur reliquæ notitiæ, siue praxium, siue veritatum adhibendarum: ex pagina quæ immediatè ante cuiuslibet libri initium inuenitur, & breuiter annotatum exhibet, quid contineatur subsequentis libri capitibus singulis: facilè cognoscitur locus in quo traditur talis notitia, si fortè id satis commodè sciri non potest ex indice qui subsequitur.

INDEX

INDEX

Continens breues aliquas terminorum declarationes quas supponit nostra Logistica, atque assignans vbi inueniantur nonnulla conducentia ad meliorem terminorum intelligentiam, quæ paucis verbis videntur satis indicari non posse.

NOTA. Votes quæ significant alicuius rei aliquid, quærendæ sunt ad vocem talem rem indicantem: itá ad vocem circulus, quærendum est, quid sit circuli centrum, radius, circumferentia, tangens &c. ad vocem angulus, quærendum, quid dicatur anguli vertex, latus, mensura &c.

ABSTRACTA, magnitudo, quantitas, figura, forma &c. dicitur magnitudo, quantitas, figura, forma &c. prædicabilis de subiecto cui inhærere potest: siue à qua subiectum cui inhæret dicitur, magnum, quantum, figuratum, formatum &c. quæ voces singulæ significant aliquod concretum, quod aliter appellatur concreta magnitudo, quantitas, figura, forma &c. Mathesis non contemplatur abstractam magnitudinem siue quantitatem (quæ duæ voces idem omnino significant) sed tantum contemplatur magnitudinem aut quantitatem concretam, hoc est illud quod aliter bene dici potest magnum vel quantum, vide lib. 3. cap. 4. reflexionem 7. & cap. 5. considerationem 1. Præterea quomodo verum sit, quod formæ abstractæ ne quidem possint numerum constituere. Vide lib. 3. pag. 70. Vide etiam vocem *concretum*.

ACTVALIS, pars, vnitas, numerus &c. distinguitur contra potentialem. Vide vocem *potentialis*.

ADDITIO dicitur, plurium indiuiduorum simul sumptio. Si illa plura indiuidua specie conueniant, dicitur propriè dicta additio. Si specie non conueniant, singula illa indiuidua, dicitur additio impropriè dicta. Additio realis est, in qua ipsi pro additione dati termini adduntur. Additio æquiualens est, in qua adduntur, non termini ipsi qui dantur pro additione, sed alij ipsis æquiualentes. Additio æquiualens subtractioni in omni casu possibilis, quæ sit. Vide lib. 3. pag. 77.

ÆQVATIO dicitur, assertio in qua vna quantitas dicitur alteri æqualis: siue assertio affirmans proportionem æqualitatis inter duas quantitates. A diuersitate terminorum desumpta nomina diuersa admittit: exempli gratia, erit æquatio absolutarum quantitatum, si eius termini sint quantitates absolutæ. Erit æquatio rationum, si eius termini sint rationes. Similiter simplex, aut composita, vel vnius pluriumue nominum æquatio dicitur: prout eius termini sunt simplices, vel compositi, aut vnius pluriumue nominum. Æquationum aliqua elementaria remedia: lib. 1. cap. 4. & lib. 2. cap. 7. Æquationum resolutiones: lib. 1. cap. 7. & lib. 2. cap. 12.

AGGREGATVM, est productum ex additione. Vide lib. 2. pag. 46. Dicitur propriè dictum, vel impropriè dictum, vel reale, vel æquiualens; prout additio ex qua oritur, est additio vel propriè dicta, vel impropriè dicta, vel realis, vel æquiualens &c.

ALGEBRA bene dicitur ars subtractionem vniuersalisans. Vide lib. 3. cap. 1. Algebræ postremi promotores qui dicantur lib. 3. pag. 2. Algebræ speculatiua axiomata. Vide lib. 3. cap. 2. Algebræ speculatiuæ varia paradoxa. Vide lib. 3. cap. 3. Vbi in paradoxo septimo notatur, quomodo leges signorum + & −, inuen-

circumferentiam. Quadrati aut parallelogrammi diameter, est recta linea oppositorum angulorum vertices connectens in quadrato vel parallelogrammo. Quam rectam lineam significet in singulis alijs figuris aut corporibus, nõ existimo facile determinare, assignando aliquam proprietatem quæ conueniat omnibus & solis istis rectis lineis quæ in antiqua Mathesi indicantur per vocem *diameter*: tamen ex circumstantijs in quibus hæc vox adhibetur, difficile non est intelligere eius significationem.

DIFFERENTIA, de huius vocis significatione videri potest nota 6. pag. 46. lib. 2. In Mathesi sæpe significat quantitatem quæ relinquitur quando ex maiori minor subtrahitur.

DIGNITAS numeri denominati, dicitur vel vna alphabeti litera, vel complexum ex pluribus huiusmodi literis, ex vi præcedentis hypothesis repræsentans aliquam quantitatem. Vide lib. 1. pag. 5. in fine, vel initium pag. 6. Vbi vlterius dicitur quid sit dignitatis numerator, & denominator. Complexum ex numeratore, dignitate, & denominatore, dicitur numerus denominatus: quando expressè appositum non habet alium aut numeratorem aut denominatorem, eius numerator vel denominator est vnitas, estque liberum vel expressè ponere vel subaudiendo, omittere numeratorem & denominatorem qui constituitur ab vnitate.

DISCRETIO, à qua quantitas discreta suum nomen accipit, est vox deriuata à verbo discernere. Vide lib. 3. pag. 70.

DISTANTIA dicitur, linea recta siue breuissima, connectens illa duo de quorum distantia agitur.

DIVISIO, est vox æquiuoca: aliquando intelligenda est vt significet idem cum voce sectio; aliquando intelligẽda est vt significet compendiũ regulæ aureæ. Vide lib. 1. pag. 35. Ex circũstantijs intelligendũ est in quo sensu intelligi debeat. Quamlibet datã lineam semper vlterius in plures partes diuidi posse, cõmunis est, & aliorum, & nostræ Logisticæ doctrina: vbi vox diuidi idem significat cum voce secari. Vide lib. 3. pag. 73. Similiter dum vnitas indiuisibilis dicitur, vox *indiuisibilis* significat idem ac si diceretur insecabilis: altera diuisione quæ significat regulæ aureæ compendium, vnitas diuisibilis est: de hac diuisione consule voces *regula aurea*: interim hic nota, in Logistica nostra illius diuisionis, quæ est compendium regulæ aureæ, aliquam speciem constitui à radicis extractione; de quo consule vocem *radix*.

DVCTVS, & multiplicatio, sunt duæ diuersæ voces quæ in Mathesi proximè idem significant, sic tamen vt vox *multiplicatio* fortè frequentius adhibeatur agendo de discretis quantitatibus: vox *ductus* frequentius adhibeatur agendo de continuis quantitatibus: idemque sit quantitatem A ducere in quantitatem B, & quantitatem A multiplicare per quantitatem B. Ductus Geometrici atque nominati nostræ Logisticæ breuiter describuntur lib. 1. pag. 9. Proportionem quam inter se habent isti ductus Geometrici atque nominati, docet pars 4. cap. 8. lib. 1. Has ductuum Geometricorum proportiones legitimas esse, demonstratur lib. 2. cap. 4. Quare proportio ductus primi ad ductum quintum non semper eadem perseueret, sed variabilis sit, tametsi ductus primi proportio ad reliquos quatuor ductus nominatos semper eadem atq; inuariata perseueret, indicatur lib. 3. pag. 117. Ductus nominati diuiduntur in reales & æquiualentes. Ductu Geometrico nominato atque reali, tantum duci possunt aliquæ superficies vel lineæ, in lineam. Ductu Geometrico æquiualenti, duci potest quælibet quantitas in quamlibet quantitatem. Vide lib. 3. cap. 5. considerationem 3. Ductus Arithmeticus dicitur, in quo quantitas discreta ducitur in quantitatem discretam: dicitur Arithmeticus, quia pertinet ad Arithmeticam, propter quantitates quæ ducuntur: æquiualet tamen ductui primo Geometrico. Vide lib. 3. cap. 5. considerationem 4. Hic du-

operationes Logiſticæ : quod ſint inſecabiles ſiue impartibiles &c.

GENITOR, hæc vox in Logiſtica adhibetur, vbi agitur de operationibus Logiſticis : pro his, datæ duæ quantitates appellantur genitores, & aliter dicuntur operationis dati termini : ex his duobus terminis, vnus dicitur genitor ſuperior, ſiue antecedens operationis terminus : alter dicitur genitor inferior, ſiue conſequens operationis terminus : pro Additione & Multiplicatione rariſſimè iuuat iſta datorum terminorum diſtinctio; ſæpiſſimè iuuat, & neceſſaria eſt, vbi agitur de ſubtractione, & diuiſione ; quod ex aliqua Logiſtica operatione oritur, appellatur genitum vel productum talis Logiſticæ operationis.

GEOMETRIA appellatur, Matheſis conſiderans quantitates continuas. Admittit varias reſtrictiones : ſic ſtricta Geometria dicitur, quæ pro ſuis non ſupponit alias lineas quam rectas & circulares. Geometria conica dicitur, quæ ex conorum plano ſectorum ſectione ortas lineas, à rectis, & circularibus diuerſas conſiderat. Vide lib. 2. Scholium in fine cap. 10.

GENERICA differentia, generis diuerſi quantitates, quid ſint. Vide lib. 3. cap. 5. conſiderationem 9.

GRADVS circuli, dicitur arcus qui eſt vna trecenteſima ſexageſima pars totius circumferentiæ circuli. Vnius gradus minutum dicitur, vna ſexageſima pars vnius gradus, lib. 1. pag. 60. & lib. 3. pag. 86. & 87.

HOMOLOGVM, vox eſt vſitata etiam in antiqua Matheſi, vt indicentur quantitates ſimiliter poſitæ in figuris, vel corporibus ſimilibus : vnde in propoſitione 4. lib. 6. Euclidis, homologa eſſe dicuntur latera, quæ in ſimilibus triangulis ſubtendunt angulos æquales, adeòque ſimiliter conſtituta ſunt.

INCOMMENSVRABILES quantitates dicuntur, quæ nullam habent menſuram communem ſiue quod idem eſt, quæ habent proportionem cui æqualis inueniri non poteſt inter duos numeros vulgares : Vide conſiderationem 3. cap. 5. lib. 3 : vbi oſtenditur talem proportionem inueniri poſſe inter numeros radicales, qui verè numeri ſunt : adeòque falſum eſſe, quod non inueniantur numeri incommenſurabiles : licet verum ſit quod non inueniantur numeri vulgares incommenſurabiles.

INSTRVMENTA ſtrictæ Geometriæ, ſunt circinus & recta regula : vide lib. 1. pag. 43. cauſa aſſertur lib. 2. in Scholio propoſito in fine cap. 11.

LEMMA, vox eſt qua appellari conſueuit propoſitio minus principalis, quæ tantum proponitur in ordine ad aliam propoſitionem magis principalem atque ſubſequentem.

LINEA dicitur ſuperficiei terminus : vel quantitas continua reſtricta ad eam quæ habet vnicam extenſionem : vel ſubiectum habens vnicam extenſionem. Diuerſimodè reſtringitur. Linea recta eſt quæ habet rectitudinem, hoc eſt breuiſſimam extenſionem poſſibilem inter eoſdem duos terminos. Cæteræ lineæ quæ inter illos duos terminos breuiſſimæ non ſunt, vel ſunt curuæ, vel ex pluribus rectis compoſitæ. An dentur lineæ à parte rei. Vide lib. 3. pag. 65. & 66.

LOGISTICA, vox eſt quæ à nobis aſſumitur ad ſignificandam eam methodum quam ſcribimus : Iacobus Peletarius in epiſtola apologetica contra N.N. Pariſijs impreſſa anno 1560. inter diuerſa de hac voce, (quam apud antiquiores Mathematicos vſitatam negat) *vox, inquit, Logiſtices, omnem vniuerſè ratiocinationem ſignificat* : hoc ſi verum eſt, non malè inſcribitur Logiſtica, methodus à nobis propoſita, atque potiſſimum docens, inſtituere ratiocinationes conducentes ad

quaſ-

quaslibet notitias pertinentes ad Mathesim: si verum non est, tamen quia hæc vox vniformem atque ab omnibus admissam eamdem aliquam significationem non habet; ea authoritate qua diuersis ex modernis Mathematicis licitum fuit, in diuersa significatione adhibere hanc vocem; nobis etiam licitum putamus illam assumere pro indicanda methodo quam scribimus: præsertim cum eam non simpliciter Logisticam, sed nostrã Logisticã appellemus: vt tamen nos cõformando huic nostro beneplacito, nõ planè discederemus à beneplacito diuersorũ aliorum Mathematicorum, existimantium hanc methodum longè melius appellari posse methodum Gottignianam, vtramque appellationem illi concessimus in huius operis fronte.

MATERIA concreti, & subiectum concreti, idem significant in nostra Logistica: etenim ea concreti pars quæ intelligitur sustentare alteram, siue de qua prædicatur altera, materia siue subiectum appellatur: altera concreti pars quę intelligitur sustentari vel prædicari, dicitur concreti forma: & talis forma capax sustentari, sed non sustentata, dicitur pura forma: similiter pura materia appellatur, illa quæ quidem capax est sustentare, sed non consideratur sustentare formam: vbi aduertendum, quod idem omnino possit esse vnius concreti materia vel subiectum, & alterius concreti forma: etenim in concreto quod constituitur à forma habente indiuidualitatem, & aliter dici potest vna forma, intelligitur indiuidualitas sustentata à forma: adeòque forma est illud quod sustentat, & consequenter est materia siue subiectum huius concreti: licet in altero concreto quod indicatur per vocem formatum, & aliter dici potest subiectum habens formam, illud quod sustentat non sit forma, adeòque forma huius concreti materia vel subiectum dici non possit: consequenter ad hanc terminorum intelligentiam lib.3. pag.70. negamus numerari posse puras, siue abstractas formas: considerando autem quod hic de concreti forma diximus, facilè colligitur quo fundamento lib.3. pag. 68. versus finem asseramus significationem vocis *forma* in Mathesi esse ampliorem quam vocis *figura*: quis enim figuram intelligere potest in forma habente indiuidualitatem, vel in puncti indiuiduo, vel in vnitate vulgari &c. Quid sint, vel quomodo inter se differant, materia sensilis, & materia intellectilis. Vide lib. 3. pag.62.

MATHESIS dicitur, scientia considerans proprietates conuenientes subiectis habentibus magnitudinem: quæ aliter significantur per voces quantitas vel magnitudo, intellectas in sensu concreto, in quo idem significant cum vocibus quantum vel magnum. Vide lib.3. reflexionem 7. cap.4. & considerationem primam cap.5. Et nota diligenter Matheseos scientificæ obiectum non constitui à quantitate sensili, siue externo sensu perceptibili, cuius consideratio ad physicam spectat: sed constitui à quantitate intellectili, quæ solo intellectu cognoscitur, *exsurgendo à sensu ad mentem*, vt loquitur Proclus, nimirum præscindendo. Hæc intellectilis quantitatis consideratio, inchoata creditur à Pythagora Samio (præsertim celebri ob inuentam propositionẽ quæ est 47. libri primi elementorum Euclidis, quæ vsque in hodiernum diem retinet inuentoris sui nomen, atque passim appellatur Pythagorica) etenim celeberrimus hic Mathematicus, teste Laertio, primus Geometriam abstraxit à materia sensili: atque in hac mentis eleuatione (vt loquitur P. Taquet in sua historica narratione de ortu & progressu Matheseos) inuenit plures alias propositiones, ab Euclide propositas in suis elementis. Non inuenitur multiplex Mathesis, sed vnica est scientia quæ hoc nomine intelligenda est, nimirum scientia quæ vacat contemplandis proprietatibus conuenientibus subiectis habentibus magnitudinem. Hæc eadem Mathesis admittit diuersas appellationes desumptas à methodo qua vtitur in sui obiecti contemplationibus:

quæ

integri dicuntur, qui numerant vnitates vulgares integras, hoc est nō diuisas per alium numerum vulgarem: numeri vulgares fracti, siue fractiones vulgares, sunt illę à quibus numerantur vulgares vnitates fractæ, hoc est, numeri vulgares per aliū vulgarē numerum diuisi. Quid sit, vel quomodo scribatur vulgariū fractionum numerator, & denominator: vide initio partis 3. cap. 2. lib. 1. Rursus numeri dicuntur actuales, si numerent vnitates actuales: si verò numerent vnitates potentiales, dicuntur numeri potentiales: vbi aduertendum, quod numeri potentiales non aliter dicantur numeri, quam homo tantum possibilis dicatur homo. Vide lib. 3. pag. 71. vel duas subsequentes. Numeri dicuntur denominati, si numerent vnitates denominatas, hoc est nomen habentes diuersum ab eo quod per vulgares numeros satis exprimi potest, vt fit in fractionibus vulgaribus. De modo scribendi numeros denominatos: vide lib. 1. cap. 1. partem 2. In his scriptionibus, nomen diuersum ab eo quod satis indicatur per numerum vulgarem, repræsentatur à dignitate numeri denominati. Similiter numeri dicuntur radicales, qui numerant vnitates radicales, siue radices numerorum; de quibus consule vocem *radix*. De numerorum valoribus, vide vocem *valor*.

OBIECTVM Matheseos, est illud quod considerat Mathesis, siue illud cuius proprietates contemplatur: hoc obiectum Matheseos constitui à quantitate, apud omnes indubitatum est: vtrum constituatur ab abstracta vel concreta quantitate, examinatur lib. 3. pag. 60. Plura de obiecto Matheseos, vide ad vocem *Mathesis*.

OBLIQVA quantitas, idem significat ac quantitas inclinata, siue basi insistens ad angulum recto minorem: vnde non obliqua sed recta dicitur, in quantum intelligitur basi insistere ad angulos rectos: respectu facto ad diuersas alias quantitates quæ vt bases considerari possunt, etiam potest dici recta, & obliqua: respectu facto ad eamdem, non potest dici recta & obliqua, sed necessariò est vel recta, vel obliqua: quia non potest consistere vt angulos faciat, sic vt non consistat vel ad rectos angulos, vel ad angulum aliquem recto minorem. Vide aliqua de rectis, & obliquis quantitatibus lib. 1. pag. 9.

OPERATIONES Logisticæ vniuersim quatuor vel quinque sunt admittendæ: nimirum Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuisio. Hæ operationes vniuersim erunt quatuor, si placet radicum inuentionem considerare tanquam diuisionis speciem, quod nobis magis placet; si verò aliter consideretur radicum extractio, quinque operationes Logisticæ erant admittendæ, idem alii docent, vide lib. 3. pag. 31. Pro singulis his operationibus Logisticis, vide voces quibus indicantur: de illarum praxi agit cap. 2. & 5. lib. 1.

PARALLELÆ lineæ vel superficies, quæ dicantur: vide lib. 3. cap. 5. consid. 8. vbi notamus, nos cum multis interpretibus Euclideorum elementorum, non admittere parallelarum linearum definitionem Euclideam.

PARALLELOGRAMMVM, est superficies quæ ductu primo vel secundo Geometrico producitur, ex basi quæ est recta linea, lib. 1. pag. 10.

PARALLELEPIPEDVM, est corpus quod ductu primo vel secundo Geometrico producitur, ex basi quæ est parallelogrammum, lib. 1. pag. 11.

PARS, vox est, quæ nisi fallor passim à non Mathematicis vsitata est in tali significatione, vt nihil dici possit pars, nisi relatè ad aliquod totum cuius pars sit: apud nos, rectè pars appellatur, quidquid cum altero constituit aliquid quod aggregatum, siue totum dici potest. Quia hunc sensum vocis *pars*, admittit nostra Logistica, consequenter admittit, quod aggregati ex linea & superficie, vna pars sit linea, altera pars sit superficies: quodque figuræ triangularis pars dici pos-

poſſit, quilibet eius angulus, aut anguli vertex, quodlibet eius latus &c. atque ſimiliter lineæ terminatæ pars dici poſſit, lineæ terminus ſiue punctum. In hoc ſenſu intelligendo vocem *pars*, verum quidem eſt quod omne totum excedat ſuam partem: ſed falſum eſt quod omne totum ſit maius ſua parte: vide lib. 3. pag. 9. & lib. 2. pag. 45. vbi vlterius partes diſtinguimus, in propriè dictas, quæ ſpecie conueniunt cum toto cuius ſunt partes: & impropriè dictas, quæ ſpecie non conueniunt cum toto cuius partes ſunt. Per partem aliquantam alicuius totius, intelligi debet quantitas eiuſdem generis cum toto, quod non præciſè adæquat, aut ſemel aut ſæpius ſumpta. Per partem aliquotam alicuius totius, intelligi debet quantitas eiuſdem generis cum toto, quod præciſè adæquat, aut ſemel aut ſæpius ſumpta: ſic vt omnis & ſola pars aliquota alicuius totius, ſit etiam menſura illius totius; vide lib. 3. pag. 87. Vbi notandum, quod ſi placeat vt pro Matheſi ſpeculatiua, non tantum omnis pars aliquota poſſit dici menſura, ſed etiam omnis menſura appellari poſſit pars aliquota (quod videtur etiam dicendū iuxta definitionē 5. lib. 7. Euclidis apud P. Andream Taquet, quæ aſſerit quod, *pars aliquota numeri eſt, quæ numerum metitur*) admittendum eſt quod vox *aliquota* reſpectu facto ad vocem *pars*, aliquando ſit particula diſtrahens: vt vox *pictus* eſt particula diſtrahens reſpectu facto ad vocem *homo*: & quemadmodum lib. 3. pag. 71. pluribus traditur quomodo vox *potentialis* ſit particula diſtrahens reſpectu facto ad vocem *numerus*: quandoquidem enim omnis quantitas benè dicatur menſura ſuiipſius, ſuppoſita prędicta terminorum intelligentia, dici poteſt pars aliquota ſuiipſius: ſed tamen dici non poteſt ſuiipſius pars.

PHYSICA, vox eſt per quam in Logiſtica noſtra indicatur illa ſcientia ad quam ſpectat conſideratio obiectorum externis ſenſibus perceptibilium: quare ſicut ad Matheſim non ſpectat ſenſilis quantitatis conſideratio, ſic ad Phyſicam non pertinet contemplatio intellectilis quantitatis: adeò vt tam ſcientia Phyſica quam Mathematica conſideret quantitatem: illa tamen minus abſtractam, hæc magis abſtractam quantitatem contemplatur. Hinc dicitur verum, vel exactum in rigore Phyſico, non in rigore Mathematico, quod verum vel exactum eſt quoad ſenſum, ſic vt nullum habeat errorem externo ſenſu perceptibilem: dicitur verum vel exactum in rigore Mathematico, quod verum vel exactum eſt, non tantum quoad ſenſum, ſed etiam quoad intellectum, ſic vt nullum habeat errorem intellectu perceptibilem. Totum terrarum orbem reſpectu facto ad firmamentum, punctum Phyſicum dicendum eſſe demonſtrat Aſtronomia, quæ numeratur inter ſcientias Phyſico-Mathematicas, ſiue mixtas ex Phyſicis & Mathematicis conſiderationibus: tamen reſpectu facto ad firmamentum, dici non poteſt punctum Mathematicum neque orbis terræ, neque vna arenula, neque vllum aliud corpuſculum quantumcunque paruum ſit.

PLVS, hæc vox in quantum repræſentat illud quod in Logiſtica noſtra aliter indicatur per ſignum †, ſignificat quantitatem immediatè ſequentem, adeòque hoc ſigno affectam, eſſe ex illis quæ appellantur poſitiuæ. Vide voces *ſigna* † & —.

POLVS circuli, ſphæræ, appellari poteſt quodlibet punctum aſſignabile in axe circuli aut ſphæræ, diuerſum à circuli vel ſphæræ centro: polus enim axeos vltra centrum excurrentis terminum ſignificat.

POLYGONVM, aliter multilaterum, vel plurilaterum dicitur: eſt nomen genericum quo appellari conſueuerunt figuræ rectis quidem lineis terminatæ, non tamen triangula aut parallelogramma, licet de illis verum ſit quod multa, ſiue plura habeant latera: ſaltem hic vſus vocis *polygonum* videtur magis communis in antiqua Matheſi, & retinetur à noſtra Logiſtica.

POSTREMI Algebræ promotores, qui dicantur: vide lib. 3. pag. 2.

POTENTIALIS, pars, vnitas, numerus &c. diſtinguitur contra actualem: actualis

capi-

SVB-

Capita libri primi Logisticæ.

PRimum Caput. In prima parte docet modum legendi, & scribendi vulgares numeros. Secunda pars, idem docet de compendiatis Logisticæ scriptionibus. Tertia pars, enumerat magis necessaria sex diuersa genera quantitatum. Quarta pars, notat aliqua pro praxi, atque rudiori intelligentia ductuum Geometricorum nostræ Logisticæ. Quinta pars, affert aliquas definitiones quantitatum habentium vsitatum nomen, quæ ex ductibus Geometricis producuntur.

Secundum Caput. Docet operationes Logisticas, nimirum Additionem, Subtractionem, Multiplicationem, & Diuisionem, circa diuersas quantitates.

Tertium Caput. In prima sui parte, docet regulam auream: hoc est inuentionem termini qui ad datos tres terminos sit quartus proportionalis. In secunda parte, docetur inuentio vnius, aut plurium terminorum, qui inter duos datos sint medij proportionales.

Quartum Caput. Agit de elementaribus remedijs æquationum: qua appellatione significare volumus, praxes aliquas faciles & vtiles, vt æquationes reddantur breuiores, vel commodiores.

Quintum Caput. Tradit praxim inueniendi cuiusuis nominis radicem quam habet propositus vulgaris numerus.

Sextũ Caput. Docet aliqua problemata vtilia pro practica Geometria.

Septimum Caput. Proponit aliquas æquationum resolutiones, requisitas pro vsu primæ regulæ Logisticæ inuentioni seruientis.

Octauum Caput. Breuiter annotatas exhibet veritates constituentes speculatiua nostræ Logisticæ elementa, diuersa à terminorum intelligentia.

Nonum Caput. Proponit sex diuersas hypotheses, & in singulis asserit vnam vel plures æquationes inter diuersas quantitates.

Decimum Caput. Affert tres diuersas Logisticæ regulas inuentioni seruientes: siue problematis solutio inuenienda sit, siue demonstratio veritatis aut falsitatis propositæ assertionis.

Vndecimum Caput. Exhibet varia exempla primæ regulæ Logisticæ.

Duodecimum Caput. Pro exemplis secundæ regulę Logisticæ, demõstrata proponit varia Euclidis & Archimedis laudatissima theoremata.

Decimum tertium Caput. Pro exemplis tertiæ regulæ Logisticæ, demonstrata proponit, diuersa, aut problemata ex Ghetaldo, aut theoremata apud Algebræ doctores passim annotata, aut alia, annexam habentia aliquam vtilitatem diuersam à declaratione tertiæ regulæ Logisticæ.

Appendix. Proponit aliquas vulgaris Arithmeticæ practicæ regulas: parum quidem vtiles amatoribus nostræ Logisticæ: sed tamen vtiles in ordine ad rem mercatoriam, similesque vsus ciuiles vulgaris Arithmeticæ practicę: quibus proinde nihil addimus non vtile ad hunc finem.

LIBRI PRIMI

LIBER PRIMVS LOGISTICÆ VNIVERSALIS

IN QVO DECLARATVR EIVS VSVS PRACTICVS PRO INVESTIGANDIS

Problematum solutionibus, aut theorematum demonstrationibus.

PRactica Mathesis, cuius declarationem hoc libro complectimur, pro fine non habet, humiliores illas praxes Mathesi subordinatas, pro quibus non requiritur discursus, sed vt ità dicam, satis est, clausis oculis, & cæca obedientia exequi regularum præscripta maximè limitata; immo vero pro fine habet discursus practicos minimè vulgares: quippe sufficientes, vt Mathematicæ leges ac regulæ examinentur, quæ defectuosæ sunt corrigant, nouæ inueniantur: vt propositi cuiusuis problematis solutio ex suis latebris eruatur: vel statuatur vtrum vera, aut falsa sit, proposita propositio Mathematica: eiusque, aut veritas, aut falsitas euincatur discursu demonstratiuo. Sublimior hæc Mathesis practica, requirit apertos oculos, firmamque, & subsistentem ratiocinationem. Hanc practicam Mathesim in primo libro declaramus: pro illa exponimus necessaria eius elementa, constantia ex principijs atque propositionibus elementaribus. Principia dicimus illa ex quibus reliqua vniuersa Mathesis desumit primam suam originem, & consistunt in clara terminorum intelligentia, atque notitia veritatum, aut praxium, quæ ex hac intelligentia adeò immediatè consequuntur, vt nulla indigeant probatione. Propositiones à principijs diuersæ dicuntur elementares: quando non satis immediatè constant ex principijs, sed ex his legitimo discursu inferendæ sunt, antequam admitti debeant, vt certæ atque infallibiles: & præterea tam necessarium, ac frequentem vsum habent in rebus Mathematicis, vt sine rubore ignorari non possint ab ijs, qui haberi volunt superiores Matheseos tyrocinio. Commemoratis Matheseos elementis, hoc libro adduntur tres diuersæ regulæ inuentioni seruientes, quæ singulæ appellantur regulæ Logisticæ; in his declaratur elementorum prius propositorum vsus practicus, siue ad soluenda quæuis proposita problemata, siue ad demonstranda theoremata. In ipsis tamen elementis, præcedentibus inuentionis regulas, nihil proponitur demonstratiuo discursu stabilitum, atque illatum ex principijs. Primò ne demonstrationibus inutiliter molestus sim, ijs, qui vniuersalis nostræ Logisticæ praxim volunt discere, & solo eius vsu practico contenti viuere. Secundò ne demonstrationes proponam, antequam tradam regulas seruientes pro demonstrationum inuentione. Tertiò, vt discentibus non exhibeam demonstrationes, antequam ferre possint iudicium de bonitate, vel insufficientia demonstrationum Mathematicarum. Quartò, vt tyrones, qui veritatum examine delectantur, prius se occupent faciliori examine: inquirendo vtrum in casibus magis restrictis verum sit, vel in praxi succedat, quod asseritur vniuersalius verum esse: vel vtrum ex his veritatibus nihil falsum inferri possit. Quintò, vt pro docenda praxi seruare possim ordinem vtiliorem, atque commodiorem; alius enim ordo pro praxi, alius pro speculatiua videtur vtilior. Pro illa expedit non nimium ab inuicem separare diuersa, sed inter se affinia, atque conducentia ad eumdem finem. In speculatiua Mathesi laudabili vsu receptum est, in subsequentibus nihil vnquam assumere, quod ex præcedentibus non satis constat. Hęc, & alia plurima me mouerunt, vt in primo libro vniuersalis nostrę Logisticæ, prorsus abstinerem ab omni demonstratione elementarium propositionum: & speculatiuam Mathesim, pro practica non necessariam, differrem ad secundum librum: vbi demonstro singula, quæ pertinent ad Logisticę vniuersalis elementa, & tamen diuersa sunt à principijs.

CAPVT I.

Exponuntur nonnullę voces magis necessarię pro intelligentia nostræ Logisticæ: atque eius compendiatæ scriptiones declarantur.

QVoniam in expositione Logisticæ vniuersalis quam aggredimur, propositum nobis est, pro viribus coniungere, illius doctrinæ quam tradimus, claritatem, facilitatem, atque soliditatem: viamque planā sternere, per quam difficile non sit, etiam ex profunda Matheseos ignorantia, exiguo labore assurgere ad eius intelligentiam minimè vulgarem; Mathematicum nihil aliunde cognitum supponimus, sed exordium sumimus à necessarijs pro nostra Methodo scriptionibus compendiatis, & expositionibus illarum vocum, quæ nostro iudicio supponi non possunt satis declaratæ in vsitato Grammaticorum Calepino. Ex his vocibus, nonnullas magis necessarias, hoc capite exponimus: vt saltem obiter perlegantur ab ijs, qui accedunt ad Methodi nostrę studium; reliquæ discendæ sunt, quando ipsarum vsus occurrit. Quo loco singulæ declarentur, indicat vocum index; hic à discentibus consulendus est, quemadmodū Grammatici consulunt suum Calepinum: nimirum quoties occurrit vox aliqua Mathesi magis propria, de cuius significatione dubitatur. Vt de occurrentis huiusmodi vocis significatione non dubitetur, satis non est, intellexisse sensum in quo adhibetur, apud alium aliquem Matheseos scriptorem; non tantum quia omnes inter se non conueniunt quo ad huiusmodi vocum expositionem, & sequi non possum inter se descordes: sed prætere, quia subinde maior commoditas atque vtilitas, cogit nos immutare nonnullas Mathematicarum vocum expositiones, quæ ab alijs afferuntur, tametsi, & vsu receptæ, & legitimæ sint pro methodo de qua scribunt. Rei huius aliqua exempla videri possunt in parte 5. huius capitis. Quoniam verò hæc Mathematicarum vocum conditio est in vniuersali nostra Logistica, diligenter monitum velim eius Lectorem, qui aliquid delibauit ex Mathesi ab alio scripta, ne vocem quam exponimus intelligat in alio sensu quam declaretur in vocum indice, aut loco illic indicato.

PARS I.

De compendiata sciptione numerorum vulgarium.

VOx *vnitas* duplicem diuersam significationem admittit; prima est, quando significat illud à quo aliquid vnum dicitur, & aliter appellatur vnitas abstracta. Secunda est, quando significat illud, quod aliter dicitur vnum, siue indiuiduum, hoc est, habens abstractam vnitatem siue indiuidualitatem: & aliter appellatur concreta vnitas. Hæc secunda siue concreta vnitas intelligenda est, vbi vnitatem nominamus, nisi oppositum declaretur. Vnitas simplex dicitur, quod sine addito, siue vlteriori restrictione sufficienter significatur per vocem *vnum*, vel

vocem

vocem *indiuiduum*. Reliquæ vnitates, quæ per vocem vnum vlterius non restrictam sufficienter non declarantur, vnitates quidem sunt, verum non sunt vnitates simplices, sed à nobis appellantur vnitates restrictæ. Sic vnum punctum, vna linea, vnum corpus, vnus homo, sunt vnitates restrictæ. Numerus dicitur quod numerat vnitates. Numerus diuiditur in singularem, qui vnam vnitatem numerat: & pluralem qui duas, aut plures vnitates numerat. Ex numeris, alij sunt vulgares, qui tantum numerant vnitates simplices; alij non sunt vulgares, qui numerant vnitates non simplices, siue restrictas.

Vt quilibet vulgaris numerus indicari possit compendiata, & commoda scriptione, vsu receptum est, etiam apud alios Arithmeticos, assumere subsequentes decem characteres, qui aliter appellantur notæ Arithmeticæ, vel digiti, vel figuræ.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

His notis ordine respondent subsequentes decem voces quibus enunciantur.

Vnum, duo, tria, quatuor, quinque, sex, septem, octo, nouem, cyfra, vel zero.

Voces per quas diximus enunciari prædictas notas Arithmeticas, significant istarum notarum valorem proprium; præter quem, si alium nullum valorem haberent, tantum vtiles forent ad repræsentandos vulgares numeros denario minores. Vt igitur decem istæ notæ Arithmeticæ sufficiant, etiam ad repræsentandum denarium, & quoslibet alios vulgares numeros denario maiores: singulis istis notis conceditur alius valor à priori multum diuersus, & dicitur valor localis, quia dependet à loco quem nota Arithmetica habet in successiua plurium istarum notarum scriptione. Localis valor facit, vt vnitates indicatę à proprio valore characteris, ratione loci, fiant decades vnitatum, quę significantur à charactere, qui immediatè sequitur versus dexteram, siue finem successiuæ scriptionis. Hinc incipiendo à dextera parte, siue fine scriptionis, numerus significatus à nota Arithmetica primo loco consistente, est numerus vnitatum simplicium minor denario. Verum numerus significatus à nota Arithmetica secundo loco consistente, est numerus decadum vnitatum simplicium. Numerus significatus à nota Arithmetica tertio loco consistente, est numerus decadum vnitatum, quæ significantur à nota Arithmetica secundo loco consistente: hæ decades characteris tertio loco consistentis, aliter dicuntur centena vnitatum simplicium. Numerus significatus à nota Arithmetica quarto loco consistente, est numerus decadum vnitatum significatarum à nota Arithmetica tertio loco consistente: aliter dicuntur millia, siue millena vnitatum simplicium. Similiter atque vniuersaliter, numerus significatus à nota quauis Arithmetica, est numerus decadum istarum vnitatum, quæ significantur à nota Arithmetica, quæ sequitur versus finem successiuæ scriptionis: generaliter enim verum est, quod localis notæ valor fiat decuplo maior, quo nota vno loco amplius distat ab vltimo.

Vt expeditè vocibus exprimi possit localis valor singularum notarum Arithmeticarum, quæ inueniuntur in successiua scriptione: primò sciendæ sunt voces quibus exprimuntur omnes simplicium vnitatum decades, quæ inueniri possunt in numero, qui centenario minor est; sunt autem voces subsequentes, nimirum decem, hoc est vna decas: viginti, hoc est duæ decades: triginta, hoc est tres decades: quadraginta, hoc est quatuor decades: quinquaginta, hoc est quinque decades: sexaginta, hoc est sex decades: septuaginta, hoc est septem decades: octuaginta, hoc est octo decades: nonaginta, hoc est nouem decades. Hactenus expositæ voces sufficiunt, vt enuncientur vulgares numeri omnes centenario minores: hisque paucas alias addere necesse est, vt enuncientur reliqui vulgares numeri omnes; Quippe ad hoc sufficit, prius enumeratis vocibusn, anumerare voces, centum, mille, millio; aut ex his compositas, vt constabit ex tabella, quæ subsequitur, & praxibus legendi, aut enunciandi vulgares numeros.

TABELLA.

Exhibens valores locales notarum Arithmeticarum in successiua scriptione, sumendo initium à fine.

1. Loco numerat vnitates simplices.
2. Loco numerat decades vnitatum simplicium.
3. Loco numerat centena vnitatum simplicium.
4. Loco numerat millena vnitatum simplicium.
5. Loco numerat decem millena, siue decem millia vnitatum simplicium.
6. Loco numerat centies millena, siue centum millia vnitatum simplicium.
7. Loco numerat milliones vnitatum simplicium.
13. Loco numerat biliones vnitatum simplicium.
19. Loco numerat triliones vnitatum simplicium.
25. Loco numerat quatriliones vnitatum simplicium.
31. Loco numerat quintiliones vnitatum simplicium.
37. Loco numerat sextiliones vnitatum simplicium
43. Loco numerat septiliones vnitatum simplicium.
49. Loco numerat octiliones vnitatum simplicium.

Pro enunciandis valoribus notarum Arithmeticarum, quæ duodecimo loco amplius a fine distant, adhibemus voces compositas ex voce bis, ter, quater, &c. & voce millio. Si plures placerent quam à nobis proponantur, facillimum erit illas componere, reflectendo quomodo bilio sit vox composita ex bis, & millio. Pari modo trilio sit vox composita ex ter, & millio. Quodque similiter ex quater, & millio, componatur vox quatrilio. Ex quinies, & millio, componatur vox quintilio. Atque ità de cæteris.

Praxis.

Legendi, siue enunciandi quemlibet vulgarem numerum, notis Arithmeticis compendiatè scriptum.

Tres casus distinguo. Primus est, quando in scriptione non continentur plures, quam tres notæ Arithmeticæ. Secundus casus est, quando in scriptione non plures quam sex, sed tamen plures, quam tres notæ Arithmeticæ continentur. Tertius casus est, quando in scriptione continentur plures, quā sex notæ Arithmeticæ.

In primo casu, quomodo scriptio enuncianda sit, satis constat ex prius dictis de vocibus quibus enunciantur vnitates simplices, vel decades vnitatum simplicium, numerique vulgares minores decem centenarijs. Idque vlteriori expositione non videtur indigere, etiam ex eo capite, quod vix ignoretur ab vllo, qui scribere didicit.

In secundo casu; incipiēdo à fine propositæ scriptionis, post tertiam notam Arithmeticam ponatur virgula, deinde incipiendo à scriptionis initio, totum quod virgulam præcedit enuncietur ijs vocibus, quibus iuxtà primum casum deberet enunciari, si post virgulam non sequerentur vllæ notæ Arithmeticæ: his tamen vocibus addatur vox mille, vel millia, prout sensus exigit; ac denique iuxtà primum casum fum etiam legantur atque enuncientur tres notæ Arithmeticæ, quæ subsequuntur virgulam, versus scriptionis finem; sic enim rectè enunciatus erit à tota scriptione indicatus numerus. Exempli gratia numerus 4,326. rectè legitur, quatuor millia, trecenta viginti sex. Numerus verò 74,326, rectè legitur, septuaginta quatuor millia, trecenta viginti sex, Denique numerus 574,326. rectè exprimitur per voces quingenta, septuaginta quatuor millia, trecenta viginti sex.

In tertio casu. Primò incipiendo à fine propositæ scriptionis, punctis tota diuidatur in mēbra, quæ, singula constent ex sex notis Arithmeticis, excepto membro, quod versus sinistram remanet vltimum, quod non quidem plures, sed pauciores, quam sex notas Arithmeticas continere potest. Deinde singulis punctis subscribatur numerus indicans tot vnitates, quot sequuntur membra constantia ex sex notis Arithmeticis. Denique incipiendo à scriptionis initio, iuxtà dicta de primo, vel secundo casu, enuncietur membrum, ac si nihil prorsus sequeretur: his tamen vocibus addatur vox composita ex voce bis, ter, quater, &c. quam indicat numerus subscriptus puncto quod membrum terminat, & voce millio: sic enim erit legitimè enunciatum primum illud membrum, atque simili prorsus modo enunciando membra subsequentia, totus propositus numerus legitimè enunciabitur atque legetur.

Exempli gratia, numerus interpositis punctis in membra diuisus sit, & singula puncta habeant subscriptum numerum, vt diximus, & repræsentatur in subsequenti scriptione.

$$72\underset{V}{.}362580\underset{IV}{.}942324\underset{III}{.}005032\underset{II}{.}734023\underset{I}{.}123437,$$

Hic numerus ità legitur: Septuaginta duo quintiliones: trecenta sexaginta duo milla, quingenti octuaginta quatriliones: nongenta quadraginta duo millia, trecenti viginti quatuor triliones: quinque millia triginta duo biliones: septingenta triginta quatuor millia, viginti tres milliones: centum viginti tria millia, quadringenta triginta septem.

PARS II.

Proponuntur, & explicantur characteres, qui in Logistica assumuntur, pro compendiatis scriptionibus.

HIC character enunciatur per vocem *plus*; indicat verò positiuam esse quantitatem, siue dignitatem, quam immediatè præcedit, adeòque afficit. †

Hic character enunciatur per vocem *minus*; indicat verò negatiuam esse quantitatem, siue dignitatem, quam immediatè præcedit, adeòque afficit. —

Pro intelligentia quantitatum, quæ in Logistica appellantur positiuæ, vel negatiuæ, consuli potest index, ad vocem quantitas negatiua.

Hic character repræsentat vocem *æquatur*, siue *æquiualet*. Compendiata scriptio 4 † 5 — 2 ≍ 7. Legitur, quatuor plus quinque minus duo æquatur septem. ≍

Hic character repræsentat voces, *quod etiam æquatur*, siue *æquiualet*. ll

Hic character enunciatur per voces *ductum in se*. Si immediatè subsequatur numerus vulgaris, indicat toties ductum in se, quoties in hoc vulgari numero continetur vnitas. Hinc, q, siue q1. significat semel ductum in se: q2: significat bis ductum in se: q3. significat ter ductum in se. Et sic de cæteris. q

Hæc scriptio legitur *quatuor A secunda*. Pro similibus omnibus scriptionibus, in quibus dignitatem (hoc est alphabeti literam repræsentantem quantitatem) immediatè præcedit, & subsequitur vulgaris numerus; præcedens vulgaris numerus, dici- 4 A 2 dicitur dignitatis numerator, atque exprimendus est per voces, vnum, duo, tria, quatuor, &c. vt vulgares numeros enunciari diximus. Dignitatem immediatè subsequens vulgaris numerus appellatur dignitatis denominator, & exprimitur per voces, prima, secunda, tertia, quarta, &c. Quando dignitati, alius, siue numerator, siue denominator non est expressè appositus: subintelligitur pro numeratore, vel denominatore habere vnitatem. Hinc idem significatur, & intelligendum est, siue scribatur A, siue scribatur 1 A 1.

$\frac{A}{B}$ Hæc scriptio enunciatur per voces *A diuisum per B*. Sic vt lineola superiorem, siue dignitatem, siue numerum diuidens ab inferiori, repræsentet voces *diuisum per*. Hic non prohibetur, vt scriptio $\frac{4}{7}$, legatur quatuor septimæ: sed asseritur quod etiam legi possit quatuor diuisum per septem.

3Ao2 Hæc scriptio legitur *tria A opposita secunda*. Sic vt cyfra interposita, inter dignitatem, & eius denominatorem, enuncietur per vocem *oppositum*. Eadem scriptio etiam legi potest, *tria diuisum per A secundum*. Etenim scriptio 3 A o 2, planè æquiualet scriptioni, $\frac{3}{A2}$. In priori, hæc sola maior commoditas inuenitur, quod in scriptione vnicam lineam occupet.

3R2q8 Hæc scriptio enunciatur per voces *tres radices secundæ quantitatis octo*. In similibus scriptionibus quibus Logistica exprimit quantitates radicales: numerus vulgaris immediatè præcedens literam R, dicitur numerator, & exprimitur per voces, vnum duo, tria, quatuor, &c; litera R exprimitur per vocem *radix*. Numerus vulgaris immediatè subsequens literam R, dicitur denominator, & exprimitur per voces, prima, secunda, tertia, quarta, &c; litera *q* exprimitur per vocem *numeri*, siue *quantitatis*. Denique quod literam *q* subsequitur, est illud cuius radix significatur, & legitur ac si nihil præcederet.

in Hæc scriptio legitur in: idem significat, ac si diceretur *ductum in*.

per Hæc scriptio legitur per: idem significat, ac si diceretur *diuisum per*. Hinc duæ scriptiones $\frac{A}{B}$ & A *per* B, ijsdem vocibus enunciantur, & idem significant. In secunda, hæc sola maior commoditas habetur, quod occupet vnicam lineam.

ad Hæc scriptio enunciatur per vocem ad, subauditur ratio, siue proportio. Exempli gratia 3 *ad* 4. Legitur tria ad quatuor: idem significat, ac si diceretur proportio tria ad quatuor; vel proportio quam habet numerus tria ad numerum quatuor.

et Hæc scriptio legitur &: seruit pro notabiliori interpunctione, impediente (vt ità dicam) virtutem particularum *in*, *per*, *ad*, &c. quæ particulæ non afficiunt, quod ab illis separatũ est particula *et*, siue *&*. Exempli gratia scriptio 3 *et* † 4 *in* 5. Legitur tria, & plus quatuor in quinque. Significat aggregatum, quod oritur ex numero tria, & ex numero quatuor ducto in numerum quinque; hoc est 20. quod aggregatum est 23. Scriptio verò 3 † 4 *in* 5. quæ à priori non differt, nisi quod careat particula *et*: significat aggregatum ex numeris 3 & 4, hoc est 7. ductum in 5. quod productum est 35.

A *in* B duc. 2. Hæc scriptio legitur A in B ductu secundo: significat productum ex basi A, ducta in altitudinem B, ductu secundo Geometrico, atque nominato. Pro intelligentia istorum ductuum consule indicem.

n A m Hæc scriptio legitur dignitas A habens numeratorem, n, denominatorem, m. vtilis est, & adhibetur, quando per numerum vulgarem exprimi non potest, numerator, vel denominator dignitatis: quo tamen casu ipsa dignitas maiuscula litera exprimitur: eius verò numerator, aut denominator, repræsentatur per minusculam literam.

Ha-

Hactenus expositis,atq; à nobis magis vsitatis scriptionibus compendiatis, alias addere,illicitum non est:dummodò ad breuitatem ità conducant, vt claritatem non vitient. Ab expositis vix vllam diuersam adhibet Logistica, quam vsitatam in exemplis secundæ regulæ Logisticæ, vt indicentur plures, sed inter se æquiualentes rationum series.

PARS III.

Definiuntur sex diuersa quantitatum genera, quæ in Logistica vniuersali considerantur.

PRimum, & maximè vniuersale quantitatis genus, amplectitur omnes, & solas quantitates vniuersales, quę aliter nominantur magnitudines. Quantitas vniuersalis, est subiectum habens magnitudinem non restrictam ad continuam vel discretam,sed ad vtramlibet restringibilem.Hęc vniuersalis quantitas subdiuiditur in quantitatem discretam,& continuam.

Secundum quantitatis genus, complectitur omnes, & solas quantitates discretas. Quantitas discreta est subiectum habens magnitudinem, quę desumitur à pluralitate indiuidualitatum; vbi per indiuidualitatem intelligimus, illud à quo subiectum dicitur vnum,siue indiuiduum.Hęc indiuidualitas saltem non semper idem est cum terminatione, nam punctum indiuiduum dari potest, punctum terminatum dari non potest.

Tertium quantitatis genus, complectitur omnes, & solas quantitates continuas vlterius non restrictas. Hæc quantitas continua, est subiectum habens magnitudinem extensionis vlterius non restrictam. Subdiuiditur in tria diuersa continuarum quantitatum genera,quæ subsequuntur.

Quartum quantitatis genus,complectitur omnes, & solas continuas quantitates habentes triplicem extensionem, quæ aliter appellantur corpora, vel solida. Hæc quantitas continua est subiectum habens magnitudinem extensionis restrictam ad tres diuersas extensiones; Et quoniam plures quam tres diuersæ extensiones dari non possunt, hoc quartum genus quantitatis habet omnes extensiones possibiles.

Quintum genus quantitatis,complectitur omnes, & solas quantitates continuas habentes duas, sed non plures extensiones,quæ aliter appellantur superficies. Hæc quantitas continua est subiectum habens magnitudinem extensionis restrictam ad duas solas extensiones diuersas.

Sextum genus quantitatis, complectitur omnes, & solas quantitates continuas habentes vnicam extensionem, quæ aliter appellantur Lineæ. Hæc quantitas continua est subiectum habens magnitudinem extensionis restrictam ad vnicam extensionem.

Vtrum singula quantitatum genera hic à nobis definita,sint entia realia, quæ à parte rei existant independenter à nostro conceptu: vel certè tantum sint entia negatiua,vel chimærica, vel quæ à parte rei nusquam existant,nisi in nostro intellectu, vel imaginatione,vide locum citatum in indice ad vocem quantitas.

Logistica nostra non minus considerat quantitates spectantes ad singula quantitatum genera hactenus enumerata, quam singularum istarum quantitatum valores diuersos,quos appellat,vniuersales,discretos,continuos,corporeos,superficiales, lineares. Quid per istos quantitatum valores diuersos,intelligendum sit,hic breuissimè expono. Vbi Paulò fusius de hac re agatur dicitur in indice ad vocem valor.

Nomi-

Nominando valorem vniuersalem lineæ A, significatur quantitas illa vniuersalis, quæ restricta ad vnicam extensionem constituit lineam A, sed independenter, siue præscindendo ab omnibus istis restrictionibus; quare valor vniuersalis lineæ A, est quantitas vniuersalis spectans ad primum genus quantitatis.

Nominando valorem discretum lineæ A, significatur valor vniuersalis lineæ A, sed restrictus ad discretam quantitatem: quare valor discretus lineæ A, est quantitas discreta spectans ad secundum genus quantitatis.

Nominando valorem continuum lineæ A, significatur valor vniuersalis lineæ A, sed restrictus ad quantitatem continuam pertinentem ad tertium genus quantitatis: Vndè fit, quod valor continuus lineæ A, sit quantitas continua pertinens ad tertium genus quantitatis.

Nominando valorem corporeum lineæ A, significatur valor vniuersalis lineæ A, sed restrictus ad quantitatem corpoream pertinentem ad quartum genus quantitatis: Vndè valor corporeus lineæ A, est quantitas corporea spectans ad quartum genus quantitatis.

Nominando valorem superficialem lineæ A, significatur valor vniuersalis lineæ A, sed restrictus ad superficiem, siue quantitatem quinti generis; de valore superficiali verum est, quod sit superficies, siue quantitas quinti generis.

Nominando valorem linearem corporis B, significatur valor vniuersalis corporis B, sed restrictus ad quantitatem linearem pertinentem ad sextum genus quantitatis, & de quolibet valore lineari verum est, quod sit linea, & quantitas spectans ad sextum genus quantitatis.

P A R S IV.

Declarantur Logisticæ nostræ ductus Geometrici, atque nominati.

Communis antiquorum Geometrarum doctrina est, ex fluxu, siue ductu puncti produci lineam. Præterea ex fluxu, siue ductu lineæ oriri superficiem, ac denique ex fluxu, siue ductu superficiei corpus nasci. His antiquorum vestigijs insistentes statuimus quinque diuersos ductus Geometricos, quos nominatos dicimus, vt sic breuiter indicemus, plures alios considerari posse quam hic à nobis considerentur, & melius à ceteris (non inutiliter considerabilibus) distingueremus illos quinque, quos placuit tantum considerare in præsenti opusculo.

Agendo de nostris ductibus Geometricis, atque nominatis, basim appellamus id, quod ducitur: Linea verò in quam basis ducitur, appellatur altitudo. Præterea ex motibus localibus per quos basis in altitudinem ducta, potest aliquid producere, duplex, & maximè simplex motus consideratur. Primus motus est, quando basis tantum vehitur per rectam lineam, hoc est, ità mouetur, vt cum recta linea ab aliquo eius puncto descripta, non variet inclinationem, siue angulum: sed semper retineat eamdem inclinationem, atque æquales angulos faciat. Secundus motus est, quando basis tantum rotatur, hoc est ità mouetur circa suum axem, vt singula baseos puncta extra axem constituta, semper conseruent eamdem ab illo axe distantiam. Præter hos duos motus maximè simplices, aut ipsis omninò æquiualentes in ordine ad producendam quantitatem, nullos alios consideramus in ductibus nominatis de quibus agimus. In tribus prioribus ductibus nominatis basis vehitur. In duobus posterioribus basis rotatur. Reliqua istorum ductuum, aut conuenientia, aut discrepantia, quam habent, aut inter se, aut ab illis quos ampliatos dicimus, patebit ex subsequentibus singulorum descriptionibus.

Pri-

Primus ductus Geometricus nominatus dicitur, qui habet has proprietates. Primò vt basis sit linea, quæ habeat partes omnes in eodem plano constitutas, vel plana superficies. Secundò vt basis tantum rectà assurgat in altitudinem, nullatenus immutata. Tertiò vt non obliquè, sed rectà assurgat in altitudinem; hoc est vt linea recta à quouis baseos puncto descripta sit perpendicularis ad basim. Propter tertiam huius ductus proprietatem, omnia producta ex hoc primo ductu appellantur recta.

Secundus ductus Geometricus nominatus dicitur, qui habet has proprietates. Primò vt basis sit linea, quæ habeat partes omnes in eodem plano constitutas, vel plana superficies. Secundò vt basis nullatenus immutata, & tantum rectà assurgat in altitudinem. Tertiò vt obliquè assurgat in altitudinem; hoc est vt linea recta descripta ab aliquo baseos puncto, non sit perpendicularis ad basim. Propter tertiam huius ductus proprietatem, omnia producta ex hoc secundo ductu appellantur obliqua: & solum, quoad tertiam hanc proprietatem, ductus secundus differt à ductu primo: priores enim duæ proprietates, tam primo, quàm secundo ductui communes sunt.

Tertius ductus Geometricus atque nominatus appellatur, qui habet subsequentes proprietates. Primò vt basis sit linea cuius omnes partes sint in eodem plano, vel superficies plana, aut sphærica. Secundò vt hæc basis tantum recta assurgat in altitudinem, siue rectà, siue obliquè. Tertiò, vt vna, vel duplex baseos extensio tota atque vniformiter decrescat. Baseos extensionem totam decrescere intelligimus, quando lineæ à punctis decrescentem extensionem terminantibus descriptæ, concurrunt. Baseos verò extensionem vniformiter decrescere dicimus, quando lineę descriptæ à punctis extensionem decrescentem terminantibus, rectæ sunt.

Tertius ductus Geometricus ampliatus vocatur, quando habet subsequentes proprietates. Primò, vt basis sit recta, vel circularis linea. Secundò, vt baseos extensio vniformiter decrescat. Tertiò, vt decrescens extensio non tota decrescat.

Quartus ductus Geometricus nominatus dicitur, qui habet has proprietates. Primò, vt basis sit recta linea, vel rectangulum illi insistens. Secundò, vt hæc basis rotando moueatur circa axem, qui sit latus talis rectanguli. In hoc quarto ductu Geometrico, altitudo in quam basis duci intelligitur, est linea quam describit baseos punctum ab axe remotissimum.

Quartus ductus Geometricus ampliatus dicitur, qui habet has proprietates. Primò, vt basis sit recta linea existens in eodem plano cum axe, ità tamen vt non sit axi parallela, neque ad illum perpendicularis. Secundò, vt hæc basis rotando moueatur circa axem. In hoc ductu quarto ampliato, altitudo in quam basis duci intelligitur est linea quam describit baseos punctum ab axe remotissimum.

Quintus ductus Geometricus nominatus dicitur, qui habet has proprietates. Primò, vt basis sit quadrantis circuli, aut arcus aliquis, aut sector. Secundò, vt hæc basis rotando moueatur circa axem, qui sit radius terminans talē circuli quadrantem. In hoc quinto ductu, altitudo in quam basis duci intelligitur, appellatur arcus quem describit integri quadrantis punctum ab axe remotissimum.

P A R S V.

Proponuntur definitiones diuersæ, linearum, superficierum, aut corporum, speciale ac proprium nomen habentium.

IN ductibus Geometricis, de quibus in præcedenti parte egimus, punctum lineam producit: linea verò producit superficiem: ac denique superficies producit corpus.

pus. Quoniam tamen inter bases quas pro his ductibus admittimus non inuenitur punctum, etiam inter producta ex istis ductibus nominatis, non inueniuntur lineę: sed hæc producta omnia, vel sunt superfices, quando basis est linea: vel sunt corpora, quando basis est superficies. Superficierum, & corporum, quę ex nostris ductibus Geometricis producuntur, definitiones alias non admittimus, nisi deriuatas ex ductibus priùs expositis; id enim commodum nobis est, & maximam vtilitatem affert in vsu illius vtilissimæ regulæ, quam secundam logisticæ regulam appellamus; pro hac necessarium est scire, quomodo compendiata scriptione logistica exprimantur quælibet producta, quæ ex ductibus nostris Geometricis oriri possunt. Ex his quantitatibus aliæ proprium atque à Mathematicis passim vsitatum nomen habent, aliæ tali nomine destitutæ sunt. Priorum nomina retinemus: illis tamen apponimus nostras definitiones ex ductibus deriuatas, & compendiatam scriptionem logisticam qua repræsentantur, vt inde constet, quomodo reliquæ, speciali nomine destitutæ, definiri possint, & exhiberi compendiata scriptione logistica. Lineas etiam aliquas, speciale, & vsitatum nomen habentes, definimus quidem, sed non aliter quam indicando cuius superficiei termini sint, aut quomodo constitutæ sint in superficiebus, aut corporibus.

1. Triangulum, est superficies, quæ ductu tertio producitur ex basi quæ est recta linea. Hinc supposito quod A & B sint rectæ lineæ, scriptio A *in* B ductu 3, significat triangulum. Aduertendum tamen, quod vox triangulum absolutè posita, sine vlteriori restrictione, significet tantum illud triangulum, quod producitur ex recta linea, & aliter triangulum planum dicitur, à quo alia diuersa triangula inueniuntur: exempli gratia cylindrica, sphęrica, &c. Triangulū planum, varias cōtractiones siue restrictiones admittit. Primò, dicitur regulare, si habeat omnia latera, hoc est lineas ipsum terminantes, eiusdem longitudinis. Secundò, dicitur Isosceles, siue æquicrurum, si duo crura, siue duo latera habeat inter se æqualia. Tertiò, dicitur rectangulum, si vnum angulum habeat rectum. Quartò, dicitur scalenum, si nullum angulum habeat rectum, & omnia latera inter se inæqualia.

2. Parallelogrammum est superficies, quæ ductu primo, vel secundo producitur ex basi quæ est linea. Hinc supposito, quod A & B sint rectæ lineæ, scriptio A *in* B ductu 1: item scriptio A *in* B ductu 2: significat parallelogrammum. Aduertendum tamen, quod vox parallelogrammum absolutè posita sine vlteriori restrictione, tantum significet illud parallelogrammum, quod producitur ex recta linea, & aliter dicitur planum parallelogrammum; ab his differūt parallelogramma cylindrica, quæ producuntur ex basi, quæ sit arcus. Parallelogrammū planum varias contractiones admittit. Primò, dicitur rectum, siue rectangulum, si producatur ductu primo. Secundò, dicitur quadratum, si rectum est, & insuper habeat omnia latera inter se æqualia. Tertiò, dicitur obliquum, siue obliquangulum si producatur ex ductu secundo.

3. Circulus, est superficies, quæ ductu quarto producitur ex basi, quæ sit recta linea, quando hæc basis circumducitur donec redeat ad primum sui vestigium. Linea terminans circulum dicitur circuli peripheria, vel linea circularis, vel circumferentia circuli. Basis producens circulum ductu quarto, aliter appellatur radius circuli, vel semidiameter circuli. Punctum intra circulum constitutum, & radium terminans, dicitur centrum circuli. Supposito quod A sit radius, & B sit circumferentia, scriptio A *in* B ductu 4 significat circulum. Iisdem suppositis, scriptio B *in* A ductu 3, etiam significat eumdem circulum. Non tantum circulus, sed etiam diuersæ circuli partes, proprium, & vsitatum nomen habent. Sector circuli, est pars circuli terminata ab aliqua circumferentiæ eius parte, siue ab aliquo arcu, & duobus radijs ab extremitatibus istius arcus concurrentibus in centro. Si tamen arcus, sectorem terminans, est dimidia pars circumferentię, talis sector magis pro-

priè

priè dicitur ſemicirculus. Si verò iſte arcus eſt quarta pars circumferentiæ circuli, ſector magis propriè dicitur quadrans circuli. Similiter, ſector dici poteſt triens, vel ſextans circuli, ſi arcus, ſectorem terminans, eſt tertia, vel ſexta pars circumferentiæ, &c. Quemadmodum verò facta hypotheſi, quod A ſignificet radium, & B ſignificet integram circumferentiam: tam ſcriptio A *in* B ductu 4, quàm ſcriptio B *in* A ductu 3, ſignificat integrum circulum: ità eędem ſcriptiones ſignificant ſectorem circuli, ſi A ſignificet radium, & B ſignificet arcum: atque hic ſector erit, aut ſemicirculus, aut circuli quadrans, vel ſextans, &c. prout arcus B erit circumferentiæ, aut dimidia, aut quarta, aut ſexta pars, &c. Segmentum circuli appellatur circuli pars terminata ab aliquo arcu, & vna recta linea illius arcus extrema connectente. Hæc recta linea, ſegmentum circuli terminans, ſiue terminata à duobus extremis punctis alicuius circuli arcus, etiam habet proprium, & vſitatum nomen, diciturque chorda, vel etiam ſubtenſa iſtius arcus.

4. Parallelepipedum, eſt corpus, quod ductu primo, vel ſecundo producitur, ex baſi, quæ eſt parallelogrammum planum; eritque paralleſepipedum rectum, ſi producatur ductu primo, vel erit parallelepipedum obliquum, ſi producatur ductu ſecundo. Hinc ſuppoſito, quod baſis A ſit parallelogrammum, & B ſit recta linea: ſcriptio A *in* B ductu 1. ſignificat parallelepipedum rectum, & ſcriptio A *in* B ductu 2. Significat paralleſepipedum obliquum. Cubus dicitur, parallelepipedum rectum, quod oritur ex baſi quadrata, quando altitudinem habet baſeos longitudini æqualem.

5. Priſma, eſt corpus, quod ductu primo, vel ſecundo, producitur ex baſi, quæ eſt plana ſuperficies rectis lineis terminata, ſed diuerſa à parallelogrammo; eitque priſma rectum, ſi producatur ex ductu primo, vel erit priſma obliquum, ſi producatur ex ductu ſecundo. Hinc ſuppoſito, quod baſis A ſit ſuperficies plana, & rectis lineis terminata, diuerſa tamen à parallelogrammo: B verò ſit recta linea: ſcriptio A *in* B ductu 1 ſignificat parallelepipedum rectum. Verum ſcriptio A *in* B ductu 2, ſignificat parallelepipedum obliquum.

6. Cylinder, ſaltem iuxtà logiſticam, eſt corpus, quod ductu primo, vel ſecundo producitur, ex baſi, quæ ſit plana ſuperficies, aliqua ex parte terminata curua linea. Eritque cylinder rectus, ſi producatur ex ductu primo: vel erit cylinder obliquus, ſi producatur ex ductu ſecundo. Vbi tamen aduertendum, quod vox cylinder abſolutè poſita ſine vlla vlteriori reſtrictione, tantum ſignificet illud corpus, quod ductu primo producitur ex baſi, quæ eſt circulus, & ſignificatur à ſcriptione A *in* B ductu 1, ſuppoſito quod baſis A ſit circulus. Alia corpora, quæ cum vlteriori reſtrictione etiam cylindri appellantur, reſtrictionem iſtam accipiunt à baſi ex qua oriuntur. Exempli gratia erit cylinder parabolicus, ſi ductu primo, vel ſecundo producatur ex baſi, quæ ſit parabola: vel erit cylinder hyperbolicus, ſi ductu primo, vel ſecundo producatur ex baſi, quæ ſit hyperbola: & ſic de cæteris. Si verò baſis ex qua oritur non habeat proprium nomen, neque cylinder, ex tali baſi productus, habebit nomen proprium.

7. Pyramis, iuxtà logiſticam, eſt corpus productum ductu tertio, ex baſi quæ eſt ſuperficies plana rectis lineis terminata, cuius duæ extenſiones totæ decreſcunt. Dicitur recta, ſi ſingulæ rectę, ab eius vertice ad baſis terminum ductæ, atque cum pyramidis altitudine facientes angulos æquales, etiã angulos inter ſe æquales faciant cũ ſuperficie, quæ eſt baſis pyramidis. Si hanc proprietatem nõ habeat, non erit recta pyramis, ſed obliqua. Hic aduertendum, quod vox pyramis abſolutè poſita, ſine vlteriori reſtrictione, tantum ſignificet pyramidem habentem pro baſi, vel triangulum, vel aliam ſuperficiem plurium quam trium laterum, quæ regularis ſit. Suppoſito, quod baſis A ſit triangulum: ſcriptio A *in* B ductu 3. ſignificat pyramidem, quæ aliter etiam dici poteſt pyramis triangularis, vt melius diſtin-

guatur à reliquis, quæ etiam absolutè dicuntur pyramides; & etiam dici possunt pyramides quadratæ, pentagonæ, hexagonæ, &c. Appellationem desumendo à basi ex qua producuntur. Si verò basis proprium nullum nomen habeat, neque pyramis ex tali basi producta habebit proprium nomen.

8. Conus, iuxtà logisticam, dicitur corpus, quod ductu tertio producitur ex basi, quę sit superficies plana, saltem ex parte terminata curua linea, sic vt duæ baseos extensiones totæ decrescant. Dicitur rectus, si habeat proprietatem requisitam pro pyramide, vt dicatur recta, aliter dicitur conus obliquus. Per vocem conus absolutè, & sine alia restrictione positam, non intelligimus nisi conum, qui ductu tertio producitur ex basi, quę sit circulus: reliqui coni, qui non aliter, quam cum addita restrictione, coni dicuntur, hanc restrictionem, adeòque appellationem accipiunt à basi, ex qua producuntur: si basis nullum proprium nomen habeat, neque conus ex ipsa productus habebit nomen proprium. Supposito, quod basis A sit circulus, scriptio A *in* B ductu 3. conum significat.

9. Sphæra, est corpus, quod ductu quinto producitur ex basi, quæ sit dimidius circulus, ducta in altitudinem, quæ sit integra circuli circumferentia. Hinc supposito, quod A significet dimidium circulum, & B significet integram talis circuli circumferentiam: scriptio A *in* B ductu 5, significat sphæram. Sphæræ superficies producitur ductu quinto, ex basi, quæ sit dimidia circuli circumferentia, ducta in altitudinem, quæ sit integra eiusdem circuli circumferentia. Hinc supposito, quod A significet dimidiam circuli circumferentiam, & B significet integram eiusdem circuli circumferentiam: scriptio A *in* B ductu 5, significat totam sphæræ superficiem. Sphæræ sectorem appellamus corpus, quod ductu quinto producitur ex basi, quæ sit sector circuli. Sphæræ Zonam dicimus, superficiei sphęræ partem, quæ ductu quinto producitur, ex basi, quæ sit arcus circuli minor quadrante circuli.

CAPVT II.

De operationibus Logisticis.

Siue de Additione, Subtractione, Multiplicatione, & Diuisione.

QVando operationem Logisticam nominamus, intelligimus aliquam ex his quatuor, quarum vna dicitur additio, altera substractio, tertia multiplicatio siue ductus, quarta diuisio.

Additio quantitatis A, ad quantitatem B, est inuentio quantitatis C, quæ est aggregatum, siue summa quantitatum A & B.

Subtractio quantitatis A, ex quantitate C, est inuentio quantitatis B, quæ talis est, vt addita quantitati A producat quantitatem C.

Multiplicatio, siue ductus quantitatis A in quantitatem B, est operatio æquiualens ductui primo Geometrico superius exposito in parte 4. cap. 1. qua de re, si plura placent, vide indicem ad vocem Multiplicatio.

Diuisio quantitatis C, per quantitatem A, est inuentio quantitatis B, quæ talis sit, vt ducta in quantitatem A producat quantitatem C.

Ex his definitionibus constat, pro qualibet operatione Logistica requiri duas diuersas quantitates, circa quas operatio instituenda est, quæ propterea appellantur quantitates datæ pro operatione Logistica. Ex his datis quantitatibus vna appellatur antecedens, siue genitor superior: altera consequens, siue genitor inferior. Quænam vocetur antecedens, aut consequens, nihil vel parum refert pro addi-

additione,& multiplicatione. Pro ſubtractione,antecedens eſt illa,ex qua fit ſubtractio, conſequens dicitur illa, quæ ſubtrahitur. Pro diuiſione, antecedens dicitur illa, quæ diuiditur, conſequens eſt illa per quam antecedens diuiditur, & aliter diuiſor appellatur.

P A R S I.

Operationes Logiſticæ vniuerſales.

OPerationes Logiſticas vniuerſales abſoluere, nihil aliud eſt, quam mediantibus datis quantitatibus, exhibere productum, quod ex ipſis oritur, ex propoſita quauis operatione Logiſtica. Dicuntur verò operationes vniuerſales, atque ex ipſis productæ quantitates appellantur producta vniuerſalia: in quantum vniuerſaliter verum eſt, quod abſolui poſſint circa datas, ſiue propoſitas quantitates, qualeſcunque tandem fuerint illæ datæ quantitates; etiamſi genere aut alio quocunque modo inter ſe conueniant,aut ab inuicem diſcrepent. Licet verò neceſſarium non ſit datas quantitates exhibere per dignitates, hoc eſt per alfabeti litteras ex vi præcedentis hypotheſis repræſentantes datas quantitates; id tamen vſitatum eſt, & eamdem commoditatem affert, quam afferunt notæ Arithmeticæ in compendiatis ſcriptionibus numerorum vulgarium, vt dictum eſt in parte 2. capitis primi. Hinc in exponendis operationibus vniuerſalibus, ſupponimus datas quantitates exhibitas per dignitates: quo ſuppoſito operationem vniuerſalem abſoluere, ſiue productum vniuerſale exhibere, quod producitur ex propoſita operatione Logiſtica, nihil aliud eſt, quam exhibere compendiatam ſcriptionem Logiſticam repræſentantem tale productum, ex vi modi, quo inter ſe connexas exhibet propoſitas, ſiue datas dignitates. Diuerſi autem modi inter ſe connectendi dignitates dependent potiſſimum ab vſu ſignorum † & —, aut particularum *in* & *per*, de quibus agitur in parte 2. capitis primi.

Additio vniuerſalis.

HÆc operatio tota conſiſtit in ſucceſſiua ſcriptione propoſitarum quantitatum cum ſuis ſignis: ità tamen,vt particula *&* interpoſita ſit,vbi ſenſus hoc requirit,iuxtà dicta in parte 2.capitis 1 de vſu,aut ſignificatione particulæ *&*. Exempli gratia ex datis pro additione numeris antecedens ſit 3 † 4, conſequens ſit 10 — 7: vniuerſale productum ex additione erit 3 † 4 † 10 — 7. Rurſus antecedens ſit A † 3 — B, conſequens ſit C — D: productum vniuerſale erit A † 3 — B † C — D. Rurſus antecedens ſit A † B, conſeqnens ſit A *in* B † 3, productum vniuerſale erit A † B & † A *in* B † 3. Rurſus antecedens ſit A *in* B, conſequens ſit C *per* D productum vniuerſale erit A *in* B & † C *per* D.

Subtractio vniuerſalis.

HÆc operatio (quam ſubtractionem appellamus, quia ſubtractioni æquiualet, tametſi vera additio ſit)tota conſiſtit in ſucceſſiua ſcriptione, ità tamen,vt iuxtà ſequentem notam,in dato conſequente termino, ſiue numero,ſingula ſigna mutentur in oppoſita, atque particula *&* interponatur, vbi ſenſus requirit, & etiam præſcriptum eſt pro additione. Exempli gratia ex datis pro ſubtractione

unnumeris, siue terminis, antecedens sit 3 † 4, consequens sit 10 — 7: productum vniuersale erit 3 † 4 — 10 † 7. Rursus antecedens sit A † 3 — B, consequens sit C — D, productum vniuersale erit A † 3 — B — C † D. Rursus, antecedens sit A † B, consequens sit A *in* B † 3, productnm vniuersale erit A † B & — A *in* B † 3. Rursus antecedens sit A *in* B, consequens sit C *per* D, productum vniuersale erit A *in* B & — C *per* D, vel A *in* B & † C *per* — D.

Nota quando hic præscribitur, vt signa mutentur in opposita: id de numeris, & dignitatibus particula *in*, vel *per* connexis ità intelligendum est, vt signa in opposita tantum mutentur, vel in solis dignitatibus particulam *in*, aut *per* præcedentibus, vel in solis dignitatibus particulam *in*, aut *per* subsequentibus.

Multiplicatio vniuersalis.

HÆc operatio tota consistit in successiua scriptione propositarum quantitatum cum suis signis, interposita tamen particula *in* inter antecedentem, & consequentem datum terminum. Exempli gratia ex datis pro multiplicatione numeris, siue terminis, antecedens sit 3 † 4, consequens sit 10 — 7: productum vniuersale erit 3 † 4 *in* 10 — 7. Rursus antecedens sit A † 3 — B, consequens sit C — D: productum vniuersale erit A † 3 — B *in* C — D. Rursus antecedens sit A † B, consequens sit A *in* B † 3, productum vniuersale erit A † B *in* A *in* B † 3. Rursus antecedens sit A *in* B consequens sit C *per* D: productum vniuersale erit A *in* B *in* C *per* D.

Diuisio vniuersalis.

HÆc operatio tota consistit in scriptione propositarum quantitatum cum suis signis, interponendo particulam *per*, vel illi æquiualentem lineolam: sic vt in hac scriptione, vel lateraliter terminus antecedens præcedat, consequens sequatur particulam *per*: vel certè antecedens suprà, & consequens scribatur infrà lineolam, quæ particulæ *per* æquiualet. Ex his duobus modis scribendi productum ex diuisione, subinde, prior, subinde posterior affert maiorem commoditatem.

Exempli gratia. Ex datis pro diuisione numeris, antecedens sit 4 † 3, consequens sit 10 — 7: productum vniuersale erit 4 † 3 *per* 10 — 7, & etiam $\frac{4 \dagger 3}{10 - 7}$. Rursus antecedens sit A † 3 — B, consequens sit C — D: productum ex diuisione erit A † 3 — B *per* C — D, et etiam $\frac{A \dagger 3 - B}{C - D}$. Rursus antecedens sit A † B, consequens sit A *in* B † 3: productum vniuersale erit A † B *per* A *in* B † 3, et etiam $\frac{A \dagger B}{A \text{ in } B \dagger 3}$. Rursus antecedens sit A *in* B, consequens sit C *per* D: productum vniuersale erit A *in* B *per* C *per* D, vel etiam $\frac{A \text{ in } B}{C \text{ per } D}$, vel etiam A *in* B *per* $\frac{C}{D}$.

PARS II.

Operationes Logisticæ vulgares.

NVmerus vulgaris dicitur discreta quantitas, cuius magnitudo desumitur à sola pluralitate vnitatum, quæ numerantur. Vt dicitur in parte 1. cap. 1. Operationes verò Logisticæ institutæ circa huiusmodi vulgares numeros, dicuntur operationes vulgares. Ad-

Additio vulgaris.

Simplicissima illa additio, quæ requiritur, vt inueniatur productum ex vna aliqua nota Arithmetica, addita alteri tali notæ: vix ab vllo ignoratur; ideoque hic cognitum supponimus, quid producant duæ simplices notæ Arithmeticæ simul additæ. Exempli gratia, quod 3 plus 4, producat 7. Quod 8 plus 5, producat 13. Quod 9 plus 1, producat 10. Quod 3 plus 0, producat 3.

Hac simplicissima additione supposita (in cuius iterato vsu consistit quælibet vulgarium numerorum additio) pro reliquis additionibus vulgaribus, hæc præscripta obseruentur.

Primò ex datis pro additione numeris A & B, vnus alteri ità subscribatur, vt notæ habentes eumdem localem valorem exactè respondeant.

Secundò, incipiendo à fine, siue notis vnitates simplices significantibus, hæ notæ vtriusque numeri A & B in vnam summam colligantur, & ex his notis productæ summæ vltima ipsis subscribatur in producto C, reseruando penultimam notam, si hæc summa ex duabus notis constet.

Tertiò, eodem modo, vtriusque numeri A & B notæ significantes decades, quæ à fine secundo loco consistunt, in vnam summam colligantur, & huic summæ addatur nota prius reseruata, atque huius aggregati vltima nota scribatur in producto C, vt respondeat notis, ex quibus summa collecta est. Similiterque successiuè operando circa reliquas notas æqualiter distantes à fine in numeris datis A & B, inuenitur totus numerus C.

430723.	A
84502.	B
515225.	C

Exempli gratia. Ex datis pro additione numeris, antecedens sit 430723, qui vocetur A, consequens sit 84502, qui vocetur B. Iuxtà primum præscriptum constituti numeri A & B hic exhibentur. Deinde, quia 3 plus 2 dant 5: in numero C, primo loco à fine, scribo 5, & nihil seruo. Rursus, quia 2 plus 0 dant 2, his numeris producētibus subscribo in numero C, notā 2, & nihil seruo. Rursus, quia 7 plus 5 dant 12, nūmeris producētibus subscribo 2, & seruo vnitatē. Rursus, quia 0 plus 4 dant 4, cui addendo seruatam vnitatem, fit 5, numeris producentibus subscribo 5, & nihil seruo. Rursus, quia 3 plus 8 dant 11, numeris producentibus subscribo 1, & seruo vnitatem. Rursus, quia 4 simul cum seruata vnitate dant 5, subscribo illis 5; eritque numerus C ille qui producitur ex numerorum A & B additione.

Subtractio vulgaris,

Simplicissima illa subtractio, quæ requiritur, vt inueniatur productum, siue residuum, quod relinquitur, quando vna aliqua nota Arithmetica ex altera, vel ex denario subtrahitur: vt maximè facilis, & omnibus cognita, hic supponitur. Ex hac subtractione cognoscitur, quod exempli gratia 5 minus 2 producat 3. Quod 7 minus 1 producat 6. Quod 10 minus 8 producat 2.

Hac simplicissima subtractione supposita, requiritur tantum iteratus eius vsus, vt à dato quouis maiori numero vulgari subtrahatur alius quilibet vulgaris, ac minor numerus, obseruando præscripta subsequentia.

Primò, dati pro subtractione vulgares numeri A & B ità scribantur, vt notis Arithmeticis antecedentis, ac maioris numeri A, interne respondeant singulæ notæ Arithmeticæ consequentis numeri B, habentes eumdem valorem localem. Secundò, incipiendo à notis scriptis primo loco à fine in numeris A & B, ex numeri A ri A nota subtrahatur respondens nota numeri B, & residuum ipsis subscribatur in numero C. Similiter operando circa reliquas quaslibet duas notas æqualiter à fine distantes in numeris A & B, paulatim in vnam summam colliges omnes notas constituentes numerum C: qui producitur per subtractionem numeri B ex numero A. Quoties subtractio illa simplex fieri non potest, ex eo capite, quod numeri B nota subtrahenda maior sit nota numeri A, ex qua deberet subtrahi; hoc casu nota numeri B subtrahatur ex numero 10, & residuo nato ex hac subtractione, addatur prior nota, ex qua non poterat fieri subtractio, atque hoc productum scribatur in numero C, seruando vnitatem, quæ addenda est proximè versus læuam subsequenti notæ numeri B, antequam subtrahatur.

Exempli gratia, ex datis pro subtractione numeris, antecedens sit 503274, qui vocetur A, consequens sit 32503, qui vocetur B. Iuxtà primum præscriptum, constituti numeri A & B hic exhibentur, atque illis, interposita linea, subscriptus est numerus C, qui ex subtractione producitur, atque hoc modo inuenitur. Iuxtà secundum præscriptum, quia 4 minus 3 dat 1, numeris producentibus subscribitur, 1. Rursus, quia 7 minus 0 producit 7, numeris producentibus subscribitur 7. Rursus, quia 2 minus 5 est aliquid impossibile, dicitur 10 minus 5, quod producit 5, cui addendo 2, fit 7, & hoc productum producentibus subscribitur, seruando vnitatem. Rursus, quia vnitas seruata fuit, non dicitur 3 minus 2, sed 3 minus 3, quod producit 0, & hoc productum producentibus subscribitur. Rursus, quia 0 minus 3 est aliquid impossibile, dicitur 10 minus 3, quod producit 7; cui producto addendo 0, fit, siue manet, 7, & hoc productum producentibus subscribitur, & seruatur vnitas. Rursus, quia seruata est vnitas, sed non inuenitur nota cui addi possit, dicitur 5 minus 1, quod producit 4, & hæc nota producentibus subscribitur.

503274	A
32503	B
470771	C

Multiplicatio vulgaris.

Maximè simplex multiplicatio, requisita vt inueniatur productum, quod oritur ex vna aliqua nota Arithmetica ducta in alteram, nullam difficultatem habet, & ex dictis in parte 1. capitis 1. facile colligitur, ac passim cognoscitur, ideòque supponitur. Ex hac multiplicatione, siue ex hoc ductu, scitur, quod, exempli gratia, 5 ductum *in* 2, hoc est 5 *in* 2, producat 10. Quod 3 *in* 7, producat 21. Quod 4 *in* 9 producat 36. Supposito hoc ductu maximè simplici, requiritur tantum iteratus eius vsus, & prius exposita vulgaris additio, vt inueniatur productum ex quouis dato vulgari numero A, ducto in alium vulgarem numerum B. Ad hoc vtilia sunt præscripta subsequentia.

Primò dati duo numeri A & B, ità scribantur, vt vnius notis Arithmeticis inferne respondeant alterius notæ Arithmeticæ habentes eumdem valorem localem.

Secundò assumendo numeri B notam, quę à fine prima est, atque assumptam notam ducendo in vltimam notam numeri A, illi subscribatur huius producti nota vltima, seruando reliquam, addendam producto proximè inueniendo. Similiter assumptam notam successiuè ducendo in singulas notas numeri A, singulorum productorum postrema nota, apponetur notæ prius scriptæ, reseruando reliquam, quando tale productum plures notas habet; atque reseruatam notam addendo subsequenti producto: sic enim habebitur numerus productus, ex vltima nota numeri B, ducta in totum numerum A.

Tertiò eodem prorsus modo successiuè inueniantur producta ex singulis notis numeri B, ductis in totum numerum A: & hæc producta decussatim, ità scribantur, vt postrema cuiusuis producti nota, inferne respondeat notæ numeri B, ex qua pro-

producitur. Hæc producta in vnam summam collecta per additionem, constituent productum quod oritur ex toto numero B, ducto in totum numerum A.

Exempli gratia, ex duobus numeris pro multiplicatione datis, vnus sit, A, alter B; hi numeri iuxtà primum præscriptum constituti hic repræsentantur. Deinde operando iuxtà secundum præscriptum; quia 3 *in* 2 dat 6, in numero C, primo loco à fine, scribo 6. Rursus, quia 3 *in* 4 dat 12, in numero C, secundo loco à fine, scribo 2, & seruo notam 1. Rursus, quia 3 *in* 0 dat 0, & illi addendo seruatam notam 1 habetur 1, hanc notam scribo in numero C, tertio loco à fine. Rursus, quia 3 *in* 9 dat 27, in numero C, quarto loco à fine, scribo 7, seruando notam 2. Rursus quia 3 *in* 3 dat 9, & illi addendo seruatam notam 2, habetur 11, quinto loco in numero C scribo 1, & seruarem notam 1, sed quia in numero A nullæ aliæ inueniuntur notæ, sexto loco in numero C scribo notam 1: eritque scriptus numerus C, ille qui producitur ex vltima nota numeri B, ducta in totum numerum A. Simili planè modo inueniendo prius numerum D, productum ex nota quæ in numero B est secunda à fine, ducta in totum numerum A: deinde numerum E productum ex nota, quæ in numero B est tertia à fine, ducta in totum numerum A, atque hæc producta D & E prius inuento producto C subscribendo, vt vltima singulorum nota inferne respondeat notæ numeri B, ex qua oriuntur, habebuntur numeri C, D, E decussatim scripti, vt hic repræsentantur. Denique numeros C, D, E, addendo, habebitur numerus F constituens productum, quod oritur ex toto numero B ducto in totum numerum A.

39042.	A
753.	B
117126	C
195210	D
273294	E
29398626.	F

Diuisio vulgaris.

Maximè simplex diuisio, requisita vt sciatur quoties vna aliqua simplex nota Arithmetica contineatur in proposito numero, quando id exprimi potest vnica simplici nota Arithmetica: hæc inquam maximè simplex diuisio satis facile innotescit ex dictis in parte 1. cap. 1. neque ignorari potest ab eo, qui nouit maximè simplicem multiplicationem paulò antè suppositam, pro reliquorum numerorum multiplicatione.

Supposita hac diuisione maximè simplici, vltra prius expositas operationes requiritur iteratus eius vsus, vt quiuis maior numerus vulgaris diuidatur per alium vulgarem, atque minorem numerum. Pro quo vtilia sunt subsequentia præcepta.

Ex dato pro diuisione vulgari numero A, qui antecedens est, adeòque diuidendus proponitur, incipiendo ab eius initio siue sinistra parte, accipiantur tot notę, quot requiruntur ad constituendum numerum æqualem, vel proximè maiorem dato consequente numero B; hic enim numerus constituet primum diuisionis membrum. Inuento hoc primo diuisionis membro, reliqua operatio, & subsequentium membrorum inuentio eadem praxi absoluitur, quæ toties iteranda est, quot in quotiente, siue numero ex diuisione producto, contineri debent notæ Arithmeticæ. Pro commemorata praxi vtilia sunt sequentia præscripta. Primò nota Arithmetica indicans quoties datus consequens numerus B contineatur in proposito membro, est nota, quæ ex membro collecta in quotiente ponenda est. Secundò nota Arithmetica ex membro proposito collecta, ducenda est in totum consequens B, & productus ex hoc ductu numerus, proposito membro subscribendus est, vt requiritur pro subtractione. Tertiò ex membro proposito subtrahendo numerum illi subscriptum inueniendum residuum. Quartò inuento residuo versus dexteram apponendo notam Arithmeticam, quæ in dato numero antecedente A, proximè sequitur notas adhibitas pro prioribus membris, habebitur membrum diuisionis nouum. Denique absoluta diuisione (hoc est quando nouum membrum diuisionis haberi non potest, quia residuo apponenda non superest vlla nota Arithmetica numeri A) post inuentum quotiens scribatur vltimum illud residuum, & interposita lineola illi subscribatur totus consequens numerus B.

Notandum. Præcipuam diuisionis vulgaris molestiam in eo consistere, quod semper satis facile non sit cognoscere quoties consequens diuisionis contineatur in membro proposito; tametsi semper verum sit hoc indicari posse vnica simplici nota Arithmetica. Pro hac difficultate, vsitatum in praxi remedium in eo consistit, vt tam in consequente numero B, quam in membro proposito, negligendo æque multas posteriores notas, inquiratur quoties reliquæ notæ Arithmeticæ consequentis numeri B, contineantur in reliquis notis Arithmeticis membri propositi; Licet enim nota Arithmetica hoc rectè indicans, non semper rectè indicet quoties totus numerus consequens B contineatur in toto membro proposito: tamen probabiliter illud indicat: & vtrum à veritate aberret certò cognoscitur ex subtractione, quæ præscribitur, & sequitur ductum inuentæ notæ in diuisorem. Si enim hæc subtractio fieri non potest, certum est prædicto modo inuentam notam Arithmeticam nimis magnam esse, & pro illa minorem substitui debere: Si verò ex hac subtractione productum residuum non est minus toto consequente numero B, certum est prædicto modo inuentam notam esse nimis paruam, & pro illa maiorem substitui debere; Denique in hunc modum cognitum errorem corrigere citra vllam confusionem, facile est in ea forma instituendi diuisionem, qua vtimur in sequenti exemplo.

Exempli gratia. Ex datis pro diuisione numeris, antecedens, siue diuidendus, sit A: consequens, siue diuisor, sit B. Hos numeros scribere, vt hic scripti repræsentantur, commodum videtur. Primum membrum erit 2939. Quoties in hoc membro contineatur diuisor B, indicat nota 3., quæ in quotiente C primo loco scribenda est: hæc nota ducta in diuisorem B, producit numerum D, quem subtrahendo ex membro proposito, manet residuum 680: cui adscribendo notam, 8, quæ in dato numero A subsequitur notas hactenus adhibitas, habetur numerus E, siue membrum ex quo subsequens quotienti s nota colligenda est. Quoties in hoc nouo

2939.8626 A	39042. C	
2259. D	753. B	
6808. E		
6777. F		
3162. G		
3012. H		
1506. K		
1506. L		
0		

membro E contineatur diuisor B, indicat nota 9, quæ secundo loco scribitur in quotiente C. Hæc verò nota 9 ducta in diuisorem B, producit numerum F: quem subtrahendo ex membro E, relinquitur pro residuo 31: cui apponendo, notam 6, quæ in dato numero A proximè subsequitur notas prius adhibitas, habetur 316, nouum membrum, ex quo tertia quotientis nota colligenda est. Quoties diuisor B contineatur in hoc nouo membro, indicat 0: quæ nota Arithmetica tertio loco scribenda est in quotiente C. Quia verò 0 ducendo in diuisorem B, producitur 0, & hoc productum, siue nihil, auferendo ex membro proposito, manet pro residuo totum membrum propositum 316: huic residuo adscribendo notam 2, quæ in numero A proximè sequitur hactenus adhibitas notas, habetur nouum membrum G, ex quo quarta quotientis nota colligenda est. Quoties in hoc nouo membro contineatur diuisor B, indicat nota 4, quæ proinde in quotiente C adscribenda est præcedentibus. Hæc verò nota ducta in diuisorem B, producit numerum H, qui sublatus ex numero, siue membro G, relinquit

linquit pro residuo 150: huic successiuè adscribendo notam 6, quæ in numero A proximè sequitur hactenus adhibitas notas, habetur nouum membrum K, ex quo subsequens quotientis nota est colligenda. Quoties in hoc membro K contineatur diuisor B, indicat nota 2, quæ proinde præcedentibus adscribenda est in quotiente C. Hæc verò nota ducta in diuisorem B, producit numerum L: hunc numerum subtrahendo ex numero, siue membro K, residuum est 0: neque inuenitur in numero A nota huic residuo apponenda, quæ hactenus adhibita non sit: adeòque est absoluta diuisio.

PARS III.

Operationes Logisticæ circa numeros vulgares fractos.

NVmerus vulgaris fractus, siue simpliciter, fractio vulgaris appellatur, vulgaris numerus per alium diuisus. Fractionis vulgaris numerator, siue antecedens dicitur, ille numerus, qui per alium diuisus intelligitur. Fractionis vulgaris denominator, siue consequens appellatur, ille numerus, per quem antecedens diuisus intelligitur.

Additio fractionum vulgarium.

VVlgarium fractionum additio omnis absoluitur, obseruando hæc præcepta. Primò si datæ fractiones habeant eumdem, siue communem denominatorem, addendo simul datarum fractionum numeratores, siue antecedentes terminos, habebitur producti numerator, siue antecedens terminus, qui cum denominatore datis fractionibus communi, constituet productum quod oritur ex additione datarum fractionum. Si datæ vulgares fractiones non habeant communem denominatorem, prius per praxim 3. huius partis inueniantur datis fractionibus æquiualentes aliæ, quæ communem denominatorem habeant: ex his fractionibus inuentum productum, vt prius diximus, erit productum, quod oritur ex propositarum fractionum additione.

Exempli gratia, ex datis pro additione fractionibus, fractio antecedens sit $\frac{4}{7}$, fractio consequens sit $\frac{5}{7}$, productum erit $\frac{9}{7}$. Rursus fractio antecedens sit $\frac{2}{6}$, fractio consequens sit $\frac{3}{6}$, productum erit $\frac{5}{6}$. Rursus fractio antecedens sit $\frac{2}{3}$, fractio consequens sit $\frac{4}{5}$; antecedenti æquiualens fractio erit $\frac{10}{15}$, consequenti æquiualens fractio erit $\frac{12}{15}$, productum verò erit $\frac{22}{15}$.

Subtractio fractionum vulgarium.

VVlgarium fractionum subtractio omnis absoluitur, obseruando hæc præcepta. Primò si datæ fractiones habeant eumdem, siue communem denominatorem, subtrahendo numeratorem consequentis fractionis, ex numeratore antecedentis fractionis, producetur numerator, qui cum communi denominatore constituet productum, quod oritur ex propositarum fractionum subtractione. Secundò, si datæ fractiones non habeant eumdem denominatorem, prius, per praxim 3. huius partis, inueniantur aliæ fractiones propositis æquiualentes, sed habentes eumdem denominatorem: ex his fractionibus inuentum productum, erit illud, quod producitur ex propositis fractionibus.

Exempli gratia, ex fractionibus datis pro subtractione, antecedens fractio sit $\frac{7}{10}$, consequens fractio sit $\frac{4}{10}$, productum erit $\frac{3}{10}$. Rursus antecedens fractio sit $\frac{15}{18}$, consequens fractio sit $\frac{7}{18}$, productum erit $\frac{8}{18}$. Rursus antecedens fractio sit $\frac{2}{3}$, consequens fractio sit $\frac{4}{7}$; antecedenti æquiualens fractio erit $\frac{14}{21}$, consequenti æquiualens fractio erit $\frac{12}{21}$, productum erit $\frac{2}{21}$.

Multiplicatio fractionum vulgarium.

Vlgarium fractionum multiplicatio absoluitur, obseruando hæc præcepta. Vnius datæ fractionis numerator ducatur in numeratorem alterius datę fractionis: sic enim habebitur nouus numerator. Similiter vnius datæ fractionis denominator ductus in denominatorem alterius datæ fractionis, dabit nouum denominatorem. Denique nouus numerator cum nouo denominatore constituet fractionem productam ex vna datarum fractionum ducta in alteram.

Exempli gratia, ex datis pro multiplicatione fractionibus vna sit $\frac{3}{4}$, altera sit $\frac{2}{5}$, productum ex multiplicatione erit $\frac{6}{20}$. Rursus vna fractio sit $\frac{4}{7}$, altera sit $\frac{6}{7}$, productum ex multiplicatione erit $\frac{24}{49}$.

Diuisio fractionum vulgarium.

Vlgarium fractionum diuisio absoluitur, obseruando hæc præcepta. Ex datis pro diuisione fractionibus, illa quæ consequens est, siue per quam altera diuidi debet, inuertatur, sic vt eius numerator fiat denominator, & eius denominator fiat numerator. Deinde inueniatur productum, quod ex ipsarum multiplicatione producitur, & habebitur productum ex proposita diuisione.

Exempli gratia, ex datis pro diuisione fractionibus, antecedens sit $\frac{3}{4}$, consequens sit $\frac{2}{5}$; consequens fractio inuersa erit $\frac{5}{2}$, quæ ducta in antecedentem datam fractionem dat $\frac{15}{8}$; hæc fractio erit productum ex proposita diuisione. Rursus data antecedens fractio sit $\frac{4}{8}$, consequens fractio sit $\frac{2}{7}$; consequens fractio inuersa erit $\frac{7}{2}$; hæc ducta in antecedentem fractionem datam, producit $\frac{28}{16}$, quæ fractio constituit productum ex proposita diuisione.

Praxes aliquæ vtiles pro commodo vsu vulgarium fractionum.

Praxis I.

Inuenire maximam communem mensuram, quam habent propositi duo numeri vulgares, quorum maior vocetur A, minor vocetur B.

Maiorem numerum A diuidendo per minorem B, inueniatur huius diuisionis residuum C. Rursus præcedentis diuisionis consequentem numerum B, diuidenuidendo per inuentum residuum C, inueniatur residuum D Rursus præcedentis diuisionis consequentem numerum C, diuidendo per inuentum residuum D, inueniatur residuum E: atque hoc ordine continuentur diuisiones donec pro residuo maneat o, siue nihil: vltimæ huius diuisionis consequens numerus erit maxima mensura communis propositorum duorum vulgarium numerorum A & B: hoc est, erit maximus inter omnes numeros possibiles habentes hanc proprietatem, vt sint pars aliquota, tam numeri A, quam numeri B: siue quod in idem redit, vt nullum remaneat residuum, siue numerus A, siue numerus B diuidatur per talem numerum. Exempli gratia, numeri quorum maxima communis mensura inueniri debet, sint 20, & 12. Primò 20 diuidendo per 12, habetur residuum 8. Rursus 12 diuidendo per 8, habetur residuum 4. Rursus 8 diuidendo per 4, nullum relinquitur residuum: adeòque 4 est maxima communis mensura numerorum 20 & 12. Similiter si propositi sint numeri 32, & 16, diuidendo 32 per 16, nullum remanet residuum: quare 16 est maxima communis mensura numerorum 32 & 16.

Praxis II.

Inuenire fractionem vulgarem constantem minimis terminis, atque æquiualentem propositę alteri vulgari fractioni.

PRimò. Per primam praxim inueniatur maxima communis mensura conueniens, tam numeratori, quam denominatori propositę fractionis, cui inuenienda fractio æquiualere debet. Deinde propositæ huius fractionis numeratorem diuidendo per maximam communem mensuram prius inuentam, habebitur nouus numerator: & similiter per eamdem maximam communem mensuram diuidendo denominatorem propositæ fractionis, habebitur nouus denominator. Denique nouus numerator, cum nouo denominatore constituet fractionem quæsitam.

Exempli gratia, proposita vulgaris fractio sit $\frac{12}{20}$, quoniam numerorum 12, et 20 maxima communis mensura est 4, diuidendo 12 per 4, producetur numerus 3, qui erit nouus numerator. Similiter diuidendo 20 per 4, producetur numerus 5, qui erit nouus denominator. Denique fractio $\frac{3}{5}$ erit illa quæ quęritur: nimirum constans minimis terminis, atque æquiualens propositæ fractioni $\frac{12}{20}$.

Praxis III.

Inuenire duas vulgares fractiones, habentes communem denominatorem, atque æquiualentes propositis duabus fractionibus vulgaribus non habentibus communem denominatorem.

PRimò, propositæ primæ fractionis numerator, ductus in denominatorem secundæ fractionis propositæ, dabit primum nouum numeratorem; & similiter propositæ secundæ fractionis numerator ductus in denominatorem primæ fractionis

nis propositæ, dabit secundum numeratorem nouum. Deinde primæ fractionis denominator, ductus in denominatorem secundæ fractionis, dabit nouum denominatorem communem. Denique primus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet fractionem æquiualentem propositæ primæ fractioni; & similiter secundus numerator nouus, cum inuento communi denominatore, constituet nouam fractionem æquiualentem propositæ secundæ fractioni.

Exempli gratia, ex propositis duobus fractionibus vulgaribus prima sit $\frac{2}{3}$, secunda sit $\frac{4}{5}$. Quoniam ducendo 2 in 5 producitur 10, primus nouus numerator erit 10. Prætera, quia ducendo 4 in 3 producitur 12, secundus nouus numerator erit 12. Deinde, quia ducendo 3 in 5 producitur 15, communis denominator erit 15. Denique propositę primę fractioni $\frac{2}{3}$, æquiualens noua fractio erit $\frac{10}{15}$; atque secundæ propositæ fractioni $\frac{4}{5}$, æquiualens noua fractio erit $\frac{12}{15}$. Habebuntque nouæ illæ fractiones communem denominatorem, qui in vtraque noua fractione est numerus 15.

P A R S IV.

Operationes Logisticæ circa numeros signis † vel — affectos.

NOta. Pro his operationibus necessariæ sunt subsequentes leges signorum.

Lex prima, productum ex additione afficietur signo quo maior ex datis duobus numeris afficitur.

Lex secunda, productum, siue ex multiplicatione, siue ex diuisione afficiatur signo †, si dati duo numeri conueniant quoad signum; si non conueniant inter se, quo ad signum, sed vnus signo †, alter signo — afficiatur, productum afficiatur signo —.

Additio numerorum affectorum signis † vel —.

ADditio de qua hic agitur, est contractio additionis vniuersalis, siue inuentio vnius numeri, qui æquiualeat duobus connexis signo † vel —. Supponit tamen, quod pro additione dati numeri non differant nisi quoad numeratorem. Quo supposito; nouum numeratorem dabit aggregatum numeratorum, qui in datis numeris inueniuntur, quando hi numeri conueniunt quoad signa † vel —: aut certè hunc nouum numeratorem dabit, differentia numeratorum, qui inueniuntur in datis numeris, quando hi numeri non conueniunt quo ad signa † vel —; huic nouo numeratori apponendo reliqua etiam communia datis numeris, habetur numerus quæsitus, qui affici debet signo † vel —, iuxta leges signorum; sic enim æquiualebit datis duobus numeris, signo † vel — connexis inter se.

Exempli gratia, supposito quod dati numeri sint † 10 † 12, productum erit † 22. Si dati numeri sint † 10 — 12, productum erit — 2. Si dati numeri sint — 10 — 12, productum erit — 22. Si dati numeri sint † 3 A † 7 A, productum erit † 10 A. Si dati numeri sint — 3 A — 7 A, productum erit — 10 A. Si dati numeri sint † 3 A — 7 A, productum erit — 4 A. Si dati numeri sint — 3 A † 7 A, productum erit † 4 A.

Subtractio numerorum affectorum signis † vel —.

VIdetur inutile hoc loco considerare subtractionem. Causa est, quia consideratio numerorum affectorum signis † vel —, hoc est numerorum positiuorum

rum

rum, & negatiuorum, logisticę nostræ subministrat additionem maximè vtilem, atque in omni casu possibilem; sed tamen æquiualentem subtractioni, quæ impossibilis est in multis casibus: exempli gratia quando numerus subtrahendus maior est numero, ex quo fieri debet subtractio. De his numeris, siue positiuis, & negatiuis quantitatibus, consuli potest index ad vocem quantitas positiua, vel negatiua. Hoc loco, vbi agimus de modo contrahendi productum ex additione, quod constat ex diuersis numeris signo † vel — affectis, commodè, & non male complectimur omnes istas contractiones titulo additionis, in quantum numeri, qui contrahuntur sunt producti ex vera, & propria additione, quique habent omnes proprietates resultantes ex additione. Si alicui hoc non placeret, sed vellet subtractionem appellare, eam minus simplicium numerorum contractionem, in qua contrahuntur numeri constantes ex positiuis, & negatiuis numeris: in quantum hæc contractio, siue inuentio valoris talium numerorum minus simplicium, habetur per subtractionem, siue differentiæ inuentionem; hunc aliter damnare non auderem, nisi quod fortassis pro commodiori, & vtiliori loquendi modo, quem adhibemus, substitueret modum loquendi minus vtilem. Quandoquidem enim in consideratione numerorum positiuorum, & negatiuorum, tantum expendantur producta ex additione, quæ dicenda sunt producta ex additione, siue hæc additio æquiualeat, siue non æquiualeat subtractioni: ità parum vtile videbatur nominare subtractionem, illud quod fieri debet vt inueniatur valor numeri ex vera additione producti: tametsi ad hunc finem adhibeatur subtractio. Non enim ideò ea vulgarium numerorum diuisio, quam prius tradidimus, & additio, & subtractio appellanda est, quia pro illa adhibetur, atque præscribitur, tam additio, quam subtractio, adeòque diuisionis productum inueniatur mediante additione, & subtractione.

Multiplicatio numerorum affectorum signis † vel —.

MVltiplicatio de qua hic agitur, est contractio producti nati ex vniuersali multiplicatione: siue inuentio vnius simplicis numeri, qui æquiualeat complexo ex datis duobus numeris particula *in* connexis. Supponit tamen, quod in datis numeris, tam numerator, quam denominator vulgaribus numeris exprimantur: quodque dati numeri non habeant dignitates diuersas, neque radicales sint. His suppositis, duo sunt casus. Primus est quando dati duo numeri inter se conueniunt quoad signum. Secundus casus est, quando non conueniunt quoad signũ. In vtroque casu productum ex dato vno numeratore ducto in alterum, dabit nouum numeratorem: & aggregatum denominatorum, si in datis numeris inueniuntur, dabit nouum denominatorem, atque hunc nouum numeratorem, & denominatorem apponendo dignitati, quæ vel in vno, vel in vtroque ex datis numeris inuenitur, habetur productum quod quæritur: hoc tamen productum, in primo casu, affici debet signo †; verum, in secundo casu, affici debet signo —, iuxtà signorum leges.

Exempli gratia † 4 *in* † 5, producit † 20. Rursus — 4 *in* — 5, producit † 20. Rursus † 4 *in* — 5, producit — 20. Rursus — 4 *in* † 5, producit — 20. Rursus † 3 A 2 *in* † 4 A 3, producit † 12 A 5. Rursus — 3 A 2 *in* — 4 A 3, producit † 12 A 5. Rursus — 3 A 2 *in* † 4 A 3, producit — 12 A 5. Rursus † 3 *in* † 4 A 2, producit † 12 A 2. Rursus — 3 *in* — 4 A 2, producit † 12 A 2. Rursus † 3 *in* — 4 A 2, producit — 12 A 2. Rursus — 3 *in* † 4 A 2, producit — 12 A 2.

Diui-

Diuisio numerorum affectorum signo † vel —.

Diuisio de qua hic agitur, est contractio producti nati ex vniuersali diuisione: siue inuentio vnius simplicis numeri, qui æquiualeat duobus particula *per* connexis. Supponit tamen, quod in datis numeris, tam numerator, quam denominator exprimatur vulgari numero: quodque dati numeri non habeant diuersam dignitatem. Hoc supposito, semper quidem nouus numerator producitur, dati antecedentis numeri numeratorem diuidendo per numeratorem dati consequentis numeri. Nouus verò denominator constituitur à differentia denominatorum, qui in datis numeris inueniuntur.

Quoniam tamen nouus numerator potest esse, vel vulgaris integer numerus, vel certè fractio vulgaris: & prætereà datus antecedens potest habere maiorem, vel minorem denominatorem, quam in consequente dato numero inueniatur: hinc resultant diuersi casus, & in singulis diuersis his casibus diuersa scriptio constans ex nouo numeratore, & nouo denominatore, repræsentat productum ex proposita diuisione.

Primus casus est, quando nouus numerator non est fractio, & datus antecedens numerus non habet denominatorem minorem, quam in dato consequente numero inueniatur; quo casu, dignitati inuentæ in datis numeris apponendo nouum numeratorem, & nouum denominatorem, habetur numerus quæsitus, qui afficiendus est signo † vel — iuxtà leges signorum.

Secundus casus est, quando nouus numerator non est fractio, & datus antecedens numerus habet denominatorem minorem, quam in dato consequente numero inueniatur; quo casu nouus numerator scribendus est suprà lineolam significantem particulam *per*, eidemque lineolæ subscribenda dignitas, quæ in datis numeris inuenitur, cum apposito nouo denominatore: & nouus numerator scriptus suprà lineolam, afficiendus est signo † vel — iuxtà legem signorum. Quod verò infrà lineolam scriptum est, signo † affici debet.

Tertius casus est, quando nouus numerator est fractio vulgaris, & datus antecedens numerus habet denominatorem maiorem, quam inueniatur in dato consequente numero; quo casu dignitati, quę in datis numeris inuenitur, apponi debet nouus denominator: eidemque pro numeratore apponi debet solus numerator fractionis constituentis nouum numeratorem: quibus subscribendus est eiusdem fractionis denominator, interposita lineola significante particulam *per*; quodque suprà hanc lineolam scriptum est affici debet signo † vel — iuxtà legem signorum; quod verò infrà lineolam scriptum est, debet affici signo †.

Quartus casus est, quando nouus numerator est vulgaris fractio, & datus antecedens numerus habet minorem denominatorem, quam in dato consequente inueniatur. Quo casu, dignitas, quæ in datis numeris inuenitur, cum apposito nouo denominatore scribi debet infrà lineolam significantem particulam *per*: & suprà hanc lineolam, ità successiuè scribi debet fractio, nouum numeratorem constituens, vt inter eius numeratorem, & denominatorem interposita sit particula *per*: numerator scriptus suprà lineolam, affici debet signo † vel —, iuxtà legem signorum; reliqua requirunt signum †.

Exempli gratia, iuxtà primum casum, 8 *per* 2, producit 4. Rursus — 8 *per* 2. producit — 4. Rursus — 8 *per* — 2, producit † 4. Rursus 6 A 3 *per* 2, producit 3 A 3. Rursus — 6 A 3 *per* 2, producit — 3 A 3. Rursus — 6 A 3 *per* — 2, producit † 3 A 3. Rursus 6 A 3 *per* 2 A 1, producit 3 A 2. Rursus — 6 A 3 *per* — 2 A 1, producit 3 A 2. Rursus — 6 A 3 *per* 2 A 1, producit — 3 A 2.

Iuxtà

Iuxtà secundum casum 6 *per* 3 A 3, producit $\frac{2}{A\,3}$. Rursus — 6 *per* 3 A 3, producit $\frac{-2}{A\,3}$. Rursus 8 A 2 *per* 2 A 3, producit $\frac{4}{A}$. Rursus 8 A 2, *per* — 2 A 3, producit $\frac{-4}{A}$. Rursus — 8 A 2 *per* — 2 A 5, producit $\frac{+4}{A\,3}$.

Iuxtà tertium casum, 5 A 3 *per* 2 A 1, producit $\frac{5A2}{2}$. Rursus 5 A 3 *per* — 2 A 1, producit $\frac{-5A2}{2}$. Rursus — A 5 *per* — 2 A 3, producit $\frac{+A2}{2}$.

Iuxtà quartum casum, 2 A 3 *per* 3 A 4, producit $\frac{2 \text{ per } 3}{A}$. Rursus — 2 A 1, *per* 5 A 4, producit $\frac{-2 \text{ per } 5}{A\,3}$. Rursus 2 A 1 *per* — 5 A 4, producit $\frac{-2 \text{ per } 5}{A\,3}$.

PARS V.

Operationes Logisticæ circa proportiones.

EX nostra rationis, siue proportionis definitione constat: quod proportio quantitas sit: quare non minus circa proportiones, quam circa alias quantitates institui possunt operationes Logisticæ. Quanta vtilitate id fiat, & præsertim quam frequentem, & necessarium vsum habeat rationum multiplicatio, docebit experientia. Paucis hic indicari non potest maxima, & maximè frequens eius vsus, & eximia vtilitas.

Additio rationum.

ADditio de qua hic agitur, est inuentio vnius proportionis, quæ æquiualeat propositis, siue datis duabus proportionibus. Duo sunt casus, primus est quando datæ duæ proportiones habent idem consequens: quo casu antecedentium terminorum aggregatum, ad commune consequens, constituit productum quod quæritur. In secundo casu, per praxim primam huius partis, prius inuenienda est ratio, vni ex datis rationibus æquiualens, sic vt habeat idem consequens cum data altera ratione. Deinde aggregatum istarum rationum habentium idem consequens, inuentum vt in primo casu dicitur, dabit rationem quæsitam.

Exempli gratia, ex datis rationibus vna sit 3 *ad* 5, altera sit 7 *ad* 5, productum erit 10 *ad* 5. Rursus vna ratio sit A *ad* B, altera sit C *ad* B, productum erit A † C *ad* B. Rursus vna ex datis rationibus sit 3 *ad* 5, altera sit 8 *ad* 4. Per praxim 1. huius partis, prius inuenitur ratio 10 *ad* 5, æqualis rationi 8 *ad* 4, sic vt cum altera data ratione idem consequens habeat: quo supposito productum erit 13 *ad* 5. Rursus vna ratio sit A *ad* B, altera sit C *ad* D, prius inuenitur ratio E *ad* B, æqualis rationi C *ad* D: quo posito A † E *ad* B, erit ratio quæsita.

Subtractio rationum.

SVbtractio de qua hic agitur, est inuentio vnius rationis, quæ relinquitur, siue residua est, quando ex data antecedente, siue superiori ratione, subtrahitur data consequens, siue inferior ratio. Duo sunt casus, primus est, quando datę rationes habent commune consequens; quo casu ex termino antecedente superioris datæ rationis, subtrahatur terminus antecedens inferioris datæ rationis: proportio residui ad commune consequens, erit ratio quæ petitur. Secundus casus est, quando datæ rationes non habent commune consequens; quo casu prius per praxim 1. huius partis inueniatur ratio ęquiualens vni ex datis rationibus, quę habeat idem consequens quod in altera data ratione inuenitur: deinde inuentam rationem adhibendo loco datæ rationis cui ęquiualet, vt in primo casu, inuenietur desiderata ratio.

Exempli gratia, ex datis rationibus superior sit 7 *ad* 3, inferior sit 2 *ad* 3, productum erit 5 *ad* 3. Rursus superior sit 2 *ad* 3, inferior sit 7 *ad* 3, productum erit 2 — 7 *ad* 3, siue — 5 *ad* 3. Rursus ratio superior sit A *ad* B, inferior sit C *ad* B, productum erit A — C *ad* B. Rursus superior sit 7 *ad* 3, inferior sit 2 *ad* 1: quia 2 *ad* 1 = 6 *ad* 3, productum erit 7 — 6 *ad* 3: hoc est 1 *ad* 3. Rursus superior sit A *ad* B, inferior sit C *ad* D: supposito quod C *ad* D = E *ad* B, productum erit A — E *ad* B.

Multiplicatio rationum.

HÆc multiplicatio, aliter dicitur rationum compositio: siue inuentio rationis, quæ ex datis rationibus composita sit. Docet inuenire rationem simplicem, quæ producitur ex vna data ratione, ducta in alteram datam rationem. Quoniam hæc rationum compositio, siue multiplicatio, maximum vsum habet in Logistica: propono duos diuersos modos inueniendi productum quod per multiplicationem oritur ex propositis duabus rationibus. Ex his diuersis modis, subinde primus, subinde secundus commodior est.

Primus modus. Vnius datæ rationis antecedens terminus, ductus in antecedentem terminum alterius datæ rationis, dat nouum antecedentem terminum. Similiter vnius datæ rationis consequens, ductus in consequentem terminum alterius datę rationis, dat nouum consequentem terminum. Denique nouus antecedens terminus, ad nouum consequentem terminum, habebit rationem desideratam.

Secundus modus. Per regulam auream, inueniatur quartus proportionalis ad tres terminos, quorum primus est antecedens vnius ex datis rationibus (quam claritatis gratia primam appello, vt alteram possim secundam appellare) secundus terminus sit consequens primæ datæ rationis; tertius terminus sit consequens secundæ datæ rationis; his peractis, ratio quam habet antecedens secundæ rationis datæ, ad inuentum quartum terminum proportionalem, erit ratio quæsita.

Exempli gratia, si ex datis rationibus vna sit 3 *ad* 4, altera sit 5 *ad* 10: iuxtà primum modum, inuentum productum erit 15 *ad* 40; iuxtà secundum modum, inuentum productum erit 3 *ad* 8: quia 5 *ad* 10 = 4 *ad* 8. Rursus si ex datis rationibus vna sit A *ad* B, altera sit C *ad* D, iuxtà primum modum, inuentum productum erit A *in* C *ad* B *in* D. Iuxtà secundum modum, inuentum productum erit A *ad* F, supposito quod B *ad* D = C *ad* F.

Diuisio rationum.

DIuisio, de qua hic agitur, est inuentio rationis quæ producitur, quando data superior ratio diuiditur per datam inferiorem rationem. Vt ex hac diuisione producta ratio inueniatur; primò, pro data inferiori ratione assumatur altera ratio, in qua secundæ rationis termini inuersi sint, sic vt antecedens inferioris datę rationis constituat consequens assumptæ rationis: & consequens datæ inferioris rationis constituat antecedentem terminum assumptæ rationis. Deinde datam superiorem rationem ducendo in assumptam rationem, inuenietur ratio quæ petitur: siue ratio, quæ producitur per diuisionem datæ superioris rationis, per datam inferiorem rationem.

Exempli gratia. Ex datis duabus rationibus, superior sit 3 *ad* 4, inferior sit 6 *ad* 5; assumpta ratio erit 5 *ad* 6: productum verò 15 *ad* 24. Rursus ex datis duabus rationitionibus, superior sit A *ad* B, inferior sit C *ad* D: assumpta ratio erit D *ad* C: productum verò erit A *in* D *ad* B *in* C.

Praxis I.

Inuenire rationem, quę ęqualis sit datę alteri rationi, ità tamen, vt habeat datum consequentem terminum.

PRimò, assumantur tres termini, quorum primus sit consequens illius rationis, cui æquari debet ratio inuenienda: secundus sit, eiusdem istius rationis antecedens: tertius sit datus consequens terminus. Secundò ad hos tres terminos inueniatur quartus proportionalis, per regulam auream Cap. 3. Sic enim habebitur quæsitæ rationis antecedens terminus, qui ad datum consequentem terminum habebit rationem desideratam.

Exempli gratia. Proposita ratio sit C *ad* D, huic æqualis ratio inuenienda sit, ità tamen, vt habeat consequentem terminum B. Supposito, quod ad tres terminos, quorum primus sit D, secundus sit C, tertius B, quartus proportionalis sit E: etiam ratio E *ad* B erit illa, quæ petitur.

Praxis II.

Inuenire rationem, quæ sit æqualis datæ alteri rationi, ità tamen, vt habeat datum antecedentem terminum.

PRimò assumantur tres termini, quorum primus sit, antecedens istius rationis, cui æquari debet ratio inuenienda: secundus sit, eiusdem illius rationis consequens: tertius sit, datus antecedens terminus. Secundò ad hos tres terminos inueniatur quartus proportionalis, per regulam Auream Cap. 3. Sic enim habebitur quæsitæ rationis consequens terminus, ad quem datus antecedens habebit rationem desideratam.

Exempli gratia. Proposita ratio sit C *ad* D, huic æqualis inuenienda sit, ità tamen, vt habeat antecedentem terminum E. Supposito, quod ad tres terminos, quorum primus sit C, secundus D, tertius E, quartus proportionalis sit F: etiam ratio E *ad* F erit illa, quæ petitur.

PARS VI.

Operationes Logisticæ circa numeros radicales.

PRo his operationibus Logisticis, præter praxes in fine huius partis propositas, requiritur modus inueniendi quamlibet radicem, quam habet propositus integer, vel fractus numerus vulgaris; de quo agitur cap. 5.

Notanda pro additione, & subtractione radicalium numerorum.

NOtandum primò. Si dati radicales numeri non aliter inter se differant, quam quoad numeratores; hoc casu instituendo additionem, vel subtractionem circa solos numeratores, habetur nouus numerator, qui cum reliquis, quæ datis numeris communia sunt, constituet quæsitum radicalem numerum.

Notandum secundò. Si dati radicales numeri inter se differant aliter, quam quoad numeratores; hoc casu requirimus, vt ipsis æquiualentes alij inueniantur, qui singuli, & pro numeratore habeant vnitatem, & inter se conueniant quoad denominatorem. Quomodo hi numeri inueniri debeant: docent praxes, quæ proponuntur in fine huius partis.

Notandum tertiò. Si dati radicales numeri sint inter se incommensurabiles; hoc casu non subiacent legibus, quas pro additione, vel subtractione præscribimus in hac parte: sed pro illorum additione, aut subtractione adhibenda sunt signa + vel —. In 5. praxi docetur modus cognoscendi vtrum propositi radicales numeri sint, vel non sint commensurabiles; idque innotescit ex vulgarium numerorum inquisitione, qui requiruntur pro additione, & subtractione.

Additio numerorum radicalium.

Supposito quod propositi duo radicales numeri sint commensurabiles, & aliter inter se differant, quam quoad numeratores: quodque iuxtà secundam notam habeant vnitatem pro numeratore, atque communem denominatorem. Primò per 5. praxim inueniantur duo vulgares numeri X & Z, sic vt X *ad* Z habeat eam proportionem, quam datus maior radicalis numerus habet ad minorem. Secundò, aggregatum ex numeris X & Z toties ducatur in seipsum, quot vnitates continet communis denominator; atque hoc productum ducatur in minorem ex duobus numeris vulgaribus scriptis post literam *q* in datis numeris radicalibus. Denique hoc productum diuidendo per productum ex numero Z, toties in se ducto, quoties vnitas continetur communi denominatore datorum radicalium numerorum, habebitur numerus post literam *q* scribendus in numero radicali quæsito: hic, quoad reliqua, conuenire debet cum datis numeris radicalibus.

Paulò fusius hic præscriptam operationem breuiter, & non malè indicat subiecta scriptio, siue formula: cuius valorem inueniendo iuxtà adscriptam hypothesim, habetur nouus numerus scribendus post literam *q* in producto quod quæritur.

Additionis Formula.

$$\frac{X + Z \text{ q } \textit{in } C}{Z \text{ q}}$$

Hypothesis Formulæ.

X & Z Sunt duo numeri vulgares,ità vt X *ad* Z habeat proportionem, quam datus maior habet ad minorem.

q Intelligatur vt in scriptionibus Logisticis: illi tamen appositus intelligatur numerus, qui est denominator communis in datis radicalibus.

C Est minor numerus, qui in datis radicalibus inuenitur post literam *q*.

Exempli gratia. Supposito quod dati radicales numeri sint R*q*16, & R*q*9; numerus X esse poterit 8: quo casu numerus Z erit 6. Hoc supposito, aggregatum ex X & Z erit 14; hic numerus ductus in se; dat 196: qui iterum ductus in 9, dabit 1764; hunc numerum diuidendo per numerum 6, ductum in se, hoc est per numerum 36: producitur numerus 49; eritque verum, quod addendo propositos duos numeros, producatur R*q*49.

Rur-

Rurſus. Suppoſito quod dati radicales numeri ſint R2q27, & R2q8; numerus X eſſe poterit 6: quo caſu numerus Z erit 4. Hoc ſuppoſito, aggregatum ex X & Z erit 10; hoc aggregatum bis ductum in ſe (quia radicalium communis denominator eſt 2) producit 1000; qui numerus vlterius ductus in 8, dabit 8000; hic numerus diuiſus per numerum 4, bis in ſe ductum, hoc eſt per numerum 64, producit 125; eritque verum, quod addendo propoſitos radicales numeros, producãt R2q125.

Rurſus. Suppoſito quod dati radicales numeri ſint R1q75, & R1q48; numerus X poterit eſſe 5: quo caſu numerus Z erit 4. Hoc ſuppoſito, aggregatum X & Z erit 9; qui numerus ductus in ſe, producit 81: hic vlterius ductus in 48, producit 3888; qui numerus diuiſus per 4, ductum in ſe, hoc eſt per 16, producit 243; eritque verum, quod addendo duos propoſitos radicales numeros, producatur R1q243.

Subtractio numerorum radicalium.

Svppoſito, vt diximus in notis propoſitis initio huius partis, quod propoſiti numeri radicales habeant communem denominatorem, & vnitatem pro numeratore, quodque inter ſe ſint commenſurabiles. Primò, per praxim 5. inueniantur duo numeri vulgares X & Z, ſic vt X *ad* Z habeat eam proportionem, quam maior ex datis radicalibus habet ad minorem. Secundò differentia numerorum X & Z toties ducatur in ſeipſam, quoties vnitas inuenitur in communi denominatore datorum radicalium numerorum: atque hoc productum ducatur in minorem ex numeris ſcriptis poſt literam *q*. Denique hoc productum diuidendo per productum ex numero Z, toties in ſe ducto, quoties vnitas continetur communi denominatore datorum radicalium numerorum, habebitur numerus poſt literam *q* ſcribendus in numero radicali quæſito: qui quoad reliqua conuenire debet cum datis numeris radicalibus. Hæc ſubtractio, quoad omnia, conuenit cum prius propoſita additione, præterquam quod pro additione adhibeatur aggregatum numerorũ X&Z; pro ſubtractione verò adhibeatur differentia numerorum X&Z

Præſcriptam operationem non malè, ſed compendiatè indicat ſubiecta formula: cuius valorem inueniendo iuxtà adſcriptam hypotheſim, habetur numerus ſcribendus poſt literam *q* in numero radicali quæſito.

Subtractionis Formula.

$$\frac{X - Zq \textit{ in } C}{Zq}$$

Hypotheſis Formulæ.

X & Z Sunt duo numeri vulgares, ac tales, vt X *ad* Z habeat proportionem, quam maior datus habet ad minorem.

q Intelligatur vt in ſcriptionibus Logiſticis, ſic tamen, vt habeat appoſitum denominatorem communem datorum radicalium numerorum.

C Minor numerus ſcriptus poſt literam *q*.

Exempli gratia. Suppoſito quod dati radicales numeri ſint R1q49, & R1q9: numerus X poterit eſſe 14; quo caſu numerus Z erit 6. Hoc ſuppoſito, differentia numerorum X & Z erit 8; hic numerus ſemel ductus in ſeipſum, producit 64; qui vlterius ductus in 9, producit 576: hunc numerum diuidendo per numerum 6, ductum in ſe, hoc eſt per numerum 36: producitur numerus 16; eritque verum, quod ex maiori ex propoſitis radicalibus, auferendo minorem, producatur R1q16.

Rurſus. Suppoſito quod dati radicales numeri ſint R2q125, & R2q8; numerus X eſſe

X esse poterit 10: quo casu numerus Z erit 4. Hoc supposito, differentia numerorum X & Z erit 6; hic numerus bis ductus in se, producit 216; qui vlterius ductus in 8, producit 1728; hunc numerum diuidendo per 4, bis ductum in se, hoc est per 64, prodibit numerus 27; eritque verum, quod ex maiori ex propositis radicalibus numeris auferendo minorem, producatur numerus R2q27.

Rursus. Supposito quod dati radicales numeri sint R1q243, & R1q75, numerus X poterit esse 9: quo casu numerus Z erit 5. Hoc posito, differentia numerorum X & Z, erit 4; hic numerus semel in se ductus, producit 16; qui vlterius ductus in 75, producit 1200; hunc numerum diuidendo per numerum 5, ductum in seipsum, hoc est per numerum 25, producit 48; eritque verum, quod ex maiori propositorum numerorum auferendo minorem, producatur numerus R1q48.

Multiplicatio numerorum radicalium.

Nota. Tam pro multiplicatione, quàm pro diuisione, suppono propositos radicales numeros habere vnitatem pro numeratore, atque eumdem denominatorem; qui per praxes huius partis inueniendi, atque pro datis substituendi erunt, si tales non sint numeri radicales dati. Hoc supposito.

Primò. Vnus ex numeris in datis radicalibus scriptis post literam *q* ducatur in alterum similiter scriptum post literam *q*: Deinde hoc productum scribatur post literam *q* in numero radicali nouo, qui reliqua habeat cum datis communia; sic enim habebitur quæsitum.

Exempli gratia. Supposito quod dati radicales numeri sint R1q9, & R1q4; quoniam 9 *in* 4 = 36: etiam productum ex multiplicatione erit R1q36.

Rursus. Supposito quod dati radicales numeri sint R2q8, & R2q27; quoniam 8 *in* 27 = 216: etiam productum ex proposita multiplicatione erit R2q216.

Rursus. Supposito quod dati radicales numeri sint R1q7, & R1q3; quoniam 7 *in* 3 = 21; etiam productum ex proposita multiplicatione erit R1q21.

Diuisio numerorum radicalium.

Suppositis quæ in nota ad multiplicationem diximus à nobis supponi pro multiplicatione, & diuisione. Primò, numerus scriptus post literam *q* in radicali numero, qui diuidendus proponitur, diuidatur per numerum scriptum post literam *q* in radicali numero, per quem facienda est diuisio; deinde productum ex hac diuisione, scribatur post literam *q* in nouo radicali numero, qui habeat reliqua datis radicalibus communia; hic nouus radicalis numerus erit ille, qui petebatur.

Exempli gratia. Supposito quod radicalis numerus R1q36, diuidendus sit, per radicalem numerum R1q4; quoniam 36 *per* 4 = 9; etiam productum ex proposita diuisione erit R1q9. Rursus supposito quod R2q216, debeat diuidi per R2q27; quoniam 216 *per* 27 = 8: etiam productum ex proposita diuisione erit R2q8. Rursus supposito quod R1q21 diuidenda sit per R1q3; quoniam 21 *per* 3 = 7: etiam productum ex proposita diuisione, erit R1q7.

Non-

Nonnullæ Praxes maximè vtiles pro vſu numerorum radicalium.

Praxis I.

Inuenire numerum radicalem, qui habeat propoſitum denominatorem N: atque æquiualeat dato vulgari numero integro vel fracto X.

PRimò. Datus vulgaris numerus X, ſucceſſiuè toties in ſe ducatur, quoties vnitas continetur propoſito denominatore N. Secundò inuentum productum ſcribatur poſt literam *q* in numero radicali, qui habeat vnitatem pro numeratore, & denominatorem N. ſic enim habebitur quæſitum.

Exempli gratia. Datus vulgaris numerus X ſit 3: propoſitus denominator N, ſit 2; quoniam numerus 3, ſucceſſiuè bis in ſe ductus, producit 27: etiam R2*q*27 = 3. Rurſus datus vulgaris numerus X ſit $\frac{2}{3}$, propoſitus denominator N ſit 1; quoniam datus vulgaris numerus $\frac{2}{3}$ ſemel ductus in ſe, producit $\frac{4}{9}$: etiam R1*q* $\frac{4}{9}$ = $\frac{2}{3}$.

Praxis II.

Inuenire radicalem numerum Z, habentem pro numeratore vnitatem, atque ęquiualentem propoſito radicali numero X, non habenti vnitatem pro numeratore: ità vt numeri X & Z conueniant quoad denominatorem.

PRimò. Numerator propoſiti radicalis numeri X, toties ducatur in ſe, quoties vnitas continetur in denominatore eiuſdem numeri X: atque hoc productum ducatur in numerum, qui poſt literam *q* ſcriptus inuenitur in propoſito radicali numero X. Secundò, inuentum productum ſcribatur poſt literam *q* in numero radicali, qui pro numeratore habeat vnitatem, & denominatorem habeat eumdem, qui in propoſito numero X inuenitur. Sic enim habebitur quæſitus radicalis numerus Z.

Exempli gratia. Propoſitus radicalis numerus X, ſit 5R1*q*4; Quoniam numerator 5, ſemel ductus in ſe, producit 25: & hoc productum ducendo in 4, producitur 100; verum erit, quod 5R1*q*4 = R1*q*100. Rurſus, propoſitus numerus X, ſit 3R2*q*8; quoniam numerator 3, bis in ſe ductus, producit 27: atque hoc productum ducendo in 8, producitur 216: verum erit, quod 3R2*q*8 = R2*q*216.

Praxis III.

Inuenire duos radicales numeros, habentes eumdem denominatorem, atque æquiualentes datis radicalibus numeris X & Z habentibus diuerſos denominatores.

NOta. Quod radicalis numeri, exponens, dicatur ille vulgaris numerus, qui vnitate ſuperat eiuſdem numeri denominatorem: quare ſi radicalis numeri deno-

denominator est 2, huius radicalis numeri exponens erit 3.

Duplex diuersus casus potest occurrere. Primus casus est, quando datorum radicalium numerorum X & Z, exponentes tales sunt, vt per minorem exponentem diuidendo maiorem, producatur integer vulgaris numerus. Secundus casus est, quando per minorem exponentem diuidendo maiorem, non producitur integer vulgaris numerus. In vtroque casu, pro datis numeris ipsis æquiualentes alij substituantur, qui pro numeratore habeant vnitatem, si dati numeri tales non sint; hi numeri, datis æquiualentes, poterunt inueniri per praxim præcedentem. Hoc supposito. In primo casu, propositorum numerorum exponentem maiorem, diuidendo per exponentem minorem, inuenitur integer numerus, à quo vnitas subtrahenda est, & quoties in residuo continetur vnitas, toties in se ducatur numerus scriptus post literam *q* in radicali numero, qui habet minorem denominatorem: inuentumque ex his ductibus productum, scribatur post literam *q* in nouo radicali numero, habenti vnitatem pro numeratore, atque eumdem denominatorem cum dato radicali numero, qui habet denominatorem maiorem.

In secundo casu, primò exponens dati numeri X ducatur in exponentem dati numeri Z: ex hoc producto auferendo vnitatem, habebitur nouus denominator, qui in quæsitis numeris communis esse poterit. Inuento hoc nouo denominatore, successiuè, vt in primo casu præscribitur, prius inueniatur numerus radicalis habens hunc nouum denominatorem, æquiualens dato numero X: Deinde inueniatur numerus radicalis, habens hunc nouum denominatorem, atque æquiualens dato numero Z. Sic enim habebuntur numeri radicales, qui petebantur.

Exempli gratia. Pro primò casu, datus radicalis numerus X, sit R3*q*16: numerus radicalis Z, sit R1*q*9. Exponens numeri X, erit 4: & exponens numeri Z, erit 2. Deinde diuidendo exponentem 4 per exponentem 2, producitur numerus 2: à quo subtrahendo vnitatem, remanet 1: & numerum 9 semel ducendo in seipsum producitur 81: eritque verum, quod R3*q*81 = R1*q*9. Prior tamen quoad denominatorem conuenit cum dato radicali numero X. Rursus, datus radicalis numerus X, sit R5*q*64: & datus radicalis numerus Z, sit R2*q*27. Exponens numeri X, erit 6: & exponens numeri Z, erit 3: diuidendo 6 per 3 producitur 2; ex hoc producto auferendo vnitatem, remanet vnum: & numerum 27, semel in se ducendo, habetur numerus 729; eritque verum, quod R5*q*729 = R2*q*27: prior tamen quoad denominatorem conuenit cum dato numero X. Rursus, datus radicalis numerus X, sit R5*q*7: & datus radicalis numerus Z, sit R1*q*2: exponens numeri X, erit 6: & exponens numeri Z, erit 2: atque diuidendo 6 per 2, producitur numerus 3, ex quo abijciendo vnitatem, residuum est 2; numerum verò 2, bis ducendo in seipsum, producitur 8; eritque verum, quod R5*q*8 = R1*q*2. Prior tamen quoad denominatorem conuenit cum dato numero X.

Pro secundo casu, datus radicalis numerus X, sit R2*q*27: & datus radicalis numerus Z, sit R1*q*4: exponens numeri X, erit 3: & exponens numeri Z, erit 2: verùm, quia diuidendo 3 per 2, non producitur numerus integer, iuxtà secundum casum exponens 3, ducendus est in exponentem 2: ex qua multiplicatione producitur numerus 6: ex quo auferendo vnitatem, habetur numerus 5, qui erit nouus denominator. Vndè reliquum est, vt conformiter ad dicta de primo casu, prius inueniatur numerus radicalis habens denominatorem 5, & æquiualens dato numero X: talisque radicalis numerus erit R5*q*729; deinde inueniatur numerus radicalis habens denominatorem 5, atque æquiualens dato numero Z: talisque numerus erit R5*q*64.

Praxis IV.

Cognoscere vtrum datus vulgaris integer, vel fractus numerus X, habeat radicem indicatam à litera N: qualemcunque radicalis numeri denominatorem, significet litera N.

DVplex est casus. Primus est, quando datus vulgaris numerus X, est integer. Secundus casus est, quando datus numerus X, est fractus.

In primo casu, quando datus vulgaris numerus X non est fractus: per ea, quæ docentur Cap. 5. huius libri, inquiratur numeri X radix indicata à litera N: sic enim vel inuenietur numeri X radix N: vel numerus X non habet radicem N.

In secundo casu, proposita fractio X prius reuocetur ad minimos terminos, per praxim 2. partis 3. deinde, per ea quæ docentur cap. 5. inquiratur eius radix, indicata à litera N; sic enim, vel inuenietur numeri X radix N: vel hic numerus X, non habet radicem N.

Exempli gratia. Pro primo casu, numerus X, sit 15: & litera N, significet radicem primam. Per cap. 5. non inuenuenitur radix prima numeri 15: quare hic numerus 15 non habet radicem primam.

Pro secundo casu, numerus X sit $\frac{16}{54}$, et litera N significet radicem secundam. Fractio $\frac{16}{54}$ reuocata ad minimos terminos, erit $\frac{8}{27}$: huius secunda radix, inuenta per cap. 5. erit $\frac{2}{3}$; quare fractio $\frac{16}{54}$ habet secundam radicem: eritque verum, quod ℞ 2 $q\,\frac{16}{54} = \frac{2}{3}$. Rursus proposita fractio X, sit $\frac{16}{54}$: et litera N significet primam radicem. Fractio $\frac{16}{54}$ reuocata ad minimos terminos, erit $\frac{8}{27}$: huius prima radix non inuenitur per dicta cap. 5. adeòque fractio $\frac{16}{54}$ non habet primam radicem.

Praxis V.

Cognoscere vtrum propositi duo numeri radicales A & B, habentes post literam *q* scriptos vulgares integros, vel fractos numeros: sint, vel non sint inter se commensurabiles; & si fieri possit, illorum proportionem exhibere in numeris vulgaribus.

PRimò. Propositis numeris radicalibus A & B substituantur æquiualentes X & Z, qui habeant has conditiones: vt in singulis numerator sit vnitas: vt conueniant inter se, quoad denominatorem: vt numeri vulgares scripti post literam *q* non differant quoad denominatorem. Si tamen numeri dati A & B habent has conditiones, nihil in ipsis immutandum. Ad conditiones hic à nobis requisitas conducit praxis 2. & 3. huius partis: & præterea praxis 3. partis 3. huius capitis. Secundò. Numerus integer, aut numerator fractionis, qui in numero radicali X inuenitur post literam *q*, scribatur supra lineolam, & illi subscribatur numerus integer, vel numerator fractionis, qui post literam *q* inuenitur in radicali numero Z: atque hæc fractio, per praxim 2. partis 3. huius capitis, reuocetur ad minimos terminos. Tertiò, Inuentæ fractionis constantis minimis terminis, per dicta cap. 5. inquiratur radix indicata à communi denominatore, qui inuenitur in numeris radicalibus X & Z. Si hæc radix inuenitur, numeri radicales X & Z sunt commensurabiles, & inuentæ radicis numerator, ad eius denominatorem habebit eamdem rationem, quam radicalis numerus X, habet ad radicalem numerum Z. Si verò hæc radix, per dicta cap. 5. inueniri non possit: numeri X & Z erunt inter se incommensurabiles, ac tales, vt nullis numeris vulgaribus exhiberi possit proportio numeri radicalis X, ad radicalem numerum Z; quodque de numeris X & Z hic dicimus verum est de omnibus ipsis æquiualentibus, vt sunt dati numeri A & B.

Exempli gratia. Propositus numerus X, sit $R2q16$, numerus Z, sit $R2q54$. Scribenda fractio erit $\frac{16}{54}$; hæc fractio reuocata ad minimos terminos, erit $\frac{8}{27}$; huius fractionis radix secunda erit $\frac{2}{3}$. eritque verum, quod $R2q16$, *ad* $R2q54 = 2$ *ad* 3. Rursus numerus X sit $R1q\frac{18}{20}$: numerus Z sit $R1q\frac{2}{5}$: hæ fractiones reuocatæ ad eumdem denominatorem, erunt $\frac{90}{100}$, $\frac{40}{100}$. Fractio scribenda erit $\frac{90}{40}$; hæc fractio reuocata ad minimos terminos, erit $\frac{9}{4}$; huius fractionis prima radix erit $\frac{3}{2}$. Quare $R1q\frac{18}{20}$, *ad* $R1q\frac{2}{5} = 3$ *ad* 2. Rursus numerus X sit $R1q\frac{2}{5}$, et numerus Z sit $R1q\frac{16}{20}$. hę fractiones reuocatæ ad communem denominatorem, erunt $\frac{40}{100}$, et $\frac{80}{100}$. Fractio scribēda erit $\frac{40}{80}$; hęc fractio reuocata ad minimos terminos, erit $\frac{1}{2}$; huius fractionis prima radix non potest inueniri per dicta cap. 5: quare propositi radicales numeri sunt incommensurabiles: et ratio quam habet $R1q\frac{2}{5}$, *ad* $R1q\frac{16}{20}$ nō potest exhiberi per numeros vulgares.

PARS VII.

Operationes Logisticæ circa rectas lineas.

Logisticæ operationes, de quibus egimus in anterioribus huius capitis partibus, calamo absoluuntur: huius, & sequentis partis operationes, requirunt circinum, & regulam, propria strictioris Geometriæ instrumenta: quorum alterum rectis, alterum circularibus lineis describendis vtile est.

Additio rectarum linearum.

Additio de qua hic agitur, est inuentio vnius rectæ lineæ, quæ datis duabus rectis lineis æqualis sit. Pro hac additione, primò describenda recta linea infinita, siue indefinita: hoc est quantum opus fuerit producta. Deinde, mediante circino, ex hac linea abscindendæ successiuè partes, quarum prior æquetur priori ex datis lineis, & altera posteriori ex datis lineis æqualis sit. Sic enim habetur quæsitum.

Exempli gratia. Ex datis lineis vna sit A, altera B; prius in linea aliqua recta, circino notando partem CD, æqualem rectæ A: & partem DE, æqualem rectæ B: tota linea CE erit illa quæ producitur ex additione linearum A & B.

Figura 1.

Quoniam hæc linearum rectarum additio, & subsequens earumdem rectarum linearum subtractio expresse proponitur, & notatur in vsitatis, atque approbatis antiquæ Geometriæ elementis; nolui has operationes prætermittere, quidquid sit de illarum facilitate. Præterea hic non inutiliter præbent occasionem notandi,

quod

quod dicitur de rectarum linearum multiplicatione, & diuisione.

Subtractio rectarum linearum.

HÆc subtractio docet inuenire rectam lineam, quæ est differentia datarum rectarum linearum, & remanet, quando ex maiori minor subtrahitur. Pro hac subtractione, ex data maiori linea, circino abscindatur pars, quæ sit æqualis minori datæ lineæ: residua pars maioris lineę, erit illa, quę ex subtractione producitur. Figura 1.

Exempli gratia, ex data linea recta C E, subtrahenda sit recta linea A, huic pars æqualis C D, circino notetur in recta C E, erit recta D E, illa quæ ex proposita subtractione producitur.

Multiplicatio, & Diuisio rectarum linearum.

PRætermitto hic multiplicationem, & diuisionem institutam circa rectas lineas, atque respondentem, vel propositæ hic additioni, aut subtractioni, vel præcedentium partium huius capitis multiplicationi, aut diuisioni: nulla enim vtilitate proponerentur istæ operationes; etenim de singulis hoc capite propositis multiplicationibus verum est, quod nihil aliud sint quam compendia regulæ aureę; siue inuentio quarti termini proportionalis, supposito quod ex tribus datis terminis primus sit vnitas. Similiter de propositis prius diuisionibus verum est, quod nihil aliud sint, quam compendia regulæ aureæ, siue inuentio quarti termini proportionalis, supposito quod ex datis tribus terminis, secundus, vel tertius, sit vnitas. Quare, qui hic circa rectas lineas vellet proponere operationes respondentes operationibus, quæ hoc capite intelliguntur per voces multiplicatio, aut diuisio; Deberet in casu particulari hic docere illud idem, quod non solum vniuersaliter, verum etiam eadem facilitate docetur in parte 1. cap. 3. vbi exponitur, quomodo ad quaslibet tres datas rectas lineas inuenienda sit quarta proportionalis: ex quo manifestum est, quomodo quarta proportionalis linea inuenienda sit, in casu in quo vna ex datis tribus lineis vnitas est: siue (quod in idem redit) vnitatem repræsentat, aut assumatur pro vnitate. Præterea prædictam vniuersalem regulam restrictam ad casum particularem, in quo ex datis tribus terminis, qui singuli lineæ sunt, quarum vna repræsentat vnitatem: hoc inquam modo restrictam vniuersalem regulam auream per vocem multiplicatio, vel diuisio indicare, vsitatum non est, neque vllam afferret vtilitatem; immo fortassis non leue causaret incommodum, aut periculum æquiuocationis, inter hanc compendiatam regulam auream circa rectas lineas institutam, & illam multiplicationem institutam circa rectas lineas, quæ aliter à nobis vocatur ductus Geometricus: vel certè inter compendiatam regulam auream, quæ aliter appellatur diuisio: & illam diuisionem linearum, apud omnes nominatissimam, quæ aliud non est, quam sectio linearum in duas, aut plures partes. Pauca quæ hic notauimus circa operationes, quas prætermittimus, vt inutiles, non solum inutilia non sunt, sed planè digna, quæ altè menti inhæreant cupientibus intelligere aliquid diuersum à pura Mathesi practica.

Tyrones meminerint, quod vox diuisio sit æquiuoca, etenim vsitata est, vt significet compendiatam regulam auream, in qua secundus, vel tertius ex datis terminis est vnitas; quem sensum habet vbi hoc capite agitur de diuisione. Eadem vox, diuisio, non rarò æquiualet voci, sectio, sic vt idem sit, numerum, lineam, figuram in partes secare, aut diuidere. Hæc sectio, siue diuisio, æquiualet subtractioni, & quod secatur per sectionem semper imminuitur, & quantitas, quæ per sectioctionem producitur necessariò pars est illius quantitatis quæ secatur, ideòque aliquid minus, eo quod secatur. Quod producitur per eam diuisionem, quæ est compendiata regula aurea, non est necessariò, aut pars eius, ex quo producitur, aut aliquid minus illo, ex quo producitur.

Sic exempli gratia, hac diuisione diuidendo $\frac{3}{4}$ per $\frac{1}{4}$: producitur $\frac{12}{4}$; quæ fractio æquiualet integro numero 3, qui neque est pars, neque minor numero, ex quo producitur.

PARS VIII.

Operationes Logisticæ circa figuras similes.

PRo intelligentia figurarum, siue superficierum, quæ dicuntur inter se similes, consule indicem. Hoc loco agimus de modo instituendi operationes Logisticas circa istas figuras, sic vt non vitietur similitudo: siue vt quantitas per operationem Logisticam producta, similis sit datis quantitatibus, quę inter se etiam supponuntur similes. De descriptione figuræ, quæ datæ alteri similis sit, & tamen datæ rectæ insistat, vel illam pro diametro habeat: agit prob. 15. cap. 6.

Additio figurarum similium.

HÆc additio est inuentio vnius figuræ, siue planæ superficiei, quæ sit æqualis aggregato duarum datarum superficierum inter se similium, sic vt etiam similis sit singulis ex datis figuris. Supposito quod datæ duæ figuræ similes sint X & Z, quodque aggregato istarum figurarum æqualis, & singulis similis inuenienda sit. Primò, descripto semicirculo A B C, ducantur rectæ B A, & B C, in quibus (productis si opus fuerit) notentur puncta D, & E: vt recta B D æquetur diametro vnius datæ figuræ X, recta verò B E ęquetur diametro alterius datę figuræ Z. Deinde ducta recta D E, per prob. 15. cap. 6. describatur figura datis similis, & habens diametrum rectæ D E æqualem. Hæc erit figura, quæ petitur.

Figura 2.

Nota. Pro linea illa, quam in praxi appellamus diametrum, assumi posse quamcunque rectam lineam figuræ datæ, dummodo in reliquis similibus figuris per vocem, diameter, etiam intelligatur linea priori isti diametro homologa; hoc est similiter posita in istis figuris similibus.

Subtractio figurarum similium.

HÆc subtractio, est inuentio figuræ, quæ sit æqualis differentiæ duarum datarum figurarum inter se similium, sic vt datis figuris similis sit. Itaque supposito quod data maior figura sit X, quodque minor priori similis sit Z; & inuenienda sit figura similis quidem datis figuris X & Z, illarum verò differentiæ æqualis. Primò. Describatur semicirculus, habens diametrum A C æqualem diametro maioris figuræ datæ: Deinde centro A, interuallo diametri minoris datæ figuræ Z, describatur arcus secans circumferentiam semicirculi in aliquo puncto B, ex quo ducatur recta B C. Denique per prob. 15. cap. 6. describatur figura datis similis, & habens diametrum rectæ B C æqualem. Hæc erit figura quæsita.

Figura 2.

Mul-

Multiplicatio, & diuisio figurarum similium.

PRætermittitur hic figurarum similium multiplicatio, & diuisio, correspondens expositæ additioni, & subtractioni, adeòque constituens aliquam ex quatuor Logisticis operationibus, de quibus hoc capite agitur: propter easdem ferè rationes propter quas hæ operationes omissæ dicuntur in præcedenti parte: & ne hic in casu particulari proponeremus, quod eadem facilitate, atque vniuersaliter pro omni casu docetur in subsequentis capitis vndecima solutione regulæ aureæ.

CAPVT III.

De proportionalium terminorum inuentione.

VOces, magis, minus, æqualiter, comparatiuæ, siue relatiuæ sunt: & omnis relatio, siue comparatio requirit, tum illud quod refertur, siue comparatur, tum illud ad quod fit relatio, siue comparatio; sic vt nullum ens dici possit, maius, minus, æqualiter; rectum, curuum, album, graue, magnum, &c. nisi comparetur ad aliud, respectu cuius dicatur magis, minus, æqualiter: rectum, curuum, album, graue, magnum; &c. hinc bene dicitur, quod relatio, siue potius relatum, sit ens ad aliud; hoc est ens habens relationem ad aliud ens. Relationes verò illę à quibus ens dicitur relatum, diuersæ esse possunt. Exempli gratia: relatio rectitudinis, à qua vnum ens dici potest magis, vel minus rectum altero; relatio curuitatis, à qua vnum ens dici potest magis, vel minus curuum altero; relatio albedinis, à qua vnum ens dici potest magis, vel minus album altero; relatio grauitatis, à qua vnum ens dici potest magis, vel minus graue altero; relatio magnitudinis, à qua vnum ens dici potest magis, vel minus magnum altero.

Hæc vltima magnitudinis relatio (ex dictis vt opinor satis intelligibilis) nobis necessaria est, vt rectè exponamus sensum, in quo voces *proportio*, siue *ratio*, pro Logistica intelligendæ sunt: etenim eamdem omnino significationem habent in Logistica; & singulæ significant, quantitatem relatam ad alteram eiusdem generis quantitatem relatione magnitudinis.

Quantitas, quæ ad alteram refertur relatione magnitudinis, dicitur antecedens terminus proportionis; & differt à proportione, quantum quantitas, differt à quantitate relata relatione magnitudinis. Quantitas, ad quam antecedens terminus refertur relatione magnitudinis, dicitur consequens terminus proportionis. Proportio adæquatè diuiditur, in proportionem æqualitatis, & proportionem inæqualitatis: hęc vlterius subdiuiditur in proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, quibus Logistica addit rationes quas appellat in differentes, de quibus cōsuli potest index. Proportio ęqualitatis dicitur, in qua antecedens terminus, consequenti termino æqualis est. Exempli gratia 1 *ad* 1. Item 6 *ad* 6. Item 25 *ad* 25. sunt proportiones æqualitatis. Proportio maioris inæqualitatis, appellatur illa, in qua antecedens terminus est maior consequente termino. Exempli gratia 4 *ad* 2. Item 6 *ad* 4. Item 7 *ad* 5. sunt proportiones maioris inæqualitatis. Proportio minoris inæqualitatis, est illa, in qua antecedens terminus est minor consequente termino. Exempli gratia 2 *ad* 4. Item 4 *ad* 6. Item 5 *ad* 7. sunt proportiones minoris inæqualitatis. Quandoquidem verò quælibet proportio requirat duos terminos, manifestum est binas quaslibet proportiones necessariò habere quatuor terminos. Ex his quatuor terminis duarum proportionum, primus dicitur, qui in enuncianciandis proportionibus primo loco nominatur: & similiter secundus, vel tertius, vel quartus terminus appellatur; qui secundo, vel tertio, vel quarto loco nominatur, quando enunciantur, vel scribuntur tales duæ proportiones. Pari modo extremi proportionum termini dicuntur, qui in enunciandis proportionibus, primo, & postremo loco nominantur, reliqui termini dicuntur medij.

Omnes, & solæ istæ duæ proportiones dicuntur æquales inter se, quæ habent hanc proprietatem, vt quantitas producta ex illarum rationum primo termino, ducto in vltimum terminum, æquetur producto ex earumdem rationum secundo termino, ducto in tertium terminum. Quando duæ rationes sunt inter se æquales, illarum termini, dicuntur esse proportionales: & quando quatuor termini dicuntur esse proportionales, significatur quod constituant duas rationes inter se æquales: siue quod primus ad secundum, habeat eamdem rationem, quam tertius habet ad quartum. Supposito autem quod ex quatuor terminis, primus ad secundum habeat eamdem rationem, quam tertius habet ad quartum: duo diuersi casus possunt occurrere. Primus casus est, vt secundus, & tertius terminus constituantur à diuersis quantitatibus; & hoc casu quatuor isti termini dicuntur discretim proportionales. Secundus casus est, vt secundus, & tertius terminus coalescant, sic vt eadem quantitas constituat & primæ rationis terminum consequentem, & secundæ rationis terminum antecedentem; quo casu termini isti dicuntur continuè proportionales; & subinde considerantur, ac si tantum tres diuersi forent, in quantum à tribus diuersis quantitatibus constituuntur; subinde considerantur vt quatuor diuersi, in quantum constituunt omnes quatuor, duarum proportionum terminos. Exempli gratia. Duæ rationes, quarum prima est 2 *ad* 4, secunda 4 *ad* 8, spectant ad secundum casum; istarum rationum extremi termini sunt 2 & 8: idem verò numerus 4, constituit, tam secundum, quam tertium ex medijs terminis: & verum est, quod 2, 4, 8, sint termini continuè proportionales, in quantum ratio 2 *ad* 4 æqualis est rationi 4 *ad* 8.

Supposito quod ex quatuor terminis duarum proportionum, primus ad secundum, habeat eamdem rationem quam quartus habet ad tertium, isti quatuor termini dicuntur reciprocè proportionales. Exempli gratia, duæ proportiones, quarum prima est 4 *ad* 8, secunda 6 *ad* 3; sunt proportiones quorum termini sunt reciprocè proportionales: quia primus illarum terminus 4, ad secundum 8, habet eamdem proportionem, quam habet quartus terminus 3, ad tertium terminum 6.

PARS I.

Regula aurea, quæ aliter simplex proportionum; siue trium regula dicitur: & docet, datis tribus terminis, quartum proportionalem terminum inuenire.

HÆc regula, aurea dicitur, propter eius maximam *vtilitatem*. Trium regula appellatur, quia supponit datos tres terminos, ad quos quartum proportionalem docet inuenire. Ad hanc regulam pertinent, omnia, & sola illa quæsita, in quibus petitur terminus, qui cum datis tribus terminis constituit quartum proportionalem terminum. Hanc regulam, vt apud Arithmeticos practicos vsitatum est, non distinguimus in directam, & euersam; hæc enim distinctio necessaria non est, dummodo sciatur quis ex datis tribus terminis dicendus sit primus: quod præsertim difficultatem habere potest in nonnullis practicis quæstionibus, quarum solutio pertinet ad regulam auream; pro quibus.

Nota

Nota primò. Ex tribus datis terminis pro regula aurea, necessariò duo termini inter se conueniunt quoad restrictiones, siue(vt alij non malè loquuntur)agunt de eadem re; terminus verò reliquus necessariò, quoad restrictiones, conuenit cum quarto termino, qui inueniendus est. Præterea ex datis duobus terminis, qui inter se conueniunt quoad restrictiones, vnus annexam habere dicitur quæstionem; quis verò ille sit, facilè cognoscitur ex ipsa quæstione.

Nota secundò. In quæstionibus quarum solutio inuenitur per regulam aureã, distinguẽdus est duplex diuersus casus. Primus casus est, quando incrementum termini annexam habentis quæstionem, exigit incrementum termini quæsiti, quo casu ille terminus primus est, qui quoad restrictiones conuenit cum eo qui annexam habet quæstionem. Secundus casus est, quando incrementum termini habentis annexam quæstionem, requirit decrementum termini quæsiti; quo casu ille terminus primus est, qui habet annexam quæstionem.

Ad quem ex his casibus quæstio pertineat, facilè cognoscitur ex ipsa quæstionis intelligentia. Ad primum casum pertinent subsequentes quæstiones. Prima quęstio: 10 nummis emuntur mercium libræ 15, quot libræ ementur 24 nummis? Secunda quæstio, vno mense operarij 10 commedunt 90 panes, quot panes vno mense commedent 35 operarij? Tertia quæstio: explodendis 20 tormentis bellicis 150 pulueris nitrici libræ absumuntur, quot nitrici pulueris libræ absumentur explodendis 15 tormentis bellicis?

Ad secundum casum pertinent subsequentes quæstiones. Prima quęstio; ex castri annona 100 milites aluntur 18 mensibus, quot mensibus ex hac annona alentur 350 milites? Secunda quæstio; à 100 operarijs propugnaculum vel domus exstruitur 140 diebus, quot diebus extruetur à 180 operarijs? Tertia quæstio; à 12 hominibus vas ebibitur, puteus exhauritur, pecunia expenditur 23 diebus, quot homines requiruntur, vt 7 diebus vas ebibatur, puteus exhauratur, pecunia expendatur.

Regulæ aureæ variæ solutiones.

Prima solutio. Secundus terminus ducatur in tertium, atque hoc productum diuidatur per primum terminum; Quod ex hac diuisione oritur, erit quartus terminus proportionalis qui quæritur.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam $\frac{B \text{ in } C}{A} = D$.

Secunda solutio. Tertius terminus ducatur in secundum, atque hoc productum diuidatur per primum; quod oritur ex hac diuisione, erit quæsitus quartus terminus proportionalis.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam $\frac{C \text{ in } B}{A} = D$.

Tertia solutio. Secundus terminus diuidatur per primum, atque productum ex hac diuisione ducatur in tertium terminum; quod oritur ex hoc ductu, erit quartus terminus proportionalis quæsitus.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam $\frac{B}{A}$ *in* $C = D$.

Quarta solutio. Tertius terminus diuidatur per primum, atque productum ex hac diuisione ducatur in secundum terminum; quod ex hoc ductu oritur, erit quartus terminus proportionalis quæsitus.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam $\frac{C}{A}$ *in* $B = D$.

Quinta solutio. Primus terminus diuidatur per secundum, atque per productum ex hac diuisione diuidatur tertius terminus; quod oritur ex hac vltima diuisione, erit quartus terminus proportionalis, qui quæritur.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam C per $\frac{A}{B} = D$.

Sexta

Sexta solutio. Primus terminus diuidatur per tertium, atque per productum ex hac diuisione diuidatur secundus terminus; quod oritur ex hac vltima diuisione, erit quæsitus quartus terminus proportionalis.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam B per $\frac{A}{C}$ = D.

Septima solutio. Si primus terminus non est fractio aliqua, hoc est quantitas per aliam diuisa, ex illo fiat fractio, cuius denominator sit vulgaris vnitas: deinde fractio constituens primum terminum, prius inuertatur, atque deinde successiuè ducatur in secundum, & tertium terminum, sic enim prodibit quartus terminus proportionalis quæsitus.

Hoc est, si A ad B = C ad D, etiam $\frac{1}{A}$ in B in C = D.

Octaua solutio. Supposito quod dati tres termini sint rectę lineæ; assumpto quouis angulo XAZ, in vno eius crure AX notentur duo priores ex datis terminis AB & AC, & in altero crure notetur reliquus datus terminus AD: Deinde ducta recta BD, primi, & tertij termini extrema connectente, per prob. 4. cap. 6. ducatur illi parallela recta CE, secans rectam AZ in puncto E; erit recta AE quarta proportionalis quæsita. Figura 7.

Hoc est, peractis quæ præscribuntur, AB ad AC = AD ad AE.

Nona solutio. Supposito quod dati tres termini sint rectæ lineæ. Ducantur quæuis duæ rectæ lineæ XR & ZP, sese intersecantes in puncto A. Deinde in recta AX, notetur AB, quæ ex datis prima est; in recta AZ, notetur ex datis secunda AC; in recta AR, notetur ex datis tertia AD. Denique ducta recta BC, quæ primæ, & secundæ lineæ datæ extrema connectat, per prob. 4. cap. 6. ponatur illi parallela DE, secans rectam AP in puncto E; erit AE quarta proportionalis quæsita. Figura 8.

Hoc est, peractis, quæ præscribuntur, AB ad AC = AD ad AE

Decima solutio. Supposito quod dati tres termini sint rectæ lineæ. Ponantur quæuis duæ rectæ XR & ZP, sese intersecantes in puncto A. Deinde ex datis prima AB, notetur in recta AX, reliquæ duæ rectæ datæ AC & AD notentur in eadem recta ZP, vna quidem ex A versus Z, altera ex A versus P. Denique per problema 6. cap. 6. describatur circularis linea, transiens per tria puncta C, B, D, atque occurrens rectæ AR in aliquo puncto E: erit AE quarta proportionalis quæsita. Figura 9.

Hoc est, peractis, quæ præscribuntur AB ad AC = AD ad AE.

Vndecima solutio. Supposito quod dati tres termini sint superficies similes, vel certè tria corpora similia inter se. Primò, ex datis istis tribus quantitatibus accipiendo diametros, vel alias lineas rectas similiter in ipsis constitutas: prima recta linea sumpta ex data prima quantitate appelletur A; secunda recta linea sumpta ex secunda quantitate data vocetur B; tertia recta linea sumpta ex tertia data quantitate, sit C. Deinde per aliquam ex proximè præcedentibus solutionibus regulæ aureæ, ad tres lineas rectas A, B, C, inuenta quarta proportionalis sit D. Denique per prob. 15. cap. 6. vel aliter, inueniatur quãtitas, similis singulis tribus datis quantitatibus, in qua linea D constituta sit, quemadmodum in datis quantitatibus constitutæ sunt lineæ A, B, C; hæc erit quarta proportionalis quantitas quæsita.

PARS

PARS II.

De inuentione terminorum, qui in serie continuè proportionalium medij sunt, ex cognitione extremorum.

Problema I.

Inter datos duos extremos terminos inuenire vnum medium proportionalem terminum.

PRima solutio per numeros. Ex datis duobus extremis terminis, vnus in alterum ducatur: Deinde huius producti prima radix inueniatur; inuenta prima radix erit medius proportionalis terminus quæsitus.

Hoc est, qualescunque sint dati termini A & C, supposito quod B = R 1 q A in C, etiam A ad B = B ad C: eritque B medius proportionalis terminus, inter extremos A & C.

Secunda solutio per lineas. Primò, ex assumpta aliqua recta linea abscindatur pars X Z, æqualis rectæ A: & altera pars Z R, æqualis rectæ C, sic vt tota X R æquetur aggregato ex datis A & C: deinde diametro X R semicirculus describatur, atque, per prob. 1. cap. 6. ex puncto Z ducatur recta linea perpendicularis ad X R, descripti semicirculi circumferentiæ occurrens in puncto P: erit recta Z P media proportionalis quæsita. Figura 3.

Hoc est, peractis quæ præscribuntur, A ad Z P = Z P ad C.

Problema II.

Inter duos datos extremos terminos inuenire duos medios proportionales terminos.

PRima solutio per numeros. Primò, ex datis extremis terminis A & D fiat fractio, in qua maior datus terminus D, sit numerator, minor verò datus terminus A, sit denominator: huius fractionis secunda radix inueniatur, atque appelletur X. Deinde A ducendo in X, habebitur C: minor ex duobus medijs proportionalibus terminis quæsitis. Denique X ducendo in C, habebitur D: maior ex duobus medijs terminis proportionalibus qui petebantur; eritque verum, quod A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D.

Exempli gratia, dati extremi duo termini sint 2 et 16; fractio erit $\frac{16}{2}$; huius fractionis secunda radix est $\frac{2}{1}$; numerum 2 ducendo in radicem inuentam habetur 4: minor ex duobus medijs proportionalibus quæsitis. Rursus 4 ducendo in inuentam radicem, habetur 8: maior ex duobus quæsitis medijs proportionalibus terminis: eritque verum, quod 2 *ad* 4 = 4 *ad* 8 ll 8 *ad* 16.

Figura 4. Secunda ſolutio per lineas. Datæ extremæ A B, & A C, ponantur ad angulum rectum, & diametro B C deſcribatur ſemicirculus B A C. Deinde per prob. 1. cap. 6. ponantur rectæ B E, & C F, perpendiculares ad rectas B A & A C. Denique ſemicirculi B A C puncto A imponatur recta regula, quæ eumdem ſemicirculum iterum ſecet in puncto D: rectis verò B E & C F occurrat in punctis E & F: ità vt recta E D ſit æqualis rectæ A F. His peractis, rectæ A B, B E, C F, A C erunt continuè proportionales, adeòque inter datas duas extremas A B, & A C: duæ mediæ proportionales erunt B E, & C F.

Problema III.

Inter datos duos extremos terminos, quotcunque medios proportionales terminos inuenire.

PRima ſolutio per numeros. Primò, ex datis extremis terminis A & H, fiat vulgaris fractio, in qua H, maior ex datis extremis terminis, ſit numerator: & A, minor ex datis extremis terminis, ſit denominator; huius fractionis inueniatur radix, cuius denominator contineat tot vnitates, quot medij proportionales termini deſiderantur. Deinde, ducendo A in radicem inuentam, habetur minor ex deſideratis medijs proportionalibus terminis: quem rurſus ducendo in radicem inuentam, producitur alter terminus proximè ſubſequens prius inuentum: & hunc iterum ducendo in radicem inuentam, producitur alius, priorem proximè ſubſequens: atque ità deinceps.

Exempli gratia. Dati termini, inter quos inueniendi ſunt quatuor medij proportionales, ſint 9, & 2187. fractio erit $\frac{2187}{9}$; huius fractionis quarta radix erit 3; ducendo 9 *in* 3, habetur 27, minor ex quæſitis quatuor medijs proportionalibus; rurſus ducendo 27 *in* 3, habetur 81; rurſus ducendo 81 *in* 3, producitur 243; rurſus ducendo 243 *in* 3, habetur 729; eritque verum, quod 9, 27, 81, 243, 729, & 2187, ſint continuè proportionales.

Figura 5. Secunda ſolutio per lineas. Hæc ſolutio ſupponit inſtrumentum, compactum ex duabus regulis, & pluribus normis, illis inſertis iuxtà ſubſequentes leges. Primò, vt duæ regulæ A X, & A Z moueantur circa centrum A, per quod productum tranſeat, tam regulæ A Z, quam regulæ A X, latus internum. Secundò, vt ſingulæ normæ ſemper angulum rectum faciant cum latere interno regulæ, cui inſiſtunt. Tertiò, vt primæ, & ſecundæ, hoc eſt centro A viciniorum duarum normarum externa latera, in eodem puncto ſecent internum latus regulæ A Z: & rurſus ſecundæ, & tertiæ normæ externa latera, in eodem puncto ſecent internum latus regulæ A X; atque ità de cæteris.

Suppoſito hoc inſtrumento, quod vnam amplius normam continere debet, quam ſint mediæ proportionales inueniendæ; prius, in regulæ A X interno latere notetur recta A B, æqualis minori ex datis extremis lineis: atque in eodem latere regulę (ſi deſiderati termini medij imparem numerum conſtituant, vel ſi parem numerum conſtituant, in latere interno regulæ A Z) notetur A G ęqualis maiori ex datis extremis lineis. Deinde diſpoſita prima norma, vt extimum eius latus concurrat in puncto B: magis aperiendo, vel claudendo regulas, efficiatur, vt vltimæ rimæ normæ extimum latus transeat per punctum G; Denique his manentibus, notentur, in lateribus interioribus regularum A X & A Z, puncta, in quibus hæc latera intersecantur à duobus externis lateribus normarum: sintque hæc puncta, exempli gratia quatuor, nimirum C, D, E, F: erunt A C, A D, A E, A F, quatuor medij termini proportionales, inter datos extremos A B, & A G: eruntque lineæ A B, A C, A D, A E, A F, A G continuè proportionales. Figura 5.

Nota primò. Inter datas quaslibet duas rectas lineas inuenirè vnam mediam proportionalem: problema est, quod Euclides in suis Geometriæ elementis docet propositione 13. lib. 6. Inter datas quaslibet duas rectas lineas inuenire duas medias proportionales: problema est, quod in Euclideis Elementis non inuenitur. Eutocius tamen, in commentarijs in Archimedem, recenset varias huius problematis solutiones: Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratosthenis, Philonis Bisantij, Heronis, Apollonij Pergæi, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi. Problema enim hoc celeberrimum est. Platonis hortatu, eius solutioni, summo studio, incubuerunt omnes Græciæ Geometræ; inter quos tamen, neque etiam post ipsos, inuentus est aliquis, qui eius solutionem adduxerit, pro qua sufficiat solus circinus, & regula, propria strictioris Geometriæ instrumenta: hæc tamen instrumenta sufficiunt vt inter datas rectas inueniatur vna media proportionalis: quare, inter datas duas rectas, inuentio vnius mediæ proportionalis, superius proposita, pertinet ad strictiorem Geometriam. Inuentio duarum, aut quotlibet mediarum proportionalium, hic exposita, legitima quidem est, sed tamen non est talis, quæ sufficiat pro strictiori Geometria.

Nota secundò. Inter datos quoslibet duos vulgares numeros, aut vnum, aut duos, aut plures medios proportionales numeros inuenire, non rarò impossibile est: nimirum quoties ad hoc non sufficiunt, à nobis hic adductæ, praxes; hoc est, quotiescunque vulgaribus numeris exprimi non potest ea proportio, quam habet minor ex datis extremis terminis, ad minorem ex desideratis medijs proportionalibus. Exempli gratia. Si dati numeri sint, 2, & 4: inter hos numeros vnus medius proportionalis, atque vulgaris numerus inueniri non poterit, iuxtà superiores praxes: idque nulla alia praxi fieri potest: sed est prorsus impossibile.

Nota tertiò. Licet impossibile sit inter numeros 2, & 4 inuenire medium proportionalem, vt diximus in secunda nota: & tamen inter rectas lineas, quarum prior duos, altera quatuor palmos adæquet, facilè inueniatur media proportionalis linea, non adhibitis nisi exactissimis, atque commodissimis instrumentis, strictiori Geometriæ proprijs, vt dicitur in prima nota: tamen pro praxi, in qua nihil aliud curatur, quam à veritate minus aberrare, siue vt magis accurata sit: consultum non arbitror inuentionem medij proportionalis termini, per rectas lineas, præferre inuentioni eiusdem medij proportionalis, per numeros vulgares, dummodo adhibeatur cap. 5. assignatum praxis 3. quæ docet inuenire radicem compositam ex integro, & fracto vulgari numero. Quod si verum est de vnius medij proportionalis termini inuentione, quæ in lineis tam præstans est, vt in illa nihil amplius desideret Geometria, atque in omni rigore geometrico exacta est, & facillimè reducibilis ad praxim: quanto potiori iure, in ordine ad praxim, præferendæ sunt plurium mediorum terminorum inuentiones, per vulgares numeros, reliquis praxibus, quæ hos medios terminos docent per lineas inuenire, pro quibus non sufficit circinus, & regula; neque facillimè ad praxim sunt reducibiles.

Nota quartò. Vt instrumentum paulò antè propositum, & breuiter descriptum pro inueniendis quotlibet medijs proportionalibus, commodius euadat pro vsu practico: atque facilius habeatur circumstantia planè necessaria, quæ requirit, vt in eodem puncto interioris lateris regulæ A Z sese intersecent duo concurrentium normarum latera, quæ ſingula æquiualenter interna ſint, vel externa: fortaſſis expediret adhibendas normas ità fabricare, vt repræſentatur in figura: nimirum, vt latus internum H I, ſit in directum cum externo latere K L: vt facilè poterit aduertere quiſquis voluerit pro practico vſu conſtruere huiuſmodi inſtrumentum. Figura 6.

CAPVT IV.

De elementaribus æquationum remedijs.

PRoponuntur hoc capite nonnullæ praxes, vtiles vt propoſita æquatio ordinetur, contrahatur, examinetur, liberetur à particula *ad*, *per*, *in*, aut remouenda dignitate, atque ſimplicior fiat, vel commodior.

Praxis I.

Antitheſis maximè vtilis pro ordinanda æquatione.

HÆc praxis, etiam in Logiſtica, proprimum nomen habet, atque appellatur Antitheſis: vtilis eſt ad ordinandam æquationem, ſic vt omnes dignitates, quæ inter ſe diuerſæ non ſunt, inueniantur in eadem æquationis parte: & generaliter vt non vitiando æquationem, ab vna eius parte ad oppoſitam partem transferri poſſit membrum, quod in tali parte moleſtum eſt, vel non placet. Eſt verò Antitheſis, translatio quantitatis ſub contrario ſigno, ab vna æquationis parte, ad partem oppoſitam: per quam translationem non vitiatur æquatio.

Quoties, per Antitheſim, placet, ex vna æquationis parte, aliquam quantitatem transferre: per hanc translationem non vitiabitur æquatio, dummodò obſeruentur hæc duo præcepta. Primò, vt ſi quantitas transferenda, cum altera quantitate connexa ſit particula *in*, vel *per*, vel *ad*, tunc ſimul transferantur, quæ hoc modo ſimul connexa ſunt. Secundò, vt ſignum mutetur in oppoſitum, in ſolis quantitatibus, vel præcedentibus, vel ſubſequentibus particulã qua cõnexæ sũt.

Exempli gratia. Quandoquidem $3 + 2 = 5$, per Antitheſim legitimè infertur, quod $2 = 5 - 3$. Vel etiam quod $3 = 5 - 2$. Similiter quia $3 + 4 = 12 - 5$, per Antitheſim ſequitur quod $3 + 4 + 5 = 12$. Pari modo, ſuppoſito quod $A + B = C$, per Antitheſim legitimè infertur, tum quod $A = C - B$: tum quod $B = C - A$. Rurſus, ſuppoſito quod A *et* † B *in* C = D: per Antitheſim legitimè infertur, tum quod A = D *et* − B *in* C: tum quod A = D *et* † B *in* − C. Rurſus, ſuppoſito quod A *et* † B *per* C = D, per Antitheſim legitimè infertur, tum quod A = D *et* − B *per* C: tum quod A = D *et* † B *per* − C. Rurſus, ſuppoſito quod 2 *ad* 4 † 8 *ad* 4 = 10 *ad* 4: per Antitheſim legitimè infertur quod 2 *ad* 4 = 10 *ad* 4 − 8 *ad* 4; item quod 2 *ad* 4 = 10 *ad* 4 † 8 *ad* − 4.

Praxis II.

Mutatio ſignorum in oppoſita.

HÆc praxis propriũ nomen nõ habet: vtilis eſt, vt quoties in aliqua æquatione placet quantitatem aliquam contrario ſigno afficere, hoc ità fieri poſſit, vt non

non vitietur æquatio. Pro praxi obserua, vt mutando signum in oppositum in vna aliqua quantitate, quæ in æquatione inuenitur: etiam in singulis alijs quantitatibus, quæ in eadem æquatione inueniuntur, mutetur signum in oppositum: ità tamen, vt ex quantitatibus particula *in*, vel, *per*, vel *ad* connexis, vna tantum patiatur hanc signi mutationem. reliquæ suum signum retineant; sic enim mutando signa, non vitiatur æquatio.

Exempli gratia, supposito quod A = B, iuxtà hanc praxim legitimè infertur − A = − B. Rursus, supposito quod A − B = C, iuxtà hanc praxim legitimè infertur quod − A † B = − C. Rursus, supposito quod A *et* † B *in* C = D, legitimè infertur quod − A *et* − B *in* C = − D: & præterea quod − A *et* † B *in* − C = − D. Rursus, supposito quod A *et* † B *per* C = D, legitimè infertur − A *et* − B *per* C = − D: & præterea quod − A *et* † B *per* − C = − D. Rursus, supposito quod A *in* B *in* C = D, legitimè infertur quod − A *in* B *in* C = − D: & præterea, quod A *in* − B *in* C = − D: & denique quod A *in* B *in* − C = − D.

Praxis III.

Contractio, & productio scriptionum continentium particulam *in*, vel *per*.

PRaxis agit de casu in quo vna, vel vtraque ex quantitatibus affectis particula *in*, vel *per*, constat ex pluribus quantitatibus connexis signo † vel −: quo casu potest vnica particula *in*, vel *per*, significari illud idem, quod etiam potest significari pluribus particulis *in*, vel *per*. Hoc verò casu contrahere scriptionem, aliud non est, quam vnica particula *in*, vel *per*, significare, quod potest significari pluribus huiusmodi particulis. Producere verò scriptionem, aliud non est, quam adhibitis pluribus particulis *in*, vel *per*, significare, quod indicari potest vnica huiusmodi particula. Ex sequentibus exemplis fit satis manifestum quomodo fiat hæc scriptionum contractio, vel productio, supposita intelligentia scriptionum.

Exempli gratia. Contractæ scriptioni A † B *in* C, æquiualet producta scriptio A *in* C *et* † B *in* C. Rursus, contractæ scriptioni A † B *in* C − D, æquiualet producta scriptio A *in* C *et* † A *in* − D *et* † B *in* C *et* † B *in* − D. Rursus, contractę scriptioni A † B *per* C, æquiualet productior scriptio A *per* C *et* † B *per* C. Rursus, contractæ scriptioni A † B *per* C − D, æquiualet productior scriptio A *per* C *et* † A *per* − D *et* † B *per* C *et* † B *per* − D.

Praxis IV.

Mutatio particulę *per* in particulam *in*, aut viciſſim, retento scriptionis valore.

POtiſſimum vtile est particulam *per* mutare in particulam *in*: quia particula *per* molestior est. Vt hoc constet, sufficit considerare fractionum diuisionem, declaratam in parte 3. cap. 2. quæ multiplicatione absoluitur, mutando prius particulam *per* in particulam *in*. Vt particula *per* mutetur in particulam *in*, si terminus

nus subsequens particulam *per*, nōn est fractio, fiat ex illo fractio, quæ pro denominatore habeat vulgarem vnitatem: deinde terminus subsequens particulam *per* prius inuertatur, ac interposita particula *in* connectatur cum altero termino, qui præcedebat particulam *per*. Contrarium fiat, si particula *in* mutanda sit in particulam *per*.

Exempli gratia, scriptio A *per* B, æquiualet scriptioni A *in* $\frac{1}{B}$. Rursus, A † B *per* C = A † B *in* $\frac{1}{C}$. Rursus, A † B *per* C † D = A † B *in* $\frac{1}{C \dagger D}$.

Praxis V.

Modus liberandi vnam æquationis partem à particula *in*, vel *per*.

Maximè vtilis est hæc praxis pro ordinanda æquatione, sic vt cognita ab incognitis separata habeantur, quoties in æquatione simul connexa inueniuntur particula *in*, vel *per*.

Praxis supponit, quod quidquid in vna æquationis parte inuenitur, affectum sit particula *in*, vel *per*: hoc supposito, relinquendo in vna æquationis parte, alterutrum ex terminis particula *in* connexis, vel terminum qui præcedit particulam *per*: alter terminus ad oppositam æquationis partem trasferatur, & cum omnibus, quæ in hac parte inueniuntur, connectatur particulà *in*, si prius connectebatur particulà *per*: vel certè particula *per*, sic vt hanc particulam sequatur, si prius connectebatur particula *in*.

Exempli gratia. Supposito quod A *in* B = C, iuxtà hanc praxim A = C *per* B: & etiam B = C *per* A. Rursus, supposito quod A † B *in* C = D † E: iuxtà hanc praxim, A † B = D † E *per* C: & etiam C = D † E *per* A † B. Rursus, supposito quod A *per* B = C, iuxtà hanc praxim A = C *in* B. Rursus, supposito quod A † B *per* C = D † E, iuxtà hanc praxim, A † B = D † E *in* C.

Praxis VI.

Modus liberandi æquationem à particulis *ad*, eas mutando in particulas *in*: aut viciſſim.

Frequens huius praxeos vsus recurrit: vtilis enim est vt ex æquatione consistente inter proportiones, inferatur æquatio consistens inter quantitates, diuersas à proportionibus: aut viciſſim.

Vt æquationis particulæ *ad* mutentur in particulas *in*: duo extremi datæ æquationis termini, particula *in* connexi, ponantur in vna parte æquationis: & reliqui duo termini, particula *in* connexi, ponantur in altera parte æquationis: sic habetur noua æquatio, sed liberata à particulis *ad*.

Vt æquationis particulæ *in* mutentur in particulas *ad*, (supposito tamen quod particulis *in* afficiatur quidquid in illa data æquatione inuenitur) ex duobus terminis, particula *in* connexis in vna parte æquationis, vnus fiat primus alter vltimus inter terminos particulis *ad* connexos, reliqui duo particula *in* prius connexi fiant medij inter terminos particula *ad* connexos.

Exem-

Exempli gratia. Supposito quod A *ad* B = C *ad* D, iuxtà hanc praxim legitimè sequitur A *in* D = B *in* C, & vicissim. Rursus, supposito quod A † B *ad* C *per* D = E *in* F *ad* G, iuxtà hanc praxim legitimè infertur quod A † B *in* G = $\frac{E \text{ in } F \text{ in } C}{D}$, vel A † B *in* G = E *in* F *in* $\frac{C}{D}$.

Praxis VII.

Modus liberandi terminos proportionis à particula *per*.

Triplex est casus in quo hæc praxis maximè vtilis est. Primus casus est quando alicuius proportionis termini sunt fractiones habentes eumdem denominatorem. Secundus casus est, quando alicuius proportionis termini sunt fractiones habentes eumdem numeratorem. Tertius casus est quando alicuius proportionis termini sunt fractiones habentes diuersos, & numeratores, & denominatores.

In primo casu, primus numerator ad secundum numeratorem habet eamdem proportionem, quam habet prima fractio ad secundam. Exempli gratia $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{B}$ = A *ad* C.

In secundo casu, secundus denominator ad primum denominatorem habet eamdem proportionem, quam prima fractio habet ad secundam. Exempli gratia $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{A}{C}$ = C *ad* B.

In tertio casu, primus numerator, particula *in* connexus cum secundo denominatore, ad secundum numeratorem, particula *in* connexum cum primo denominatore, habebit eamdem proportionem, quam prima fractio habet ad secundam fractionem. Exempli gratia $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{D}$ = A *in* D *ad* C *in* B.

Praxis VIII.

Modus inferendi æquationem consistentem inter cognitam, & incognitam quantitatem, hoc est inter vnum, vel plures numeros denominatos, & numerum vulgarem: ex æquatione consistente inter solos denominatos numeros habentes eamdem dignitatem, sed diuersos denominatores.

Notà claritatis gratia, quod 3 A 1 diuidendo per A 1 producatur 3. similiter 12 A 2 diuidendo per A 2, producatur 12. Iuxtà diuisionem partis 4. cap. 2. Datæ æquationis singuli numeri denominati, diuidantur per numerum denominatum, qui pro numeratore habeat vnitatem, & quoad dignitatem, atque denominatorem conueniat cum numero denominato propositæ æquationis, qui habet denominatorem minorem. Sic enim habebitur quæsitum.

Exem-

Exempli gratia. Supposito quod 4A3 = 16 A1, singula diuidendo per A1, legitimè infertur, ergo 4 A 2 = 16. Rursus supposito quod 2 A 3 − 3 A 2 = 4 A 1, singulos numeros diuidendo per A 1, legitimè sequitur, ergo 2 A 2 − 3 A 1 = 4. Rursus supposito quod 4 A 6 † 6 A 4 = 20 A 2, Singulos numeros denominatos diuidendo per A 2, benè infertur, ergo 4 A 4 † 6 A 2 = 20.

Praxis IX.

Expositio scriptionis Logisticæ per numeros vulgares.

HÆc praxis vtilis est, vt appareat in numeris vulgaribus, an vera sit, vel falsa, proposita æquatio, vel vt clarè cognoscatur valor propositæ scriptionis.

Primò. Separatim, sub voce hypothesis, scribantur singulæ dignitates contentæ proposita scriptione, atque ipsis adscribātur valores expressi numeris vulgaribus. Secundò, singulis membris propositæ scriptionis Logisticæ, subscribatur valor ex notata hypothesi facilè cognoscibilis: atque hi valores connectantur particula *per*, *in*, *ad*, *et*, afficianturque signis † vel −, vt in proposita scriptione connexa, vel affecta sunt membra quibus æquiualent: sic enim habebitur secunda scriptio, primæ atque propositæ scriptioni æquiualens, sed liberata ab omnibus dignitatibus. Tertiò, per praxes antecedentes, singulis membris huius secundæ scriptionis, subscribatur eius valor liberatus à particulis *in*, *per*, *ad*, sic vt solis signis † vel − connectantur. Quartò, huius postremæ scriptionis valores in vnam summam colligendo, per additionem partis 4. cap. 2. habebitur simplex vulgaris numerus, propositæ scriptioni æquiualens. Hunc valorem inuenire, illud est, quod hic dicimus scriptionem Logisticam exponere.

Exempli gratia, exponenda sit vtraque pars, hic ad latus scriptæ æquationis: vt constet an vera sit, in hypothesi, quod X = 5 : & Z = 2: etenim in assertione tertia primæ hypothesis cap. 8. asseritur quod semper vera sit, qualescunque numeros inter se inæquales significent X & Z. Præmissa hac prima scriptione, secunda scriptio, nullas dignitates inuoluens, erit 5 † 2. *q* = 25 † 4 *et* † 5 *in* 4. Tertia scriptio, sola signa † vel − continens, erit, 49 = 25 † 4 † 20. vltima scriptio prioribus æquiualens erit 49 = 49.

Hypothesis	*Æquatio*
X = 5	X † Z*q* = X 2 † Z 2 *et* † X *in* 2 Z
Z = 2	5 † 2 *q* = 25 † 4 *et* † 5 *in* 4
	49 = 25 † 4 † 20
	49 = 49

CAPVT V.

De inuentione radicum, numerorum vulgarium integrorum, aut fractorum.

VVlgaris numeri A, radix appellatur, omnis & solus numerus, qui habet hanc proprietatem, vt semel, aut successiuè sæpius in se ductus, producat numerum A. Hæ numerorum radices distinguuntur in primas, secundas, tertias, quartas, quintas, &c. Si enim numerus B semel in se ductus producat numerum A: erit numerus B, radix prima numeri A. Hinc numerus 3, est radix prima numeri 9; adeòque

que 3 = R1q9. Si numerus B, bis in se ductus, producat numerum A: erit numerus B, radix secunda numeri A; hinc numerus 3, est radix secunda numeri 27: quare 3 = R2q27. Si numerus B tertiò ductus in seipsum producat numerum A, erit numerus B, radix tertia numeri A; quare numerus 3, est radix tertia numeri 81: & verum est, 3 = R3q81. Similiter atque vniuersaliter verum est, quod denominator radicalis numeri indicet, quoties radicalis numerus in se ducendus sit, vt producat illum numerum cuius radix dicitur, quique scriptus est post literam *q*. Licet quilibet vulgaris numerus possit esse, aut prima, aut secunda, aut alia cuiusuis nominis radix, alicuius alterius numeri vulgaris: tamen non quilibet numerus vulgaris habet radicem cuiusuis nominis; sic ex omnibus numeris minoribus denario, tres tantum habent radicem primam: nimirum 1, 4, 9, & duo tantum habent radicem secundam: nimirum 1, & 8.

Vt cognito vulgari numero B, inueniatur numerus A, cuius prima, aut secunda, aut tertia, aut alia cuiuscunque nominis radix sit numerus B, sufficit vulgarium numerorum multiplicatio. Vt viciffim, cognito numero vulgari A, inueniatur numerus vulgaris B, qui sit prima, aut secunda, aut alia propositi nominis radix numeri A: non ità facilè est, sed numeratur inter difficiliora, quæ docet vsitata Arithmetica practica, tametsi vix consideret alias radices, quam primas, quæ passim quadratæ dicuntur: & secundas, quæ aliter dicuntur cubicæ. Hanc radicum inuentioni annexam difficultatem, superandam suscepimus hoc capite: non quocunque modo: sed ità, vt eadem omninò praxis, quæ pro inueniendis primis radicibus vtilis est, etiam sufficiat ad inueniendam quamcunque aliam propositi alterius nominis radicem, quam habet datus vulgaris numerus.

Vt eadem praxis, siue regula, vniuersalis sit, atque sufficiat, ad inueniendam quamlibet cuiusuis nominis radicem: duas tabellas adhibemus. Prima est, tabella radicum simplicium, siue vnica nota Arithmetica exprimibilium: quæ tabella seruit, vt commodius inueniatur prima nota Arithmetica desideratæ radicis. Altera est tabella formularum, quæ continet aliquas scriptiones Logisticas maximè commodas, vt inueniatur desiderati radicalis numeri quælibet nota diuersa à prima. Has duas tabellas prius exhibemus. Deinde proponimus tres praxes: prima docet tabellarum vsum, vt inueniatur propositi cuiuslibet vulgaris integri numeri radix, cuiuscunque nominis, atque exprimibilis vulgari integro numero. Secunda praxis proponit inuentionem radicis cuiuscunque nominis, quam habet proposita vulgaris fractio. Tertia praxis exponit appropinquationem ad veram radicem, quando propositus numerus non habet veram, siue exactam radicem vulgari numero exprimibilem. Denique quia tabellis, quæ à nobis proponuntur, tantum continentur requisita, pro inueniendis numeris radicalibus, quorum denominator non continet plures quam quinque vnitates: tradimus modum construendi, atque ad alios quoscunque numeros extendendi propositas tabellas.

TABELLA I.

Radicum simplicium, quæ exprimi possunt vnica nota Arithmetica.

Valor	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R1q	1	4	9	16	25	36	49	64	81
R2q	1	8	27	64	125	216	343	512	729
R3q	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
R4q	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
R5q	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441

TABELLA II.

Formularum, pro inueniendis notis quotientis, quæ à prima diuersæ sunt.

Pro R1. 20A *in* B *et* † B2.

Pro R2. 300A2 *in* B *et* † 30A *in* B2 *et* † B3.

Pro R3. 4000A3 *in* B *et* † 600A2 *in* B2 *et* † 40A *in* B3 *et* † B4.

Pro R4. 50000A4 *in* B *et* † 10000A3 *in* B2 *et* † 1000A2 *in* B3 *et* † 50A *in* B4 *et* † B5.

Pro R5. 600000A5 *in* B *et* † 150000A4 *in* B2 *et* † 20000A3 *in* B3 *et* † 1500A2 *in* B4 *et* † 60A *in* B5 *et* † B6.

Praxis I.

Pro inuenienda vulgaris integri numeri radice, cuiusuis nominis.

HÆc praxis vtilis est, vt inueniatur propositi vulgaris numeri integri radix cuiusuis nominis, si illam radicem habeat, vel certè vt inueniatur talis nominis radix proximè minor atque integro vulgari numero exprimibilis, quando non habet desideratam radicem.

Praxis continet duas diuersas partes. Prior docet inuenire desideratæ radicis, siue quotientis, primam notam Arithmeticam, altera docet inuenire eiusdem quotientis reliquas notas, quæ primam subsequuntur.

Pri-

Prima pars, primæ praxeos.

Inuentio primæ notæ quotientis: & illius numeri, ex quo colligenda est secunda quotientis nota Arithmetica.

PRimò. Incipiendo à fine, propositus numerus vulgaris diuidatur in membra: quæ singula vnam notam amplius contineant, quam sint vnitates contentæ denominatore radicis inueniendæ; membrum tamen à fine vltimum, adeòque primum: non plures, sed pauciores continere potest notas Arithmeticas.

Secundò. In prima radicum simplicium tabella, ad latus literæ R, quæ appositum habet denominatorem desideratæ radicis, inueniatur, aut primum propositi numeri membrum; aut si hoc desit, inueniatur hoc membro proximè minor numerus.

Tertiò. Inuento in prima tabella numero, supernè respondens valor, erit prima nota scribenda in quotiente: ipse verò inuentus numerus primo membro subscribendus est, atque ex illo auferendus, notando residuum quod remanet ex hac subtractione: huic residuo successiuè apponendo secundum propositi numeri membrum, habebitur numerus ex quo colligenda est subsequẽs nota quotientis.

Secunda pars, primæ praxeos.

Inuentio cuiusuis notæ quotientis, diuersæ à prima, & numeri ex quo colligenda est subsequens nota quotientis.

NOtandum, quod in formulis secunda tabella contentis, litera B, significet, siue repræsentet notam Arithmeticam, quæ quæritur mediante hac secunda parte: vnde valor literæ B, nihil est aliud quam ipsa nota Arithmetica, ex proposito numero colligenda, atque in quotiente scribenda; ex quo fit, quod valor literæ B nunquam possit esse maior quam 9. Valor probabilis literæ B, dicitur illa nota Arithmetica, quæ non imprudenter credi potest verus valor, adeòque meretur examinari vtrum sit verus valor.

Primò inueniatur valor probabilis literæ B; in quem finem fiat hypothesis, quod litera A, significet totum numerum hactenus scriptum in quotiente (siue vna, siue pluribus notis Arithmeticis constet) atque in hac hypothesi inueniantur valores omnium dignitatum A, quæ continentur formula secundæ tabellæ, quæ seruit pro inuenienda radice desiderata. Inuenti valores in vnam summam colligantur: nota Arithmetica indicans quoties hæc summa contineatur in numero, ex quo colligenda est nota Arithmetica quæ inquiritur, erit valor probabilis literæ B.

Secundò. Examinetur vtrum inuentus valor probabilis literæ B, sit eius verus valor. Pro quo fiat hypothesis, supponens quod B, æquetur valori probabili iam inuento: quodque A æquetur toti numero hactenus scripto in quotiente; in hac hypothesi, inueniatur, atque in vnam summam colligatur valor totius formulæ; hæc summa si subtrahi potest ex numero, ex quo nota colligenda est, tunc adhibitus probabilis valor literæ B, erit verus valor literæ B. Si verò subtrahi non potest, tunc assumptus valor literæ B, non erit verus valor literæ B: sed verus valor minor est valore probabili supposito in hypothesi. Quare pro probabili valore literæ B, alius vnitate minor erit assumendus, atque examinandus vtrum verus sit.

Tertiò. Inuentus verus valor literæ B, scribatur in quotiente, vbi constituet notam, quæ inquiritur; inuentus verò totius formulæ valor, subtrahatur ex numero, ex quo colligenda erat nota quotientis, quæ inquirebatur; residuo ex hac subtractione producto, successiuè adscribatur totum subsequens membrum numeri cuius radix inquiritur: sic enim habebitur numerus, ex quo colligenda est subsequens altera nota quotientis.

Hæc secunda pars propositæ praxeos, iteranda est pro singulis notis, quæ in quotiente primam subsequuntur; in quotiente verò vniuersim contineri debent tot notæ, quot sunt membra contenta proposito numero in membra diuisio, vt docetur initio primæ partis huius regulæ. Si post adhibita singula membra residuus manet aliquis numerus, rectè concluditur quod inuentus pro quotiente numerus, non sit radix propositi numeri, sed tantum sit radix proposita numeri, qui remanet, quando ex proposito numero aufertur prædictum residuum: quodque propositus numerus non habeat eam radicem, quæ inquirebatur.

Exempla propositæ praxeos.

I. PRo exemplo primæ radicis. Propositus numerus cuius prima radix inueniri debet sit 522729.

Primò. Quotientis, siue radicis prima nota, quæ est 7, habetur immediatè ex prima tabella.

Secundò. Pro quotientis secunda nota, quæ est 2. seruit huiusmodi discursus. A = 7: ergo 20A = 140: ergo B = 2: ergo tota formula 20 A *in* B *et* † B2 = 140 *in* 2 *et* † 4 ll 284.

Numerus datus	*Quotiens, siue radix*
52,27,29	723
49	
327	
284	
4329	
4329	
0	

Tertiò. Pro quotientis tertia nota, quę est 3. Seruit hic discursus. A = 72: ergo 20A = 1440: ergo B = 3: ergo tota formula quæ est 20A *in* B *et* † B2 = 1440 *in* 3 *et* † 9 ll 4329.

II. PRo exemplo secundæ radicis. Propositus numerus, cuius secunda radix quęritur, sit 377933067.

Primò. Quotientis prima nota, quæ est 7, habetur immediatè ex prima tabella.

Secundò. Pro quotientis secunda nota, quæ est 2. seruit hic discursus. A = 7: ergo 300A2 † 30A = 14700 † 210 ll 14910: ergo B = 2: ergo tota formula, quæ est 300 A2 *in* B *et* † 30 A *in* B2 *et* † B3 = 14700 *in* 2 *et* † 210 *in* 4 *et* † 8 ll 30248.

Numerus datus	*Quotiens, siue radix*
377,933,067	723
343	
34933	
30248	
4685067	
4685067	
0	

Tertiò. Pro quotientis tertia nota, quæ est 3. seruit talis discursus A = 72: ergo

300

300A2 † 30A = 1555200 † 2160 ll 1557360: ergo B = 3: ergo tota formula, quæ est 300A2 *in* B *et* † 30A *in* B2 & † B3 = 1555200 *in* 3 *et* † 2160 *in* 9 *et* † 27 ll 4685067.

III. PRo exemplo tertiæ radicis. Propositus numerus cuius tertia radix quæritur, sit 80102584576.

Primò. Quotientis prima nota, quæ est 5, habetur immediatè ex prima tabella.

Secundò. Pro quotientis secunda nota, quæ est 3. seruit talis discursus. A = 5: ergo 4000A3 † 600A2 † 40A = 500000 † 15000 † 200 ll 515200: ergo B = 3: ergo tota formula, quæ est 4000A3 *in* B *et* † 600A2 *in* B2 *et* † 40A *in* B3 *et* † B4 = 500000 *in* 3 *et* † 15000 *in* 9 *et* † 200 *in* 27 *et* † 81 ll 1640481.

Numerus datus	*Quotiens, siue radix*
801,0258,4576	532
625	
1760258	
1640481	
119774576	
119774576	
0	

Tertiò. Pro quotientis tertia nota, quæ est 2. seruit sequens discursus A = 53: ergo 4000A3 † 600A2 † 40A = 595508000 † 1685400 † 2120 ll 597195520: ergo B = 2: ergo tota formula, quæ est 4000A3 *in* B *et* † 600A2 *in* B2 *et* † 40A *in* B3 *et* † B4 = 595508000 *in* 2 *et* † 1685400 *in* 4 *et* † 2120 *in* 8 *et* † 16 ll 1197774576.

Praxis II.

Pro inuenienda cuiusuis nominis radice, quam habet proposita vulgaris fractio.

PRimò. Data fractio reuocetur ad minimos terminos per praxim 2. partis 3. capitis 2. Deinde per praxim antecedentem inueniatur radix propositi nominis, quam habet numerator datæ fractionis, sic enim habebitur nouus numerator. Similiter inueniatur radix eiusdem nominis, quam habet denominator datæ fractionis; sic enim habebitur nouus denominator. Denique inuentus nouus numerator, cum inuento nouo denominatore constituet fractionem quæsitam, quę erit datæ fractionis radix propositi nominis.

Ex. gr. Primò proposita fractio cuius prima radix quæritur, sit $\frac{49}{100}$. Quoniam R1q49 = 7: & præterea R1q100 = 10: etiam radix prima quęsita erit $\frac{7}{10}$: eritque verum, quod $\frac{7}{10}$ = R1q$\frac{49}{100}$. Secundò. Proposita fractio cuius secunda radix quæritur, sit $\frac{27}{64}$: quoniam R2q27 = 3: & prętcrea R2q64 = 4: quæsita radix erit $\frac{3}{4}$; eritque verum, quod $\frac{3}{4}$ = R2q$\frac{27}{64}$. Tertiò, proposita fractio cuius radix tertia petitur, sit $\frac{16}{81}$: quoniam R3q16 = 2 : & præterea R3q81 = 3 : etiam quæsita radix erit $\frac{2}{3}$; eritque verum, quod $\frac{2}{3}$ = R3q$\frac{16}{81}$.

Nota. Quod notabilis, & maxima differentia inueniatur, inter fractiones constantes minimis terminis, & fractiones non constantes minimis terminis; etenim si proposita fractio constet minimis terminis: etiam per expositam praxim inuenietur quæsita eius radix, si eam radicem

habeat

habeat. Si verò fractio proposita non constet minimis terminis: licet per expositam praxim non inueniatur quæsita eius radix, inde non licebit inferre, quod non habeat talem radicem. Exempli gratia. Si proposita fractio sit $\frac{8}{18}$, huius fractionis prima radix non inuenietur per propositam praxim: & tamen habet primam radicem. Propositæ autẽ fractioni æquiualens, atque minimis terminis constans fractio est $\frac{4}{9}$, cuius prima radix est $\frac{2}{3}$: atque hæc radix inuenitur per praxim propositam. Præterea nulla vulgaris fractio constans minimis terminis, & habens denominatorem diuersum ab vnitate, potest æquiualere integro vulgari numero, aut esse radix alicuius vulgaris integri numeri; sed tamen fractio vulgaris non constans minimis terminis, potest æquiualere integro numero, & esse radix vulgaris integri numeri. Ex. Gr. $\frac{16}{8}$ = 2, & verum est, quod R1q4 = $\frac{16}{8}$.

Praxis III.

Appropinquatio ad veram radicem.

QVando post operationem iuxtà præscriptam superius praxim institutam, atque absolutam, remanet aliquod residuum: inde vt diximus colligitur, quod propositus numerus non habet quæsitam radicem, quodque inuenta radix, erit radix illius numeri, qui relinquitur, quando ex proposito numero aufertur dictum residuum. Ex. Gr. 2 = R1q7 — 3. Similiter 3 = R2q30 — 3. Pari modo, 2 = R3q20 — 4. Hinc fit quod per praxim superius propositam, inueniatur quidem dati numeri vera radix cuiuscunque nominis, dummodò datus numerus non careat tali radice; si verò datus numerus non habeat eam radicem, hoc casu inuenitur radix, quæ vera, siue adæquata dati numeri radice, proximè minor est, atq; exprimibilis integro vulgari numero; hoc est radix, quæ minus, quam vna integra vulgari vnitate deficit à vera, siue adæquata radice, quã nõ habet datus numerus. Hoc casu inuenire radicem magis exactam, quæque à vera, siue adæquata radice deficiat quidem, sed tamen hic defectus minor sit, quam data quæuis fracta vnitas, quæ pro denominatore habeat vnitatem cum appositis quotlibet cyfris; talem atque tam parum deficientem propositi numeri radicem inuenire, illud est, quod hic significatur per appropinquationem ad veram radicem.

Pro appropinquatione ad veram cuiuscunq; nominis radicem propositi numeri, peractis quæ præscribuntur, vt habeatur proxima talis nominis radix exprimibilis integro numero, residuo cui nullum membrum apponendum inuenitur, apponatur membrum constans ex solis cyfris, & continuetur operatio, ac si membrum residuo appositum inueniretur in dato numero: idque successiuè fiat quoties placet. Hoc si fiat, notæ Arithmeticæ collectæ ex residuis, auctis cyfrarum membris, quæ non inueniũtur in proposito numero, constituent numeratorẽ fractionis, quę pro denominatore habere debet vnitatem cum tot cyfris, quot notæ Arithmeticę inueniuntur in ipso numeratore. Denique quotienti integro prius inuento, apponendo hanc fractionem: habebitur quotiens compositum ex integro, & fracto numero, quod à vera, siue adęquata radice deficit quidem, sed tamen deficit, minus vnica vnitate illius nominis, quod quotientis fractioni conuenit.

Pro primo exemplo. Datus numerus sit 522880. hic numerus non habet

bet radicẽ primã vulgari numero exprimibilẽ. Si placet inuenire eius radicem, partim integro, partim fracto numero expressam, & à vera radice aberrantem quidem, sic tamen, vt hic error non superet vnam millesimam partem vnius integræ, siue simplicis vnitatis; apponantur dato numero tot membra ex solis cyfris constantia, quot cyfras continet numerus mille, hoc est tria membra: quo facto, habebitur numerus 522880000000; huius numeri primam radicem inquirendo per praxim paulò antè traditam, inuenitur numerus 723104 constans ex sex notis Arithmeticis, quarum tres priores 723 collectæ ex dato numero, significabunt integras vnitates: tres reliquæ notæ 104 collectæ ex adiectis cyfrarum membris, indicabunt partes millesimas vnius integræ vnitatis, & numerus 723 † $\frac{104}{1000}$: hoc est numerus compositus ex septingentis viginti tribus integris vnitatibus, & centum quatuor millesimis partibus vnius integræ vnitatis, constituet radicem quæsitam: hoc est, non quidem veram propositi numeri radicem, sed tamen ab hac vera radice tam parum aberrantem, vt hic error sit minor vna millesima parte vnius integræ vnitatis; eritque verum, quod 723 $\frac{104}{1000}$ sit numerus minor R1q 522880. Numerus verò 723 $\frac{105}{1000}$ sit maior R1q 522880.

Pro secundo exemplo. Datus vulgaris numerus sit 2: hic numerus nõ habet primã radicẽ exprimibilẽ vllo vulgari numero. Si illi addantur tria membra ex solis cyfris constantia, vt fiat numerus 2000000: huius numeri inuenta proxima radix prima, erit 1414. Etenim verum est, quod 1414 = R1q 2000000 — 604. Quoniam autem ex quatuor notis numeri 1414, prima, quæ est 1, collecta est ex primo membro, quod est 2, reliquæ verò tres notæ, nimirum 414, collectæ sunt ex reliquis adiectis tribus membris constantibus ex solis cyfris: numeri 1414 prima nota 1, significat vnitatem integram: reliquæ verò notæ 414 significant quadringentas quatuordecim millesimas partes vnius integræ vnitatis. Hinc verum est, quod numerus 1 † $\frac{414}{1000}$ minor quidem sit vera radice prima numeri 2. sed tamen si huic numero addatur vna pars millesima vnius integræ vnitatis, sic vt fiat numerus 1 † $\frac{415}{1000}$, hic erit maior vera radice numeri 2, adeòque numerus 1 † $\frac{414}{1000}$ deficit quidem à vera radice prima numeri 2: ab illa tamen minori quantitate deficit, quam sit vna pars millesima vnius integræ vnitatis.

Modus componendi primam tabellam superius propositam, pro radicum inuentione.

PRo huius tabellæ constructione, sufficit vulgarium numerorum multiplicatio. Continet nouem numerorum vulgarium columnas, in quarum capitibus inueni-

ueni-

ueniuntur nouem diuersæ notæ Arithmeticæ: his deorsum respondent producta ex nota in capite columnæ constituta: primò quidem productum ex hac nota semel in se ducta: secundò productum ex hac nota bis in se ducta: tertiò productum ex hac nota tertiò in se ducta; atque ità de cęteris. Sic enim fit, vt è regione literæ R cum apposito denominatore, infrà notam Arithmeticam in capite columnæ positam, respondeat productum ex hac nota toties successiuè ducta in se, quot vnitates continet prædictus denominator; atque hoc est, quod requirit tabella.

Exempli gratia. E regione R3q, infrà notam 4 inuenitur 256: qui numerus producitur ex nota 4 tertiò ducta in se; etenim 4 semel ductũ in se, producit 16: quod productum iterum ducendo in 4, habetur 64: hoc autem productum denuò ducendo in 4, habetur 256: qui numerus produci dicitur ex numero 4 tertiò successiuè in se ducto. Similiter è regione R3q. infrà notam 7, positam in capite columnæ, inuenitur numerus 2401, qui numerus producitur ex nota 7, tertiò in se ducta, nam 7 *in* 7 = 49: rursus 49 *in* 7 = 343: rursus 343 *in* 7 = 2401.

Modus componendi formulas, contentas secunda tabella superius proposita pro inuentione radicum.

Pro inuentione formularum, de qua agimus requiritur multiplicatio, de qua agitur in parte 4 cap. 2. Supposita huius multiplicationis intelligentia.

Nota primò. Productum ex numero denominato aliquoties in se ducto dici maximè simplex quando est reuocatum ad sola membra inter se dissimilia, quod fit per additionem traditam in parte 4. cap. 2.

Nota secundò, productum maximè simplex, censeri ordinatum: quando singula membra ex quibus constat, ità sunt disposita, vt illud in quo inuenitur dignitas A, cum apposito maximo denominatore, præcedat: siue primum locum teneat; ac præterea ex reliquis membris, illa minus distent à primo membro, quæ continent dignitatem A, cum apposito maiori denominatore; denique vltimum locum teneat, membrum, in quo non inuenitur dignitas A, sed sola dignitas B.

Vt habeatur desiderata quælibet formula. Primò inueniatur maximè simplex, atque ordinatum productum, quod oritur ex numero denominato A † B toties in se ducto, quot vnitates continentur denominatore radicis pro cuius inuentione petitur formula. Secundò, in inuento maximè simplici, atque ordinato producto, primum membrum deleatur: atque singulis numeratoribus dignitatum A, quæ in reliquis membris inueniuntur, tot cyfræ apponantur, quot alia membra subsequuntur. Sic enim habebitur quæsita formula.

Exempli gratia. Si petitur formula pro inuenienda radice prima; hoc est, pro radice quæ pro denominatore habet vnitatem. Primò, quia productum maximè simplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B semel ducto in se, est A2 *et* † 2A *in* B *et* † B2: in hoc producto delendo primum membrum, quod est A2: remanebit 2A *in* B *et* † B2; denique numeratoribus dignitatum A, apponendo tot cyfras, quot membra subsequuntur: habebitur scriptio 20A *in* B *et* † B2; quæ erit formula quæsita pro inuenienda prima radice.

Rursus. Si petatur formula pro inuenienda radice secunda; hoc est, pro radice cuius denominator est 2. Primò, quia productum maximè simplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B bis ducto in seipsum, est A3 *et* † 3A2 *in* B *et* † 3A *in* B2 *et* † B3; in hoc producto delendo primum membrum, quod est A3, remanebit 3A2 *in* B *et* † 3A *in* B2 *et* † B3: denique numeratoribus dignitatum A, apponendo tot cyfras, quot membra subsequuntur, habebitur scriptio 300A2 *in* B *et* † 30A *in* B2 *et* † B3: quæ erit formula quæsita pro inuenienda radice secunda.

Simi-

Similiter. Si petatur formula pro inuenienda radice tertia; hoc est pro radice, quæ pro denominatore habet 3. Primò, quia productum maximè simplex, atque ordinatum, quod oritur ex numero denominato A † B, tertiò ducto in seipsum, est A4 *et* † 4A3 *in* B *et* † 6A2 *in* B2 *et* † 4A *in* B3 *et* † B4: in hoc producto delendo primum membrum, quod est A4, remanebit 4A3 *in* B *et* † 6A2 *in* B2 *et* † 4A *in* B3 *et* † B4; denique numeratoribus dignitatum A apponendo tot cyfras, quot membra subsequuntur, habebitur scriptio, 4000A3 *in* B *et* † 600A2 *in* B2 *et* † 40A *in* B3 *et* † B4, quæ erit formula quæsita pro inuenienda radice tertia.

Forma commoda, successiuè, & sæpius ducendi in seipsum aliquem numerum denominatum A † B, vt requiritur pro formularum inuentione.

C. A † B
D. A † B
———————————
E. A2 *et* † A *in* B
F. A *in* B *et* † B2
———————————
G. A2 *et* † 2A *in* B *et* † B2
D. A † B
———————————
H. A3 *et* † 2A2 *in* B *et* † A *in* B2
K. A2 *in* B *et* † 2A *in* B2 *et* † B3
———————————
L. A3 *et* † 3A2 *in* B *et* † 3A *in* B2 *et* † B3
D. A † B
———————————
M. A4 *et* † 3A3 *in* B *et* † 3A2 *in* B2 *et* † A *in* B3
N. A3 *in* B *et* † 3A2 *in* B2 *et* † 3A *in* B3 *et* † B4
———————————
P. A4 *et* † 4A3 *in* B *et* † 6A2 *in* B2 *et* † 4A *in* B3 *et* † B4
D. A † B
———————————
Q. A5 *et* † 4A4 *in* B *et* † 6A3 *in* B2 *et* † 4A2 *in* B3 *et* † A *in* B4
R. A4 *in* B *et* † 4A3 *in* B2 *et* † 6A2 *in* B3 *et* † 4A *in* B4 *et* † B5
———————————
S. A5 *et* † 5A4 *in* B *et* † 10A3 *in* B2 *et* † 10A2 *in* B3 *et* † 5A *in* B4 *et* † B5

IN prima multiplicatione in qua superior genitor C, inferior genitor D (qui in reliquis multiplicationibus semper idem est) primum productum partiale erit E; secundum productum partiale erit F. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum erit G. Rursus, pro secunda multiplicatione, superior genitor erit G, inferior D: primum productum partiale erit H; secundum productum partiale erit K. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum, erit L. Rursus, pro tertia multiplicatione, superior genitor erit L, inferior genitor erit D: primum productum partiale erit M: secundum productum partiale erit N. Productum totale maximè simplex atque ordinatum erit P. Denuò pro quarta multiplicatione, genitor superior erit P, genitor inferior erit D: primum productum partiale erit Q, secundum productum partiale erit R. Productum totale maximè simplex, atque ordinatum erit S. Diximus hanc formam successiuè, & sæpius ducendi A † B *in* A † B commodam esse, hoc est exhibere commodum modum scribendi producta partialia inuenta per multiplicationem traditam in parte 1. cap.2. vt facilè colligi possint in vnam summam constituentem productum totale, ordinatum, & maximè simplex. Hæc commoditas resultat ex eo, quod in productis partialibus, membra similia ità scribantur, vt deorsum sibi respondeant: nulla verò membra dissimilia hoc modo respondeant; hinc enim fit, quod similia facilè addi, siue contrahi possint per additionem partis 4. cap. 2, simili planè modo sicut in vulgarium numerorum multiplicatione, quæ traditur parte 2. cap. 2. sibi inuicem subscribuntur in productis partialibus, notæ Arithmeticæ similes: hoc est significantes eiusdem speciei vnitates, siue simplices, siue simplicium vnitatum decades, aut centena, aut millena, &c, vt per additionem in eadem parte traditam, colligi possint in vnam summam. Vtrobique hæc commoditas resultat ex decussata scriptione productorum partialium; habetur verò in proposita forma per hoc, quod ipsius multiplicationis, superiori genitori inferior genitor A † B subscribatur, atque interpositæ lineæ, immediatè subscribatur productum vniuersale, quod oritur ex inferioris genitoris prima litera A, ducta in totum superiorem genitorem; deinde huic producto partiali, immediatè subscribatur productum vniuersale, quod oritur ex inferioris genitoris secunda litera B, ducta in totum superiorem genitorem: hoc tamen secundum productum partiale ità priori subscribatur, vt primum huius secundi atque partialis producti membrum, infernè respondeat, secundo membro primi atque partialis producti; sic enim fiet, vt similia membra similibus subscripta inueniétur in primo atque secundo vniuersali atque partiali producto; quare commodè inueniri poterit productum totale atque ordinatum; illud enim habebitur, eo ipso quod infra lineam (duo producta partialia à producto totali separantem) describentur membra solitariè posita, vt in productis partialibus inueniuntur; & pro membris non solitariè positis, hoc est pro duobus membris sibi deorsum correspondentibus in productis partialibus, in producto totali substituatur vnum, ambobus simul æquiualens.

CAPVT VI.

Elementaria problemata pro vsu angulorum, & pro ys, quæ dependent ab angulis.

Voces *angulus*, & *apertura*, eamdem significationem habent in Logistica. Hæc, vt fit in vsitata Geometria, potissimum considerat aperturas rectarum linearum, aut planarum superficierum: negligendo aperturas curuarum linearum, aut superficierum, vt minus vtiles. Vbi simpliciter, sine vlteriori restrictione, angulum nominamus, agimus de angulo, qui constituitur à duabus rectis lineis: hoc est de apertura quam habent duæ rectæ lineæ. Apertura quam habent duæ superficies planæ, angulus planus dicitur. Apertura quam habent duæ lineæ curuæ, appellatur angulus curuilineus. Apertura quam habent duæ lineæ, quarum vna sit recta, altera curua, nominatur angulus mixtilineus. Vt duæ lineæ, aut superficies, angulum faciant, siue habeant aperturam: requirimus vt simul concurrant: lineæ quidem in vno puncto, superficies planæ in vna linea. Vnus angulus dicitur altero maior, minor, vel æqualis, prout eius apertura, alterius anguli apertura maior est, aut minor, vel illi æqualis. Qui intelligit quid sit portam esse magis, vel minus apertam: vel librum esse magis, aut minus, apertum: ignorare non potest, quid sit duas rectas lineas esse magis, vel minus apertas & consequenter quid sit istarum linearum angulum, siue aperturam, esse maiorem, aut minorem; præsertim si reflectat, quod magnitudo aperturæ multum differat, à magnitudine linearum habentium aperturam: quemadmodum

modum magnitudo curuitatis baculi, multum differt à magnitudine baculi habentis curuitatem, vel magnitudo aperturę libri, à qua dicitur multum apertus, vel magis apertus, multum differt à magnitudine libri aperti, ſiue habentis aperturam. Ex hac differentia etiam ſatis manifeſtum eſt, quod licet liber paruus ſit, poſſit habere maiorem aperturam quam alter magnus liber; quodque paruarum linearum apertura, ſiue angulus, poſſit eſſe maior, apertura magnarum linearum.

Licet ex his, vt diximus, ſatis manifeſtum ſit, quid intelligi debeat per magnitudinem anguli, vel aperturæ: tamen ſatis clarum non eſt quomodo commodè, atque intelligibiliter indicari, atque explicari poſſit, maioritas, aut minoritas diuerſorum angulorum: aut quanto vnus angulus altero maior ſit. In hunc finem vſitatum eſt angulorum menſuras adhibere, & per has, angulorum magnitudines explicare, quemadmodum turrium, vel montium altitudines, aut locorum diſtantiæ per menſuras cognitas explicantur in practica Geometria. De quibus plura videri poſſunt in loco indicato in indice ad vocem menſura.

Vt ad præſens inſtitutum ſufficienter intelligantur angulorum menſuræ: ſciendum quod anguli crura, ſiue latera appellentur rectæ lineæ, quæ angulum conſtituunt, ſiue aperturam habent. Punctum in quo hæc crura anguli concurrunt dicitur vertex anguli. Anguli menſura, eſt arcus circuli, qui continetur cruribus anguli, & centrum habet in anguli vertice. Vtrum huiuſmodi arcus, qui eſt menſura anguli, maiorem vel minorem radium habeat, nihil refert: neceſſariò tamen eumdem, ſiue æqualem radium habere debent duæ diuerſorum angulorum menſuræ, vt proportio, quæ inter menſuras inuenitur affirmari poſſit de angulis: atque ex eo, quod vnus angulus altero duplo maiorem menſuram habeat, inferri poſſit vnum angulum altero duplo maiorem eſſe.

Angulus dicitur rectus, ſi pro menſura habeat arcum, qui ſit quarta pars circuli. Angulus dicitur acutus, ſi habeat menſuram minorem quarta parte circuli. Angulus dicitur obtuſus, ſi habeat menſuram maiorem quarta parte circuli. Axis anguli dicitur linea, quæ eſt axis menſuræ anguli: hoc eſt recta linea per anguli verticem tranſiens, & cum vtroque anguli crure conſtituens rectum angulum. Vnam rectam lineam ad alteram eſſe perpendicularem, ſiue normalem, nihil aliud eſt, quam vnam cum altera rectum angulum conſtituere. Complementum acuti anguli dicitur, eius defectus ab angulo recto. Complementum anguli ad duos rectos, eſt eius defectus à duobus rectis angulis. Radius anguli dicitur, radius ſiue ſemidiameter arcus, qui eſt menſura anguli: aliter hic radius appellatur ſinus totus iſtius anguli. Sinus rectus anguli appellatur, recta linea ab vnius menſuræ extremitate, perpendicularis ad anguli oppoſitum latus. Sinus complementi alicuius anguli A, eſt ſinus rectus illius anguli, qui eſt complementum anguli A: ſiue diſtantia verticis anguli A ab eius ſinu recto. Tangens anguli A dicitur, recta ab extremitate menſuræ anguli A excurrens vſque ad oppoſitum anguli latus, atque perpendicularis ad latus, in quo concurrit cum menſura. Secans anguli A dicitur, recta linea quæ intercipitur inter anguli verticem, & tangentis eiuſdem anguli punctum à vertice remotius. Agendo de angulis, qui conſtituuntur vel à recta linea, & plano aliquo, vel à duobus planis: de his angulis affirmare licet, quod conuenit angulo rectilineo, cuius, & alterum crus, & etiam axis eſt in illo plano, quod cum recta linea angulum conſtituit; vel angulo rectilineo, qui pro axe habeat communem interſectionem planorum angulum conſtituentium. Plures angulos ſimul, æquari vni recto angulo dicuntur, quando illorum menſuræ ſimul, æquantur quartæ parti circuli. Plures anguli ſimul dicuntur æquari duobus, aut pluribus rectis angulis, quando illorum menſuræ ſimul, æquantur duobus, aut pluribus circuli quadrantibus.

Arcuum circularium magnitudines, & consequenter magnitudines mensurarum angulis conuenientium, vel angulorum, non raró in rebus practicis explicantur per gradus. Pro quo notandum, quod gradus circuli appelletur vna trecentesima sexagesima pars circuli, adeò vt omnis quarta pars circuli, & consequenter omnis rectus angulus contineat 90 gradus. Omnis acutus angulus contineat pauciores quam 90 gradus; & omnis obtusus angulus, contineat plures quam 90 gradus. Pro magis exacta arcuũ declaratione adhibentur graduum minuta, prima, secunda, tertia, &c. vbi per vocem *minutum* intelligitur pars sexagesima. Hinc vnum gradus minutum, siue minutum primum, est vna sexagesima pars vnius gradus. Vnius gradus minutum secundum, est sexagesima pars vnius primi minuti. Vnius gradus minutum tertium, est vna sexagesima pars vnius minuti secundi; & sic deinceps. Quare integer circulus, siue magnus siue paruus, continet gradus 360, minuta prima 21600, minuta secũda 1296000, minuta tertia 77760000. &c.

Problemata elementaria dependentia ab angulis.

Problema I.

Ex dato rectæ A B puncto C, perpendicularem erigere.

Solutio. Centro C, quocunque, sed tamen eodem radio, describantur duo arcus, quorum vnus in D, alter in E, secet lineam A B, productam, si opus fuerit, Deinde maiori aliquo eodem radio, & centris D & E, describantur duo arcus
Fig. 10. sese intersecantes in F. Denique ducatur recta F C; hæc erit perpendicularis, quæ petebatur.

Problema II.

Ex dato extra rectam A B puncto F, ducere rectam F C perpendicularem ad rectam A B.

Solutio. Centro F, quocunque, sed tamen eodem radio, describantur duo arcus, quorum vnus in D, alter in E, secet lineam A B, productam si opus fuerit. Rursus, quouis, sed eodem radio, atque centris D & E describantur duo arcus sese
Fig. 11. intersecantes in puncto G. Denique ducatur recta F G occurrens rectæ A B in puncto C: erit recta F C perpendicularis quæsita.

Problema III.

Ex dato rectæ A B puncto C, ducere rectam C D, vt angulus D C B, sit æqualis dato alteri angulo E F G.

Solutio. Primò, quouis radio, sed centro F, notentur in rectis lineis F E & F G, puncta I & H. Deinde eodem interuallo, & centro C, describatur arcus K L,
Fig. 12. secans rectam A B in puncto K. Tertiò. Radio I H, & centro K, describatur arcus secans arcum K L in puncto M. Denique per puncta C & M, ducatur recta C D. Hæc erit recta quæ petebatur: eritque angulus D C B æqualis angulo E F G.

Pro-

Problema IV.

Ex dato extra rectam A B puncto C, ducere rectam C D rectæ A B parallelam.

SOlutio. Ducta quauis recta C E, quæ rectæ A B occurrat in aliquo puncto E: per problema 3 ponatur recta D C, vt anguli E C D & C E B ſint inter ſe æquales, atque exiſtant ad oppoſitas partes rectæ C E; erit recta D C parallela rectæ A B, vt petebatur. Fig. 13.

Problema V.

Deſcribere triangulum ex datis tribus rectis, quarum maior excedatur à reliquis duabus ſimul ſumptis.

SOlutio. Prima ex datis tribus rectis vocetur A B: hoc ſuppoſito, centro A, & radio, qui ſecundæ ex datis rectis æqualis ſit, arcus deſcribatur; præterea centro B, & radio qui tertiæ ex datis rectis æqualis ſit, deſcribatur alius arcus, qui priorem interſecet in puncto C. Denique ducendo rectas A C & B C, habebitur quæſitum triangulum A, B, C. Fig. 14.

Problema VI.

Deſcribere lineam circularem, quæ tranſeat per data tria puncta A, B, C non in directum poſita.

SOlutio. Primò, ductis duabus rectis A B & A C, per prob. 7. ſingulæ diuidantur in duas partes æquales, in punctis D & E: atque ex his punctis, per prob. 1. erigantur perpendiculares ad lineas A B & A C, ſeſe interſecantes in puncto F. Fig. 15. Denique centro F, radio F A, deſcripta circulari linea, tranſibit per puncta A, B, C, vt petebatur.

Problema VII.

Datam rectam A B ſecare in duas, vel quotlibet partes inter ſe æquales.

SOlutio primæ partis. Primò, quouis radio, qui tamen maior ſit medietate datæ rectæ A B, & centro A, duo arcus deſcribantur. Deinde eodem radio, & centro B, alij duo arcus deſcribantur, qui prius deſcriptos arcus interſecent in punctis D & E. Denique ducatur recta D E occurrens rectæ A B in puncto C: erit recta A B ſecta in puncto C, ità vt A C ſit æqualis C B: hoc eſt in duas partes inter ſe æquales. Fig. 16.

Solu-

Solutio ſecundæ partis. Primò, ducta quauis recta A C ad oppoſitam partem rectę A B, per prob.4. ponatur recta B D, parallela rectæ A C. Secundò, ex numero partium in quas recta A B diuidenda eſt, auferatur vnitas: quotque à reſiduo numero vnitates indicantur, tot partes inter ſe æquales abſcindantur ex ſingulis lineis A C & B D: ex A verſus C, & ex B verſus D. Tertiò, punctum in recta A C notatum, quod à puncto A remotiſſimum eſt, recta linea connectatur cum puncto in recta B D notato, quod puncto B vicinius eſt. Denique puncta in rectis A C & B D notata, atque à prius ducta linea æqualiter diſtantia, ſimiliter rectis lineis connectantur. Hæ rectæ lineæ diuident rectam A B in partes æquales, quæ petebantur.

Fig. 17.

Problema VIII.

Datam rectam lineam A B ſecare, vt ſecta eſt altera propoſita recta C D

Solutio. Primò, ducatur recta C E æqualis rectæ A B, neque refert cuius aperturæ ſit angulus D C E. Deinde poſita prius recta D E, per problema 4. illi parallelæ lineæ ducantur per ſingula puncta rectam C D diuidentia; hæ rectæ lineę ſecabunt rectam C E, vt ſecta eſt propoſita recta C D & circino tantum transferri debent, ſi placeat eas habere in ipſa indiuiduali linea A B.

Fig. 18.

Problema IX.

Propoſitam rectam A B ſecare in C extrema, & media ratione: hoc eſt, vt tota A B ad maiorem partem A C, habeat eamdem rationem, quam maior pars A C, habet ad reliquam minorem partem C B.

Solutio. Primò, per prob. 1. ex puncto A erigatur perpendicularis ad A B, cuius pars A D ſit æqualis medietati rectæ A B: & ducta recta B D, ex illa abſcindatur pars D E æqualis rectæ A D. Denique ex recta A B abſcindatur pars A C æqualis rectæ B E; erit tota recta A B diuiſa in C, vt petebatur; hoc eſt A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Fig. 19.

Nota quamlibet lineam ſecari poſſe extrema, & media ratione, ſed hoc modo ſecari, ſiue diuidi non poſſe vllum vulgarem numerum.

Problema X.

Propoſitum circuli arcum A B ſecare in duas partes inter ſe æquales.

Solutio. Primò, radio A B, & centro A, duo arcus deſcribantur: atquę ſimiliter eodem radio, & centro B, deſcribantur alij duo arcus, qui prius deſcriptos arcus ſecent in punctis D & E: deinde ducatur recta D E occurrens arcui A B in pun-

Fig. 20.

in puncto C; erit arcus A B, ſectus in C, vt petebatur.

Nota primò. Quod propoſitus modus ſecandi datum arcum in duas partes æquales, planè conueniat cum modo propoſito prob. 7. vt data recta ſecetur in duas partes æquales. Nota ſecundò. Datum arcum ſecare in quotlibet partes æquales, problema eſt adeò difficile, vt hactenus inuentus ſit nemo, qui adduxerit eius ſolutionem maximè deſideratam à Geometris. Præterea datum arcum diuidere in tres partes æquales per ſolum circinum & regulam, etiam numeratur inter problemata, multum quidem inquæſita, ſed hactenus non ſoluta: paſſim appellatur anguli triſectio, ſiue in tres partes æquales diuiſio; cauſa intelligi poteſt ex nota ſubſequente. Nota tertiò. Egimus in hoc problemate, & eius notis, de ſectione arcus in partes æquales: nuſquam verò agimus de anguli ſectione in partes æquales, licet hoc apud alios in Geometriæ elementis vſitatum ſit, & ſcitu neceſſarium. Verum qui non ignorat, quæ initio huius capitis notauimus de angulis, & angulorum menſuris: ignorare non poteſt, quomodo ex anguli vertice ducendo rectam ad punctum vtcunque diuidens anguli menſuram, quæ arcus eſt: etiam tali modo angulum diuidat, & conſequenter ſuppoſita angulorum intelligentia, & cognitione eorum, quæ hic aut docuimus, aut notauimus de ſectione arcuum, qui ſunt menſuræ angulorum: planè ſuperfluum videbatur illa repetendo de angulis affirmare.

Problema XI.

Ex dato in circuli circumferentia puncto A, vel extra circulum puncto B ducere rectam tangentem circulum.

Solutio primæ partis. Suppoſito quod dati circuli centrum vocetur C, ducatur recta C A, & per probl. 1. ponatur recta A B perpendicularis ad rectam C A: erit A B tangens petita. Solutio ſecundæ partis. Primò, ex dati circuli centro C, ducatur recta ad datum extra circulum punctum B: Deinde diametro C B deſcribatur ſemicirculus ſecans datum circulum in aliquo puncto A. Denique ponatur recta A B; hæc erit tangens, quæ petebatur. Fig. 21.

Problema XII.

Ex propoſito circulo ſegmentum auferre, quod capiat angulum dato angulo æqualem.

Solutio. Per prob. 11. ex aliquo aſſumpto circumferentiæ puncto A ducatur dati circuli tangens A B. Deinde per prob. 3. ponatur recta A D occurrens dati circuli circumferentiæ in D, ità vt angulus B A D, ſit æqualis dato angulo: erit ſegmentum A E D illud quod petitur. Fig. 22.

Pro-

Problema XIII.

Supra datam rectam AD, describere segmentum quod capiat datum angulum.

Solutio. Primò, per prob. 3. fiat angulus D A B, æqualis dato angulo. Secundò, ex puncto A, per prob. 1. ponatur A F perpendicularis ad A B. Tertiò, per prob. 3. ex puncto D ponatur linea occurrens rectæ A F in puncto C, ità vt angulus A D C sit æqualis angulo D A F. Denique centro C, radio C A, describetur segmentum quæsitum, quod capiat angulum dato angulo æqualem.

Fig. 23.

Problema XIV.

Supra datam rectam A B describere triangulum simile dato alteri triangulo D E F.

Solutio. Per prob. 3. fiat angulus A B X æqualis angulo D E F: & similiter fiat angulus B A Z æqualis angulo E D F: voceturque C illud punctum in quo lineę B X & A Z, productæ si opus fuerit sese intersecant; erit triangulum A B C, illud quod petebatur, nimirum simile triangulo D E F, atque descriptum supra datam rectam A B.

Fig. 24.

Problema XV.

Supra datam rectam A B, describere figuram similem datæ alteri figuræ planę, & rectilineæ, descriptę supra rectam G H.

Pro solutione huius problematis sufficit, ordinatus, atque iteratus vsus problematis præcedentis: secando prius datam figuram in triangula, & successiuè singulis similia, similiterque posita construendo.

Solutio. Primò ex puncto H, ducantur rectæ lineæ ad vertices singulorum reliquorum angulorum, qui inueniuntur in data figura, vt tota diuisa sit in triangula. Deinde per præcedens problema, supra rectā A B describatur triangulum A B C simile triangulo G H I: similiter supra rectam B C describatur triangulum C B D simile triangulo I H K. Pari modo supra rectam B D describatur triangulū B D E simile triangulo H K L: atque ità deinceps si plura triangula inueniantur in data figura. Sic enim habebitur figura rectæ A B inscripta, & similis datæ figuræ inscriptæ rectæ G H; vt petebatur.

Fig. 25.

Scholium.

Subsequentia problemata agunt de transmutatione vnius figuræ in aliam dissimilem, seruata æqualitate: vbi pluribus non declaro quomodo supra datam rectam lineam describatur quadratum, aut parallelogrammum habens vnum angulum dato alicui angulo æqualem, pro quibus sufficere præcedentia problemata sata ſatis manifeſtum eſt, eoipſo quod ſciatur, omne & ſolum quadratum habere omnes angulos rectos, & omnia latera inter ſe æqualia: ſolum verò & omne parallelogrammum habere oppoſita latera inter ſe æqualia & parallela. Vt habeantur hæ proprietates, omni & ſolo, aut quadrato, aut parallelogrammo conuenientes, ſufficiunt quatuor prima problemata; etenim primum docet perpendicularem ducere, hoc eſt vnam lineam cum altera facientem rectum angulum, & prob. 4. docet parallelas ducere; Denique prob. 3. proponit modum conſtruendi angulum, dato angulo æqualem; quare præter vſum iſtorum trium problematum nihil requiritur vt ſuprà datam rectam deſcribatur quadratum, aut aliud parallelogrammum habens vnum angulum dato angulo æqualem.

Per trianguli, aut parallelogrammi baſim intelligendum eſt illud latus, quod placet baſim appellare; vertex trianguli, aut parallelogrammi dicitur eius punctum à baſi remotiſſimum. Denique trianguli, aut parallelogrammi altitudo, eſt minima diſtantia verticis à baſi, ſiue recta à vertice perpendicularis ad baſim, vtcunque productam.

Problema XVI.

Propoſito triangulo, æquale quadratum deſcribere.

SOlutio. Per prob. 1. partis 2. cap. 3. inter dimidiam baſim dati trianguli, & totam eius altitudinem, inueniatur media proportionalis: atque ſuprà illam deſcribatur quadratum, conſulendo præcedens ſcholium, ſi de modo dubitetur: hoc erit quadratum quæſitum.

Problema XVII.

Propoſito triangulo, æquale parallelogrammum deſcribere, ſuprà datam rectam: ſic vt habeat vnum angulum dato angulo ęqualem. Vel viciſſim, dato parallelogrammo, ęquale triangulum deſcribere ſuprà datam rectam: ſic vt habeat vnum angulum dato angulo ęqualem.

SOlutio primæ partis. Per regulam auream cap. 3. inueniatur quartus proportionalis ad tres terminos, quorum primus ſit recta data, vel aſſumpta pro baſe parallelogrammi. Secundus terminus ſit medietas baſeos dati trianguli. Tertius ſit tota altitudo eiuſdem trianguli. Inuentus quartus proportionalis terminus, erit altitudo parallelogrammi quod petitur. Quare ſuprà datam baſim deſcribendo parallelogrammum, quod habeat inuentam altitudinem, & præterea habeat vnum angulum dato æqualem, habebitur parallelogrammum quæſitum; atque huius parallelogrammi deſcriptio ſatis patet ex dictis in præmiſſo ſcholio.

Solutio ſecundæ partis. Per regulam auream capitis 3. inueniatur quartus proportionalis ad tres terminos, quorum primus ſit, medietas rectę datæ pro baſe trianguli: ſecundus ſit, propoſiti parallelogrammi baſis: tertius ſit, propoſiti parallelogrammi altitudo. Inuentus quartus proportionalis terminus, erit altitudo trianguli, quod petitur. Quare ſuprà datam baſim deſcribendo triangulum, quod habeat inuentam altitudinem, & vnum angulum dato angulo æqualem (iuxtà dicta in præmisso scholio) habebitur triangulum quæsitum.

Problema XVIII.

Propositæ figuræ planæ, & rectilineæ, æquale parallelogrammum describere suprà datam rectam.

Solutio huius problematis nihil requirit nisi iteratum, atque ordinatum vsum problematis præcedentis, dummodò proposita figura diuisa sit in triangula; etenim habebitur petitum parallelogrammum, constans ex multis partialibus parallelogrammis, si prius per prob 17. suprà datam rectam describatur parallelogrammum habens datum angulum, atque æquale vni ex triangulis, quę inueniuntur in data figura; Deinde, descripti parallelogrammi lateri, quod datæ rectæ æquatur, rursus per prob. 17. inscribatur parallelogrammum habens datum angulum, atque æquale secundo ex triangulis, quæ inueniuntur in data figura; atque ità successiuè describantur parallelogramma singulis propositę figurę triangulis æqualia, & simul vnum parallelogrammum constituentia.

Problema XIX.

Proposito circulo, æquale quadratum describere: aut vicissim, proposito quadrato, describere circulum æqualem.

Solutio primæ partis. Primò, per subsequentem notam 3. inueniatur recta linea æqualis circumferentiæ propositi circuli. Secundò, per prob. 1. partis 2. cap. 3. inueniatur media proportionalis inter medietatem prius inuentæ rectæ lineæ, & semidiametrum propositi circuli. Tertiò, suprà inuētam mediam proportionalem describatur quadratum; hoc erit proximè æquale proposito circulo.

Solutio secundæ partis. Primò, per sequentem notam 3. inueniantur duæ rectæ lineæ X & Z, sic vt X ad Z habeat eam proportionē, quā habet eiusdem circuli tota diameter ad totam circumferentiam. Secundò, per prob. 1. par. 2. cap. 3. inter lineas X & Z inueniatur media proportionalis P. Tertiò, per regulam auream cap. 3. ad tres rectas, quarum prima sit P: secunda sit latus dati quadrati: tertia sit X: inueniatur quarta proportionalis Q. Circulus radio Q descriptus, erit proximè æqualis proposito quadrato.

Nota primò. Propositum problema, est illud quod aliter dicitur quadratura circuli; celeberrimum est, propter maximam eius difficultatem; vsque in hodiernum diem non satis superatam ab vllo Geometra. Hæc difficultas consistit in inuentione lineæ rectæ, quæ sit æqualis circumferentiæ propositi circuli: esset superata, si cognita foret proportio, quam habet alicuius circuli diameter ad eiusdem circuli circumferentiam, quæ in omnibus circulis vna est atque eadem; sed hactenus nullus inuentus est, qui proposuerit modum exprimendi hanc proportionem, aut per rectas lineas, aut per numeros, quod requiritur vt dici possit cognita. Constat tamen, atque certissimum est, prædictam proportionem exprimibilem esse, tum per rectas lineas, tum per numeros radicales. Vtrum per vulgares numeros exprimi possit, dubitari potest.

Nota secundò. Licet inuenta non sit in omni rigore Mathematico proportio diametri ad cirad circumferentiam eiuſdem circuli,adeòque deſideretur vera hæc proportio,aut in lineis, aut in numeris: tamen multi propoſuerunt in numeris vulgaribus proportionem ab hac vera proportione non multum aberrantem,atque ſatis exactam pro praxi: tales ſunt quas hic exhibeo, ſuppoſito quod litera A repræſentet diametrum, & litera B ſignificet circumferentiam eiuſdem circuli.

Prima. A *ad* B = 7 *ad* 22.
Secunda. A *ad* B = 113 *ad* 355.
Tertia. A *ad* B = 100000000000000000000 *ad* 314159265358979323847.

Prima proportio proponitur ab Archimede: reliquis commodior eſt pro praxi, ſed magis aberrat à veritate. Secunda proportio proponitur à Metio: priore magis exacta eſt, & ſatis commoda. Tertia eſt Ludolphi à Ceulen: cæteris minus aberrat à veritate,ſed magis incommoda eſt propter magnitudinem numerorum quibus exprimitur, neque difficile eſt magis exactam inuenire, dummodò liceat maioribus numeris illam exprimere: paruis numeris expreſſam,atque ſecunda minus aberrantem à veritate nuſquam inueni.

Nota tertiò. Suppoſito quod in ſecunda nota propoſitæ proportiones verę ſint,quas à veritate non multum aberrare diximus,ſufficit regula aurea cap.3. propoſita, vt ex cognita alicuius circuli diametro inueniatur eius circumferentia: vel viciſſim ex cognita circumferentia inueniatur eiuſdem circuli diameter. Facta enim hypoheſi,quod X ad Z repræſentet proportionē diametri ad circumferentiam eiuſdem, circuli,quodq; C repræſentet propoſiti circuli diametrum: ad tres terminos,quorū primus X,ſecundus Z,tertius C, inuentus quartus proportionalis terminus D, indicabit circumferentiam circuli diametro C deſcripti,& ſimiliter ſuppoſito quod D reprę ſentet cognitam alicuius circuli circumferentiam: ad tres terminos, quorum primus Z, ſecundus X, tertius D, inuentus quartus proportionalis terminus C,indicabit diametrum circuli habentis circumferentiam D.

CAPVT VII.

De reſolutione æquationum.

Reſolutio æquationis de qua hoc capite agimus, eſt inuentio valoris quam habet dignitas aliqua, ex cognitione æquationis conſiſtentis inter vnam, vel plures eiuſdem nominis dignitates,& quantitatem cognitam; vel certè inter complexum ex pluribus diuerſorum nominum dignitatibus,& cognitam quantitatem. Æquatio conſiſtens inter vnam, vel plures, ſed eiuſdem nominis dignitates, & cognitam quantitatem, dicitur æquatio ſimplex, ſiue vnius nominis. Æquatio conſiſtens inter diuerſi nominis dignitates,& quantitatem cognitam, eſt compoſita, ſiue plurium nominum æquatio. Hæ compoſitæ æquationes ſubdiuiduntur in æquationes duorum, trium, quatuor nominum, &c. Sunt æquationes duorum nominum,ſi contineant duorum diuerſorum nominum dignitates. Similiter erunt æquationes trium, vel quatuor, vel quinque nominum, &c. ſi contineant tres, vel quatuor, vel quinque dignitates diuerſi nominis. Pluribus acturus de huiuſmodi æquationum reſolutionibus in loco citato in indice ad vocem reſolutio, hoc capite tantum propono reſolutionem, tum ſimplicium æquationum, tum æquationum duorum nominum, quorum vnum alterius duplum eſt. Duæ iſtæ reſolutiones ſufficiunt, vt noſtræ methodi ſtudioſi in hoc capite inueniant, quod ſufficit ad reſolutiones æquationum, quæ requiruntur pro exemplis primæ regulæ Logiſticæ, quæ à nobis proponuntur: & præterea conſiderare poſſint vtrum in vſu primæ regulæ Logiſticæ (pro qua tantum ſeruiunt hæ reſolutiones) minus molestum sit duorum nominum æquationes resoluere, vel certè eas declinando, vt in exemplis primæ regulæ facimus, peruenire ad simplicem æquationem resolubilem per regulam auream.

Prima resolutio.

Pro æquationibus simplicibus, siue vnius nominis.

HÆc æquationis resolutio, nihil aliud requirit quam vsum regulæ aureæ, quæ traditur cap. 3. Per hanc inueniendo quartum proportionalem ad tres terminos, quorum primus sit numerator dignitatum contentarum simplici æquatione: secundus sit, quantitas cognita, atque eadem æquatione contenta: tertius sit simplex vnitas, vel alius vulgaris numerus indicans aggregatum dignitatum æquatione contentarum, cuius aggregati cognitio desideratur: ad hos tres terminos, inuentus quartus terminus proportionalis, erit æqualis, vel vni dignitati, vel aggregato dignitatum illius nominis, quæ continentur proposita æquatione; adeòque huius dignitatis, vel aggregati dignitatum valor innotescit.

Exempli gratia proposita atque resoluenda simplex æquatio, sit $7A = 21$; ad tres terminos, quorum primus est 7, secundus 21, tertius 1, inuentus quartus proportionalis est 3: adeòque $A = 3$. Rursus proposita æquatio sit $12A2 = 108$; ad tres terminos, quorum primus est 12. secundus 108. tertius 1. inuentus quartus proportionalis est 9: quare $A2 = 9$. Rursus data æquatio sit $5A4 = 80$; ad tres terminos, quorum primus sit 5. secundus 80. tertius 1, inuentus quartus proportionalis est 16; hinc $A4 = 16$. Rursus data æquatio sit $7A2 = 28$: si placet cognoscere valorem, quem habent $3A2$: ad tres terminos, quorum primus est 7, secundus 28, tertius 3: inuentus quartus proportionalis est 12: quamobrem $3A2 = 12$.

Nota primò, vt cognito valore primæ dignitatis inueniatur valor vnius dignitatis alterius nominis, sufficit simplex multiplicatio, dummodò intelligantur Logisticæ scriptiones, ac præsertim, quod nomen, siue denominator dignitatis, significet productum ex tot primis dignitatibus successiuè multiplicatis, quot vnitates continentur nomine, siue denominatore dignitatis.

Exempli gratia. In hypothesi quod $A = 2$, manifestum est *A in A*, hoc est *2 in 2* $= 4$: adeòque $A2 = 4$: quia $A2 = A$ *in* A. In eadem hypothesi $A3 = 8$, quia A *in* A *in* A $= 8$: & præterea $A3 = A$ *in* A *in* A. Rursus in hypothesi, quod $A = 3$: $A2 = 9$: & præterea $A3 = 27$: quandoquidem A *in* A, hoc est 3 *in* 3 $= 9$: atque $A2 = A$ *in* A; præterea A *in* A *in* A, hoc est 3 *in* 3 *in* 3 $= 27$, adeòque $A3 = 27$, quia $A3 = A$ *in* A *in* A.

Nota secundò. Vt cognito valore alicuius dignitatis diuersæ à prima, cognoscatur prima dignitas, sufficit radicum extractio, & scire, quod patet ex scriptionum Logisticarum intelligentia, nimirum $A1 = R1qA2$. Præterea $A1 = R2qA3$. Similiter $A1 = R3qA4$. Et sic de cæteris. Quare, exempli gratia, facta hypothesi, quod $A2 = 9$, quoniam $R1q9 = 3$: etiam $R1qA2 = 3$: adeòque $A1 = 3$. Similiter facta hypothesi, quod $A3 = 8$: quandoquidem $R2q8 = 2$: etiam $R2qA3 = 2$: adeòque $A1 = 2$. Rursus, supposito quod $A5 = 32$: quia $R4q32 = 2$: etiam $R4qA5 = 2$.

Secun-

Secunda resolutio.

Pro omnibus æquationibus compositis duorum nominum habentium proportionem duplam.

AMplectitur hæc secunda resolutio, omnes, & solas æquationes duorum nominum, in quibus maius nomen ad nomen minus, habet proportionem quam 2 *ad* 1. Possem istas compositas æquationes omnes complecti vnica hypothesi,& explicare vnica scriptione Logistica: id tamen non videtur conducere ad faciliorem huius resolutionis intelligentiam; pro hac præmitto hypothesim, in qua distinguo tres casus, amplectentes omnes æquationes resolubiles hac secunda resolutione.

Hypothesis.

LItera A, est dignitas æquatione contenta. Literæ M & N,sunt tales dignitatum denominatores, vt M *ad* N = 2 *ad* 1. Literæ D & E sunt dignitatum numeratores, indeterminatè significantes quemlibet vulgarem numerum, siue numeratorem dignitatis A. Tam denominatores M & N, quam numeratores D & E,siue maiuscula,siue minuscula litera exprimantur,eamdem significationem habent: minuscula exprimuntur quando apponuntur dignitati: alibi exprimuntur maiuscula. Litera F, est quantitas cognita, atque positiua, cui æquatur complexum ex diuersi nominis dignitatibus. Si in proposita æquatione quantitas F non foret positiua:vt fiat positiua, siue affecta signo †,sufficit in singulis quantitatibus æquatione contentis signum mutare in oppositum,iuxtà praxim 2.cap.4.Supposita hac hypothesi, tres diuersos casus admittit problema.

Primus casus vt dAm † eAn = F.
Secundus casus vt dAm − eAn = F.
Tertius casus vt − dAm † eAn = F.

Oporteat in singulis ex propositis casibus resoluere æquationem.

Solutio. Primò,duorũ numerorũ,quorũ vnus est E2,alter verò est F *in* 4D, sumatur aggregatum quod vocetur P,tam in primo, quam in secundo casu;eorumdẽ verò istorum numerorum differentia vocetur P, in tertio casu. Secundò,Medietas aggregati duorum numerorum, quorum alter est numerus E, alter est ℞1*q*P,vocetur X; eorumdem istorum duorum numerorum dimidia differentia, appelletur Z. Tertiò, inuentis numeris X & Z: in primo casu, dAn = Z. In secundo casu, dAn = X. In tertio casu, dAn = vel X vel Z. Denique vt cognito valore numeri dAn, inueniatur valor vel An, vel Am, vel eAn, vel dAm : sufficiunt dicta ad primam resolutionem; vt melius constabit ex huius resolutionis exemplis.

Nota. Si inuentus numerus P, vt in solutione præscribitur habet radicem primam: commodum est illam prius inuenire iuxtà dicta cap.5. & deinde peragere reliqua, quæ præscribuntur. Si verò inuentus numerus P, non habet primam radicem: pro inuentione aggregati, aut differentiæ, vt præscribitur, vtilis est radicalium numerorum additio, vel subtractio,tradita in parte 6.cap.2.

Exemplum secundæ resolutionis in primo casu, quando vterque numerus denominatus, atque contentus proposita æquatione est positiuus, siue affectus signo †. Data æquatio sit 5A2 † 6A1 = 63. Igitur D = 5; item E = 6; item F = 63; hinc E2 = 36; item 4D = 20. Quare aggregatum duorum numerorum, quorum vnus est E2 est E2, siue 36: alter verò est F *in* 4D, hoc est 63 *in* 20: hoc inquam aggregatum erit 1296; igitur P = 1296: ergo R1qP = 36: ergo differentia numeri E, qui est 6, & numeri qui est R1qP, hoc est 36, erit 30: ergo medietas huius differentiæ, hoc est Z = 15: ergo dAn = 15, quia exemplum spectat ad primum casum: sed dAn = 5A1: ergo 5A1 = 15: ergo A1 = 3; ex quo patet A2 = 9: item 5A2 = 45. & præterea 6A1 = 18. Denique 45 † 18 = 63, vt asserebatur in proposita æquatione.

Exemplum secundæ resolutionis in secundo casu, quando ex numeris denominatis contentis proposita æquatione, is qui habet minus nomen, est negatiuus, siue affectus signo —. Data æquatio sit 3A6 — 5A3 = 152. Igitur D = 3: item E = 5: item F = 152; hinc E2 = 25: item 4D = 12. Quare aggregatum duorum numerorum, quorum vnus est E2, siue 25, alter est F *in* 4D, hoc est 152 *in* 12: hoc inquam aggregatum erit 1849: igitur P = 1849: ergo R1qP = 43: ergo aggregatum numeri E, qui est 5, & numeri qui est R1qP, hoc est 43: erit 48: ergo huius numeri medietas, hoc est X = 24: ergo dAn = 24, quia exemplum spectat ad secundum casum: sed dAn = 3A3: ergo 3A3 = 24: ergo A3 = 8: ergo A = 2. Ex quo patet A2 = 4: item A3 = 8: item A4 = 16: item A5 = 32: item A6 = 64. Ex quibus vlterius constat 3A6 = 192: item 5A3 = 40: ac denique 3A6 — 5A3 = 152, vt asseritur in proposita æquatione.

Exemplum secundæ resolutionis in tertio casu, quando ex numeris denominatis contentis proposita æquatione, ille qui maius nomen habet, est negatiuus, siue affectus signo —. Data æquatio sit, — 2A4 † 20A2 = 48: igitur D = 2: item E = 20: item F = 48; quare E2 = 400: item 4D = 8. Ex his vlterius consta, quod differentia duorum numerorum, quorum vnus est E2, hoc est 400: alter est F *in* 4D, hoc est 384: sit numerus 16: adeòque P = 16: ergo R1qP = 4. Igitur duorum numerorum, quorum vnus est E, hoc est 20, alter est R1qP, hoc est 4: aggregatum erit 24: & differentia erit 16: igitur X = 12, & præterea Z = 8: ergo dAn, hoc est 2A2 = 12 vel 8. Hinc infero, si 2A2 = 12: ergo A2 = 6: ergo A4 = 36: igitur 2A4 = 72: & præterea 20A2 = 120: ergo — 2A4 † 20A2 = — 72 † 120 ll 48, vt asserebatur in proposita æquatione. Facta altera suppositione, quod 2A2 = 8: infero, ergo A2 = 4, & præterea A4 = 16: ergo 2A4 = 32, & insuper 20A2 = 80: ergo — 2A4 † 20A2 = — 32 † 80 ll 48, vt asseritur in proposita æquatione: adeòque verum est, quod 2A2 = 8.

Rursus, data æquatio sit — 3A4 † 180A2 = 1617: igitur D = 3: item E = 180: item F = 1617; quare E2 = 32400: item 4D = 12. Ex his vlterius constat, quod differentia duorum numerorum, quorum vnus est E2, hoc est 32400, alter est F *in* 4D, hoc est 19404: sit numerus 12996: adeòque P = 12996: ergo R1qP = 114: Igitur duorum numerorum, quorum vnus est E, hoc est 180, alter est R1qP, hoc est 114, aggregatum erit 294, & differentia erit 66: igitur X = 147, & præterea Z = 33: ergo dAn, hoc est 3A2 = 147, vel 33: ergo A2 = 49, vel 11. Hinc infero, si A2 = 49: ergo A4 = 2401: ergo 3A4 = 7203: item 180A2 = 8820. Quare — 3A4 † 180A2 = — 7203 † 8820 ll 1617. Igitur in hac suppositione verum est, quod asserebatur in proposita æquatione. Facta rursus altera suppositione, quod A2 = 11: infero, ergo A4 = 121: ergo 3A4 = 363: item 180A2 = 1980. Quare — 3A4 † 180A2 = — 363 † 1980 ll 1617. Igitur in hac secunda suppositione verum est, quod asseritur in proposita æquatione.

Denique data æquatio sit — 3A2 † 22A1 = 7: igitur D = 3: item E = 22: item F = 7; quare E2 = 484: & præterea 4D = 12. Differentia inter E2, hoc est 484, & F *in* 4D, hoc est 7 *in* 12, siue 84, erit 400. hinc P = 400: & præterea R1qP = 20; quare numerorum E, hoc est 22, & R1qP, hoc est 20, aggregatum erit 42, differentia erit 2: igitur X = 21, & præterea Z = 1: ergo dAn, hoc est 3A1 = 21, vel 1: ergo 1A1 = 7, vel 1 *per* 3. Hinc infero, si 1A1 = 7: ergo 1A2 = 49: ergo 3A2 = 147:

$=147$: item $22A1 = 154$. Quare $-3A2 + 22A1 = -147 + 154 \parallel 7$, vt asseritur in proposita æquatione. Facta hypothesi, quod $Z = 1$, tunc dAn, hoc est $3A1 = 1$, ergo $1A1 = 1$ *per* 3: ergo $1A2 = 1$ *per* 9: ergo $3A2 = 3$ *per* 9: item $22A1 = 22$ *per* 3. Quare $-3A2 + 22A1 = -3$ *per* 9 *et* $+ 22$ *per* $3 \parallel 7$, vt in proposita æquatione asserebatur.

CAPVT VIII.

Veritates elementares Logisticæ.

PARS I.

Axiomata Logisticæ.

Primum axioma. Duæ quantitates, eidem tertiæ quantitati æquales, siue quoad magnitudinem, siue quoad valorem: etiam inter se æquales erunt.

Secundum axioma. Duo producta ex eadem operatione Logistica sunt inter se æqualia: quando & superiores genitores inter se, & præterea etiam inferiores genitores inter se æquantur.

Tertium axioma. Productum ex propriè dicta additione est maius quolibet genitore.

Quartum axioma. Productum ex propriè dicta subtractione, est minus aliquo genitore.

Quintum axioma. Quantitatum constantium ex antecedente, & consequente termino, qui connexi sint particula *in*, *per*, *ad*, atque commune consequens habentium: additio absoluitur, quando manente eodem consequente termino, adduntur termini antecedentes.

Sextum axioma. Quantitatum constantium ex antecedente, & consequente termino: qui connexi sint particula *in*, *per*, *ad*, atque commune consequens habentium. subtractio absoluitur, quando manente eodem consequente termino, fit subtractio circa terminos antecedentes.

Septimum axioma. Post æque multas, & additiones reales, & subtractiones æquiualentes inferiorum genitorum inter se æquiualentium: quoad valorem inuariatus manet superior genitor. Hinc $12 = 12 + 10 - 10$. item $A = A + B - B$. Præterea supposito quod $B = C$, verum erit $A = A + B - C$. item $A = A + C - B$. Item $A = A + B - C - B + C$.

Octauum axioma. Quando baseos, quæ duci potest ductu primo Geometrico, & nominato, singuli termini oppositi, siue singula puncta terminantia lineas rectas per basim excurrentes, assurgunt ad eamdem altitudinem: etiam tota basis assurgit ad eamdem altitudinem, ad quam assurgunt dicti baseos termini, aut puncta.

Nonum axioma. Basis quæ est recta linea, vel plana superficies, mota per extensionem quam habet: non causat productum ex vllo ductu Geometrico: sed tantum causat obliquitatem in tali producto, quando concurrit cum motu baseos iuxtà extensionem, quæ in basi non inuenitur.

Decimum axioma. Qualescunque sint quantitates A, B, C, D. Supposito quod A *ad* B = C *ad* D, legitimè sequitur, ergo A *in* D = C *in* B; & vicissim, supposito quod A *in* D = B *in* C, legitimè sequitur, ergo A *ad* B = C *ad* D.

Vndecimum axioma. Proportionalitas, siue proportio quam habet vna ratio ad alteram rationem, æqualis est proportioni, quam primæ rationis antecedens terminus, habet ad secundæ rationis antecedentem terminum, quando vtriusque illius

illius rationis consequens terminus idem est, hoc est A *ad* B respectu C *ad* B = A *ad* C.

Duodecimum axioma. Recta linea cum altera recta linea, vel plana superficie tantum concurrit in vnico puncto.

Decimum tertium axioma. Quando arcum circuli semel tantum intersecat, aut recta linea, aut alius circuli arcus: hæc intersectio fit in vnico puncto.

Decimum quartum axioma. Duæ superficies planæ tantum semel concurrunt, & hic concursus, siue communis intersectio, est recta linea.

Decimum quintum axioma. Anguli rectilinei, aut plani inter se habent eam proportionem, quam habent arcus, qui sunt ipsorum mensuræ.

P A R S II.

Theoremata elementaria de proportionibus.

Theorema I.

Qualescunque quantitates sint A, B, C.

Dico primò. Legitimè sequi A = B, ergo A *ad* C = B *ad* C.

Dico secundò. Legitimè sequi A *ad* C = B *ad* C, ergo A = B.

Theorema II.

Qualescunque quantitates sint A, B, C, D, ità tamen vt A *ad* B = C *ad* D.

Dico primò. Legitimè sequi inuertendo, ergo B *ad* A = D *ad* C.

Dico secundò. Legitimè sequi permutando, ergo A *ad* C = B *ad* D.

Dico tertiò. Legitimè sequi componendo, ergo A † B *ad* B = C † D *ad* D: vel ergo A *ad* A † B = C *ad* C † D.

Dico quartò. Legitimè sequi diuidendo, ergo A − B *ad* B = C − D *ad* D: vel ergo A *ad* B − A = C *ad* D − C.

Theorema III.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D, E, F, ità tamen vt A *ad* B = D *ad* E: & prætereà B *ad* C = E *ad* F.

Dico legitimè sequi ex æquo, ergo A *ad* C = D *ad* F.

Theo-

Theorema IV.

Qualeſcunque ſint quantitates A,B,C.

Dico in quinque ſubſequentibus diuerſis ſcriptionibus, antecedentem terminum ad conſequentem, eamdem rationem habere.

Prima. A *ad* B.

Secunda. $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{C}$

Tertia. $\frac{C}{B}$ *ad* $\frac{C}{A}$

Quarta A *in* C *ad* B *in* C.

Quinta C *in* A *ad* C *in* B.

Theorema V.

Qualeſcunque ſint quantitates A,B,C,D.

Dico ſubſequentes quatuor æquationes tales eſſe, vt ſuppoſita vnius veritate, neceſſariò veræ ſint reliquæ omnes: tametſi prima conſiſtat inter duas proportiones, reliquæ verò conſiſtant inter quantitates diuerſas à proportionibus.

Prima æquatio. A *ad* B $=$ C *ad* D.

Secunda æquatio. A *in* D $=$ B *in* C.

Tertia æquatio. $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

Quarta æquatio. $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

Theorema VI.

Qualeſcunque ſint quantitates A,B,C.

Dico primò. A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B \text{ in } C}{A}$

Dico ſecundò. A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B}{A}$ *in* C.

Dico tertiò. A *ad* B $=$ C *ad* B *in* $\frac{C}{A}$

Dico quartò. A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{1}{A}$ *in* B *in* C.

Theorema VII.

Qualeſcunque, & quotcunque rationes propoſitæ fuerint.

Dico primò. ſemper verum eſſe, quod ratio producta ex omnibus iſtis propoſitis rationibus, ſucceſſiuè multiplicatis (hoc eſt ratio ex omnibus iſtis propoſitis rationibus compoſita) ſit æqualis rationi, quam productum ex omnibus antecedentibus terminis ſucceſſiuè multiplicatis, habet ad productum ex omnibus conſequentibus terminis ſucceſſiuè multiplicatis.

Exemplum primæ aſſertionis. Datæ rationes qualeſcunque ſint 3 *ad* 6, 4 *ad* 7, 6 *ad* 9, 2 *ad* 1. Ex his datis rationibus compoſita ratio $=$ 3 *in* 4 *in* 6 *in* 2 *ad* 6 *in* 7 *in* 9 *in* 1. ll 144 *ad* 378. Si placent plura exempla conſule ſecundum modum multiplicandi rationes in parte 5. cap. 2. Quod enim hic aſſeritur, ſpeculatiuè verum eſſe de ratione compoſita, quæ diuerſa non eſt à ratione producta per multipli-

 catio-

cationem, citato, loco docetur in ordine ad practicam inuentionem rationis compoſitæ, ſiue productæ per multiplicationem.

Dico ſecundò. Semper verum eſſe, quod ratio extremorum terminorum, æquetur rationi compoſitæ ex omnibus iſtis propoſitis rationibus, dummodò inter extremos iſtos terminos ſic mediæ ſint, vt continuatam rationum ſeriem conſtituant: hoc eſt, vt in enunciandis omnibus iſtis rationibus, bis nominentur ſinguli termini ab extremis diuerſi.

Exemplum ſecundæ aſſertionis. Datæ ſint rationes continuæ, ſiue æquales, ſiue inæquales 3 *ad* 6, 6 *ad* 4, 4 *ad* 7, 7 *ad* 3, 3 *ad* 9. Ex his compoſita ratio = 3 *ad* 9. Si placent plura exempla conſule primum modum multiplicandi rationes in parte 5. cap. 2.

Theorema VIII.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, D.

Dico, ſeptem ſubſequentibus diuerſis ſcriptionibus, indicatas rationes, inter ſe æquales eſſe.

Prima. A *in* D *ad* B *in* C.

Secunda. $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{D}$

Tertia. $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{D}$

Quarta. A *ad* B *in* D *ad* C,

Quinta. A *ad* C *in* D *ad* B.

Sexta. $\frac{A \text{ ad } B}{C \text{ ad } D}$

Septima $\frac{A \text{ ad } C}{B \text{ ad } D}$

P A R S III.

Theoremata elementaria dependentia ab Angulis.

Theorema I.

Ex puncto C, ductæ ſint tres rectæ lineæ C A, C D, C B, quæ omnes ſint in eodem plano; & rectæ C A, & C B, ſint ad diuerſas partes rectæ C D.

Fig. 8. Dico primò, angulum A C D † D C B = duobus rectis, quando puncta A, C, B, ſunt in directum.

Dico ſecundò, puncta A, C, B, eſſe in directum, quando angulus A C D † D C B = duobus rectis.

Theorema II.

Duæ rectæ lineę C D & B E, ſeſe interſecent in puncto A.

Fig. 9. Dico angulos ad verticem oppoſitos inter ſe æquales eſſe: ex. gr. angulum B A D = angulo C A E: præterea angulum B A C = angulo D A E.

Theo-

Theorema III.

Tres rectæ lineę A B, D F, G H, ſint in eodem plano, atque rectas A B, & D F, ſecet recta G H, in punctis E, & C.

Dico primò. Suppoſito quod lineæ A B & D F, ſint parallelæ: legitimè ſequitur. Primò, angulum internum æquari angulo externo ad eamdem partem poſito; hoc eſt, angulum B E G = angulo F C G.

Secundò, angulos alternos inter ſe æquales eſſe; hoc eſt B E G = angulo D C H.

Tertiò, duos angulos internos, ad eamdem partem poſitos, ſimul æquari duobus rectis angulis; hoc eſt angulum B E G † angulo F C H = duobus rectis angulis. Fig. 13.

Dico ſecundò. Legitimè ſequi lineas, A B & D F eſſe parallelas inter ſe.

Primò. Suppoſito quod angulus internus, ſit æqualis externo ad eamdem partem poſito; hoc eſt, quod angulus B E G = angulo F C G.

Secundò. Suppoſito quod duo anguli alterni inter ſe æquales ſint; hoc eſt, quod angulus B E G = angulo D C H.

Tertiò. Suppoſito quod duo anguli interni ad eamdem partem poſiti, ſimul ſint æquales duobus rectis angulis; hoc eſt, quod angulus B E G † angulo F C H = duobus rectis angulis.

Theorema IV.

Sint duo triangula plana, & rectilinea A B C, & D E F.

Dico, legitimè ſequi, triangula A B C, & D E F, eſſe inter ſe ſimilia.

Primò. Suppoſito quod angulus A = angulo D, & inſuper angulus B = angulo E. Fig. 24.

Secundò. Suppoſito quod angulus A = angulo D, & inſuper recta A B *ad* D E = A C *ad* D F.

Tertiò. Suppoſito quod recta A B *ad* D E = A C *ad* D F ll B C *ad* E F.

Theorema V.

Sint duo circulorum ſectores F G H & F I K, in quibus angulus G F H æquetur angulo I F K.

Dico, arcum G H *ad* arcum I K = rectæ G F *ad* rectam I F. Fig. 26.

Theorema VI.

Sit quoduis triangulum A B C: & ex puncto B, ducta ſit recta, ſecans baſim A C in puncto D.

Dico primò. Suppoſito quod angulus A B D = angulo D B C, legitimè ſequitur A D *ad* D C = A B *ad* B C. Fig. 27.

 Di-

Dico secundò. Supposito quod A D *ad* D C = A B *ad* B C, legitime sequitur angulum A B D = angulo D B C.

Theorema VII.

Sint duo quiuis anguli, qui singuli æqualium circulorum, vel eiusdem circuli æqualibus arcubus insistant.

Fig. 28. Dico primò. Supposito quod singuli isti anguli habeant verticem, vel in centro, vel in circumferentia talis circuli, inter se æquales erunt. Hinc supposito quod A sit centrum circuli, in cuius circumferentia sint puncta B, C, E, D: erit angulus B D C = angulo B E C.

Dico secundò. Si prior habeat verticem in centro, alter habeat verticem in circumferentia, prior erit duplo maior altero. Ità angulus B A C *ad* angulum B E C = 2 *ad* 1.

Theorema VIII.

In triangulo rectangulo A B C, ex puncto B, vertice recti anguli, ducta sit recta B D perpendicularis ad basim A C.

Fig. 29. Dico primò, inter se similia esse tria triangula A B C, A D B, & B D C.

Dico secundò, A D *ad* D B = D B *ad* D C.

Dico tertiò, A C *ad* B C = B C *ad* D C.

Dico quartò, A C *ad* A B = A B *ad* A D.

Dico quintò, ACq = ABq + BCq.

Theorema IX.

Fig. 14. Cuiuscunque trianguli, tres anguli interni simul sumpti, æquales sunt duobus rectis angulis. Hinc qualecunque sit triangulum A B C, verum est angulum B A C + A B C + B C A = duobus rectis angulis.

P A R S IV.

Theoremata elementaria de ductibus Geometricis, atque nominatis.

Theorema I.

Dico, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = 1 *ad* 1.

Theo-

Theorema II.

Qualescunque ex ductibus nominatis significent singulæ ex literis E & F, dummodò P *ad* Q habeat rationem compositam ex quatuor rationibus, quarum prima sit baseos A *ad* basim C: secunda sit altitudinis B *ad* altitudinem D: tertia sit ductus E *ad* ductum primum: quarta sit ductus primi *ad* ductum F.

DIco, A *in* B ductu E *ad* C *in* D ductu F = P *ad* Q.

Theorema III.

DIco, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 2 = 1 *ad* 1.

Theorema IV.

DIco primò, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 = 2 *ad* 1, quando vnica baseos extensio decrescit.

Dico secundò, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 = 3 *ad* 1, quandò duplex baseos extensio decrescit.

Theorema V.

DIco, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 ampliato = 2X *ad* X † Z.

Nota. X significat dimidium baseos A ante decrementum. Z significat dimidium eius, quod ex basi A remanet post decrementum.

Theorema VI.

DIco, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 2 *ad* 1.

Theorema VII.

DIco, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 ampliato = 2X *ad* X † Z.

Nota. X significat dimidium baseos A ante decrementum. Z significat dimidium eius, quod ex basi A remanet post decrementum.

Theorema VIII.

DIco primò, quando basis A est linea: A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = E *ad* F ll 2G *ad* H.

Dico

Dico secundò, quando basis A est superficies: A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = 3E *ad* 2F ‖ 3G *ad* H.

Nota. E significat arcum, qui est basis, quando basis, est linea: quando verò basis est sector circuli, litera E significat arcum, qui terminat sectorem, qui est basis.

F significat partem axeos quæ correspondet arcui E, siue partem axeos quæ intercipitur inter duas rectas ab extremitatibus arcus E perpendiculares ad axem.

G significat sectorem terminatum ab arcu E.

H significat, quod ductu primo producitur, ex radio arcus E, ducto in lineam F.

CAPVT IX.

Proponuntur sex hypotheses, in quibus asseruntur aliquæ æquationes maximè commodę.
Siue
Nonnulla theoremata pro praxi satis vtilia, asserentia æqualitatem inter diuersas quantitates absolutas.

Prima hypothesis.

Supponit duas quantitates X & Z quarum vna sit maior altera, qualèscunque tandem quantitates sint.

Dico primò. $X = X + Z + X - Z$ *per* 2 ‖ $\frac{X+Z}{2} + \frac{X-Z}{2}$

Dico secundò. $Z = X + Z - X + Z$ *per* 2 ‖ $\frac{X+Z}{2} - \frac{X+Z}{2}$ ‖ $\frac{X+Z}{2} + \frac{X-Z}{-2}$

Dico tertiò. $X + Zq = X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $2Z$.

Dico quartò. $X + Zq = X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z$.

Dico quintò. $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z$.

Dico sextò. $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$.

Dico septimò. $X2 - Z2q = X + Zq$ *in* $X - Zq$.

Primæ assertionis sensus esse potest, quod quantitas X sit æqualis aggregato ex dimidia summa, & dimidia differentia, quantitatum X & Z, & hunc sensum habet, supposito, quod quantitatum X & Z, maior sit quantitas X.

Secundæ assertionis sensus esse potest, quod quantitas Z, sit æqualis dimidio residui, quod relinquitur, quando ex summa quantitatum X & Z aufertur earumdem quantitatum differentia, atque hunc sensum habet, supposito quod quantitatum X & Z, minor sit quantitas Z.

Tertiæ assertionis sensus est, quantitatum X & Z summam in se ductam, æquari aggregato ex tribus quantitatibus, quarum prima est, quantitas X ducta in se: secunda est, quantitas Z ducta in se: tertia est, quantitas X ducta in duas quantitates Z.

Quartæ assertionis sensus est, summam quantitatum X & Z in se ductam, esse æqualem aggregato ex duabus quantitatibus, quarum prima est, differentia quantitatum X & Z in se ducta: secunda est, quantitas X ducta in quatuor quantitates Z. Propriè tamen loquendo, hic sensus supponit, quantitatum X & Z, maiorem esse X.

Quintæ assertionis sensus est, quantitatum X & Z differentiam in se ductam, esse æqualem residuo, quod relinquitur, quando ex aggregato, quod oritur ex duabus quantitatibus, quarum prima est quantitas X in se ducta: secunda est quanti-

tas

tas Z in se ducta, aufertur productum ex quantitate X, ducta in duas quantitates Z. Propriè tamen loquendo, hic sensus supponit quantitatum X & Z, maiorem esse quantitatem X.

Sextæ assertionis sensus est, residuum quod relinquitur, quando ex quantitate X ducta in se, aufertur quantitas Z ducta in se: hoc inquam residuum esse æquale producto ex summa quantitatum X & Z, ducta in differentiam quantitatum X & Z. Propriè tamen loquendo, hic sensus supponit quantitatum X & Z maiorem esse X,

Septimæ assertionis sensus est, quadratorum X & Z differentiam in se ductam, æquari producto ex quadrato aggregati quantitatum X & Z, ducto in quadratum differentiæ quantitatum X & Z.

Secunda hypothesis.

Supponit X † Z *ad* P = P *ad* Z; & præterea X † Z *ad* Q = Q *ad* X: qualescunque quantitates sint X, Z, P, Q.

Dico primò, Q2 = X *in* X † Z.
Dico secundò, P2 = Z *in* X † Z.
Dico Tertiò, X † Zq = P2 † Q2.
Dico quartò, X − Zq = P2 † Q2 *et* − X *in* 4Z.

Diligenter hic notandũ, quod vniuersaliter de quibuscunq; quantitatibus proposita hypothesis: etiam verificetur de rectis lineis cuiuslibet trianguli rectãguli A B C, in quo ex puncto B vertice recti anguli, ducta sit recta BD, perpendicularis ad basim A C, atq; illam secans in D: quo casu, ex literis in assertionibus adhibitis, litera Q = rectæ A B: litera P = rectæ B C: litera X = rectæ AD : litera Z = rectæ D C. Quod verò in vniuersali nostra hypothesi docet tertia assertio, idem illud est, quod denominatis trianguli rectanguli lineis, hoc est de vniuersali nostra hypothesi restricta ad rectas lineas triangulum rectangulũ constituentes, docet maximè nominata illa propositio, quæ à suo inuentore Pythagora, vsque in hunc diem passim appellatur Pythagorica : & reuera maximam vtilitatem habet in rebus Geometricis; atque hæc causa est, quod iterum à nobis proposita fuerit hoc modo restricta, in assertione 5. Theorematis 8. partis 3. huius capitis. Fig. 29.

Primæ assertionis sensus est, quantitatem Q in se ductam, æquari producto ex quantitate X, ducta in aggregatum ex quantitatibus X & Z.

Secundæ assertionis sensus est, quantitatem P in se ductam, æquari producto ex quantitate Z, ducta in aggregatum ex quantitatibus X & Z.

Tertiæ assertionis sensus est, aggregatum ex quantitatibus X & Z ductum in se, æquari aggregato ex duabus quantitatibus, quarum prima est quantitas P ducta in se: secunda est quantitas Q ducta in se.

Quartæ assertionis sensus est, differentiam quantitatum X & Z ductam in se, æquari residuo, quod relinquitur quando ex aggregato, quod oritur ex duabus quantitatibus, quarum vna est P in se ducta, altera est Q in se ducta, aufertur productum ex quantitate X ducta in quatuor quantitates Z. Propriè tamen loquendo, hic sensus supponit quantitatum X & Z, maiorem esse X.

Ter-

Tertia Hypothesis

Considerat tres qualescunque quantitates A, B, C, & distinguit tres diuersos casus; in primo supponit quantitatem A æquari aggregato ex quantitatibus B & C, in secundo supponit quantitatem A esse æqualem quantitati B; in tertio casu supponit quantitates A, B, C, esse continuè proportionales.

In primo casu, siue supposito quod $A = B + C$: Dico $A2 = A + B$ *in* C *et* $+ B2$.

In secundo casu, siue supposito quod $A = B$: Dico $A + Cq = A + B + C$ *in* C *et* $+ B2$.

In tertio casu, siue supposito quod A *ad* $B = B$ *ad* C; dico verum esse.

Primò $\frac{A}{2} + Cq = \frac{A2}{4} + B2 + C2$.

Secundò $A + Cq = A2 + 2\,B2 + C2$.

Tertiò $B2 = A + Cq - A2 - B2 - C2$.

Assertionis primi casus, sensus est, quod quantitas A ducta in seipsam, sit æqualis aggregato duarum quantitatum, quarum vna est productum ex summa quantitatum A & B ducta in quantitatem C; altera est quantitas B ducta in seipsam; supponit tamen hæc assertio, quod quantitas A sit æqualis aggregato quantitatum B & C.

Assertionis secundi casus, sensus est, aggregatum quantitatum A & C ductum in se, esse æquale aggregato ex duabus quantitatibus, quarum vna est productum ex summa quantitatum A, B, C, ducta in quantitatem C: altera est quantitas B ducta in seipsam; supponit tamen hæc assertio, quantitates A & B inter se æquales esse.

Tertij casus prima assertio, affirmat productum, quod habetur ducendo in se aggregatum ex medietate quantitatis A, & tota quantitate C, esse æquale aggregato trium quantitatum, quarum prima est quarta pars quantitatis A ductæ in se; secunda est quantitas B ducta in se; tertia est quantitas C ducta in se.

Tertij casus secunda assertio, dicit, aggregatum quantitatum A & C ductum in se: esse æquale aggregato trium quantitatum, quarum prima est quantitas A ducta in se; secunda est duplum producti ex quantitate B ducta in se; tertia est quantitas C ducta in seipsam.

Tertij casus tertia assertio pronunciat, quantitatem B ductam in se: æquari residuo, quod relinquitur, quando ex aggregato quantitatum A & C ducto in se, aufertur aggregatum ex tribus quantitatibus, quarum prima est quantitas A ducta in se; secunda est quantitas B ducta in se; tertia est quantitas C ducta in seipsam.

Quar-

Quarta Hypothesis.

Supponit X *in* Z = A; & præterea X2 † Z2 = B qualescunque sint quantitates X & Z, sic tamen vt X sit maior quam Z.

Dico primò. $\frac{R1qB \dagger 2A}{2} \dagger \frac{R1qB - 2A}{2} = X$

Dico secundò. $\frac{R1qB \dagger 2A}{2} - \frac{R1qB - 2A}{2} = Z$

Primæ assertionis sensus est, quod in proposita hypothesi, quantitas X sit æqualis quantitati, quæ producitur ex additione, in qua dimidio primæ radicis aggregati ex quantitate B, & duabus quantitatibus A, additur dimidium radicis illius quantitatis, quæ relinquitur, quando ex quantitate B subtrahuntur duæ quantitates A.

Secundæ assertionis sensus est, quod in proposita hypothesi, quantitas Z sit æqualis quantitati, quæ producitur ex subtractione, in qua ex dimidio primæ radicis aggregati ex quantitate B, & duabus quantitatibus A, subtrahitur dimidium primæ radicis illius quantitatis, quæ relinquitur, quando ex quantitate B subtrahuntur duæ quantitates A.

Quinta Hypothesis.

Supponit duas rectas A B & C D sese intersecantes in E habere terminos, siue puncta A, B, C, D, in circumferentia eiusdem circuli.

Dico A E *in* E B = D E *in* E C. Fig. 30.

Sexta Hypothesis.

Supponit à puncto A extra circulum constituto ductam rectam A B tangentem circulum in B: & alteram rectam A D, prius in C, deinde in D, occurrere circumferentiæ eiusdem circuli.

Dico D A *in* AC = ABq. Fig. 31.

CAPVT X.

De inuentione.

PRoponuntur tres diuersæ Logisticæ regulæ, inuentioni seruientes, quando inuenienda est, vel solutio propositi problematis, vel demonstratio theorematis, aut solutionis alicuius problematis.

Prima Regula Logisticæ.

Vtilis pro inuen ien dis, aut problematum solutionibus, aut theorematum demonstrationibus; præsertim quando in illis agitur de æqualitate inter quantitates non productas ex ductibus Geometricis nominatis.

PRimò. Diligenter expendendo quid quæratur vel asseratur, & singulas conditiones, quas inuoluit quæstio, vel assertio: adhibita si prodest figura, annotetur, primò quæsitum, siue assertio: secundò quæsiti, siue assertionis conditiones singulæ, atque in his notis obseruetur, vt sint breues, distinctæ, & commodæ; tales verò erunt, si fiant adhibita breuiori scriptione Logisticæ, non assumendo plures diuersas, atque incognitas dignitates, quam necessarium sit.

Secundò. Assumatur æquatio scripta in aliqua ex annotatis conditionibus, vel ex tali conditione facilè inferibilis, atque expressa breui scriptione Logistica, & si hæc assumpta æquatio inuoluit diuersas dignitates incognitas, ac fieri possit, liberetur ab omnibus incognitis dignitatibus, diuersis ab vna illa, quam placet seruare, quamque ideò appellamus dignitatem seruandam: & reliquas incognitas dignitates, ab hac seruanda dignitate diuersas, dicimus remouendas dignitates.

Tertiò. In discursu inchoato ab assumpta æquatione liberata à dignitatibus remouendis, assumatur altera ex annotatis conditionibus, & noua æquatio inferatur, quæ iterum liberanda erit à dignitatibus remouendis, si tales dignitates inuoluat. Atque ità successiuè assumendo singulas annotatas conditiones, discursus producatur, vt tandem habeatur æquatio, quæ & ex singulis annotatis conditionibus dependeat, & præterea non inuoluat vllas dignitates incognitas, quæ diuersæ sint à seruanda dignitate.

Quartò. Inuentæ huius æquationis partes, ordinando, ac contrahendo, inferatur æquatio maximè ordinata, atque contracta; ordinata erit, si in vna eius parte contineantur omnes scriptiones inuoluentes dignitatem seruandam: in altera verò parte tantum contineantur cognitæ dignitates, aut numeri; contracta erit si eiusdem speciei scriptiones diuersas non contineat.

Quintò. Resoluendo hanc maximè ordinatam, & contractam æquationem, inueniatur valor retentæ, siue seruatæ dignitatis: atque ex huius seruatæ dignitatis cognitione, reddantur similiter cognitæ, reliquæ prius incognitæ, atque adhibitæ dignitates, à retenta dignitate diuersæ; quod facilè est, quandoquidem in discursu necessariò inuenietur singularum valor, expressus, vel per dignitatem retinendam, atque iam cognitam, vel per alias dignitates, aut cognitas, aut ex his cognoscibiles. Hoc modo inuenitur, ac cognitum fit, quidquid per incognitas digni-

dignitates prius expreſſum, adeòque incognitum inueniebatur, vel in quæſtione, vel in aſſertione, vel in conditionibus Logiſtica ſcriptione expreſſis.

Nota primò. Si propoſita problemata, aut theoremata pertineant ad Arithmeticam, plerumque non prodeſt figura; verùm ſi pertineant ad Geometriam, vt plurimum iuuat figura. In caſibus in quibus iuuat figura, prius fieri debet, ſic vt repræſentet veluti iam factum, vel inuentum, illud quod faciendum, vel inueniendum proponitur: vel certè vt repræſentet illa, quę iuuat in figura videre, vt commodius intelligatur diſcurſus.

Nota ſecundò. Vt ſingula fiant, quæ in hac prima Logiſticæ regula præſcribuntur: vtilia ſunt propemodum ſingula, quæ in præcedentibus capitibus docentur: alia tamen frequentius, alia rarius vſum habent. Verum quid in quouis caſu iuuet, ſtatuere nō poteſt, niſi prudens iudicium eius, qui iuxtà præſcriptam regulam diſcurſum inſtituit; is enim intelligendo quid agat, ex ipſa difficultate, quam videt ſuperandam eſſe, vt iuxtà regulam proſequatur diſcurſum: non difficulter colligit, atque intelligit, quid ex pluribus iſtic propoſitis, ſibi vtile ſit in caſu, in quo verſatur. Eo ferè modo, vt medicus ex morbi curandi cognitione, intelligit quale ex ſibi cognitis remedijs adhibendum ſit.

Secunda regula Logiſticæ.

Præſertim vtilis pro inuenienda proportione, quam habet quantitas X ad quantitatem Z: dummodò ſingulæ iſtæ quantitates X, & Z genitæ ſint, ex aliquo eodem, vel diuerſo ductu nominato.

Primò. Conſiderando prius quis ſit ductus nominatus, ex quo producatur quælibet ex quantitatibus X & Z: ſingulæ iſtæ quantitates exprimantur compendiata ſcriptione Logiſtica, quæ indicet, baſim quæ ducitur, altitudinem in quam baſis ducitur, & ductum ex quo quantitas producitur. Præterea breui ſcriptione Logiſtica annotentur ſingulæ hypotheſeos conditiones.

Secundò. Sibi inuicem ordine ſubſcribantur quatuor rationes, ex quibus prima ſit, illa quam habet baſis quantitatis X *ad* baſim quantitatis *Z*: ſecunda ratio ſit, quam habet altitudo quantitatis X *ad* altitudinem quantitatis *Z*: tertia ratio ſit, illa, quam habet ductus ex quo oritur quantitas X, *ad* ductum primum: quarta ratio ſit, quam habet ductus primus *ad* ductum ex quo oritur quantitas Z.

Tertiò. Huic primæ quatuor rationum ſeriei, adſcribantur ſucceſſiuè aliæ ſeries priori æquiualentes, ſed commodiores ad inueniendam rationem ſimplicem, atque compoſitam ex rationibus tota ſerie contentis: donec habeatur rationum ſeries, prioribus quidem ſeriebus ſingulis æquiualens, ſic tamen, vt in hac ſerie, contentarum rationum termini commodi ſint, ad inueniendam ſimplicem, & facilè intelligibilem rationem compoſitam, ex omnibus huius ſeriei rationibus.

Quartò. Inueniatur ratio ſimplex, & cognita, quæ compoſita ſit ex omnibus vltimæ iſtius ſeriei rationibus. Hæc erit ratio quam quantitas X habet ad quantitatem Z, quæ proinde erit cognita.

Nota primò. Si aliquæ ex conditionibus annotatis iuxtà primum regulę pręſcriptum, neque aſſerant proportionem, neque æquationem: conſultum eſt pro illis ſubſtituere æquiualentes conditiones, quæ aſſerant, vel æquationem, vel aliam proportionem. Videri possunt exempla in theorematis Euclideis inuoluentibus angulorum proprietates: pro quo consule caput 12.

Nota secundò. Iuxtà dicta in parte 5. capitis 2. de multiplicatione: idem prorsus significat, rationum multiplicatio, & rationum compositio; & consequenter inuenire rationem compositam ex omnibus alicuius propositæ seriei rationibus, idem planè est, ac inuenire rationem, quæ producitur ex successiua multiplicatione omnium rationum tali serie contentarum. Hæc rationum multiplicatio, siue compositio, duplici diuerso modo docetur in citata parte 5. cap. 2.

Nota tertiò. Serierum, de quibus in tertio præscripto agitur, æquiualentia non vitiatur, per hoc quod rationum termini tantum mutent ordinem, sic vt omnes consequentes termini non desinant quidem esse consequentes termini, sed tantum respondeant diuersis eiusdem seriei antecedentibus; vt manifestè patet, præsertim ex secundo modo inueniendi rationem compositam. Huiusmodi verò ordinis mutatio in terminis consequentibus rationum: eodem ordine perseuerantibus terminis antecedentibus, frequenter maximam affert commoditatem pro vsu regulæ.

Nota quartò. Quando in vna ex dictis rationum seriebus, inuenitur aliqua ratio composita ex duabus, vel tribus rationibus, pro hac vnius seriei composita ratione, substituere in altera serie rationes componentes, aut è contra; non vitiat æquiualentiam, quæ prius inueniebatur inter tales duas rationum series.

Tertia Regula Logisticæ.

Vtilis pro inueniendis, aut problematum solutionibus, aut theorematum demonstrationibus; sed præcedentibus magis vaga, atque difficilis pro vsu practico: celeberrima tamen apud mathematicos.

Primò. Supponatur factum, quod præscribitur faciendum, vel verum, quod asseritur, & demonstrari debet: & si commodum videtur (vt in Geometricis plerumque contingit) adhibita figura, annotetur assertio, & singulæ conditiones, quas inuoluit hypothesis, in qua fit assertio.

Secundò. Ex assertione, & hypotheseos conditionibus, inferantur consequentiæ, donec perueniatur ad aliquod consequens, per se notum, vel demonstratum, vel concessum; vel certè ad consequens, cuius falsitas aliunde constat.

Tertiò. Incipiendo ab illato consequente aliunde cognito, inferantur successiuè illa ipsa, ex quibus hoc consequens illatum fuit; hoc modo continuando discursum, tandem inferetur ipsa assertio prius proposita, atque supposita; hæc habebitur tali discursu legitimè demonstrata, eo ipso, quod consequens, à quo discursus inchoatus est, aut per se notum sit, aut legitimè demonstratum. Si verò iuxtà secundum præscriptum instituto discursu perueniatur ad consequens, quod aliunde constat falsum esse: legitimè inferetur falsam esse assumptam assertionem: quia ex illa sequitur falsum. Si denique pro discursu iuxtà secundum præscriptum instituendo, assumatur falsum esse, quod asseritur, vel probandum est: atque hoc discursu, inferatur falsum, siue impossibile. Inde legitimè inferetur impossibilem esse falsitatē eius, quod asseritur, vel probandum est; ac propterea cōstabit verum esse, quod asseritur, vel probandum erat. Iuxtà principium fundamentale artis syllogisticæ, ex vero nihil, nisi verum, ex falso sequi quidlibet.

No-

Nota primò. Hæc regula propriè videtur reſolutio, ſiue analyſis antiquæ Matheſeos. Circa hanc regulã benè notat doctiſſimus Marinus Ghetaldus, initio libri primi de reſolutione, & cõpoſitione Mathematica: quod duas partes habeat maximè diuerſas inter ſe; prior pars magis propriè reſolutio dicitur, & continetur primo, ac ſecundo regulæ præſcripto, prout à nobis proponitur. Hæc reſolutio definiri poteſt aſſumptio veritatis, vel falſitatis quæſiti, & ex illa, legitima illatio alicuius conſequentis, cuius veritas, vel falſitas aliunde conſtat. Altera regulæ pars, quæ magis propriè compoſitio appellatur: continetur tertio regulæ præſcripto. Hæc compoſitio definiri poteſt, aſſumptio propoſitionis cuius, aut veritas, aut falſitas aliunde conſtat, & ex illa, illatio, aut veritatis, aut falſitatis illius aſſertionis, quæ debebat probari. Quando tamen (vt in tertio præſcripto dicitur) probanda propoſitio vera aſſumitur, & ex illa falſum infertur, atque hinc infertur falſam eſſe aſſumptam propoſitionem: vel certè probanda propoſitio falſa aſſumitur, & ex illa falſum infertur, atque hinc concluditur veram eſſe aſſumptam propoſitionem: talis diſcurſus appellatur deductio ad impoſſibile.

Nota ſecundò. Euclides, Archimedes, Apollonius Pergeus, & plures alij ex præſtantiſſimis antiquæ Matheſeos cultoribus, frequenter proponunt deductionem ad impoſſibile: vbi verò compoſitionem adhibent, antè illam non præmittunt reſolutionem; tamen per reſolutionem ab ipſis inuenta eſſe, quæ ſcripſerunt, videtur vt indubitatum ſupponi à Ghetaldo. Hoc certum, nihil à compoſitione diuerſum requiri, vt propoſitio legitimè demonſtrata ſit; & reſolutionem tantum vtilem eſſe, vt cognoſcatur veritas, ex qua inferri poſſit, quod demonſtrandum eſt.

CAPVT XI.

Nonnulla exempla primæ regulæ Logiſticæ.

NOta, In diſcurſibus exemplorum primæ regulæ Logiſticæ.

per 1. ſignificat, per primam conditionem.

per 2. ſignificat, per ſecundam conditionem.

per a, ſignificat, per antitheſim, ſiue praxim 1. cap. 4.

per b, ſignificat, per partem 4. cap. 2.

per c, ſignificat, per primam reſolutionem cap. 7.

per d, ſignificat, per praxim 6. cap. 4.

[illegible] ſignificat, per praxim 3. cap. 4.

[illegible] praxim 5. cap. 4.

per g [illegible] reducendo ad communem denominatorem, de qua reductione agit praxis 3. partis 3. cap. 2.

per h, ſignificat, per praxim 2. cap. 4.

Hæ citationes paulò frequentius recurrunt; quæ ab his diuerſæ, atque neceſſariæ erunt, notabuntur poſt diſcurſum, in quo adhibentur; hìc verò prænotatas, ſimul proponere atque exponere volui: tum quia frequentiores ſunt: tum vt Logiſticæ candidati intelligant, quam paucas praxes inter ſe diuerſas requirant exemplorum diſcurſus, tametſi in ſingulis ferè enthymematis citetur, vnde conſtet præmiſſa, quæ ſubauditur, & requireretur ad formandum integrum Syllogiſmum, cui enthymema æquiualet.

PARS I.

Continens faciliora primæ regulæ Logisticæ exempla, pro quibus proponuntur, & iuxtà regulæ præscripta soluuntur aliqua problemata particularia, siue restricta ad particulares, siue indiuiduales numeros.

Problema I.

Inueniendi sint duo numeri, quorum maior est X, minor esse Z: supposito quod sciatur illorum aggregatum esse 100. differentiam esse 40.

Quæsitum. Cognoscendi numeri sunt X & Z.
Prima conditio, $X + Z = 100$.
Secunda conditio, $X - Z = 40$.

Discursus. *Per* 2. $X - Z = 40$: ergo *per a*, $X = 40 + Z$: sed *per* 1. $X + Z = 100$: igitur $40 + Z + Z = 100$: ergo *per b*, $40 + 2Z = 100$: ergo *per a*, $2Z = 100 - 40$: ergo $2Z = 60$: ergo *per c*, $Z = 30$: sed $X = 40 + Z$: ergo $X = 40 + 30 \parallel 70$. Constat igitur $X = 70$, & præterea $Z = 30$.

Problema II.

Inueniendi sunt duo numeri X & Z, quorum differentia sit 12: & ratio minoris numeri X ad maiorem Z, sit *2 ad* 3.

Quæsitum. Cognoscendi numeri sunt X & Z.
Prima conditio, $Z - X = 12$.
Secunda conditio, X *ad* Z = 2 *ad* 3.

Discursus. *Per* 1. $Z - X = 12$: ergo *per a*, $Z = 12 + X$: sed *per* 2. X *ad* Z = 2 *ad* 3: ergo *per d*, X *in* 3 = 12 + X *in* 2: ergo *per b*, $3X = 24 + 2X$: ergo *per a*, $3X - 2X = 24$: ergo *per b* $X = 24$: sed $Z = 12 + X$: ergo $Z = 12 + 24 \parallel 36$: igitur $X = 24$, & præterea $Z = 36$.

Problema III.

Inueniendi sunt duo numeri X & Z, quorum aggregatum sit 60, & ratio minoris numeri X ad maiorem Z, sit 2 *ad* 3.

Quæsitum. Cognoscendi numeri sunt X, & Z.
Prima conditio, $X + Z = 60$.
Secunda conditio X *ad* Z = 2 *ad* 3.

Di-

Discursus. *Per* 1. X + Z = 60. : ergo *per a*, X = 60 − Z, sed *per* 2. X *ad* Z = 2 *ad* 3: ergo 60 − Z *ad* Z = 2 *ad* 3 : ergo *per d*, 60 *in* 3 *et* − Z *in* 3 = Z *in* 2 : ergo *per b*, 180 − 3Z = 2Z : ergo *per a*, 180 = 2Z + 3Z : ergo *per b*, 180 = 5Z : ergo *per c*, Z = 36: sed X = 60 − Z: ergo X = 60 − 36 ll 24: igitur X = 24, & præterea Z = 36.

Problema IV.

Inueniendus est numerus X, supposito quod sciantur duo numeri 76 & 4, qui singuli sint minores numero X, & præterea constet defectum 76 à numero X ad defectum 4 à numero X, esse, vt 1 *ad* 4.

Quæsitum. Petitur numerus X.
Vnica conditio, X − 76 *ad* X − 4 = 1 *ad* 4.

Discursus. Per conditionem X − 76 *ad* X − 4 = 1 *ad* 4 : ergo *per d*, X − 76, *in* 4 = X − 4 *in* 1. ergo *per b*, 4X − 304 = X − 4 : ergo *per a*, 4X − X = − 4 + 304 : ergo *per b*, 3X = 300 : ergo *per c*, X = 100.

Problema V.

Inueniendus numerus X, supposito quod sciantur duo numeri 60 & 40, qui sint maiores numero X; & preterea constet excessum 60 suprà X, ad excessum 40 suprà X, esse vt 3 *ad* 1.

Quæsitum. Petitur numerus X.
Vnica conditio, 60 − X *ad* 40 − X = 3 *ad* 1.

Discursus. Per conditionem 60 − X *ad* 40 − X = 3 *ad* 1 : ergo *per d*, 60 − X *in* 1 = 40 − X *in* 3 : ergo *per b*, 60 − X = 120 − 3X : ergo *per a*, − X + 3X = 120 − 60: ergo *per b*, 2X = 60 : ergo *per c*, X = 30.

Problema VI.

Inueniendus numerus X, supposito quod defectus 60 à numero X ad excessum numeri 180 suprà numerum X, sit, vt 1 *ad* 5.

Quæsitum. Petitur numerus X.
Vnica conditio, X − 60 *ad* 180 − X = 1 *ad* 5.

Discursus. Per conditionem, X − 60 *ad* 180 − X = 1 *ad* 5: ergo *per d*, X − 60 *in* 5 = 180 − X *in* 1: ergo *per b*, 5X − 300 = 180 − X: ergo *per a*, 5X + X = 180 + 300 : ergo *per b*, 6X = 480 : ergo *per c*, X = 80.

Pro-

Problema VII.

Numerus 60 diuidendus sit in duas partes X & Z, ità vt tertia pars numeri X, addita quintæ parti numeri Z producat 14.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, X + Z = 60.
Secunda conditio, X *per* 3 *et* + Z *per* 5 = 14.

Discursus. *Per* 1, X + Z = 60: ergo *per a*, X = 60 — Z: sed *per* 2, X *per* 3 *et* + Z *per* 5 = 14: ergo 60 — Z *per* 3 *et* + Z *per* 5 = 14: ergo *per e*, 60 *per* 3 *et* — Z *per* 3 *et* + Z *per* 5 = 14: ergo *per a*, — Z *per* 3 *et* + Z *per* 5 = 14 *et* — 60 *per* 3 ll 14 — 20 ll — 6. Sed *per g*, — Z *per* 3 *et* + Z *per* 5 = — 5Z *per* 15 *et* + 3Z *per* 15 : ergo — 5Z *per* 15 *et* + 3Z *per* 15 = — 6: ergo *per e et b*, — 2Z *per* 15 = — 6: ergo *per f*, — 2Z = — 6 *in* 15 ll — 90 : ergo *per c*, Z = 45 : sed X = 60 — Z : ergo X = 60 — 45 ll 15. Igitur X = 15, & præterea Z = 45.

Alius discursus pro solutione eiusdem problematis, sed declinans paruam illam molestiam causatam à fractionibus, siue particulis *per*, in priori discursu. Pro hoc discursu pono hypothesim, quod X *per* 3 = A, quodque Z *per* 5 = B, Hoc supposito.

Quæsitum. Petuntur duo numeri 3A & 5B.
Prima conditio, 3A + 5B = 60.
Secunda conditio, A + B = 14.

Discursus. *Per* 2, A + B = 14: ergo *per a*, B = 14 — A: ergo 5B = 14 — A *in* 5 ll 70 — 5A: sed *per* 1, 3A + 5B = 60: ergo 3A + 70 — 5A = 60: ergo *per a*, 3A — 5A = 60 — 70: ergo *per b*, — 2A = — 10: ergo *per c*, A = 5: ergo 3A = 15: sed quia *per* 1, 3A + 5B = 60: *per a*, 5B = 60 — 3A ll 60 — 15 ll 45: igitur 5B = 45: igitur quia X = 3A & Z = 5B, patet X = 15 & Z = 45.

Problema VIII.

Numerus 348, diuidendus sit in duas partes X & Z, sic vt tertia pars numeri X, addita quartæ parti numeri Z, faciat 98.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, X + Z = 348.
Secunda conditio, X *per* 3 *et* + Z *per* 4 = 98.

Discursus, *Per* 1, X + Z = 348: ergo *per a*, Z = 348 — X; sed *per* 2, X *per* 3 *et* + Z *per* 4 = 98: ergo X *per* 3 *et* + 348 — X *per* 4 = 98: ergo *per e*, X *per* 3 *et* + 348 *per* 4 *et* — X *per* 4 = 98 : ergo *per a*, X *per* 3 *et* — X *per* 4 = 98 *et* — 348 *per* 4 ll 98 — 87 ll 11: sed *per g*, X *per* 3 *et* — X *per* 4 = 4X *per* 12 *et* — 3X *per* 12 ll X *per* 12: ergo X *per* 12 = 11 : ergo *per f*, X = 11 *in* 12 ll 132 : atqui Z = 348 — X : ergo Z = 348 — 132 ll 216. Constat igitur X = 132, & præterea Z = 216.

Pro-

Problema IX.

Inueniendi ſunt duo numeri X & Z, quorum differentia ſit 12, & quarta pars numeri Z, ablata à tertia parte numeri X, relinquat numerum 9.

Quæſitum inueniendi numeri X & Z.
Prima conditio, X − *Z* = 12.
Secunda conditio, X *per 3 et* − Z *per* 4 = 9.

Diſcurſus. Per primam conditionem X − Z = 12: ergo *per a*, − Z = 12 − X: ſed *per* 2, X *per 3 et* − Z *per* 4 = 9: ergo X *per 3 et* † 12 − X *per* 4 = 9: ergo *per e*, X *per* 3 *et* † 12 *per* 4 *et* − X *per* 4 = 9: ergo *per a*, X *per 3 et* − X *per* 4 = 9 *et* − 12 *per* 4 ll 9 − 3 ll 6 ſed *per g*, X *per 3 et* − X *per* 4 = 4X *per* 12 *et* − 3X *per* 12 ll X *per* 12: ergo X *per* 12 = 6: ergo *per f*, X = 6 *in* 12: ergo X = 72: ſed quoniam − Z = 12 − X, etiam *per h*, Z = − 12 † X: ergo Z = − 12 † 72 ll 60: igitur X = 72, & præterea Z = 60

Alius diſcurſus incipiens à ſecunda conditione: per hanc X *per 3 et* − Z *per* 4 = 9: ergo *per a*, − Z *per* 4 = 9 *et* − X *per* 3: ſed quia − Z *per* 4 = − Z *per* 4: etiam *per f*, − Z *per* 4 *in* 4 = − Z: ergo − Z = 9 *in* 4 *et* − X *per* 3 *in* 4 ll 36 *et* − 4X *per* 3: ſed *per* 1, X − Z = 12: ergo X † 36 *et* − 4X *per* 3 = 12: ergo *per a*, X *et* − 4X *per* 3 = 12 − 36 ll − 24: ſed quia 3X = 3X: etiam *per f*, X = 3X *per* 3: ergo 3X *per 3 et* − 4X *per* 3 = − 24: ergo *per e*, − X *per* 3 = − 24: ergo *per f*, − X = − 24 *in* 3 ll − 72: ergo X = 72: ſed quia *per* 1, X − *Z* = 12, etiam *per a*, − Z = 12 − X ll 12 − 72 ll − 60: ergo − Z = − 60: ergo *per h*, Z = 60: verùm X = 72.

PARS II.

Alia exempla primæ regulæ Logiſticæ, in quibus, problemata particularia primę partis, proponuntur, & ſoluuntur vniuerſaliter.

IN prima parte huius capitis propoſita problemata diximus particularia, quia reſtricta ſunt ad certos, atque indiuiduales numeros: & conſequenter problemata vniuerſalia hic appellamus, quæ non ſunt reſtricta ad certos, ſiue indiuiduales numeros: talia ſunt, quæ continentur hac ſecunda parte, & non differunt à problematis prioris partis, niſi quod hæc ſint vniuerſalia, illa particularia: vt ſic melius appareat differentia, quæ intercedit inter problemata inferioris ordinis, quæ ſunt particularia, & altioris ordinis, quæ ſunt vniuerſalia.

Nota primò. In ſolutione vniuerſalis problematis, non inuenitur indiuidualis aliqua quantitas, aut numerus, quæſito ſatisfaciens: ſed ſolutio quæ inuenitur, docet vniuerſaliter, quid faciendum ſit in quolibet indiuiduali caſu problematis, vt quæſito ſatisfiat: ſiue exhibet logiſticam ſcriptionem, quam ſufficit exponere iuxtà praxim 9. capitis 4. vt habeatur particularis ſolutio in quolibet caſu poſſibili, quem admittit problema vniuerſale.

Nota ſecundò. Literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, quæ pro citationibus adhibentur in diſcurscursibus: in hac parte retinent significationem illis concessam, & declaratam initio huius capitis.

Problema I.

Inueniendæ sunt duæ quantitates, quarum maior sit X, minor Z: supposito quod cognoscatur illarum aggregatum B, & differentia A.

Quæsitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, X + Z = B.
Secunda conditio, X − Z = A.

Discursus. *Per* 2, X − Z = A: ergo *per a*, X = A + Z: sed *per* 1, X + Z = B: ergo A + Z + Z = B: ergo *per b*, A + 2Z = B: ergo *per a*, 2Z = B − A: ergo *per f*, Z = B − A *per* 2: sed X = A + Z: ergo X = A *et* + B − A *per* 2 ll 2A + B − A *per* 2 ll A + B *per* 2; igitur X = A + B *per* 2: & præterea Z = B − A *per* 2.

In casu problematis 1. partis antecedentis: A = 40. item B = 100. In hoc casu A + B *per* 2 = 40 + 100. *per* 2 ll 70: adeòque X = 70. Præterea B − A *per* 2 = 100 − 40 *per* 2 ll 30. adeòque Z = 30; ex quo patet quomodo vniuersalis solutio hic illata, contineat solutionem particularem problematis 1. partis 1.

Problema II.

Inueniendæ sunt quantitates X & Z: supposito quod differentia quantitatum X & Z sit A: quodque quantitas X *ad* quantitatem Z habeat rationem D *ad* E.

Quæsitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, Z − X = A.
Secunda conditio, X *ad* Z = D *ad* E.

Discursus. *Per* 1, Z − X = A: ergo *per a*, Z = A + X: sed *per* 2, X *ad* Z = D *ad* E: ergo X *ad* A + X = D *ad* E: ergo *per d*, X *in* E = A + X *in* D: ergo *per e*, X *in* E = A *in* D *et* + X *in* D: ergo *per a*, X *in* E *et* + X *in* − D = A *in* D: ergo *per e*, X *in* E − D = A *in* D: ergo *per f*, X = A *in* D *per* E − D: sed Z = A + X: ergo Z = A *et* + A *in* D *per* E − D.

In casu problematis 2. partis 1. A = 12: item D = 2: item E = 3; igitur A *in* D *per* E − D = 12 *in* 2 *per* 3 − 2 ll 24 *per* 1 ll 24, adeòque X = 24; quoniam verò Z = A + X ll 12 + 24 ll 36: etiam Z = 36.

Problema III.

Inueniendæ sunt quantitates X & Z, supposito quod ipsarum aggregatum sit A: proportio verò X *ad* Z sit, vt D *ad* E.

Quæsitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio. X + Z = A.
Secunda conditio, X *ad* Z = D *ad* E.

Di-

Diſcurſus. *Per* 1, X + Z = A: ergo *per a*, X = A — Z: ſed *per* 2, X *ad* Z = D *ad* E: ergo A — Z *ad* Z = D *ad* E; ergo *per d*, A — Z *in* E = Z *in* D: ergo *per e*, A *in* E *et* — Z *in* E = Z *in* D: ergo *per a*, A *in* E = Z *in* D *et* + Z *in* E: ergo *per e*, A *in* E = Z *in* D + E: ergo *per f*, A *in* E *per* D + E = Z; ſed X = A — Z: ergo X = A *et* — A *in* E *per* D + E.

In caſu problematis 3. partis 1. A = 60; item D = 2. item E = 3. igitur A *in* E *per* D + E = 60 *in* 3 *per* 2 + 3 ll 180 *per* 5 ll 36, adeòque Z = 36. Præterea A — Z = 60 — 36 ll 24: ſed X = A — Z: ergo X = 24.

Problema IV.

Inuenienda ſit quantitas X: ſuppoſito quod cognitæ ſint duæ quantitates A & B, quę ſingulæ ſint minores quantitate X; & præterea cognita ſit proportio C *ad* D, æqualis proportioni, quam habet differentia quantitatum X & A, ad differentiam quantitatum X & B.

Quæſitum, petitur quantitas X.
Vnica conditio X — A *ad* X — B = C *ad* D.

Diſcurſus. Per conditionem, X — A *ad* X — B = C *ad* D: ergo *per d*, X — A *in* D = X — B *in* C: ergo *per e*, X *in* D *et* — A *in* D = X *in* C *et* — B *in* C: ergo *per a*, X *in* D *et* + X *in* — C = — B *in* C *et* + A *in* D: ergo *per e*, X *in* D — C = — B *in* C *et* + A *in* D: ergo *per f*, X = $\frac{-\text{B in C et} + \text{A in D}}{\text{D} - \text{C}}$

In caſu problematis 4. partis 1. A = 76; item B = 4; item C = 1; item D = 4. Igitur $\frac{-\text{B in C et} + \text{A in D}}{\text{D} - \text{C}} = \frac{-4 \text{ in } 1 \text{ et} + 76 \text{ in } 4}{4 - 1}$ ll $\frac{-4 + 304}{3}$ ll $\frac{300}{3}$ ll 100. quare in caſu citati problematis X = 100.

Problema V.

Inuenienda eſt quantitas X; ſuppoſito quod cognitæ ſint duæ quantitates B & C, maiores quantitate X, & præterea cognita ſit proportio D *ad* E, æqualis proportioni, quam habet differentia X & B, ad differentiam X & C.

Quæſitum. Petitur quantitas X.
Vnica conditio, B — X *ad* C — X = D *ad* E.

Diſcurſus. Per conditionem, B — X *ad* C — X = D *ad* E: ergo *per d*, B — X *in* E = C — X *in* D: ergo *per e*, B *in* E *et* — X *in* E = C *in* D *et* — X *in* D: ergo *per a*, B *in* E *et* — C *in* D = — X *in* D *et* + X *in* E ll X *in* — D *et* + X *in* E: ergo X *in* — D *et* + X *in* E = B *in* E *et* — C *in* D: ergo *per e*, X *in* — D + E = B *in* E *et* — C *in* D: ergo *per f*, X = $\frac{\text{B in E et} - \text{C in D}}{-\text{D} + \text{E}}$

Suppoſito caſu problematis 5. partis 1. B = 60; item C = 40; item D = 3; item E = 1. Igitur $\frac{\text{B in E et} - \text{C in D}}{-\text{D} + \text{E}} = \frac{60 \text{ in } 1 \text{ et} - 40 \text{ in } 3}{-3 + 1}$ ll $\frac{60 - 120}{-2}$ ll $\frac{-60}{-2}$ ll 30.

Problema VI.

Inuenienda est quantitas X; supposito quod cognitæ sint duæ quantitates B & C, quarum prior B sit minor, altera C sit maior quantitate X; & præterea sciatur proportio D *ad* E æqualis proportioni, quam habet differentia quantitatum X & B, ad differentiam quantitatum X & C.

Quæsitum. Petitur quantitas X.
Vnica conditio, X − B *ad* C − X = D *ad* E.

Discursus. Per conditionem X − B *ad* C − X = D *ad* E: ergo *per d*, X − B *in* E = C − X *in* D: ergo *per e*, X *in* E *et* − B *in* E = C *in* D *et* − X *in* D: ergo *per a*, X *in* E *et* † X *in* D = C *in* D *et* † B *in* E: ergo *per e*, X *in* E † D = C *in* D *et* † B *in* E: ergo *per f*, X = $\frac{\text{C in D et} \dagger \text{B in E}}{\text{E} \dagger \text{D}}$

Supposito casu problematis 6. partis 1. B = 60: item C = 180: item D = 1: item E = 5. Igitur $\frac{\text{C in D \& } \dagger \text{ B in E}}{\text{E} \dagger \text{D}} = \frac{\text{180 in 1 \& } \dagger \text{ 60 in 5}}{5 \dagger 1}$ ‖ $\frac{180 \dagger 300}{6}$ ‖ $\frac{480}{6}$ ‖ 80.

Problema VII.

Cognita quantitas C, diuidenda sit in duas partes X & Z: ità vt aggregatum ex $\frac{X}{D}$ & $\frac{Z}{E}$, sit æquale quantitati F: qualescunque cognitas quantitates significent literæ D, E, F, dummodò id sit possibile.

Quæsitum. Petuntur duæ quantitates X & Z.
Prima conditio, X † Z = C.
Secunda conditio, X *per* D *et* † Z *per* E = F.

Discursus. *Per* 1, X † Z = C: ergo *per a*, X = C − Z: sed *per* 2, $\frac{X}{D} \dagger \frac{Z}{E}$ = F: ergo $\frac{C - Z}{D} \dagger \frac{Z}{E}$ = F: ergo *per g*, $\frac{\text{E in C} - \text{Z}}{\text{D in E}} \dagger \frac{\text{D in Z}}{\text{D in E}}$ = F: ergo $\frac{\text{E in C} - \text{Z et} \dagger \text{D in Z}}{\text{D in E}}$ = F: ergo *per f*, E *in* C − Z *et* † D *in* Z = F *in* D *in* E: ergo *per e*, E *in* C *et* † Z *in* − E *et* † Z *in* D = F *in* D *in* E: ergo *per a*, Z *in* − E *et* † Z *in* D = F *in* D *in* E *et* − E *in* C: ergo *per e*, Z *in* − E † D = F *in* D *in* E *et* − E *in* C: ergo *per f*, Z = $\frac{\text{F in D in E et} - \text{E in C}}{- \text{E} \dagger \text{D}}$.

In casu problematis 7. partis 2. C = 60; item D = 3; item E = 5; item F = 14. Igitur $\frac{\text{F in D in E et} - \text{E in C}}{- \text{E} \dagger \text{D}} = \frac{\text{14 in 3 in 5 et} - \text{5 in 60}}{- 5 \dagger 3}$ ‖ $\frac{210 - 300}{-2}$ ‖ $\frac{-90}{-2}$ ‖ 45. Igitur Z = 45: & præterea C − Z = 15; quoniam igitur X = C − Z: etiam X = 15.

Pro-

Problema VIII.

Cognita quantitas C, diuidenda ſit in duas partes, quarum minor X, & maior Z: ſic vt aggregatum ex quantitate X, diuiſa per quantitatem D, & quantitate Z, diuiſa per quantitatem E, producat quantitatem F.

Quæſitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, X † Z = C.
Secunda conditio, X *per* D *et* † Z *per* E = F.

Diſcurſus. *Per* 1, X † Z = C: ergo *per a*, Z = C − X: ſed *per* 2, $\frac{X}{D} \dagger \frac{Z}{E}$ = F: ergo $\frac{X}{D} \dagger \frac{C-X}{E}$ = F: ergo *per g*, $\frac{E \text{ in } X}{D \text{ in } E} \dagger \frac{D \text{ in } C-X}{D \text{ in } E}$ = F: ergo *per b*, $\frac{E \text{ in } X \text{ et} \dagger D \text{ in } C-X}{D \text{ in } E}$ = F: ergo *per f*, E *in* X *et* † D *in* C − X = F *in* D *in* E: ergo *per e*, E *in* X *et* † D *in* C *et* − D *in* X = F *in* D *in* E: ergo *per a*, E *in* X *et* − D *in* X = F *in* D *in* E *et* − D *in* C: ergo *per e*, E − D *in* X = F *in* D *in* E *et* − D *in* C: ergo *per f*, X = $\frac{F \text{ in } D \text{ in } E \text{ et} - D \text{ in } C}{E-D}$

In caſu problematis 8. partis 1. C = 348; item D = 3; item E = 4; item F = 98. Igitur $\frac{F \text{ in } D \text{ in } E \text{ et} - D \text{ in } C}{E-D} = \frac{98 \text{ in } 3 \text{ in } 4 \text{ et} - 3 \text{ in } 348}{4-3}$ ll 132; igitur X = 132: ſed Z = C − X ll 348 − 132 ll 216: ergo Z = 216.

Problema IX.

Inueniendi ſunt duo numeri, quorum maior X, minor Z, differentia verò ſit C: ſic vt relinquatur quantitas F, quando à quantitate X diuiſa per E, aufertur quantitas Z diuiſa per D.

Quæſitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, X − Z = C.
Secunda conditio, $\frac{X}{E} - \frac{Z}{D}$ = F.

Diſcurſus. *Per* 1, X − Z = C: ergo *per a*, − Z = C − X: ſed *per* 2, $\frac{X}{E} - \frac{Z}{D}$ = F: ergo $\frac{X}{E} \dagger \frac{C-X}{D}$ = F: ergo *per g*, $\frac{D \text{ in } X}{E \text{ in } D} \dagger \frac{E \text{ in } C-X}{E \text{ in } D}$ = F: ergo *per b*, $\frac{D \text{ in } X \text{ et} \dagger E \text{ in } C-X}{E \text{ in } D}$ = F: ergo *per f*, D *in* X *et* † E *in* C − X = F *in* E *in* D: ergo *per e*, D *in* X *et* † E *in* C *et* − E *in* X = F *in* E *in* D: ergo *per a*, D *in* X *et* − E *in* X = F *in* E *in* D *et* − E *in* C: ergo *per e*, D − E *in* X = F *in* E *in* D *et* − E *in* C: ergo *per f*, X = $\frac{F \text{ in } E \text{ in } D \text{ et} - E \text{ in } C}{D-E}$

In caſu problematis 9. partis 1. C = 12; item D = 4; item E = 3; item F = 9. Igitur $\frac{F \text{ in } E \text{ in } D \text{ et} - E \text{ in } C}{D-E} = \frac{9 \text{ in } 3 \text{ in } 4 \text{ et} - 3 \text{ in } 12}{4-3}$ ll 108 − 36 ll 72; ergo X = 72: & quia *per* 1, X − Z = C; etiã *per a*, X − C = Z: quare 72 − 12 = Z: adeòq; Z = 60.

Alius diſcurſus pro ſoutione problematis 9. *Per* 1, X − Z = C: ergo *per a*, X = C † Z: ſed *per* 2, $\frac{X}{E} - \frac{X}{D}$ = F: ergo $\frac{C \dagger Z}{E} - \frac{Z}{D}$ = F: ergo *per c*, $\frac{C}{E} \dagger \frac{Z}{E} - \frac{Z}{D}$ = F: ergo *per a*, $\frac{Z}{E} - \frac{Z}{D} = F - \frac{C}{E}$: ergo *per g*, $\frac{D \text{ in } Z}{E \text{ in } D} - \frac{E \text{ in } Z}{E \text{ in } D} = F - \frac{C}{E}$: igitur ſuppoſito quod H = F − $\frac{C}{E}$; etiam *per e*, $\frac{D - E \text{ in } Z}{E \text{ in } D}$ = H: ergo *per f*, D − E *in* Z = H *in* E *in* D: ergo *per f*, Z = $\frac{H \text{ in } E \text{ in } D}{D-E}$

In

In casu problematis 9. partis 1. $C = 12$; item $D = 4$; item $E = 3$; item $F = 9$. Igitur $F - \frac{C}{E} = 9 - \frac{12}{3}$ ll 5: adeòque $H = 5$: ergo H *in* E *in* $D = 5$ *in* 3 *in* 4 ll 60: ergo $Z = 60$: sed $X = C + Z$ ll 12 + 60 ll 72: igitur $X = 72$.

PARS III.

Exempla primæ regulæ Logisticę, pro quibus vtilis est resolutio compositę ęquationis, quę capite septimo secunda est.

PRiora sex problemata huius partis particularia sunt, reliqua tria sunt vniuersalia: attamen requisita pro solutione problematum, aut particularium, aut vniuersalium, quæ continentur præcedentibus duabus partibus, non sufficiunt ad soluenda hæc problemata; etenim vltima, & maximè simplex æquatio, quæ in discursu infertur composita est, atque adeò prò eius resolutione non sufficit prima, atque facilior resolutio capitis septimi, sed requiritur istius capitis secunda, atque difficilior resolutio; vel certè discursus ità instituendus est, vt declinando compositam æquationem, tandem inferatur simplex æquatio, quod etiam requirit aliquid diuersum à requisitis pro solutione præcedentium problematum. Quoniam verò hæc problemata solui possunt, tum resoluendo compositam æquationem, tum declinando æquationem compositam: singulis problematis huius partis appono duplicem discursum: prior infert problematis solutionem mediante resolutione compositæ æquationis; posterior infert eiusdem problematis solutionem independenter à resolutione compositæ æquationis; hanc tamen solutionem infert dependenter ab æquationibus capitis 9: atque potissimum assumendo æquationes spectantes ad primam hypothesim huius capitis. Quomodo cognoscatur, quæ æquatio vtilis sit, atque assumenda in quouis discursu, vt declinetur composita æquatio: colligendum est ex discursus circumstantijs, atque conditionibus problematis, cuius solutio inferenda est per discursum. Vt hoc melius videant, atque facilius intelligant Logisticæ candidati: vtiles existimaui notas quę in nonnullis problematis præcedunt discursũ declinantẽ æquationem compositam; has negligere possunt, qui non laborant in re tam paruæ difficultatis; præterea, vt tyronibus magis prodessem, aliquos ex discursibus declinantibus compositam æquationem propono diuisos in diuersas partes: reliquos sine tali interruptione continuatos propono, vt requiritur pro solutionis nitore.

Nota. Pro citationibus quas requirunt discursus, literæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, retinent significationẽ ipsis concessam initio huius capitis. In hac parte paucæ aliæ citationes frequentes sunt: sæpè enim citanda secunda resolutio capitis septimi: vel aliqua assertio, præsertim primæ hypothesis capitis 9. Pro his citationibus vtor subsequentibus compendiatis scriptionibus.

per c c, significat per resolutionem secundam capitis 7.
per 1h1, significat per primæ hypothesis cap. 9. primam assertionem.
per 1h2, significat per primæ hypothesis cap. 9. secundam assertionem.
per 1h3, significat per primæ hypothesis cap. 9. tertiam assertionem, & sic de cæteris.

Pro-

Problema I.

Inuenire duos numeros X & Z, quorum aggregatum sit 12: productum verò ex vno numero ducto in alterum sit 20,

Quæsitum. Petuntur numeri X& Z.
Prima conditio, $X + Z = 12$.
Secunda conditio, X *in* $Z = 20$.

Primus discursus deducens ad æquationem compositam. *Per* 1, $X + Z = 12$: ergo *per a*, $Z = 12 - X$: sed *per* 2, X *in* $Z = 20$: ergo X *in* $12 - X = 20$: ergo *per e*, X *in* 12 *et* $+ X$ *in* $- X = 20$: ergo *per e*, $12X - X2 = 20$: ergo *per cc*, $X = 10$; adeòque Z, hoc est $12 - X = 2$.

Nota pro secundo discursu: quod in cognitis conditionibus inueniatur $X + Z$, quare vlterius per discursum inueniendo $X - Z$, habentur omnia requisita, vt mediante prima, & secunda assertione primæ hypotheseos cap. 9. cognoscantur singulæ ex duabus quantitatibus X & Z. Ad cognoscendum valorem $X - Z$, vtilem esse assertionem 4. capitis 9, cognoscitur ex eo, quod hæc æquatio constet ex tribus membris X in Z, item $X + Z$, item $X - Z$, ex quibus duo priora facilè cognoscuntur ex duabus propositi problematis conditionibus, adeòque cognitum sit tertium membrum $X - Z$, cuius valor inuestigatur priori parte secundi discursus, & cognitus assumitur in secunda parte, vt problematis solutio inferatur.

Secundi discursus prior pars, *per* 1*h*4, $X + Zq = X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z$: sed quia *per* 1, $X + Z = 12$, patet $X + Zq = 144$; præterea, quia *per* 2, X *in* $Z = 20$, constat X *in* $4Z = 80$: ergo $144 = X - Zq + 80$: ergo *per a*, $X - Zq = 144 - 80$ ll 64: igitur $X - Z = R1q64$ ll 8.

Secundi discursus altera pars. Ex secundi discursus priori parte constat, $X - Z = 8$: præterea *per* 1, $X + Z = 12$: ergo *per* 1*h*1 *et* 2, constat $X = 10$: item $Z = 2$.

Problema II.

Inuenire numeros X & Z, quorum differentia sit 8: productum verò ex numero X ducto in numerum Z sit 20.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, $X - Z = 8$.
Secunda conditio, X *in* $Z = 20$.

Primus discursus deducens ad compositam æquationẽ *Per* 1, $X - Z = 8$: ergo *per a*, $- Z = 8 - X$: ergo *per h*, $Z = - 8 + X$: sed *per* 2, X *in* $Z = 20$: ergo X *in* $- 8 + X = 20$: ergo *per e*, X *in* X *et* $+ X$ *in* $- 8 = 20$: ergo *per e*, $X2 - 8X = 20$: ergo *per c c* $X = 10$: adeòque $- 8 + X$ hoc est $Z = 2$.

Nota pro secundò discursu, quod in cognitis conditionibus inueniatur $X - Z$: quare per discursum inueniendo $X + Z$, habentur omnia requisita, vt mediante asser-

tione

tione prima, & secunda primæ hypothesis cap. 9. cognoscantur singulę quantitates X & Z. Iam verò ad cognoscendum valorem X ✝ Z, vtilem esse assertionem 4. primæ hypothesis cap. 9, cognoscitur ex eo, quod hæc æquatio constet ex tribus membris, X in Z, item X — Z, item X ✝ Z, ex quibus duo sunt cognita, siue facilè cognoscibilia ex propositis, & cognitis problematis cõditionibus: adeòque cognitum fit reliquum membrum X ✝ Z, cuius valorem inquirit prima pars secundi discursus: & assumitur in secunda parte, vt inferatur problematis solutio.

Secundi discursus prior pars, *per* 1*h*4, constat X — Zq *et* ✝ X *in* 4Z = X ✝ Zq: sed *per* 1, X — Z = 8: adeòque X — Zq = 64: præterea quia *per* 2, X *in* Z = 20: patet X *in* 4Z = 80; igitur 64 ✝ 80 = X ✝ Zq: igitur 144 = X ✝ Zq: ergo R1*q*144 = X ✝ Z: ergo X ✝ Z = 12.

Secundi discursus altera pars. Ex priori parte constat, X ✝ Z = 12: pręterea ex prima conditione constat X — Z = 8; igitur *per* 1*h*1 *et* 2, constat X = 10: & præterea Z = 2.

Problema III.

Inueniendi duo numeri X & Z, ità vt productum ex numero X ducto in Z, sit 20: & præterea aggregatum ex quadratis numerorum X & Z sit 104.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio: X *in* Z = 20.
Secunda conditio, X2 ✝ Z2 = 104.

Primus discursus deducens ad æquationem compositam. *Per* 1, X *in* Z = 20: ergo *per f*, Z = 20 *per* X: sed *per* 2, X2 ✝ Z2 = 104: ergo X2 *et* ✝ 20 *per* Xq = 104: ergo X2 *et* ✝ 400 *per* X2 = 104: ergo *per a*, 400 *per* X2 = 104 — X2: ergo *per f*, 400 = 104 — X2 *in* X2: ergo 400 = 104X2 — X4: ergo *per cc*, X = 10; & præterea Z = 2.

Nota pro secundo discursu: quod in cognitis conditionibus non inueniatur, aut X ✝ Z, aut X — Z: quare vt habeatur huius problematis solutio, similis solutioni allatæ in secundo discursu præcedentium problematum: prius X ✝ Z: deinde X — Z inuenitur; ideòque hunc secundum diuido in tres partes. Prima inquirit valorem X ✝ Z, pro quo vtilis est assertio 3. primæ hypothesis; quia ex tribus membris, ex quibus constat huius assertionis æquatio, vnum est X *in* 2Z facilè cognoscibile ex prima conditione: alterum est X2 ✝ Z2, facilè cognoscibile ex secunda conditione: tertium est X ✝ Zq, cuius prima radix est X ✝ Z: quantitas cuius valor in hac prima parte inueniri debet. Secunda pars huius discursus, inquirit valorē X — Z, non difficulter cognoscibilem ex assertione 5. primæ hypothesis cap. 9; huius enim assertionis æquatio continet tria membra, quorum vnum X *in* 2Z innotescit ex prima conditione: alterum X2 ✝ Z2 cognoscitur ex secunda conditione: tertium membrum est X — Zq, cuius prima radix est X — Z: quantitas cuius valor inueniendus est hac secunda parte. Tertia pars ex cognitis quantitatibus X ✝ Z, atque X — Z infert problematis solutionem, vt in præcedentibus factum fuit.

Prima pars secundi discursus *per* 1*h*3, constat X2 ✝ Z2 *et* ✝ X *in* 2Z = X ✝ Zq: sed per secundam conditionem X2 ✝ Z2 = 104, & præterea *per* 1, patet X *in* 2Z = 40: ergo 104 ✝ 40 = X ✝ Zq: ergo 144 = X ✝ Zq: ergo R1*q*144 hoc est 12 = X ✝ Z.

Se-

Secunda pars secundi discursus. *Per 1h5*, constat $X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z = X - Zq$; sed *per* 2, $X2 + Z2 = 104$; præterea *per* 1, X *in* $Z = 20$, adeòque $- X$ *in* $2Z = - 40$: igitur $104 - 40 = X - Zq$: ergo $X - Zq = 64$: ergo $X - Z = R1q64$ ll 8.

Tertia pars secundi discursus. Per primam partem $X + Z = 12$, & per secundam partem $X - Z = 8$: igitur *per 1h1 et 2*, $X = 10$, & præterea $Z = 2$.

Problema IV.

Inueniendi sunt duo numeri X & Z, quorum differentia sit 8: & quadratorum aggregatum sit 104.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, $X - Z = 8$.
Secunda conditio $X2 + Z2 = 104$.

Primus discursus deducens ad æquationem compositam. *Per* 1, $X - Z = 8$: ergo *per a*, $X = 8 + Z$: ergo $X2 = 8 + Zq$ ll $64 + 16Z + Z2$: sed *per* 2, $X2 + Z2 = 104$: ergo $64 + 16Z + Z2 + Z2 = 104$: ergo *per a et b*, $16Z + 2Z2 = 104 - 64$: ergo $2Z2 + 16Z = 40$: ergo *per cc*, $Z = 2$, adeòque $X = 10$.

Nota pro secundo discursu; quod in cognitis conditionibus inueniatur $X - Z$; quare vlterius per discursum inueniendo X *in* Z, habentur omnia requisita, vt mediante discursu adhibito in prob. 2. huius partis, cognoscatur X, & etiam Z. Ad cognoscendum valorem X *in* Z, vtilem esse assertionem 5. hypothesis 1. cap. 9, cognoscitur ex eo, quod huius assertionis æquatio constet ex tribus membris, ex quibus $X2 + Z2$ innotescit ex secunda conditione: alterum membrum $X - Zq$, facilè cognoscitur ex prima conditione: quare reliquum X *in* Z innotescit. Itaque discursum diuido in tres partes. In prima inuenitur valor quantitatis X *in* Z. In secunda, eodem prorsus modo, vt in prima parte secundi discursus problematis 2, ex cognitis quantitatibus X *in* Z, atque $X - Z$, inuenitur $X + Z$. Denique in tertia parte, ex cognitis quantitatibus $X + Z$, atque $X - Z$, inuenitur valor singularum quantitatum X & Z.

Secundi discursus prima pars *per 1h5*, constat, $X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z = X - Zq$: sed *per* 2, $X2 + Z2 = 104$: & præterea *per* 1, $X - Z = 8$: adeòque $X - Zq = 64$: ergo 104 *et* $- X$ *in* $2Z = 64$: ergo *per a*, $- X$ *in* $2Z = 64 - 104$ ll $- 40$: quare X *in* $Z = 20$.

Secundi discursus secunda pars. *Per 1h4*, constat $X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z = X + Zq$; sed *per* 1, $X - Z = 8$: adeòque $X - Zq = 64$: præterea, quia per primam partem X *in* $Z = 20$: patet X *in* $4Z = 80$; igitur $144 = X + Zq$: ergo $X + Z = R1q144$ ll 12: ergo $X + Z = 12$.

Tertia pars secundi discursus. Per secundam partem, $X + Z = 12$: sed per primam conditionem, $X - Z = 8$: igitur *per 1h1, et* 2, $X = 10$, & præterea $Z = 2$.

Problema V.

Inueniendi duo numeri X & Z, quorum aggregatum sit 12, quadratorum verò aggregatum sit 104.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, $X + Z = 12$.
Secunda conditio, $X2 + Z2 = 104$.

Primus discursus deducens ad æquationem compositam. *Per* 1, $X + Z = 12$: ergo *per a*, $Z = 12 - X$: ergo $Z2 = 12 - Xq$: sed *per* 2, $X2 + Z2 = 104$: ergo $X2$ *et* $+ 12 - Xq = 104$: atqui $12 - Xq = 144 - 24X + X2$: ergo $X2 + 144 - 24X + X2 = 104$: ergo *per a et b*, $2X2 - 24X = 104 - 144$ ll -40: ergo *per h*, $-2X2 + 24X = 40$: ergo *per c c*, $X = 10$ &, præterea $Z = 2$.

Nota pro secundo discursu, propemodum idem quod notatum est circa secundum discursum præcedentis problematis: nimirum in prima hypothesi cap. 9. non inueniri quidem æquationem vtilem vt ex cognitis problematis conditionibus immediatè inueniatur valor quantitatum X & Z: sed tamen primæ hypothesis assertionem 3. continere æquationem vtilem, vt inueniatur valor quantitatis X *in* Z: deinde ex hoc valore cognito, & secunda conditione, facilè inueniri valorem $X - Z$; denique ex cognito valore $X - Z$, & valore $X + Z$, qui habetur ex prima conditione, innotescere valorem singularum quantitatum X & Z, vt petitur in problemate.

Secundus discursus declinans æquationem compositam. *Per* 1*h*3, $X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $2Z = X + Zq$: sed *per* 2, $X2 + Z2 = 104$; & præterea $X + Z = 12$: adeòque $X + Zq = 144$: ergo 104 *et* $+ X$ *in* $2Z = 144$: ergo *per a*, X *in* $2Z = 144 - 104$ ll 40: ergo X *in* $Z = 20$. Iam verò *per* 1*h*5, $X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z = X - Zq$: sed ostensum est, X *in* $Z = 20$, adeòque X *in* $2Z = 40$: atque *per* 2, $X2 + Z2 = 104$: ergo $104 - 40 = X - Zq$: ergo $64 = X - Zq$: ergo $X - Z = R\,q\,64$ ll 8. Quoniam verò $X - Z = 8$, & præterea *per* 1, $X + Z = 12$: etiam *per* 1*h*1 *et* 2, patet $X = 10$, & præterea $Z = 2$.

Problema VI.

Inueniendi sunt duo numeri X & Z, ità vt X ductus in Z, producat 15: differentia verò quadratorum X & Z sit 16.

Quæsitum. Petuntur numeri X & Z.
Prima conditio, X *in* $Z = 15$.
Secunda conditio, $X2 - Z2 = 16$.

Discursus deducens ad compositam æquationem. *Per* 1, X *in* $Z = 15$: ergo *per f*, $Z = 15$ *per* X: ergo $Z2 = 15$ *per* Xq: sed *per* 2, $X2 - Z2 = 16$: ergo $X2$ *et* $- 15$ *per* $Xq = 16$: ergo *per b, et e*, $X2$ *et* $- 225$ *per* $X2 = 16$: ergo *per a*, $- 225$ *per* $X2 = 16 - X2$: ergo *per f*, $- 225 = 16 - X2$ *in* X2 ll $16X2 - X4$: ergo *per h*, $X4 - 16X2 = 225$: ergo *per c c*, constat $X = 5$, & præterea $Z = 3$.

Se-

Secundus discursus declinans æquationem compositam. Facta hypothesi, quod $X2 + Z2 = A$; quoniam *per* 1, X *in* $Z = 15$, & insuper *per* 1*h*3, $X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $2Z = X + Zq$: patet $A + 30 = X + Zq$: & similiter quia *per* 1*h*5, $X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z = X - Zq$: constat A *et* $- 30 = X - Zq$: igitur $X + Zq$ *in* $X - Zq = A + 30$ *in* $A - 30 \parallel A2 + 30A - 30A - 900 \parallel A2 - 900$; sed *per* 1*h*7, $X + Zq$ *in* $X - Zq = X2 - Z2q \parallel 16q$, vt cōstat ex secūda cōditione: igitur $A2 - 900 = 16q \parallel 256$: ergo *per a*, $A2 = 256 + 900 \parallel 1156$: ergo $A = R1q1156 \parallel 34$: sed per hypothesim $A = X2 + Z2$: ergo $X2 + Z2 = 34$; præterea *per* 1, X *in* $Z = 15$: sed *per* 1*h*3, $X + Zq = X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $2Z$: & etiam *per* 1*h*5, $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z$: igitur $X + Zq = 34 + 30 \parallel 64$: & præterea $X - Zq = 34 - 30 \parallel 4$: igitur $X + Z = R1q64 \parallel 8$: & præterea $X - Z = R1q4 \parallel 2$: ergo *per* 1*h*1 *et* 2, constat $X = 5$; & præterea $Z = 3$.

Problema VII.

Inuenire duas quantitates X & Z, quarum aggregatum sit cognita quantitas A: atque productum ex quantitate X ducta in quantitatem Z, sit cognita quantitas B. Hoc vniuersale problema restrictum ad indiuiduales numeros constituit problema primum huius partis.

Quæsitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, $X + Z = A$.
Secunda conditio, X *in* $Z = B$.

Primus discursus deducens ad compositam æquationem. *Per* 1, $X + Z = A$: ergo *per a*, $Z = A - X$: sed *per* 2, X *in* $Z = B$: ergo X *in* $A - X = B$: ergo *per e*, X *in* A *et* $+ X$ *in* $- X = B$: ergo *per e*, $- X2$ *et* $+ X$ *in* $A = B$ ergo *per c e*, inuenitur quantitas X; & à quantitate A, auferendo inuentam quantitatem X, habetur quantitas Z.

Secundus discursus declinans æquationem compositam. *Per* 1*h*4, constat $X + Zq = X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z$: sed *per* 1, patet $X + Zq = A2$: præterea *per* 2, manifestum est X *in* $4Z = 4B$: ergo $A2 = X - Zq + 4B$: ergo *per a*, $A2 - 4B = X - Zq$: ergo $R1qA2 - 4B = X - Z$; quoniam igitur *per* 1, $X + Z = A$, & iam ostensum sit $X - Z = R1qA2 - 4B$: manifestum est *per* 1*h*1, $X = \frac{A}{2}$ *et* $+ \frac{R1qA2 - 4B}{2}$; cognito autem X, quia $A - X = Z$, etiam innotescit Z.

Solutio. Ex A ducto in se, auferatur quadruplum quantitatis B, & residui prima radix vocetur E: aggregatum ex dimidio A, & dimidio E, æquabitur quantitati X. Præterea ex quantitate A auferendo iam inuentam quantitatem X, producitur quantitas Z.

In casu primi problematis huius partis, $A = 12$: item $B = 20$: item $A2 = 144$: item $4B = 80$: præterea $144 - 80 = 64$: item $R1q64 = 8$: adeòque $E = 8$: quare A *per* 2 *et* $+ E$ *per* $2 = 6 + 4 \parallel 10$: igitur $X = 10$: denique $A - X$, hoc est $12 - 10 = 2$: adeòque $Z = 2$.

Pro-

Problema VIII.

Inuenire duas quantitates X & Z, ſuppoſito quod X *in* Z producat quantitatem A: quodque aggregatum quadratorum X & Z ſit B. Hoc vniuerſale problema reſtrictum ad indiuiduales numeros, eſt tertium in hac parte.

Quæſitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, X *in* Z = A.
Secunda conditio, X2 † Z2 = B.

Primus diſcurſus deducens ad compoſitam æquationem. *Per* 1, X *in* Z = A: ergo *per f*, Z = A *per* X: ſed *per* 2, X2 † Z2 = B: ergo X2 *et* † A *per* Xq = B: ergo *per a*, A *per* Xq = B — X2: ſed A *per* Xq = $\frac{A}{X}$ *in* $\frac{A}{X}$ ll $\frac{A2}{X2}$: ergo $\frac{A2}{X2}$ = B — X2: ergo *per f*, A2 = B — X2 *in* X2 ll B *in* X2 *et* — X4: ergo — X4 *et* † B *in* X2 = A2: ergo *per cc*, inuenitur X, & quantitatem A diuidendo per X, habetur Z.

Secundus diſcurſus declinans compoſitam æquationem. *Per* 1*h*3, X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z = X † Zq: ſed *per* 1, X *in* 2Z = 2A, & *per* 2, X2 † Z2 = B: ergo B † 2A = X † Zq: ergo X † Z = R1*q*B † 2A. Rurſus *per* 1*h*5, X2 † Z2 *et* — X *in* 2Z = X — Zq: ſed *per* 2, X2 † Z2 = B: præterea *per* 1, X *in* 2Z = 2A: ergo B — 2A = X — Zq: ergo X — Z = R1*q*B — 2A; quoniam igitur conſtat X † Z = R1*q*B † 2A: & præterea X — Z = R1*q*B — 2A: conſtat etiam *per* 1*h*1, X = $\frac{\text{R1qB † 2A}}{2}$ *et* † $\frac{\text{R1qB — 2A}}{2}$.

Solutio vniuerſalis. Primò inueniatur aggregatum ex B & 2A, atque huius aggregati prima radix vocetur E. Secundò inueniatur differentia inter quantitates B & 2A, atque huius differentiæ prima radix vocetur D. Tertiò medietati quantitatis D, addatur medietas quantitatis E: productum erit æquale quantitati X; & per inuentam quantitatem X, diuidendo quantitatem A, producitur quantitas, æqualis quantitati Z.

In caſu problematis tertij, A = 20, item B = 104: hinc B † 2A = 104 † 40 ll 144, atque R1*q*144 = 12: quare E = 12; præterea B — 2A = 104 — 40 ll 64: atque R1*q*64 = 8: adeòque D = 8; igitur E *per* 2 *et* † D *per* 2 = 12 *per* 2 *et* † 8 *per* 2 ll 6 † 4 ll 10: igitur X = 10; denique A *per* X, hoc eſt 20 *per* 10 = 2: adeòque Z = 2.

Pro-

Problema IX.

Inuenire duas quantitates X & Z, ità vt quantitas X ducta in quantitatem Z, producat datam quantitatem A: & prę-terea differentia quadratorum X & Z, sit æqualis datæ quantitati C. Hoc problema vniuer-sale, restrictum ad indiuiduales nu-meros, est sextum in hac parte.

Quæsitum. Petuntur quantitates X & Z.
Prima conditio, X *in* Z = A.
Secunda conditio, X2 − Z2 = C.

Discursus primus deducens ad æquationem compositam. *Per* 1, X *in* Z = A: ergo *per f*, Z = A *per* X: ergo Z2 = A *per* Xq ll A2 *per* X2: sed *per* 2, X2 − Z2 = C: ergo X2 *et* − A2 *per* X2 = C: ergo singula ducendo *in* X2, etiam X4 − A2 = C *in* X2: ergo *per a*, X4 *et* − C *in* X2 = A2: ergo *per c e*, inuenitur X; & quantitatem A diuidendo per inuentam quantitatem X, producitur quantitas Z.

Secundus discursus declinans compositã æquationẽ. Posito, quod X2 † Z2 = B: & quia *per* 1, X *in* 2Z = 2A; cum *per* 1*h*3, X † Zq = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z; etiam X † Zq = B † 2A; præterea quia *per* 1*h*5, X − Zq = X2 † Z2 *et* − X *in* 2Z: etiam X − Zq = B − 2A: igitur X † Zq *in* X − Zq = B † 2A *in* B − 2A ll B2 − 4A2; sed *per* 1*h*7, X † Zq *in* X − Zq = X2 − Z2q ll C2, vt patet *per* 2, : ergo B2 − 4A2 = C2: ergo *per a*, B2 = C2 † 4A2: quare R1*q*C2 † 4A2 = B: adeòque B erit cognita; sed quia per hypothesim B = aggregato ex X2 † Z2: atque *per* 2, C = differentiæ X2 & Z2: etiam *per* 1*h*1, $\frac{B+C}{2}$ = X2; sed *per* 2, X2 − Z2 = C: adeòque *per a*, X2 − C = Z2: ergo $\frac{B+C}{2}$ − C = Z2; igitur R1*q*$\frac{B+C}{2}$ = X: præterea R1*q*$\frac{B+C}{2}$ *et* − C = Z.

Si placeret alia conclusio huius discursus: postquam illatum fuit $\frac{B+C}{2}$ = X2, vlterius inferri poterat: ergo R1*q*$\frac{B+C}{2}$ = X; igitur quantitatem A diuidendo per quantitatem X, habetur quantitas Z.

Solutio. Primò, inueniatur R1*q*C2 † 4A2, quæ vocetur B. Secundò inueniatur aggregatum ex dimidio B, & dimidio C: atque huius aggregati prima radix erit X. Tertiò inueniatur differentia inter dimidium ex B † C, & integrum C, atque huius differentiæ prima radix erit Z.

In casu problematis *6*: X *in* Z = 15, item X2 − Z2 = 16; adeòque A = 15: & præterea C = *16*: hinc C2 = 25*6*: item A2 = 225: quare C2 † 4A2 = 25*6* † *9*00 ll 115*6*: & præterea R1*q*115*6* = 34: adeòque B = 34. Deinde aggregatum ex B † C *per* 2 = 25: atque R1*q*25 = 5: adeòque X = 5. Tertiò $\frac{B+C}{2}$ − C = 25 − 16 ll *9*: atque R1*q9* = 3: ergo Z = 3.

PARS IV.

Nonnulla exempla primæ regulæ Logisticæ, præcedentibus magis practica, pertinentia ad diuersas ex materijs subordinatis Arithmeticæ, vel Geometriæ.

Problema I.

Surgite lanificæ, lux est, reliquæque diei
Octarum effluxit portio quinta trium.

Facta hypothesi, quod duodecim horarum diei, pars præterita sit B, pars residua sit A.

Quæsitum. Petitur pars B.
Prima conditio, B † A = 12.
Secunda conditio, B = $\frac{3A}{8}$ *per* 5.

Discursus. *Per* 1, B † A = 12: ergo *per a*, A = 12 — B: ergo 3A = 36 — 3B: sed *per* 2, B = $\frac{3A}{8}$ *per* 5: ergo B = $\frac{36-3B}{8}$ *per* 5 ll $\frac{36-3B}{8}$ *in* $\frac{1}{5}$ ll $\frac{36-3B}{40}$: ergo *per f*, 40B = 36 — 3B: ergo *per a*, 40B † 3B = 36: ergo 43B = 36: ergo *per f*, B = 36 *per* 43; igitur elapsæ sunt triginta sex quadragesimæ tertiæ partes vnius horæ.

Problema II.

Minas duas da, duplus vt fiam tui,
Et tu duas da, quadruplus vt fiam tui.

Facta hypothesi, quod prior habeat minas A, alter habeat minas B.

Quæsitum. Petuntur A & B.
Prima conditio, A † 2 *ad* B — 2 = 2 *ad* 1.
Secunda conditio, B † 2 *ad* A — 2 = 4 *ad* 1.

Discursus. *Per* 1, A † 2 *ad* B — 2 = 2 *ad* 1: ergo *per d*, A † 2 *in* 1 = B — 2 *in* 2: ergo *per e*, A † 2 = 2B — 4: ergo *per a*, A † 2 † 4 = 2B: ergo *per b*, A † 6 = 2B: ergo $\frac{A \dagger 6}{2}$ = B: sed *per* 2, B † 2 *ad* A — 2 = 4 *ad* 1: ergo $\frac{A \dagger 6}{2}$ † 2 *ad* A — 2 = 4 *ad* 1: ergo $\frac{A \dagger 10}{2}$ *ad* A — 2 = 4 *ad* 1: ergo *per d*, $\frac{A \dagger 10}{2}$ *in* 1 = A — 2 *in* 4: ergo *per e*, $\frac{A \dagger 10}{2}$ = 4A — 8: ergo A † 10 = 4A — 8 *in* 2 ll 8A — 16: ergo *per a*, 10 † 16 = 8A — A: ergo 7A = 26: ergo A = 26 *per* 7 ll 3 $\frac{5}{7}$: sed $\frac{A \dagger 6}{2}$ = B: adeòque A † 6 = 2B: ergo 2B = 3 † $\frac{5}{7}$ † 6 ll 9 $\frac{5}{7}$: ergo B = 4 $\frac{6}{7}$

Pro-

Problema III.

Proch ſuperum pater, ità placent, quę teſſala cantu
Molitur maga? cum Phębe pudibunda lateret,
Vidi ego, bis tantum Solis reſtabat ab ortu,
Tertia tranſactæ quantum & pars ſeptima noctis.

Suppoſito quod duodecim horarum noctis, pars præterita ſit A, reſidua ſit B.
Quæſitum. petitur A, nimirum noctis hora qua contigit eclipſis.
Prima conditio, $A \dagger B = 12$.
Secunda conditio, $\frac{A}{3} \dagger \frac{A}{7} = \frac{B}{2}$

Diſcurſus. *Per* 1, $A \dagger B = 12$: ergo $B = 12 - A$: ſed *per* 2, $\frac{A}{3} \dagger \frac{A}{7} = \frac{B}{2}$: ergo $\frac{A}{3} \dagger \frac{A}{7} = \frac{12 - A}{2}$: ergo $\frac{7A}{21} \dagger \frac{3A}{21} = \frac{12 - A}{2}$: ergo *per b*, $\frac{10A}{21} = \frac{12 - A}{2}$: ergo *per f*, $\frac{20A}{21} = 12 - A$: ergo *per f*, $20A = 12 - A$ *in* 21 ll $252 - 21A$: ergo *per a*, $20A \dagger 21A = 252$: ergo $41A = 252$: ergo *per c*, $A = 6\frac{6}{41}$

Problema IV.

Vnà cum Mulo vinum portabat Aſella,
Atque ſuo grauiter, ſeu pondere præſſa gemebat:
Talibus & dictis mox increpat ille gementem,
Mater quid luges teneræ de more puellæ?
Dupla tuis, ſi des menſuram, pondera geſto:
At ſi menſuram capias, æqualia porto.
Optime menſuras diſtingue Geometer iſtas.

Facta hypotheſi, quod Muli menſuræ ſint A: & Aſinæ menſuræ ſint B.
Quæſitum. Petuntur A & B.
Prima conditio, $A \dagger 1$ *ad* $B - 1 = 2$ *ad* 1.
Secunda conditio, $A - 1 = B \dagger 1$.

Diſcurſus. *Per* 1, $A \dagger 1$ *ad* $B - 1 = 2$ *ad* 1: ergo *per d*, $A \dagger 1$ *in* $1 = B - 1$ *in* 2: ergo *per e*, $A \dagger 1 = 2B - 2$: ergo *per a*, $A = 2B - 2 - 1$ ll $2B - 3$: ſed quia *per* 2, $A - 1 = B \dagger 1$: etiam *per a*, $A = B \dagger 1 \dagger 1$ ll $B \dagger 2$: ergo $2B - 3 = B \dagger 2$: ergo *per a*, etiam $2B - B = 2 \dagger 3$: ergo *per b*, etiam $B = 5$: ſed $A = 2B - 3$: ergo $A = 10 - 3$ ll 7.

Pro-

Problema V.

Caius vnam partem noctis studio, alteram somno dedit: ignorat tamen quot horis nox durauerit; tantum scit, se duas horas amplius studio impendisse, quam somno: ac præterea horas studio datas, ductas in horas somno datas, producere $19\frac{1}{4}$. Petit quot horis studuerit, & quot horas durauerit tota nox.

Facta hypothesi, quod horæ quibus studuit sint B, & horæ quibus dormiuit sint C: quodque totius noctis horæ sint A.

Quæsitum. Petuntur A, B, C.

Prima conditio, $B - 2 = C$.

Secunda conditio, $B + C = A$.

Tertia conditio, B *in* $C = 19\frac{1}{4}$.

Discursus deducens ad compositam æquationem. *Per* 1, $B - 2 = C$: sed *per* 3, B *in* $C = 19\frac{1}{4}$: ergo B *in* $B - 2 = 19\frac{1}{4}$: ergo *per e*, $B2 - 2B = 19\frac{1}{4}$: ergo *per c c*, $B = 5\frac{1}{2}$: sed $B - 2 = C$: ergo $C = 3\frac{1}{2}$: atqui *per* 2, $B + C = A$: ergo $A = 5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2} \parallel 9$. Itaque studuit horis quinque cum dimidia; tota verò nox durauit nouem horis.

Discursus declinans cõpositã æquationẽ. *Per* 1*b*4, patet $B + Cq = B - Cq$ *et* $+ B$ *in* $4C$: sed quia *per* 2, $B + C = A$: etiã $B + Cq = A2$; præterea quia *per* 1, $B - 2 = C$: etiam *per a*, $B - C = 2$: adeòque $B - Cq = 4$: denique, quia *per* 3, B *in* $C = 19\frac{1}{4}$: etiam B *in* $4C = 77$; igitur $A2 = 4 + 77 \parallel 81$: ergo $A1 = Rq\ 81 \parallel 9$: igitur *per* 2, $B + C = 9$: sed quia *per* 1, $B - 2 = C$: etiam $B + C = B + B - 2 \parallel 2B - 2$: ergo $2B - 2 = 9$: ergo *per a*, $2B = 9 + 2 \parallel 11$: ergo $B = 5\frac{1}{2}$: sed *per* 1, $B - 2 = C$: ergo $C = 5\frac{1}{2} - 2 \parallel 3\frac{1}{2}$. Constat igitur $A = 9$: item $B = 5\frac{1}{2}$: item $C = 3\frac{1}{2}$.

Problema VI.

Inuenienda est altitudo pyramidis, supposito quod sciatur eius basim quadratam esse; ac præterea totam altitudinem eius sextuplo maiorem esse baseos longitudine, totamque pyramidis soliditatem continere pedes cubicos $843\frac{3}{4}$.

Facta hypothesi, quod pyramidis altitudo sit X; & baseos eius longitudo sit Z.

Quæsitum. Petitur X.

Prima conditio, $Z2$ *in* X ductu 3, hoc est, $Z2$ *in* X *per* $3 = 843\frac{3}{4}$.

Secunda conditio, Z *ad* $X = 1$ *ad* 6.

Discursus. *Per* 2, Z *ad* $X = 1$ *ad* 6: ergo *per d*, Z *in* $6 = X$ *in* 1: ergo $6Z = X$ sed *per* 1, $Z2$ *in* X *per* $3 = 843\frac{3}{4}$: ergo $Z2$ *in* $6Z$ *per* 3: hoc est $Z2$ *in* $2Z = 843\frac{3}{4}$

843 $\frac{3}{4}$: ergo *per b*, etiam 2Z3 = 843 $\frac{3}{4}$ ll $\frac{3375}{4}$: ergo *per f*, Z3 = $\frac{3375}{8}$: ergo Z = R2q $\frac{3375}{8}$ ll $\frac{15}{2}$: ſed X = 6Z: ergo X = $\frac{15}{2}$ *in* 6 ll 15 *in* 3 ll 45: igitur X, ſiue tota pyramidis altitudo eſt 45 pedum.

Problema VII.

In epiſtola aliqua hac habentur. Ex tribus numeris A, B, C, à me notatis, duo A & B deleti ſunt, reliquus C à me legi poteſt: indicari tamen non licet. Memini, quod numerus A ad numerum B, habeat eam proportionem, quam 4 habet ad 7: quodque numerus A additus numero B, producat tertiam partem numeri C. Peto, an, vel quomodo per Arithmeticam vulgarem tantum, mihi cognitam, inuenire poſſim numeros A & B.

Quæſitum. Petuntur numeri A & B.
Prima conditio, A *ad* B = 4 *ad* 7.
Secunda conditio, A † B = C *per* 3.

Diſcurſus. *Per* 2, A † B = C *per* 3: ergo *per f*, A † B *in* 3 = C: ergo *per e*, 3A † 3B = C: ergo *per a*, 3B = C − 3A: ſed quia *per* 1, A *ad* B = 4 *ad* 7: etiam 3A *ad* 3B = 4 *ad* 7: ergo 3A *ad* C − 3A = 4 *ad* 7: ergo *per d*, 3A *in* 7 = C − 3A *in* 4: ergo *per e*, 21A = 4C − 12A: ergo *per a*, 21A † 12A = 4C: ergo *per b*, 33A = 4C: ergo *per f*, A = $\frac{4C}{33}$: ſed *per* 2, A † B = $\frac{C}{3}$: ergo *per a*, B = $\frac{C}{3}$ − A.

Reſcribendum; vt cognitum numerum C, ducat in 4: atque productum diuidat per 33: productum ex hac diuiſione numerum, futurum numerum A. Deinde prius multiplicet inuentum numerum A per numerum 7: poſtea hoc productum diuidat per 4: quotiens huius diuiſionis futurum numerum B.

Problema VIII.

Caius haberet 100 aureos, accipiendo aureorum Titij dimidiam partem; Titius verò haberet 100 aureos, accipiendo aureorum Meuij tertiam partem; denique Meuius haberet 100 aureos, accipiendo aureorum Cai quartam partem. Inueniendum quot aureos habeant ſinguli.

Fiat hypotheſis, quod aurei quos habet Caius ſint 4X: item aurei quos habet Titius, ſint 2Z: quodque aurei quos habet Meuius, ſint 3P. Vbi nota, pro aureis Cai, aſſumo 4X, vt deinde commodius habeatur quarta pars horum aureorum. Similiter pro Titij aureis, aſſumo 2Z: & pro aureis Meuij 3P; vt commodius citra fractionem habeatur & dimidia pars aureorum Titij, & tertia pars aureorum Meuij, de quibus partibus agitur in quæſtione.

Prima conditio, 4X † Z = 100.
Secunda conditio, 2Z † P = 100.
Tertia conditio, 3P † X = 100.

O Diſ-

Discursus. *Per* 1, $4X + Z = 100$: ergo *per a*, $Z = 100 - 4X$: ergo $2Z = 200 - 8X$: sed *per* 2, $2Z + P = 100$: ergo $200 - 8X + P = 100$: ergo *per a*, $P = 100 - 200 + 8X \parallel -100 + 8X$: ergo $3P = -300 + 24X$: sed *per* 3, $3P + X = 100$: ergo $-300 + 24X + X = 100$: ergo *per b et a*, $25X = 100 + 300 \parallel 400$: ergo *per c*, $4X = 64$: sed $100 - 4X = Z$: ergo $Z = 100 - 64 \parallel 36$: ergo $2Z = 72$. Denique $3P = -300 + 24X \parallel -300$ *et* $+ 4X$ *in* $6 \parallel -300$ *et* $+ 384 \parallel 84$: igitur $4Z = 64$; præterea $2Z = 72$; denique $3P = 84$. Quare Caius habet aureos 64. Titius habet aureos 72. Meuius habet aureos 84.

Problema IX.

Caius, & Titius societatem iniuerunt ea lege, vt lucrum responderet à singulis collatæ pecuniæ; Caius contulit 60 aureos, qui 9 mensibus in societate permanserunt: quod huic pecuniæ lucrum respondeat nescitur; atque similiter ignoratur summa pecuniæ à Titio collatæ: hæc tamen in societate permansit 6 mensibus, quibus elapsis Titius pro lucro, & collata à se pecunia, recepit 60 aureos. Denique constat vtriusque lucrum simul, esse 65 aureorum. Petitur singulorum lucrum, & summa aureorum collatorum à Titio.

Facta hypothesi, quod Cai lucrum sit Z, quodque aureorum summa à Titio collata sit X, constat vlterius Titij lucrum esse $60 - X$, quandoquidem pro lucro, & collata pecunia recepit 60 aureos.

Quæsitum. Petuntur X & Z.
Prima conditio, $Z + 60 - X = 65$.
Secunda conditio, Z *ad* $60 - X = 9$ *in* 60 *ad* 6 *in* X.

Discursus. *Per* 1, $Z + 60 - X = 65$: ergo *per a*, $Z - X = 65 - 60 \parallel 5$: ergo *per a*, $Z = 5 + X$: sed *per* 2, Z *ad* $60 - X = 9$ *in* 60 *ad* 6 *in* X: ergo $5 + X$ *ad* $60 - X = 9$ *in* 60 *ad* 6 *in* $X \parallel 540$ *ad* $6X$: ergo *per d*, $5 + X$ *in* $6X = 60 - X$ *in* 540: ergo *per e*, $30X + 6X2 = 32400 - 540X$: & *per a*, $6X2 + 30X + 540X = 32400$: ergo *per b*, $6X2 + 570X = 32400$: ergo *per c c*, $X = 40$; præterea $Z = 5 + X \parallel 5 + 40 \parallel 45$: ergo $Z = 45$; igitur Titius contulit 40 aureos: lucratus est $60 - X$, hoc est $60 - 40$, siue 20 aureos. Caius verò, qui contulit 60 aureos, lucratus est aureos 45.

CAPVT XII.

Exempla secundæ regulæ Logisticæ.

VT melius appareat faciliusque intelligatur, non tantum vsus, verum etiam maxima vtilitas huius secundæ regulæ Logisticæ: pro eius exemplis non adduco aliqua qualiacunque problemata, aut theoremata: sed præcipuam partem toto Orbe celebratissimorum theorematum, quæ apud Euclidem, vel Archimedem inueniuntur, & tractant de quantitatibus producibilibus ex Logisticæ ductibus Geometricis, atque nominatis. Hæc theoremata numerantur inter præcipua

cipua antiquæ Matheſeos inuenta, quæ magnam, & difficultatem, & vtilitatem annexam habent. Quomodo tamen ſecunda Logiſticæ regula facilem reddat ſingulorum demonſtrationem, adeòque ſubminiſtret viam planam, per quam expeditè currendo eo perueniatur, quo alia methodo, per aſpera, atque prærupta, vt ità dicam reptando, vix peruenitur intollerabili labore: melius intelligetur, ſi cum demonſtrationibus, vel Archimedeis: vel aliorum, qui Archimedeis demonſtrationibus, faciliores ſubſtituere conati ſunt, conferantur demonſtrationes quas hic propono, atque tam faciles ſunt, vt eas exiſtimem, Logiſticę ſtudioſis in Matheſeos tyrocinio verſantibus proportionata exempla ſecundæ regulæ logiſticæ. Neque vt opinor à me diſſentiet, quiſquis reflectet, eidem, atque ſatis reſtrictæ regulæ conformi diſcurſu, immo ferè eodem quoad ſubſtantiam argumento, aut ſyllogiſmo, demonſtrari ſingula. Vt hoc facilius poſſit intelligi, & Logiſticæ methodo conformes demonſtrationes in his exemplis propoſitæ, commodius conferri valeant cum alijs eorumdem theorematum demonſtrationibus factis iuxtà antiquæ matheſeos methodum: ad ſingula theoremata noto, quam Euclidis, vel Archimedis propoſitionem conſtituant. In hac citatione ſequor propoſitionum numerum, qui ſingulis attribuitur in Euclideis elementis, vel in ſelectorum Archimedis theorematum appendice hæc elementa concomitante, apud P. Andream Taquet Societatis Ieſu: hic inter non paucos, qui Archimedis theorematis lucem afferre conati ſunt, mihi videtur nulli alteri ſecundus in demonſtrationum claritate, atque nitore: & præterea Archimedeis theorematis proximè ſimilia addidit nonnulla theoremata, quę hic etiam inter Archimedea numerantur.

Niſi magnæ vtilitatis exiſtimaſſem commemoratam collationem demonſtrationum, quarum aliæ noſtræ Logiſticæ, aliæ antiquę Matheſeos methodo conformes ſunt: pro exemplis huius ſecundæ regulæ Logiſticæ, non theoremata, ſed propoſuiſſem problemata inquirentia hoc ipſum, quod aſſerunt theoremata quæ proponimus: id enim fuiſſet vtilius pro ijs, qui ſola praxi contenti viunt. Si tamen alicui placent huiuſmodi problemata, facilè erit theoremata, quæ proponimus mutare in problemata: etenim ſeruatis theorematis circumſtātijs, atq; conditionibus: quærendo, quid exempli gratia dicendum ſit de proportione, vel alia proprietate quantitatum, de qua agitur in aſſertione theorematis, habetur theorema mutatum in problema. Sic primæ partis primum theorema fiet problema: ſi quæratur quam proportionem habeat parallelogrammum X ad parallelogrammum Z: ſuppoſito quod hæc parallelogramma habeant eamdem altitudinem, & eamdem, vel æquales baſes. Similiter præſtantiſſimum Archimedis theorema, cui correſpondentem figuram ſepulchro ſuo inſcriptam voluit, in quo aſſeritur, quod cylindrus rectus ſphæræ circumſcriptus, & ſoliditate, & ſuperficie tota ſeſquialter ſit: huic inquam theoremati correſpondens problema habebitur, ſi quæratur quam proportionem habeat cylinder ad inſcriptam ſibi ſphæram, quoad ſoliditatem, & quoad totam ſuperficiem.

Dixi eodem quoad ſubſtantiam argumento, Logiſticæ methodo demonſtrari ſingula theoremata principaliora, in quibus Euclides, vel Archimedes agunt de quantitatibus, quæ ex Logiſticæ ductibus Geometricis producuntur: in hoc argumento, ſiue ſyllogiſmo, *maior*, hæc eſt: ratio compoſita ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ, hoc eſt ratio compoſita ex quatuor rationibus, quarum prima eſt, ratio baſis quantitatis X ad baſim quantitatis Z: ſecunda, ratio altitudinis quantitatis X ad altitudinem quantitatis Z: tertia, eſt ratio quam habet ductus, ex quo producitur quantitas X ad ductum primum: quarta, eſt ratio quam habet ductus primus ad ductum ex quo producitur quantitas Z; hæc inquam ratio compoſita, exempli gratia eſt A *ad* B. *Minor* eſt, ſed per theorema 2. partis 4. capitis 8. quantitas X ad quantitatem *Z*, habet rationem compositam ex prædictis quatuor rationibus. *Consequens* est, ergo X *ad* Z = A *ad* B.

Circa hoc argumentum conforme secundæ regulæ Logisticæ (quodque quoad substantiam idem est in omnibus huius regulæ exemplis) requisita pro *maiori* huius syllogismi, propemodum semper immediatè habentur ex paucis propositionibus elementaribus contentis capite 8. huius libri; sic vt opus non sit longa propositionum serie, ad assertionis demonstrationem concludendam Logisticæ methodo. Quam verò molestam, atque prolixam propositionum seriem ad hoc requirat methodus antiqua, clarè quilibet poterit intelligere, considerando vnam aliquam demonstrationem alicuius ex postremis theorematis Archimedis, apud P. Taquet, vel alium authorem sequentem methodum antiquam; si ex tali demonstratione, exempli gratia theor. 32, quod hic est 10. simpliciter annotando citatas propositiones: deinde inspiciendo demonstrationes propositionum, quæ fuerunt citatæ, quasque in his citatas inueniet propositiones, annumeret, prius annotatis propositionibus: atque ità successiuè in vnam summam colligat propositiones omnes quibus immediatè, vel mediatè innititur demonstratio proposita antiqua methodo; sic enim habebit longam propositionum seriem, per quam antiqua methodo peruenitur ad demonstrationem, à qua inchoata fuit annotatio propositionum in citationibus adhibitarum, atque vt diximus annotandarum. Ego certè pluribus ex Logisticæ studiosis suadere conatus sum, vt mihi exhiberent huiusmodi aliquam propositionum seriem: verum qui inchoatum hoc opus perficiendo exhiberet quod petebam, nullum vnquam inueni. Si verò simpliciter tantum annotare huiusmodi seriem propositionum, tantæ molestiæ, & intolerabilis tædij opus est: quid erit singulas talis seriei demonstrationes attentiùs considerando, atque ruminando, per illas omnes, vt ità dicam iter instituendo peruenire ad vltimam demonstrationem ipsis innixam? & tamen demonstrata intelligi non potest hæc vltima propositio, nisi singulæ ex quibus dependet eius demonstratio, intelligantur demonstratæ.

Discursus secundæ regulæ Logisticæ conformes, qui in subsequentibus exemplis à nobis proponuntur: continent varias, sed inter se æquiualentes rationum series breuiter annotatas. Citationes requisitæ, vt constet subsequentis seriei rationes æquiualere rationibus proximè præcedentis seriei, inter ipsas series breuiter annotantur, vt hæc æquiualentia clarius constet legentibus. Citationes quibus potissimum indigemus in exemplis secundæ regulæ Logisticæ, indicant veritates elementares contentas capite 8. vel paucas notas secundæ regulæ Logisticæ appositas, vel denique theorematis demonstrandi conditiones ex hypothesi expressè annotatas, aut alias satis manifestas. Vt has citationes breuiter indicem, vtor subsequentibus scriptionibus, in quibus litera *p* significat partem capitis 8. Litera *c* significat conditionem, siue ex hypothesi manifestam, siue annotatam. Litera *n* significat notam appositam secundæ regulæ Logisticæ: hinc.

1p1, significat, per primæ partis capitis 8. axioma primum.
1p2, significat, per primæ partis capitis 8. axioma secundum; & sic de cæteris.
2p1, significat, per secundæ partis capitis 8. theorema primum.
2p2, significat, per secundæ partis capitis 8. theorema secundum, & sic de cæteris.
3p1, significat, per tertiæ partis capitis 8. theorema primum.
3p2, significat, per tertię partis capitis 8. theorema secundum; & sic de cæteris.
4p1, significat, per quartæ partis capitis 8. theorema primum.
4p2, significat, per quartæ partis capitis 8. theorema secundum, & sic de cæteris.
c h, significat, per conditiones manifestas ex hypothesi.
c 1, significat, per primam conditionem annotatam.
c 2, significat, per secundam conditionem annotatam, & sic de cæteris.

n 1

n 1, significat, per primam notam secundæ regulæ Logisticæ.
n 2, significat, per secundam notam secundæ regulæ Logisticæ, & sic de cæteris.
Si pro aliquo theoremate requiratur ab his diuersa citatio, declarabitur in fine ipsius theorematis pro quo adhibetur.

Notandum à Logisticę studiosis, pro intelligentia exemplorum secundæ regulæ Logisticæ.

PRimò. Quod singulæ theorematum demonstrationes, quæ hoc capite continentur, sint veræ, & legitimæ demonstrationes; licet enim pro illis citatæ veritates cap. 8. in illo capite demonstratæ non sint, singulæ tamen, quæ inter axiomata non numerantur, demonstratæ proponuntur libro secundo Logisticæ: prædicto autem capite enumerantur prætermissis demonstrationibus, quia vt initio huius libri monuimus, primus liber tantum docet praxim, pro qua inutile est veritates demonstratas exhibere: sed inutiles non sunt tales veritates, aut praxis demonstrandi veritates.

Secundò. Pro faciliori intelligentia demonstrationum, quibus euincitur veritas theorematum hoc capite propositorum; vltra intelligentiam secundæ regulæ Logisticæ, & scriptionum logisticarum, quæ expositæ sunt in parte 2. cap. 1.: multum prodesse potest, quod dicitur in parte 5. capitis 1. vbi definimus quantitates, de quibus hoc capite agimus, & indicamus modum eas repræsentandi compendiata scriptione Logistica, vt requirit regula de cuius exemplis agitur hoc capite.

Tertiò. Numeris 1, 2, 3, 4. deorsum sibi succedentibus antè rationum series, ordine respondent in prima rationum serie, quatuor rationes commemoratæ in secunda regula Logisticæ, atque iterum enumeratæ, vbi paulò antè indicauimus substantiam argumenti, quo singula theoremata demonstrantur conformiter ad secundam regulam Logisticæ; hanc primam quatuor rationum seriem, subsequentes singulæ rationum series, primæ seriei æquiualent; vltima verò reliquis commodior est, vt habeatur ratio satis simplex, atque intelligibilis, quæ sit composita ex omnibus rationibus integra serie contentis; inter rationum series contenta interualla, continent citationes veritatum, ex quibus constat æquiualentia inter præcedentis, & proximè subsequentis seriei rationes; facilè est hæc interualla distinguere à rationum seriebus, ex ipsis scriptionibus, quas continent, quandoquidem scriptiones quibus indicamus citationes, quasque paulò antè exposuimus: maximè differant à scriptionibus expositis in parte 2. cap. 1. quibus vtimur ad indicandas rationes singulas, ex quibus constituitur quælibet series rationum.

Quartò. Quandoquidem, quoad substantiam eodem argumento demonstrentur singula huius capitis theoremata, atque demonstrationes singulæ exprimantur breui, atque peculiari scriptione: vt singularum demonstrationum sensus clarè intelligatur, proderit, atque sufficiet declarare sensum demonstrationis, quo primum theorema euincitur; eius sensus talis est. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ, prima *per c h*, est A *ad* C, secunda *per ch*, est B *ad* D: tertia, *per 4p1 vel 3*, est 1 *ad* 1: quarta *per 4p1 vel 3*, est 1 *ad* 1; huic verò primæ seriei quatuor rationum, æquiualet subsequens rationum series, vt constat ex citationibus intercedentibus inter vtramque seriem: igitur quia *per 2p7*, manifestum est, quod ratio composita ex rationibus vltima serie contentis sit 1 *ad* 1: & insuper quod hæc ratio composita æquiualeat rationi compositæ ex quatuor rationibus prima serie contentis: ergo *per 4p2*, patet, A *in* B ductu 1 vel

2 = C

2 = C *in* D ductu 1 vel 2: ergo *per ch*, parallelogrammum X = parallelogrammo Z. Quod erat demonſtrandum.

PARS I.

Faciliora exempla ſecundæ regulæ Logiſticæ, in theorematis Euclideis agentibus de æqualitate, vel alia proportione, quam inter ſe habent duæ quantitates productę ex ductibus Geometricis, non inuoluentes proprietates angulorum.

Theorema I.

Parallelogramma X & Z, conſtituta inter eaſdem parallelas, ſiue æquè alta: atque eamdem, vel æquales baſes habentia, ſunt inter ſe æqualia. *Euclidis propoſitio* 35. *&* 36. *libri* 1.

Facta hypotheſi, quod parallelogrammi X, baſis ſit A, altitudo B: quodque parallelogrammi Z, baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur A *in* B ductu 1 vel 2 = C *in* D ductu 1 vel 2.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus in ſecunda Logiſticæ regula commemoratis.

1	*c h*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*c h*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7. ratio compoſita eſt 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2 A *in* B ductu 1 vel 2 = C *in* D ductu 1 vel 2: ergo *per ch*, parallelogrammum X = parallelogrammo Z. Quod erat demonſtrandum.

Theorema II.

Triangula conſtituta inter eaſdem parallelas, ſiue æquè alta, & eamdem vel æquales baſes habentia, ſunt inter ſe æqualia. *Euclidis propoſitio* 37. *&* 38. *libri* 1.

Facta hypotheſi, quod trianguli X, baſis ſit A, altitudo B: quodque trianguli Z, baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda Logiſticæ regula.

1

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 2 *ad* 2 : ergo *per* 4*p*2, constat, A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3 : ergo *per ch*, etiam triangulum X = triangulo Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Si triangulum X, sit in ijsdem parallelis, siue æquè altum, cum parallelogrammo Z, & eamdem, vel æqualem basim habeat: ipsius parallelogrammi dimidium erit. *Euclidis propositio* 41. *lib.* 1.

Facta hypothesi, quod trianguli X, basis sit A, altitudo B; quodque parallelogrammi Z, basis sit C, altitudo D.

Asseritur A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 2.

Prima conditio, A = C.

Secunda Conditio, B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 2: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 2 : ergo *per ch*, etiam triangulum X, ad parallelogrammum Z = 1 *ad* 2. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV.

Parallelogramma, & triangula, quæ æqualem habent altitudinem, siue inter easdem parallelas existunt, eam inter se proportionem habent, quam bases. *Euclidis propositio* 1. *lib.* 6.

Facta hypothesi, quod parallelogrammi, siue trianguli X, basis sit A, altitudo B: quodque parallelogrammi, siue trianguli Z; basis sit C, altitudo D.

Asseritur primò, A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = A *ad* C.

Asseritur secundò. A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C.

Vnica conditio, B = D.

Demonstratio primæ assertionis. Ex quatuor rationibus componentibus commemoratis in secunda Logisticæ regula.

1	*cb*	A *ad* C		A *ad* C
2	*cb*	B *ad* D	*c* 1	1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igi-

Igitur *per* 2p7, ratio composita est A *ad* C: ergo *per* 4p2, constat A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = A *ad* C: ergo *per ch*, parallelogrammum X ad parallelogrammum Z = A *ad* C. Quod primo loco erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ assertionis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	*c* 1	1 *ad* 1		1 *ad* 1
3	4p4	1 *ad* 2	*n* 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p4	2 *ad* 1		2 *ad* 2		1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est A *ad* C: ergo *per* 4p2, constat A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C: ergo *per ch*, triangulum X ad triangulum Z = A *ad* C.

Theorema V.

Si quatuor rectæ fuerint proportionales: rectangulum X factum sub extremis equatur rectangulo Z facto sub medijs: & vicissim, si rectangulum X, factum sub extremis, æquatur rectangulo Z facto sub medijs, quatuor illæ rectę erunt proportionales. *Euclidis propositio* 16. & 17. *libri* 6.

Nota Euclidis propositionem 16 à 17, non aliter differre, quam quod 17 sit restricta ad casum, in quo duæ mediæ sunt inter se æquales: adeòque rectangulum sub medijs est quadratum.

Facta hypothesi, quod quatuor lineæ A, B, C, D, rectæ sint.

Asseritur primò, A *in* D ductu 1 = B *in* C ductu 1.

Conditio A *ad* B = C *ad* D.

Asseritur secundò, A *ad* B = C *ad* D.

Conditio A *in* D ductu 1 = B *in* C ductu 1.

Demonstratio primæ assertionis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* B		A *ad* B	*n* 3	A *ad* A		1 *ad* 1
2	*ch*	D *ad* C	*c* 1	B *ad* A		B *ad* B		1 *ad* 1
3	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4p2, patet A *in* D ductu 1 = B *in* C ductu 1: ergo *per ch*, parallelogrammum X = parallelogrammo Z. Quod erat demonstrandum pro prima parte.

Demonstratio secundæ assertionis. Considerando conditionem, ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c* 1	A *ad* B
2	*c* 1	D *ad* C
3	4p1	1 *ad* 1
4	4p1	1 *ad* 1

Igitur inueniendo lineam F, ità vt B *ad* F = D *ad* C: *per* 2p7, A *in* D ductu 1 *ad* B *in* C ductu 1 = A *ad* F: sed *per c*1, A *in* D ductu 1 = B *in* C ductu 1: ergo A = F: ergo B *ad* A = B *ad* F: sed per constructionem B *ad* F = D *ad* C: ergo B *ad* A = D *ad* C: ergo inuertendo A *ad* B = C *ad* D. Quod erat demonstrandum pro secunda parte.

No-

Nota. Quod vtraque pars propositi hic theorematis immediatè constet ex Logisticæ axiomate, quod est 10. in parte 1. cap. 8. in quo vniuersaliter de quibuscunque quantitatibus asseritur verum esse, quod Euclides in theoremate 16. lib. 6. docet verum esse de rectis lineis, aut rectangulis. Placuit tamen hoc Euclidis theorema hic demonstrare conformiter ad secundam Logisticæ regulam, ne quidem citãdo prædictũ Logisticæ nostrę axioma, quia versamur in exemplis secundę regulæ Logisticæ, adeòque omnia ab huiusmodi exemplis diuersa, non conducunt ad præsens institutum; ne tamen repetam sæpius eumdem planè discursum logisticũ, prætermitto hic Euclidis propositionẽ 19. & 20. lib. 7. vbi de numeris docet, quod hic dixit de rectis lineis; si placet alicui etiam habere hæc theoremata demonstrata discursu Logistico, qui conformis sit secundæ regulæ Logisticæ, in præcedenti hypothesi & discursu, mutet vocem linea in vocem numerus.

Theorema VI.

Si eamdem rationem habeant numerus A ad numerum B, item numerus C ad numerum D, item numerus E ad numerum F: numeri verò A, C, E, multiplicati producant numerum X; numeri autem B, D, F, multiplicati producant numerum Z. Numerus X ad numerum Z habebit triplicatam rationem numeri A ad numerum B. *Euclidis propositio* 19. *lib.* 8.

Facta hypothesi, quod singulæ literæ A, B, C, D, E, F, significent numeros: quodque A *in* C *in* E ⩵ X: & præterea B *in* D *in* F ⩵ Z.

Asseritur A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* F ⩵ A3 *ad* B3.

Vnica conditio A *ad* B ⩵ C *ad* D ll E *ad* F.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*c h*	A *in* C *ad* B *in* D	*a*	A *ad* B		A *ad* B
2	*c h*	E *ad* F		C *ad* D	*c* 1	A *ad* B
3	4*p* 1	1 *ad* 1		E *ad* F	*c* 1	A *ad* B
4	4*p* 1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
				1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A3 *ad* B3: & *per* 4*p*2, A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* F ⩵ A3 *ad* B3: ergo *per c h*, X *ad* Z ⩵ A3 *ad* B3. Quod erat demonstrandum.

a, hoc est *per n*4, & 2*p*5.

Theorema VII.

Parallelepipeda X & Z habentia bases, & altitudines æquales, sunt inter se æqualia. *Euclidis propositio* 29, 30, 31, *lib.* 11.

Facta hypothesi, quod parallelepipedi X basis sit A, altitudo B: & parallelepipedi Z basis sit C, altitudo D.

Asseritur A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 1.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda Logisticæ regula.

1	*c h*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*c h*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p* 1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p* 1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, constat A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 1: ergo *per ch*, parallelepipedum X ad parallelepipedum Z = 1 *ad* 1.

Theorema VIII.

Parallelepipeda X & Z æqualem altitudinem habentia, sunt inter se vt bases. *Euclidis propositio* 32. *lib.* 11.

Supposito quod parallelepipedi X basis sit A, altitudo B: quodque parallelepipedi Z basis sit C, altitudo D.

Asseritur A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = A *ad* C.

Conditio B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*c h*	A *ad* C		A *ad* C
2	*c h*	B *ad* D	*c* 1	1 *ad* 1
3	4*p* 1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p* 1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A *ad* C: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = A *ad* C: ergo *per ch*, parallelepipedum X ad parallelepipedum Z = A *ad* C. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema IX.

Si fuerint duo priſmata triangularia X & Z æqualis altitudinis, quorum vnum X habeat baſim parallelogrammam duplam baſeos alterius, quæ ſit triangula: priſmata erunt inter ſe æqualia. *Euclidis propoſitio* 40. *lib.* 11.

Facta hypotheſi, quod A ſit parallelogrammum, & C ſit triangulum: quodque A *in* B ductu 3, producat priſma triangulare X: & C *in* D ductu 1, producat triangulare priſma Z.

Aſſeritur A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 1.

Prima conditio. A *ad* C = 2 *ad* 1.

Secunda conditio, B = D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticę.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	2 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 2 *ad* 2: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 1: ergo *per ch*, priſma X = priſmati Z. Quod erat demonſtrandum.

Theorema X.

Circulorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum *Euclidis propoſitio* 2. *lib.* 12.

Facta hypotheſi, quod circuli X baſis, ſiue radius ſit A, circumferentia, ſiue altitudo ſit B: & ſimiliter circuli Z baſis, ſiue radius ſit C, altitudo, ſiue circumferentia ſit D.

Aſſeritur A *in* B ductu 4 *ad* C *in* D ductu 4 = 2A2 *ad* 2C2.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda Logiſticæ regula.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	3*p*5	A *ad* C
3	4*p*6	1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*6	2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt, 2A2 *ad* 2C2: ergo *per* 4*p*2, etiam A *in* B ductu 4 *ad* C *in* D ductu 4 = 2A2 *ad* 2C2: ergo *per ch*, circulus X ad circulum Z = 2A2 *ad* 2C2. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XI.

Pyramides æquè altæ, eam inter se proportionem habent quam bases. *Euclidis propositio 5. & 6. lib. 12.*

Facta hypothesi, quod pyramidis X basis sit A, altitudo B: quodque pyramidis Z basis sit C, altitudo D.

Asseritur, A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C.

Conditio, B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	*e* 1	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 A *ad* 3 C ll A *ad* C: ergo *per* 4*p*2, manifestum est A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C: ergo *per ch*, pyramis X ad pyramidem Z = A *ad* C. Quod erat demonstrandum.

Theorema XII.

Omnis pyramis X, tertia pars est prismatis Z, habentis æqualem basim & altitudinem. *Euclidis propositio 7. lib. 12.*

Facta hypothesi, quod pyramidis X basis sit A, altitudo B: quodque prismatis Z basis sit C, altitudo D.

Asseritur A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 3.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*ch*	A *ad* C	*e* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*e* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 3: ergo *per* 4*p*2, constat A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 vel 2 = 1 *ad* 3: ergo *per ch*, pyramis X, est tertia pars prismatis Z. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XIII.

Omnis conus X, tertia pars eſt cylindri Z, habentis æqualem baſim, & altitudinem. *Euclidis propoſitio* 10. *lib.* 12.

Facta hypotheſi, quod coni X baſis ſit A, altitudo B: quodque cylindri Z baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 = 1 *ad* 3.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 1 *ad* 3: ergo *per* 4*p*2, conſtat A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 1 = 1 *ad* 3: ergo *per ch*, conus X ad cylindrum Z = 1 *ad* 3. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XIV.

Conorum æquè altorum proportio eadem eſt, quæ baſium. Idem accidit cylindris æquè altis. *Euclidis propoſitio* 11. *libri* 12.

Facta hypotheſi, quod Coni X baſis ſit A, altitudo B; quodque Coni Z baſis ſit C, altitudo D; Vel certè quod cylindri X baſis ſit A, altitudo B: quodque cylindri Z baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur primò, A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C.

Aſſeritur ſecundò, A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = A *ad* C.

Conditio vtriuſque partis, B = D.

Demonſtratio primæ partis. Ex quatuor rationibus nominatis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	*c* 1	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 3 A *ad* 3 C ll A *ad* C: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *ad* C: ergo *per ch*, conus X ad conum Z = A *ad* C. Quod erat demonſtrandum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Ex quatuor rationibus citatis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	*c* 1	1 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igi-

Igitur *per* 2p7, ratio compoſita eſt A *ad* C : ergo *per* 4p2, conſtat A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = A *ad* C : ergo *per ch*, cylinder X ad cylindrum Z = A *ad* C. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

Theorema XV.

Cylindri X & Z habentes baſes inter ſe æquales, ſunt vt altitudines. Idem accidit conis. *Euclidis propoſitio 14. libri 12.*

Facta hypotheſi, quod cylindri, vel coni X baſis ſit A, altitudo B : quodque cylindri, vel coni Z, baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur primò, A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = B *ad* D.

Aſſeritur ſecundò, A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = B *ad* D.

Conditio, A = C.

Demonſtratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D		B *ad* D
3	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio compoſita eſt B *ad* D : ergo *per* 4p2, patet A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = B *ad* D: ergo *per ch*, Cylinder X ad cylindrum Z = B *ad* D. Quod erat demonſtrandum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D		B *ad* D
3	4p4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4p4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio compoſita eſt 3B *ad* 3D ∥ B *ad* D : ergo *per* 4p2, patet A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = B *ad* D : ergo *per ch*, conus X ad conum Z = altitudini B ad altitudinem D. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

PARS

P A R S II.

Exempla secundæ regulæ Logisticæ in Euclideis theorematis inuoluentibus proprietatem dependentem ab angulis: vel alio ex capite paulò difficilioribus, quam præcedentis partis exempla.

Theorema I.

In triangulo A B C, angulus A B C rectus sit; quadratum A C, erit æquale quadratis A B & B C simul sumptis. *Euclidis propositio 47. libri* **1.**

Facta hypothesi, quod ex puncto B vertice recti anguli ducta sit recta BD, perpendicularis ad rectam AC: ex Euclidea conditione, quæ requirit vt angulus ABC rectus sit: *per* 3p8, immediatè patet prima, & secunda conditio; tertia verò conditio ex hypothesi manifesta est. Fig. 19.

Asseritur ABq + BCq = ACq.
Prima conditio, AD *ad* AB = AB *ad* AC.
Secunda conditio, DC *ad* BC = BC *ad* AC.
Tertia conditio, AD + DC = AC.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	AB + BC *ad* AC	1*p*5	AB *ad* AC *et* + BC *ad* AC	*c* 1 *et* 2	AD *ad* AB *et* +
2	*c h*	AB + BC *ad* AC	1*p*5	AB *ad* AC *et* + BC *ad* AC		AB *ad* AC *et* +
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1

DC *ad* BC	*n*3	AD *ad* AC *et* + DC *ad* AC		AD *ad* AC *et* + DC *ad* AC
BC *ad* AC		AB *ad* AB *et* + BC *ad* BC		1 *ad* 1 *et* + 1 *ad* 1
ad 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
ad 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

*n*4	1AD *ad* 1AC *et* + 1DC *ad* 1AC	*p*5 1	AD + DC *ad* AC	*c* 3	1 *ad* 1
	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, etiam ABq + BCq = ACq. Quod erat demonstrandum.

Nota; hanc propositionem Euclideam conuenire cum assertione 5. theor. 8. partis 3. libri 1. quæ libro secundo expeditius demonstratur: hic autem paulò productiorem demonstrationem exigebat, vt constitueret secundæ regulæ Logisticæ, exemplum de quibus hoc capite agimus.

Theo-

Theorema II.

Æqualia parallelogramma A B C, & D E F, quæ vnum angulum B vni angulo E æqualem habent: etiam latera circa æquales angulos habent reciprocè proportionalia. Et si latera circa æquales angulos B & E, habeant reciprocè proportionalia: parallelogramma erunt inter se æqualia. *Euclidis propositio* 14. *libri* 6.

Facta hypothesi, quod ex punctis A & D ductæ sint rectæ A G & D H perpendiculares ad B C & E F: quoniam ex Euclidea conditione constat, angulum B æquari angulo E, & per hypothesim angulus B G A = angulo E H D: etiam *per* 3*p*4, patet verum esse, quod asseritur in secunda conditione vtriusque assertionis.

Asseritur primò, B C *ad* E F = E D *ad* B A.
Prima conditio, B C *in* G A ductu 1 vel 2 = E F *in* H D ductu 1 vel 2.
Fig. 32. Secunda conditio, G A *ad* H D = B A *ad* E D.
Asseritur secundò, B C *in* G A ductu 1 vel 2 = E F *in* HD ductu 1 vel 2.
Prima conditio, B C *ad* E F = E D *ad* B A.
Secunda conditio, G A *ad* H D = B A *ad* E D.

Demonstratio primæ partis. Considerando producta, quæ in prima conditione asseruntur æqualia: ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	BC *ad* EF		BC *ad* EF
2	*ch*	GA *ad* HD	*c* 2	BA *ad* ED
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est B C *in* B A *ad* E F *in* E D: ergo *per* 4*p*2, patet B C *in* G A ductu 1 vel 2 *ad* E F *in* H D ductu 1 vel 2 = B C *in* B A *ad* E F *in* E D; sed *per c* 1, constat B C *in* G A ductu 1 vel 2 = E F *in* H D ductu 1 vel 2: ergo etiam B C *in* B A = E F *in* E D; igitur *per* 1*p*10, B C *ad* E F = E D *ad* B A. Quod erat demonstrandum pro prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	BC *ad* EF		BC *ad* EF		BC *ad* EF	*n*3	BC *ad* BC		1 *ad* 1
2	*ch*	GA *ad* HD	*c* 2	AB *ad* DE	*c* 1	EF *ad* BC		EF *ad* EF		1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet BC *in* G A ductu 1 vel 2 = E F *in* H D ductu 1 vel 2: ergo *per ch*, parallelogrammum A B C = parallelogrammo D E F. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theo-

Theorema III.

Æqualia triangula A B C, & D E F, quæ vnum angulum B, vni angulo E æqualem habent: etiam latera circa æquales angulos habent reciprocè proportionalia. Et si latera circa æquales angulos habeant reciprocè proportionalia, erunt inter se æqualia. *Euclidis propositio 15. lib. 6.*

Facta hypothesi, quod ex punctis A & D, ductæ sint rectæ A G & D H perpendiculares ad rectas B C & E F; quoniam ex Euclidea conditione constat angulos B & E inter se æquari: & per hypothesim, etiam angulus B G A = angulo E H D: *per 3p4*, patet verum esse, quod asseritur in secunda conditione vtriusque assertionis, Fig. 33.

Asseritur primò, B C *ad* E F = E D *ad* B A.
Prima conditio, B C *in* G A ductu 3 = E F *in* H D ductu 3.
Secunda conditio, G A *ad* H D = B A *ad* E D.
Asseritur secundò, B C *in* G A ductu 3 = E F *in* H D ductu 3.
Prima conditio, B C *ad* E F = E D *ad* B A.
Secunda conditio, G A *ad* H D = B A *ad* E D.

Demonstratio primæ partis. Considerando producta, quæ in prima conditione primæ assertionis asseruntur æqualia: ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	BC *ad* EF		BC *ad* EF	BC *ad* EF
2	*ch*	GA *ad* HD	*c* 2	AB *ad* DE	AB *ad* DE
3	4*p*4	1 *ad* 2	*n*3	1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 2	1 *ad* 1

Igitur *per 2p7*, ratio composita est BC *in* A B *ad* EF *in* D E: ergo *per 4p2*, patet B C *in* G A ductu 3 *ad* E F *in* H D ductu 3 = B C *in* AB *ad* E F *in* D E: sed *per c 1*, constat B C *in* G A ductu 3 = E F *in* H D ductu 3: ergo etiam B C *in* A B = E F *in* D E; igitur *per 1p10*, B C *ad* E F = D E *ad* A B. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	BC *ad* EF		BC *ad* EF		BC *ad* EF	*n*3	BC *ad* BC	1 *ad* 1
2	*ch*	GA *ad* HD	*c* 2	AB *ad* DE	*c* 1	EF *ad* BC		EF *ad* EF	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 2	*n*3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per 2p7*, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per 4p2*, patet BC *in* GA ductu 3 = E F *in* H D ductu 3: ergo *per ch*, etiam triangulum A B C = triangulo E D F Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theorema IV.

Similium triangulorum X, & Z proportio est duplicata laterum homologorum. *Euclidis propositio* 19. *lib*. 6.

Facta hypothesi, quod triangulum X, habeat basim A, altitudinem B: triangulum verò Z, habeat basim C, altitudinem D: quodque bases A, & C sint latera homologa triangulorum X, & Z: etiam, vt pluribus declaratum est in hypothesi præcedentis theorematis, *per* 3*p*4, satis patet A *ad* C = B *ad* D, vt asseritur in conditione quam pro Euclidea substituimus.

Asseritur A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A2 *ad* C2.

Conditio A *ad* C = B *ad* D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D	*c* 1	A *ad* C
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 2A2 *ad* 2C2 ll A2 *ad* C2: ergo *per* 4*p*2, patet X *ad* Z = A2 *ad* C2. Quod erat demonstrandum.

Theorema V.

Quæuis similes figuræ rectilineæ X, & Z, habent duplicatam rationem laterum homologorum. *Euclidis propositio* 20. *libri* 6.

Facta hypothesi, quod figuræ X, & Z singulæ diuisæ sint in æquè multa triangula inter se similia, quæ pro basi habeant latera homologa. Exempli gratia triangulorum figuræ X bases sint A, B, C: his basibus correspondentes altitudines sint D, E, F. Similiter triangulorum figuræ Z bases sint G, H, K: his basibus correspondentes altitudines sint L, M, N. Facta hac hypothesi, figura X = A *in* D *et* † B *in* E *et* † C *in* F ductu 3: atque figura Z = G *in* L *et* † H *in* M *et* † K *in* N ductu 3: præterea ex theoremate 4. partis 3. cap. 8. constat verum esse, quod dicitur in conditione, quandoquidem Euclidea conditio requirit, vt indicata triangula figurarum X, & Z sint similia.

Asseritur A *in* D *et* † B *in* E *et* † C *in* F ductu 3 *ad* G *in* L *et* † H *in* M *et* † K *in* N ductu 3 = A2 *ad* G2.

Vnica conditio, A *ad* G = B *ad* H ll C *ad* K ll D *ad* L ll E *ad* M ll F *ad* N.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	A *ad* G † B *ad* H † C *ad* K	*c* 1	A *ad* G † A *ad* G † A *ad* G	2*p*2	3A *ad* 3G		A *ad* G
2	*c h*	D *ad* L † E *ad* M † F *ad* N	*c* 1	A *ad* G † A *ad* G † A *ad* G	2*p*2	3A *ad* 3G		A *ad* G
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2	*n*3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 2		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita erit A2 *ad* G2 : ergo *per* 4*p*2, patet A *in* D *et* † B *in* E *et* † C *in* F ductu 3 ad G *in* L *et* † H *in* M *et* † K *in* N ductu 3 = A2 *ad* G2. Quod erat demonstrandum,

Nota. A *ad* G † A *ad* G † A *ad* G = 3A *ad* G, iuxtà additionem partis 5. cap. 2. lib. 1. hoc est, quando sermo est de additione rationum. Verum quando sermo est de additione terminorum ipsarum rationum, de qua agitur in assertione 3. theorematis 2. partis 2. cap. 8: hoc casu A *ad* G † A *ad* G † A *ad* G = 3A *ad* 3G, vt per citatum theorema 2, inferimus in suprascriptis rationum seriebus: & sensus est, quod plurium rationum çqualium antecedentes termini omnes simul sumpti, ad earumdem rationum consequentes terminos simul sumptos, habeant eamdem rationem, quam habet vnus istarum rationum antecedens terminus, ad suum consequentem terminum.

Theorema VI.

Æquiangula parallelogramma A B C, & D E F, inter se habent rationem compositam ex rationibus laterum contiguorum æqualibus angulis adiacentium. Exempli gratia ex rationibus B C *ad* E F, atque B A *ad* E D. *Euclidis propositio* 23. *lib*. 6.

Facta hypothesi, quod ex punctis A & D, ductæ sint rectæ A G & D H, perpendiculares ad B C & E F. Quoniam ex Euclidea conditione constat angulum B = angulo E, & per hypothesim etiam constet angulum B G A = angulo E H D: patet *per* 3*p*4, verum esse quod asseritur in conditione. Fig. 34.

Asseritur B C *in* G A ductu 1 vel 2 *ad* E F *in* H D ductu 1 vel 2 = B C *in* B A *ad* E F *in* E D.

Conditio G A *ad* H D = BA *ad* E D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	BC *ad* EF		BC *ad* EF
2	*c h*	GA *ad* HD	*c* 1	BA *ad* ED
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est B C *in* B A *ad* E F *in* E D: ergo *per* 4*p*2, patet B C *in* G A ductu 1 vel 2 *ad* E F *in* H D ductu 1 vel 2 = B C *in* B A *ad* E F *in* E D ‖ B C *ad* E F *in* B A *ad* E D, vt patet ex 2*p*8, atque illud est, quod significatur dicendo, quod parallelogrammum A B C ad parallelogrammum C D E, habeat rationem compositam ex B C *ad* E F & ex B A *ad* E D. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema VII.

Similia parallelepipeda X, & Z, habent triplicatam rationem laterum homologorum. *Euclidis propoſitio* 33. *lib.* 11.

Facta hypotheſi, quod parallelepipedi X baſis ſit A *in* B, altitudo ſit C: & parallelepipedi Z, baſis ſit D *in* E, altitudo F: quodque A, & D ſint baſium latera homologa: ex conditione Euclidea, quæ requirit, vt parallelepipeda X, & Z ſint ſimilia, conſtat A *ad* D = B *ad* E ll C *ad* F, vt aſſeritur in conditione, totumque X = A *in* B *in* C ductu 1 vel 2: & totum Z = D *in* E *in* F ductu 1 vel 2.

Aſſeritur A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 = A3 *ad* D3.

Conditio, A *ad* D = B *ad* E ll C *ad* F.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *in* B *ad* D *in* E	*n*4	A *ad* D		A *ad* D
2	*ch*	C *ad* F		B *ad* E	*c* 1	A *ad* D
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		C *ad* F	*c* 1	A *ad* D
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
				1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt A3 *ad* D3: ergo *per* 4*p*2, A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 = A3 *ad* D3. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VIII.

Parallelepipedum X factum ex tribus rectis proportionalibus, æquatur parallelepipedo Z facto ſub media, & æquiangulo priori. *Euclidis propoſitio* 36. *lib.* 11.

Facta hypotheſi, quod baſeos parallelepipedi X longitudo ſit A, latitudo B: quodque altitudo parallelepipedi ſit C. Ex Euclidea conditione, quæ requirit vt parallelepipedum X, factum ex tribus proportionalibus, ſit æquiangulum parallelepipedo Z, facto ſub media: *per* 3*p*4, facilè patet, quod A *ad* B = B *ad* C: quodque parallelepipedi Z, longitudo, latitudo, & altitudo ſingulæ ſint æquales B.

Aſſeritur A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 = B *in* B *in* B ductu 1 vel 2.

Conditio A *ad* B = B *ad* C.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticę.

1	*ch*	A *in* B *ad* B *in* B	*n*4	A *ad* B		A *ad* B	*n*3	A *ad* A	1 *ad* 1
2	*ch*	C *ad* B		B *ad* B		B *ad* B		B *ad* B	1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		C *ad* B	*c* 1	B *ad* A		B *ad* B	1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
				1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 = B *in* B *in* B ductu 1 vel 2. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema IX.

Parallelepipeda similia X, Z, Q, similiterque à lineis proportionalibus descripta : & ipsa sunt proportionalia. *Euclidis propositio 37. lib. 11.*

Facta hypothesi, quod parallelepipedi X longitudo sit A, latitudo B, altitudo C. Præterea quod parallelepipedi Z longitudo sit D, latitudo E, altitudo F. Similiter quod parallelepipedi Q longitudo sit G, latitudo H, altitudo K. Denique quod A *ad* D = D *ad* G; item B *ad* E = E *ad* H; item C *ad* F = F *ad* K.

Asseritur A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 = D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 *ad* G *in* H *in* K ductu 1 vel 2 : adeòque X *ad* Z = Z *ad* Q.

Prima conditio, A *ad* D = D *ad* G.

Secunda conditio, B *ad* E = E *ad* H.

Tertia conditio, C *ad* F = F *ad* K.

Quarta conditio, B *ad* E = D *ad* L; item C *ad* F = L *ad* N.

Demonstrationem diuido in duas partes. In prima ostendo A *in* B *in* C *ad* D *in* E *in* F = A *ad* N. In secunda parte probo D *in* E *in* F *ad* G *in* H *in* K = A *ad* N Ex his verò duabus partibus immediatè patet assertio.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

				A *ad* D					
1	*ch*	A *in* B *ad* D *in* E	*n*4	B *ad* E	2*p*7	A *ad* L	*n*3	A *ad* N	A *ad* N
2	*ch*	C *ad* F		C *ad* F	*c*4	L *ad* N		L *ad* L	1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A *ad* N : ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 = A *ad* N. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

				D *ad* G	*c*1	A *ad* D					
1	*cb*	D *in* E *ad* G *in* H	*n*4	E *ad* H	*c*2	B *ad* E	2*p*7	A *ad* L		A *ad* N	A *ad* N
2	*cb*	F *ad* K		F *ad* K	*c*3	C *ad* F	*c*4	L *ad* N	*n*3	L *ad* L	1 *ad* 1
3	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A *ad* N : ergo *per* 4*p*2, D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 *ad* G *in* H *in* K ductu 1 vel 2 = A *ad* N ‖ A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2, vt in prima parte ostensum est : ergo A *in* B *in* C ductu 1 vel 2 *ad* D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 = D *in* E *in* F ductu 1 vel 2 *ad* G *in* H *in* K ductu 1 vel 2, adeòque X *ad* Z = Z *ad* Q. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema X.

Similium pyramidum X, & Z proportio, est triplicata proportionis, quam habent duo latera homologa. *Euclidis propositio* 8. *lib.* 12.

Facta hypothesi, quod pyramidis X longitudo sit A, latitudo B, altitudo C: quodque pyramidis Z longitudo sit D, latitudo E, altitudo F. Ex Euclidea conditione, quæ requirit, vt pyramides X, & Z sint similes, constat latera homologa = A *ad* D: adeòque A *ad* D = B *ad* E || C *ad* F. Dictis in hypothesi addo, me supponere, quod A *in* B = H, siue basi pyramidis X: & præterea, quod D *in* E = K, siue basi pyramidis Z.

Asseritur H *in* C ductu 3 *ad* K *in* F ductu 3 = A3 *ad* B3.

Conditio A *ad* D = B *ad* E || C *ad* F.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda Logisticæ regula.

1	*cb*	H *ad* K		A *ad* D		A *ad* D
2	*cb*	C *ad* F	*d*	B *ad* E	*c* 1	A *ad* D
3	4*p*4	1 *ad* 3		C *ad* F	*c* 1	A *ad* D
4	4*p*4	3 *ad* 1	*n*3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
				3 *ad* 3		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A3 *ad* D3: ergo *per* 4*p*2, H *in* C ductu 3 *ad* K *in* F ductu 3 = A3 *ad* D3. Quod erat demonstrandum,

d Nota me supposuisse, quod A *in* B = H, siue basi pyramidis X: & præterea D *in* E = K, siue basi pyramidis Z: quæ suppositio bona est, supposito quod pyramides X & Z habeant bases, quæ sunt parallelogramma. Si placeret considerare pyramides X & Z habentes bases triangulares: satis foret, cæteris manentibus supponere quod A *in* B ductu 3, hoc est $\frac{A \text{ in } B}{2}$ = H: & similiter quod C *in* D ductu 3, hoc est $\frac{D \text{ in } E}{2}$ = K: sic enim H = basi triangulari, & etiam K = basi triangulari: sed tamen ratio H *ad* K = A *ad* D *in* B *ad* E, hoc est rationi compositæ ex duabus rationibus A *ad* D, atque B *ad* E: quæ duæ rationes simplices, atque componentes, in secunda serie benè substituuntur, pro ratione ex ipsis composita H *ad* K, quæ in prima serie inuenitur, conformiter ad quartam notam secundæ regulæ Logisticæ.

Theorema XI.

Æquales pyramides X, & Z reciprocant bases & altitudines: & pyramides X & Z, quæ reciprocant bases & altitudines, sunt æquales. *Euclidis propositio* 9. *libri* 12.

Facta hypothesi, quod pyramidis X basis sit A, altitudo B: pyramidis verò Z, basis sit C, altitudo D.

Asserirur primò, A *ad* C = D *ad* B.

Con-

Conditio A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3.

Asseritur secundò, A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3.

Conditio A *ad* C = D *ad* B.

Demonstratio primæ partis. Considerando æquationem, quæ continetur conditione: ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* C		A *ad* C	A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D		B *ad* D	B *ad* D
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*4	3 *ad* 1	*n*3	3 *ad* 3	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita erit A *in* B *ad* C *in* D: ergo *per* 4*p*2, A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = A *in* B *ad* C *in* D: sed per conditionem A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3: ergo A *in* B = C *in* D: ergo *per* 1*p*10, A *ad* C = D *ad* B, quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	D *ad* B	*n*3	D *ad* D	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D		B *ad* D		B *ad* B	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*4	3 *ad* 1	*n*3	3 *ad* 3		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theorema XII.

Similium conorum X, & Z, proportio est triplicata proportionis radiorum quæ sunt in basibus. Idem accidit similibus cylindris X, & Z. *Euclidis propositio* 12. *libri* 12.

Facta hypothesi, quod cylindri aut coni X basis sit circulus G, habens radium A, circumferentiam B, altitudo autem coni sit C: quodque coni, aut cylindri Z, basis sit circulus H, habens radium D, circumferentiam E, altitudo autem coni sit F. Ex Euclidea conditione, quæ requirit vt conus X, sit similis cono Z: & similiter vt cylinder X, sit similis cylindro Z: constat A *ad* D = C *ad* F, & præterea ex scholio in fine huius partis patet G *ad* H = A2 *ad* D2.

Asseritur primò, G *in* C ductu 3 *ad* H *in* F ductu 3 = A3 *ad* D3.

Asseritur secundò, G *in* C ductu 1 *ad* H *in* F ductu 1 = A3 *ad* D3.

Prima conditio, G *ad* H = A2 *ad* D2.

Secunda conditio, A *ad* D = C *ad* F.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	G *ad* H	*c* 1	A2 *ad* D2
2	*ch*	C *ad* F	*c* 2	A *ad* D
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 A3 *ad* 3 D3 ‖ A3 *ad* D3: ergo *per* 4*p*2, patet G *in* C ductu 3 *ad* H *in* F ductu 3 = A3 *ad* D3. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1

1	*ch*	G *ad* H	*c* 1	A2 *ad* D2
2	*ch*	C *ad* F	*c* 2	A *ad* D
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt A3 *ad* D3 : ergo *per* 4*p*2, G *in* C ductu 1 *ad* H *in* F ductu 1 = A3 *ad* D3. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

Theorema XIII.

Æquales cylindri X, & Z, reciprocant baſes & altitudines; & ſi reciprocant baſes, & altitudines, ſunt æquales. Idem accidit conis X, & Z. *Euclidis propoſitio* 15. *lib.* 12.

Facta hypotheſi, quod cylindri vel coni X baſis ſit A, altitudo B: quodque cylindri vel coni Z baſis ſit C, altitudo D.

Aſſeritur primò, A *ad* C = D *ad* B.
Conditio, A *in* B ductu 1 = C *in* D ductu 1.
Aſſeritur ſecundò, A *in* B ductu 1 = C *in* D ductu 1.
Conditio, A *ad* C = D *ad* B.
Aſſeritur tertiò, A *ad* C = D *ad* B.
Conditio, A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3.
Aſſeritur quartò, A *in* B ductu 3 = C *in* D ductu 3.
Conditio, A *ad* C = D *ad* B.

Demonſtratio primæ partis. Conſiderando æquationem conditione contentam; Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C
2	*ch*	B *ad* D
3	4*p*1	1 *ad* 1
4	4*p*1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt A *in* B *ad* C *in* D : ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = A *in* B *ad* C *in* D: ſed per conditionem, A *in* B ductu 1 = C *in* D ductu 1 : ergo A *in* B = C *in* D : ergo *per* 1*p*10, A *ad* C = D *ad* B. Quod erat demonſtrandum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	D *ad* B	*n*3	D *ad* D		1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D		B *ad* D		B *ad* B		1 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 1 *ad* 1 : ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = 1 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

Si placet tertiæ partis demonſtratio : lege demonſtrationem primæ aſſertionis ſuperioris 11 theorematis; & ſimiliter vt habeatur demonſtratio quartæ partis, ſatis eſt legere demonſtrationem ſecundæ aſſertionis eiuſdem theorematis 11 ; dummodò pro voce pyramis ſubſtituatur vox conus : quod enim hic aſſeritur de conis, in citato theoremate affirmatur de pyramidibus.

Theo-

Theorema XIV.

Sphærarum X, & Z, proportio eſt triplicata proportionis radiorum. *Euclidis propoſitio* 18. *lib.* 12.

Facta hypotheſi, quod ſphæræ X radius ſit A, & dimidius circulus radio A deſcriptus ſit B: eodemque radio A deſcripta dimidia circuli circumferentia ſit C; quodque ſimiliter ſphæræ Z radius ſit D, radioque D deſcriptus ſemicirculus, ſit E, eodemque radio deſcripta dimidia circuli circumferentia ſit F: patet ex intelligentia Logiſticarum ſcriptionum, ſphæram X = B *in* 2C ductu 5: & præterea ſphæram Z = E *in* 2F ductu 5.

Aſſeritur B *in* 2C ductu 5 *ad* E *in* 2F ductu 5 = A3 *ad* D3.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	B *ad* E	*g*	A2 *ad* D2	A2 *ad* D2
2	*ch*	2C *ad* 2F	3*p*5	A *ad* D	A *ad* D
3	4*p*8	4A *ad* 5C	*n*3	4A *ad* 4A	1 *ad* 1
4	4*p*8	3C *ad* 4A		3C *ad* 3C	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt A3 *ad* D3: ergo B *in* 2C ductu 5 *ad* E *in* 2F ductu 5 = A3 *ad* D3. Quod erat demonſtrandum.

g, vide notam Scholij ſequentis.

Scholium.

Prius notatur, & demonſtratur aliqua veritas, vt citari poſſit. Deinde notantur aliqua pro ijs, quibus iuſto longiores videri poſſent aliquę præcedentes huius capitis demonſtrationes.

Nulla neceſſitate cogente, ſed tamen ſuadente aliqua vtilitate ſtudioſorum Logiſticæ [illegible] nobis impoſuimus, prohibentem in demonſtratione vllius theorematis huius [illegible] citare aliquod ex præcedentibus, aut ſubſequentibus theorematis, quæ afferuntur [illegible] ſecundæ regulæ Logiſticę: & quoties vltra paucas Logiſticæ elementares veritates, altera aliqua requiritur, vt commodior euadat demonſtratio, talem veritatem demonſtratam proponere in nota aliqua, quę citari poſſit in demonſtratione theorematis Euclidei, vel Archimedei, non citando theorema pro exemplo propoſitum, tametſi contineat demonſtratam eamdem illam veritatem, quę proponitur in nota.

Veritates quas demonſtratas annotamus, vt citari poſſint conformiter ad commemoratam legem, paucæ ſunt; ex paucis vnam hoc loco exhibeo annotatam, atque demonſtratam. Hæc ſemel iterúmue citatur in præcedentium theorematum demonſtrationibus, & fortaſſis todidem alijs vicibus citabitur in illis, quæ hoc capite ſubſequuntur.

Nota, ſuppoſito quod circuli X radius ſit A, circumferentia C: quodque circuli Z radius ſit B, circumferentia D.

Dico circulum X, hoc est A *in* C ductu 4 ad circulum Z, hoc est B *in* D ductu 4 = A2 *ad* B2.

Demonstratio. Ex ductuum intelligentia & 4p6, constat A *in* C ductu 4 = A *in* C *per* 2: & similiter, B *in* D ductu 4 = B *in* D *per* 2: sed ex 2p4, manifestum est A *in* C *per* 2 *ad* B *in* D *per* 2 = A *in* C *ad* B *in* D ll A *ad* B *in* C *ad* D, vt constat *per* 2p8; igitur circulus X ad circulum Z = A *ad* B *in* C *ad* D ll A *ad* B *in* A *ad* B, vt patet *per* 3p5: sed *per* 2p8 A *ad* B *in* A *ad* B = A *in* A *ad* B *in* B ll A2 *ad* B2: ergo circulus X ad circulum Z = A2 *ad* B2. Quod erat demonstrandum.

In corollario secundo subsequentis propositionis hæc eadem veritas paulò aliter, atque vniuersalius demonstratur.

Inter præcedentia theoremata non pauca inueniuntur longiori discursu demonstrata, quæ independenter à secunda regula Logisticæ fortassis etiam alia Methodo demonstrari poterant breuiori discursu. Si fortè aliquis non satis oculatus censor nostræ Logisticæ, hoc reprehensibile vel damnandum existimet: meminerit, Logisticam in præsenti capite tantùm intendere declarationem secundæ regulæ Logisticæ in varijs exemplis; adeòque nihil facit ad præsens institutum, quod ab his exemplis diuersum est: quare pro allatis demonstrationibus, qualescunque illæ sint, malè substituerentur aliæ, quocunque ex capite meliores, eo ipso quod non essent conformes secundæ regulæ Logisticæ.

Cæterum in prima, & secunda parte huius capitis proposita theoremata, licet apud alios in precio habeantur, & numerentur inter præstantiora, quæ inueniuntur in Euclideis elementis: tamen talia esse existimamus, quæ vix mereantur vsum secundæ regulæ Logisticæ: sed maluimus, vt ità dicam, abutendo hac regula, consulere vtilitati studiosorum Logisticæ, eam declarando in facili materia, in qua eius vis, atque vtilitas minus appareret, quam incipere ab exemplis discentibus minus commodis, vt sunt illa, quæ continentur tertia parte huius capitis.

Si placet intelligere quomodo Logistica demonstrata exhibere poterat superiora theoremata, non tantum breuius, quam fuerunt demonstrata: sed fortè etiam breuius, quam alia Methodo demonstrari possint: considera subsequentem propositionem, & ex illa illata corollaria.

Propositio.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D, supposito quod X significet aliquem ex quatuor primis ductibus Geometricis nominatis.

Dico A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = A *ad* B *in* C *ad* D ll A *in* C *ad* B *in* D.

Demonstratio. Quoniam ductus X, per hypothesim est primus, vel secundus, vel tertius, vel quartus: ex parte 4. cap. 8. constat A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = A *in* C *per* 1 *ad* B *in* D *per* 1: vel A *in* C *per* 2 *ad* B *in* D *per* 2: vel A *in* C *per* 3 *ad* B *in* D *per* 3; sed *per* 2p4, manifestum est A *in* C *per* 3 *ad* B *in* D *per* 3 = A *in* C *per* 2 *ad* B *in* D *per* 2 ll A *in* C *per* 1 *ad* B *in* D *per* 1 ll A *in* C *ad* B *in* D: igitur A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = A *in* C *ad* B *in* D ll A *ad* B *in* C *ad* D, vt constat *per* 2p8. Quod erat demonstrandum.

Reflectendũ in singulis corollarijs, vnius producti, de quo agit citatũ theorema, basim esse A, altitudinem C: alterius basim esse B, altitudinem D; licet istæ bases, vel alti-

altitudines aliter repræſententur, vbi dicta theoremata demonſtrantur conformiter ad ſecundam regulam Logiſticæ.

Corollarium primum. Suppoſita hypotheſi theorematis primi, vel ſecundi, vel ſeptimi primæ partis huius capitis: quodque X ſignificet ductum, de quo agitur in theoremate: patet A *ad* B *in* C *ad* D = 1 *ad* 1 *in* 1 *ad* 1 ll 1 *ad* 1; igitur per propoſitionem conſtat A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = 1 *ad* 1. Quod idem, ſed tribus diuerſis demonſtrationibus, in tribus diuerſis caſibus concluditur in theor. 1, 2, & 7, partis primæ.

Corollarium ſecundum. Suppoſita hypotheſi theorematis 4, vel 8, vel 11, vel 14 primæ partis, quodque X ſignificet ductum, de quo agitur in theoremate: patet A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B *in* 1 *ad* 1 ll A *ad* B; igitur per propoſitionem conſtat A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = A *ad* B. Quod idem quatuor diuerſis demõſtrationibus in quatuor diuerſis caſibus tãtum euincitur in theor. 4, 8, 11, 14.

Corollarium tertium. Suppoſita hypotheſi theorematis 10 primæ partis, vel theor. 4. ſecundæ partis, quodque X ſignificet ductum, de quo in theoremate agitur, manifeſtum eſt A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B *in* A *ad* B ll A2 *ad* B2; igitur per propoſitionem conſtat A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = A2 *ad* B2. Quod idem in duobus caſibus, duabus diuerſis demonſtrationibus tantum euincitur in theor. 10 primæ partis, & theor. 4. ſecundæ partis.

Corollarium quartum. Suppoſita hypotheſi theorematis 6 primæ partis; vel theorematis 7, aut 10, aut 12, Secundæ partis: quodque X ſignificet ductum de quo agitur in theoremate: ex coroll. 3. manifeſtum eſt A *ad* B *in* C *ad* D = C2 *ad* D2 *in* C *ad* D ll C3 *ad* D3; igitur per propoſitionem conſtat, A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X = C3 *ad* D3. Quod quatuor diuerſis demonſtrationibus tantum euincitur, in caſibus theor. 6. partis primæ, & theor. 7, 10, 12, partis 2.

Corollarium quintum. Suppoſita hypotheſi theorematis 5 primæ partis, vel theorematis 2, 3, 11, 13, ſecundæ partis, quodque latera F & G ſint illa, quæ reſpondent altitudinibus: vel ex ipſa hypotheſi, vel mediante theor. 4. partis 3. cap. 8. conſtat C *ad* D = F *ad* G: quare A *in* F *ad* B *in* G = A *in* C *ad* B *in* D ll A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X, vt conſtat ex propoſitione; ſed per hypotheſim patet A *in* C ductu X = B *in* D ductu X: ergo A *in* F = B *in* G: adeòque *per axioma* 10, etiam A *ad* B = G *ad* F, quod in prima parte, atque in caſibus quinque diuerſorum theorematum, quæ initio huius corollarij citantur, totidem demonſtrationibus tantum euincitur.

Eorumdem theorematum altera pars conſtat ferè vt prior. Etenim, vt in priori conſtat A *in* F *ad* B *in* G = A *in* C *ad* B *in* D ll A *in* C ductu X *ad* B *in* D ductu X, vt conſtat ex propoſitione: ſed per hypotheſim ſecundæ partis, A *in* C ductu X = B *in* D ductu X: igitur A *in* F = B *in* G: adeòque *per* 10 *axioma* A *ad* B = G *ad* F: quod tantum concluditur in ſecunda parte theorematum, quæ initio huius corollarij citantur, atque in caſibus de quibus agunt.

Simili modo tanquam corollaria ad præmiſſam propoſitionem non difficulter inferri poſſe, ferè ſingula reliqua theoremata primæ, & ſecundę partis: negare non poteſt leuiter verſatus in Logiſticæ Methodo. Verum corollaria hic annotata abundè videntur ſufficere vt Mathematici intelligant, quid pręſtare valeat Logiſtica, quando agitur de breuitate demonſtrationum: ſimiliterque cognoſcent ex ſecundæ regulæ exemplis, huius regulæ vniuerſalitatem, atque commoditatem, præſertim in ijs, quæ nimis obuia non ſunt, adeòque non alio ex capite merentur huius regulæ vſum, niſi vt proſint cupientibus diſcere Logiſticam. Hæc ſi non ſufficiant parum oculato Logiſticæ noſtræ cenſori: conetur tantumdem præſtare alia Methodo, in hoc conatu, qui pluribus profuit, fortaſſis inueniet remedium aliquod ſuę cęcitati.

R 2 PARS

PARS III.

Exempla ſecundæ regulæ Logiſticæ in Archimedeis theorematis, agentibus de quantitatibus productis ex Logiſticæ ductibus Geometricis, atque nominatis.

Theorema I.

Circulus X, cuius radius A B eſt medius proportionalis inter recti cylindri Z latus E G, & baſeos diametrum E L: æqualis eſt curuæ ſuperficiei cylindricæ. *Archimedis propoſitio* 11.

Fig. 35. & 36. Facta hypotheſi, quod circumferentia circuli radio A B deſcripti ſit B C D; quodque circumferentiæ, circuli diametro E L deſcripti medietas ſit arcus E F L.

Aſſeritur A B *in* B C D ductu 4 *ad* 2 E F L *in* E G ductu 1 = 1 *ad* 1.

Conditio E G *ad* A B = A B *ad* E L.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*c h*	AB *ad* 2EFL	*n* 3	AB *ad* EG		AB *ad* EG	*c* 1	EL *ad* AB	*n* 3
2	*c h*	BCD *ad* EG		BCD *ad* 2EFL	3*p*5	2AB *ad* EL		2AB *ad* EL	
3	4*p*6	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2	
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	

EL *ad* EL	1 *ad* 1
2AB *ad* AB	2 *ad* 1
1 *ad* 2	1 *ad* 2
1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 2 *ad* 2 ll 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet A B *in* B C D ductu 4 *ad* 2 E F L *in* E G ductu 1 = 1 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

Theorema II.

Circulus X, cuius radius A B eſt medius proportionalis inter coni recti Z latus E G, & baſeos radium E P; æqualis eſt curuæ ſuperficiei coni. *Archimedis propoſitio* 13.

Fig. 36. & 37. Facta hypotheſi, quod circuli X circumferentia, ſit B C D: baſeos verò coni Z dimidia circumferentia, ſit E F L.

Aſſeritur A B *in* B C D ductu 4 *ad* 2 E F L *in* E G ductu 3 = 1 *ad* 1.

Conditio E P *ad* A B = A B *ad* E G.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda Logiſticæ regula.

1	ch	AB *ad* 2EFL	n3	AB *ad* EG		AB *ad* EG		AB *ad* EG	n3
2	ch	BCD *ad* EG		BCD *ad* 2EFL	3p5	AB *ad* EP	c 1	EG *ad* AB	
3	4p6	1 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	
4	4p4	2 *ad* 1	n3	2 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1	

AB *ad* AB	1 *ad* 1
EG *ad* EG	1 *ad* 1
1 *ad* 1	1 *ad* 1
1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4p2, A B *in* B C D ductu 4 *ad* 2E F L *in* E G ductu 3 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Coni recti superficies est ad basim, vt eiusdem coni latus G L ad baseos radium E P. *Archimedis propositio* 14.

Facta hypothesi, quod baseos radius sit E P: quodque dimidia baseos circumferentia sit E F L.

Asseritur 2E F L *in* G L ductu 3 *ad* E P *in* 2E F L ductu 4 = G L *ad* E P, Fig. 37.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	ch	2EFL *ad* EP	n3	2EFL *ad* 2EFL		1 *ad* 1
2	ch	GL *ad* 2EFL		GL *ad* EP		GL *ad* EP
3	4p4	1 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p6	2 *ad* 1	n3	2 *ad* 2		1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est G L *ad* E P: ergo *per* 4p2, 2E F L *in* G L ductu 3 *ad* E P *in* 2E F L ductu 4 = G L *ad* E P. quod erat demonstrandum.

Theorema IV.

Cuiuscumque sphæræ superficies, quadrupla est maximi circuli eiusdem sphæræ. *Archimedis propositio* 24.

Facta hypothesi, quod ~~sphæræ radius sit~~ B K; eiusdem sphæræ maximi circuli, hoc est circuli radio B K descripti circumferentia = 4 arcubus K R: alterius maximi circuli ad priorem perpendicularis quarta pars sit arcus A K. Fig. 38.

Asseritur 2 arcus A K *in* 4 arcus K R ductu 5 *ad* B K *in* 4 arcus K R ductu 4 = 4 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	ch	2 arc. AK *ad* BK	n3	2 arc. AK *ad* 2 arc. AK	1 *ad* 1
2	ch	4 arc. KR *ad* 4 arc. KR		1 *ad* 1	1 *ad* 1
3	4p8	2 BK *ad* 2 arc. AK		2 BK *ad* BK	2 *ad* 1
4	4p6	2 *ad* 1		2 *ad* 1	2 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 4 *ad* 1: ergo *per* 4p2, patet 2 arcus AK *in* 4 arcus KR ductu 5 *ad* BK *in* 4 arcus KR ductu 4 = 4 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema V.

Cuiuſcunquæ ſphæricę portionis ſuperficies L A D, æqualis eſt circulo, cuius radius eſt recta A D, à puncto A vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli, qui eſt portionis baſis. *Archimedis propoſitio 25.*

Fig. 39. Facta hypotheſi, quod ſphæræ centrum ſit B, eius axis ſit A Q: circuli radio B A deſcripti, adeòque maximi ſphærę circuli circumferentia $=$ 4 arcubus K R: radio A D deſcripti circuli circumferentia ſit F; portionis L A D axis ſit A G; denique ductæ ſint rectæ A D, Q D, G D,

Aſſeritur arcum A D *in* 4 arcus K R ductu 5 $=$ A D *in* F ductu 4.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticę.

1	*ch*	arc. AD *ad* AD	*n*3	arc. AD *ad* arc. AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc. KR *ad* F	3*p*5	BA *ad* AD	*n*4	2BA *ad* AD	*cb*
3	4*p*8	AG *ad* arc. AD		AG *ad* AD	3*p*8	AD *ad* AQ	
4	4*p*6	2 *ad* 1		2 *ad* 1		1 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
AQ *ad* AD	*n*3	AQ *ad* AQ	1 *ad* 1
AD *ad* AQ		AD *ad* AD	1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 1 *ad* 1; ergo *per* 4*p*2, patet arcum AD *in* 4 arcus AK ductu 5 $=$ A D *in* F ductu 4. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VI.

Cylindri recti ſphærę circumſcripti curua ſuperficies, æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. Et ſi cylindrus ac ſphęra ſecentur planis ad axem rectis: erunt ſingula ſuperficiei cylindricę ſegmenta, ęqualia ſingulis ſegmentis ſuperficiei ſphericę. *Archimedis propoſitio 26.*

Fig. 40. Facta hypotheſi, quod ſphæræ, & cylindro ſphæræ circumſcripto, communis axis ſit A Q: cētrum ſphæræ ſit B; plana ad axem AQ perpendicularia ſecantia [illegible] & cylindrum, intercipiant axeos partem C D, & arcum H G, laterisq[illegible]ri partem F E: præterea circumferentiæ circuli maximi ad axem AQ pe[illegible]ndicularis, quarta pars ſit arcus N R: circumferentiæ baſeos cylindri quarta pars ſit arcus MP.

Aſſeritur primò, 4 arcus MP *in* M L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 $=$ 1 *ad* 1.

Aſſe-

Asseritur secundò, 4 arcus M P *in* F E ductu 1 ad arcum G H *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c b	4 arc.MP *ad* 2 arc.AN	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	1 *ad* 1
2	c b	ML *ad* 4 arc.NR		ML *ad* 2AB	1 *ad* 1
3	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4p8	2 arc.AN *ad* 2AB	*n*3	2 arc.AN *ad* 2 arc.AN	1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 1 *ad* 1: ergo *per* 4p2, constat 4 arcus M P *in* M L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c b	4 arc.MP *ad* arc.GH	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	1 *ad* 1
2	c b	FE *ad* 4 arc.NR		FE *ad* CD	1 *ad* 1
3	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4p8	arc.GH *ad* CD	*n*3	arc.GH *ad* arc.GH	1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita erit 1 *ad* 1: ergo, *per* 4p2, patet 4 arcus M P *in* F E ductu 1 ad arcum G H *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theorema VII.

Segmenta superficiei sphericę parallelis circulis diuisæ, eam inter se proportionem habent, quam segmenta diametri ad parallelos circulos rectę. *Archimedis propositio 27.*

Facta hypothesi, quod arcus G H, ductu quinto, producat primum segmentum: quodque arcus H N, ductu quinto, producat secundum segmentum axeos, siue diametri ad parallelos circulos rectæ: pars C D arcui G H, & pars D B arcui H N respondeat; sitque N R quarta pars circumferentiæ circuli maximi, in quem ductu 5 ducuntur arcus G H & H N. Fig. 40.

Asseritur, quod arcus G H *in* 4 arc. N R ductu 5, ad arcum H N *in* 4 arc. N R ductu 5 = C D *ad* D B.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c b	arc.GH *ad* arc.HN	*n*3	arc.GH *ad* arc.GH	1 *ad* 1
2	c b	4 arc.NR *ad* 4 arc.NR		1 *ad* 1	1 *ad* 1
3	4p8	CD *ad* arc.GH		CD *ad* DB	CD *ad* DB
4	4p8	arc.HN *ad* DB	*n*3	arc.HN *ad* arc.HN	1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est C D *ad* D B: ergo *per* 4p2, constat quod arcus G H *in* 4 arcus NR, ductu 5, ad arcum HN *in* 4 arcus NR, ductu 5 = C D *ad* DB. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema VIII.

Omnis sphæra X, æqualis est cono Z, cuius altitudo æqualis est radio sphæræ: basis verò æqualis est superficiei sphæræ. *Archimedis propositio* 28.

Facta hypothesi, quod tota superficies sphæræ sit A, ciusque radius sit B, tota coni basis sit C, eius altitudo sit D.

Asseritur sphæram X, hoc est A *in* B ductu 3 *ad* conum Z, hoc est C *in* D ductu 3 = 1 *ad* 1.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c b*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*c b*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 *ad* 3 ‖ 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema IX.

Hemisphærium X, coni Z, æqualem secum altitudinem, & basim habentis, duplum est. *Archimedis propositio* 30.

Fig. 41. & 42. Facta hypothesi, quod hemisphærij basim constituant 4 A B C: quodque coni basim constituant 4 E F G: præterea hemisphærij altitudo sit A D, coni altitudo sit E H: denique circumferentia baseos hemisphærij adæquet 4 arcus C B.

Asseritur, D A C *in* 4 arcus C B ductu 5 *ad* 4 F E G *in* E H ductu 3 = 2 *ad* 1.

Prima conditio B A C = F E G ‖ D A C.

Secunda conditio A D = E H.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c b*	DAC *ad* 4FEG	*c* 1	1 *ad* 4		1 *ad* 4
2	*c b*	4 arc.CB *ad* EH	*n* 3	4 arc.CB *ad* 3 arc.DC		4 *ad* 3
3	4*p*8	2DA *ad* 3 arc.DC		2DA *ad* EH	*c* 2	2 *ad* 1
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 24 *ad* 12 ‖ 2 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet D A C in 4 arcus C B, ductu 5, *ad* 4 F E G *in* E H, ductu 3 = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema X.

Cylindrus rectus, sphęrę cui circumscribitur, & soliditate, & superficie tota sesquialter est. *Archimedis propositio* 32.

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: axis Q A: axi parallelum cylindri latus sit M L, tangens sphæram in N: basis cylindri adæquet 4P Q M: quarta pars circumferentię circuli, radio B N descripti, sit arcus N R. Fig. 40.

Asseritur primò, Q A L M *in* 4 arcus M P ductu 4 *ad* 2 A B N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 6 *ad* 4.

Asseritur secundò A L ✝ Q M *in* 4 arcus M P ductu 4 & ✝ 4 arcus M P *in* M L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 6 *ad* 4.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	QALM *ad* 2ABN	*n*3	QALM *ad* ABNL	*ch*	2 *ad* 1
2	*ch*	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	*ch*	1 *ad* 1		1 *ad* 1
3	4*p*6	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*8	3ABN *ad* ABNL		3ABN *ad* 2ABN		3 *ad* 2

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 6 *ad* 4: ergo *per* 4*p*2, patet QALM *in* 4 arcus M P ductu 4 *ad* 2 A B N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Antequam demonstrem secundam partem: pro æquatione magis composita, quæ asseritur in secunda parte, assumo æquationem simpliciorem, atque commodiorem, sed tamen (vt constat ex nota, quæ demonstrationem sequitur) priori æquationi æquiualentem, eámque demonstro.

Asseritur itaque secundò 4 arcus M P *in* 3 NL ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 6 *ad* 4.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	4 arc.MP *ad* 2 arc.AN	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	*ch*	1 *ad* 1
2	*ch*	3NL *ad* 4 arc.NR		3NL *ad* NL		3 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*8	arc.AN *ad* NL	*n*3	arc.AN *ad* 2 arc.AN		1 *ad* 2

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 *ad* 2 ‖ 6 *ad* 4: ergo *per* 4*p*2, constat 4 arcus M P *in* 3 N L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Nota A L = Q M ‖ N L, adeòque A L ✝ Q M = 2 N L: quare A L ✝ Q M *in* 4 arcus MP ductu 4 = 2NL *in* 4 arcus MP ductu 4 ‖ 4 arcubus MP *in* N L ductu 1, vt constat ex theor. 6. partis 4. cap. 8. Quoniam igitur A L ✝ Q M *in* 4 arcus M P ductu 4 = 4 arcubus M P *in* N L ductu 1: patet A L ✝ Q M *in* 4 arcus M P ductu 4 *et* ✝ 4 arcus M P *in* 2 N L ductu 1 = 4 arcubus M P *in* NL ductu 1 *et* ✝ 4 arcus M P *in* 2 N L ductu 1 ‖ 4 arcubus M P *in* 3 N L ductu 1.

Theorema XI.

Superficies sphęrę, dupla est curuæ superficiei cylindri quadrati sphęrę inscripti. *Archimedis propositio* 33.

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: axis cylindri quadrati, sphæræ inscripti sit C N, qui productus superficiei sphæræ occurrat in A: arcus A D & D F singuli sint quarta pars circumferentiæ circulorum maximorum sphæræ, ad inuicem perpendicularium: baseos cylindri, radius sit C G: circumferentiæ eius quarta pars sit arcus G H; cylindri latus G L, secet radium B D in puncto M. Fig. 45.

Asseritur 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* G L ductu 1 ⊏ 2 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	2 arc. AD *ad* 4 arc. GH	*n*3	2 arc. AD *ad* 2 arc. AD		1 *ad* 1		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arc. DF *ad* GL		4 arc. DF *ad* 4 arc. GH	3*p*5	BD *ad* CG	*ch*	BL *ad* MB
3	4*p*8	2 AB *ad* 2 arc. AD	*n*3	2 AB *ad* GL	*c* 1	AB *ad* ML		BL *ad* MB
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est B Lq *ad* B Mq ll 2 *ad* 1, vt patet ex 3*p*8, quia ex hypothesi constat, eiusdem quadrati diametrum esse B L: & latus esse B M: ergo *per* 4*p*2, constat 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* GL ductu 1 ⊏ 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Nota quod vndecim præcedentia huius partis theoremata sint Archimedea: quæ verò subsequuntur, illa sunt, quæ Archimedeis adduntur à P. Andrea Taquet, in appendice selectorum Archimedis theorematum, concomitante eius elementa Geometriæ planæ, & solidæ: atque hic à nobis numerantur inter theoremata Archimedea; vt diximus initio huius capitis.

Theorema XII.

Sphæræ superficies ad totam cylindri quadrati sibi inscripti superficiem, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 3 *Archimedis propositio* 34.

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: axis cylindri quadrati, sphæræ inscripti C N, qui productus occurrat in puncto A superficiei sphærę: arcus AD & DF singuli sint quarta pars circumferentiæ maximorum sphæræ circulorum, ad inuicem perpendicularium; baseos cylindri, radius sit C G: circumferentiæ eius quarta pars, sit arcus G H: cylindri latus G L, secet radium B D, in puncto M. Fig. 45.

Asseritur 2 arcus A D *in* 4 arcus DF ductu 5 *ad* 2 C G *in* 4 arcus G H ductu

ductu 4 *et* † 4 arcus G H *in* G L ductu 1 = 4 *ad* 3: vel quod idem, sed commodius est, & patet ex nota: asseritur 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* 3 G M ductu 1 = 4 *ad* 3.

Demonstratio assertionis simplicioris atque commodioris. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	2 arc. AD *ad* 4 arc. GH	*n*3	2 arc. AD *ad* 2 arc. AD		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arc. DF *ad* 3GM		4 arc. DF *ad* 4 arc. GH	3*p*5	BD *ad* BM
3	4*p*8	2AB *ad* 2 arc. AD	*n*3	2AB *ad* 3GM	*ch*	2BD *ad* 3BM
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 2BD2 *ad* 3BM2 ll 2BL2 *ad* 3BM2 ll 4 *ad* 3: vt patet ex 3*p*8, quia ex hypothesi constat, eiusdem quadrati latus esse B M: & diametrum esse B L: ergo *per* 4*p*2, manifestum est 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* 3 G M ductu 1 = 4 *ad* 3. Quod erat demonstrandum.

Nota 2 C G *in* 4 arcus G H ductu 4 = 4 arcubus G H *in* G M ductu 1: quia enim cylinder supponitur quadratus, C G = G M ll M L: hinc 2 C G *in* 4 arcus G H ductu 4 *et* † 4 arcus G H *in* G L ductu 1 = 4 arcubus G H *in* G M *et* † 4 arcubus G H *in* 2 G M ll 4 arcubus G H *in* 3 G M.

Theorema XIII.

Cuiuscunque sectionis sphæricę superficies, ad curuam superficiem coni maximi inscripti, eam proportionem habet, quam coni latus ad baseos radium. *Archimedis propositio* 35.

Facta hypothesi, quod sphærica sectio sit L A D: baseos eius radius sit G D; coni maximi, adeòque recti, sectioni inscripti, latus sit A D; radius totius sphæræ sit B K: circumferentiæ circuli, radio B K descripti, quarta pars sit arcus K R; denique circumferentiæ circuli, radio G D descripti, quarta pars sit arcus X. Fig. 39.

Asseritur, quod arcus A D *in* 4 arcus K R ductu 5 *ad* 4 arcus X *in* D A ductu 3 = A D *ad* G D.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc. AD *ad* 4 arc. X	*n*3	arc. AD *ad* arc. AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc. KR *ad* AD		4 arc. KR *ad* 4 arc. X	3*p*5	BK *ad* GD	*ch*
3	4*p*8	AG *ad* arc. AD		AG *ad* AD		AG *ad* AD	*f*
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
AB *ad* GD	*n*3	AB *ad* AQ	*ch*	1 *ad* 2
AD *ad* AQ		AD *ad* GD		AD *ad* GD
2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 2 A D *ad* 2 G D: ergò *per* 4*p*2; constat arcum A D *in* 4 arcus K R ductu 5 *ad* 4 arcus X *in* A D ductu 3 = 2 A D *ad* 2 G D ll A D *ad* G D. Quod erat demonstrandum.

f. Angulus A D Q rectus est *per* 3*p*7: adeòque *per* 3*p*8, constat AG *ad* AD = A D *ad* A Q.

Theorema XIV.

Hemisphærij superficies, ad inscripti coni maximi, siue recti curuam superficiem: eam proportionem habet, quam in quadrato diameter ad latus; ad superficiem verò coni similis circumscripti, vt latus quadrati ad diametrum.

Archimedis propositio 36.

Facta hypothesi, quod hemisphærium sit L A D: hemisphærio, & inscripto cono, communis altitudo sit G A: baseos radius G D: baseos circumferentiæ quarta pars sit arcus D C; circumscripti similis coni altitudo sit G H: eius baseos radius sit G E: circumferentiæ verò baseos quarta pars, sit arcus E K. Denique pro conditione Archimedea, quæ requirit, vt inscriptus conus sit similis circumscripto, substituimus conditionem, quod G E ≍ A D & L D ≍ E H: quam ex priori sequi ostendimus in nota proposita in fine demonstrationum.

Fig. 44.

Asseritur primò, arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus D C *in* D A ductu 3 ≍ A D *ad* G D.

Asseritur secundò, arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus E K *in* E H ductu 3 ≍ G D *ad* A D.

Conditio pro secunda assertione, G E ≍ A D, & etiam L D ≍ E H.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc.AD *ad* 4 arc.DC	*n*3	arc.AD *ad* arc.AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc.DC *ad* DA		4 arc.DC *ad* 4 arc.DC		1 *ad* 1	
3	4*p*8	GA *ad* arc.AD	*n*3	GD *ad* DA	*n*4	2GD *ad* DA	*ch*
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		1 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1
LD *ad* DA	3*p*8	DA *ad* GD
1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A D *ad* G D: ergo *per* 4*p*2, patet arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus D C *in* D A ductu 3 ≍ A D *ad* G D. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc.AD *ad* 4 arc.EK	*n*3	arc.AD *ad* arc.AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc.DC *ad* EH		4 arc.DC *ad* 4 arc. EK	3*p*5	GD *ad* GE	*c* 1
3	4*p*	AG *ad* arc.AD	*n*3	AG *ad* EH		GD *ad* EH	*n*4
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
GD *ad* DA		GD *ad* DA		GD *ad* DA
2GD *ad* EH	*ch*	LD *ad* EH	*c* 1	1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est G D *ad* D A: ergo *per* 4*p*2, arcus A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus E K *in* E H ductu 3 ≍ G D *ad* A D. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

No-

Nota In caſu theorematis G E = A D: & præterea L D = E H. Etenim poſita recta G M, ità vt angulus G M E rectus ſit: erit recta G M breuiſſima ducibilis ex puncto G ad rectam H E: ergo punctum M, reliquis lineæ H E punctis minus diſtat à puncto G: ſed etiam manifeſtum eſt punctum, in quo H E tangit arcum A D, reliquis punctis lineæ H E minus diſtare à puncto G: ergo punctum M eſt illud, in quo recta H E tangit arcum A D: igitur rectæ G M & G D ſunt radij eiuſdem circuli: ergo G M = G D. Quoniam verò anguli G M E, G M H, A G D ſinguli ſunt recti, & etiam anguli M E G, M H G, A D G, ſinguli ſunt ſemirecti, quia angulus F H E rectus eſt; etiam *per 3p4*, triangula M G E, M H G, & G D A ſunt ſimilia: ergo G D *ad* G M = A G *ad* E M ll A D *ad* G E: & præterea G D *ad* G M = G A *ad* H M: ſed G D = G M, vt prius oſtenſum eſt: ergo A G, hoc eſt G D = E M ll H M: & præterea A D = G E; quare etiam 2 G D, hoc eſt L D = 2 M E, hoc eſt H E. Conſtat igitur in caſu theorematis G E = A D, & præterea L D = E H. Quod erat demonſtrandum.

Theorema XV.

Superficies ſphæricæ portionis, conum æquilaterum capientis: dupla eſt curuæ ſuperficiei eiuſdem coni. *Archimedis propoſitio 38.*

Facta hypotheſi, quod ſphæræ, cuius centrum B, inſcriptus ſit conus æquilaterus D A E, cuius axis A L, ſit pars ſphærę axeos A C; circumferentię baſeos coni pars quarta, ſit arcus E F; circumferentiæ circuli radio B G deſcripti quarta pars ſit arcus G H. Sitque ducta B M perpendicularis *ad* A E. Fig. 43.

Aſſeritur arcum A G E *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 = 2 *ad* 1.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	arc. AGE *ad* 4 arc. FE	*n3*	arc. AGE *ad* arc. AGE		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arcus GH *ad* EA		4 arcus GH *ad* 4 arcus FE	*3p5*	BG *ad* LE
3	*4p8*	AL *ad* arc. AGE	*n3*	AL *ad* EA		AL *ad* EA
4	*4p4*	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
f	AB *ad* AM	*3p4*	AE *ad* AL	*n3*	AE *ad* AE	1 *ad* 1
	AL *ad* EA		AL *ad* EA		AL *ad* AL	1 *ad* 1
	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	2 *ad* 1

Igitur *per 2p7*, ratio compoſita eſt 2 *ad* 1: ergo *per 4p2*, conſtat arcum A G E *in* 4 arc. G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 = 2 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

f, Nota A M = L E, vt ſatis patet, tum ex hypotheſi, tum ex ſcholio ſequenti.

Scho-

Scholium.

Quoniam in sequentibus frequenter agendum est de cono æquilatero, ne sæpius idem cogar repetere, noto aliquas eius proprietates, quæ pro sequentibus theorematum demonstrationibus vtiles sunt.

Facta hypothesi, quod I A D sit conus æquilaterus, hoc est, quod habeat latera I A & A D, quæ singula inter se, & baseos diametro I D sint æqualia: quodque eius axis sit A G.

Dico primo, GDq *ad* DAq $=$ 1 *ad* 4.

Fig. 46. Dico secundò GDq *ad* GAq $=$ 1 *ad* 3.

Demonstratio primę partis. Per hypothesim I D $=$ D A, quia conus est æquilaterus: & præterea I G $=$ G D, quia A G est coni axis: quoniam igitur G D *ad* D I $=$ 1 *ad* 2, patet G D *ad* DA $=$ 1 *ad* 2; igitur GD2 *ad* DA2 $=$ 1q *ad* 2q ll 1 *ad* 4. Vt erat demonstrandum pro prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Quoniam per hypothesim A G, est coni axis, patet angulum A G D rectum esse: ergo *per* 398, AGq $+$ GDq $=$ ADq: ergo AGq $+$ GDq *ad* ADq $=$ 1 *ad* 1: sed per primam partem G Dq *ad* ADq $=$ 1 *ad* 4; igitur AGq $+$ 1 *ad* 4 $=$ 1 *ad* 1: ergo AGq $+$ 1 $=$ 4: ergo AGq $=$ 4 $-$ 1 ll 3. Vt erat demonstrandum pro secunda parte.

Theorema XVI.

Sphærę superficies, ad totam coni æquilateri inscripti superficiem, eam proportionem habet, quam 16 *ad* 9. *Archimedis propositio* 39.

Facta hypothesi, quod sphæræ, cuius centrum B, inscriptus sit conus æquilaterus D A E, cuius axis A L sit pars sphæræ axeos A C: circumferentiæ baseos coni quarta pars, sit arcus E F: & circumferentiæ circuli, radio BG descripti, quarta pars sit G H: sitque ducta recta B M, vt angulus A M B rectus sit.

Fig. 43. Asseritur quod 2 arcus A G *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 *et* $+$ L E *in* 4 arcus E F ductu 4 $=$ 16 *ad* 9: hoc est, 2 arcus A G *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A $+$ E L ductu 3 $=$ 16 *ad* 9.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	ch	2 arc. AG *ad* 4 arc. FE	n3	2 arc. AG *ad* 2 arc. AG		1 *ad* 1	
2	ch	4 arc. GH *ad* EA + EL		4 arc. GH *ad* 4 arc. FE	3p5	BG *ad* LE	ch
3	4p8	2AB *ad* 2 arc. AG	n3	2AB *ad* EA + EL	ch	2AB *ad* 3EL	
4	4p4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
AB *ad* LE	b	AB *ad* AM	d	AE *ad* AL
2AB *ad* 3LE		2AB *ad* 3AM	3p4	2AE *ad* 3AL
2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per 2p7*, ratio composita est 4AE2 *ad* 3AL2 ‖ 16 *ad* 9, vt constat ex Scholio, quod præcedit: ergo *per 4p2*, patet quod 2 arcus AG *in* 4 arcus GH ductu 5 *ad* 4 arcus FE *in* EA + EL ductu 3 = 16 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

b. Quod LE = AM, constat ex scholio præcedenti, quare AB *ad* LE = AB *ad* AM.

d. Quod AB *ad* AM = AE *ad* AL, constat, quia *per 3p4*, triangula AMB & ALE sunt similia, quandoquidem angulus AMB = ALE, singuli enim recti sunt, & præterea angulus LAE est communis.

Theorema XVII.

Sphæræ superficies, ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 9. *Archimedis propositio* 40.

Facta hypothesi, quod sphæræ, habenti centrum B, circumscriptus conus æquilaterus sit IAD: baseos eius radius sit GD: axis eius GA secet sphærę superficiem in C: circumferentiæ baseos coni quarta pars, sit arcus DM; coni latus AD, tangat sphęram in F, præterea arcus CN, sit quarta pars circumferentiæ circuli radio BC descripti: & NR sit quarta pars circumferentiæ circuli, radio BN descripti, atque perpendicularis ad axem. Fig. 46.

Asseritur 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4 arcus DM *in* DA + DG ductu 3 = 4 *ad* 9.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	ch	2 arc. CN *ad* 4 arc. DM	n3	2 arc. CN *ad* 2 arc. CN		1 *ad* 1	ch
2	ch	4 arc. NR *ad* DA + DG		4 arc. NR *ad* 4 arc. DM	3p5	BN *ad* GD	ch
3	4p8	2CB *ad* 2 arc. CN	n3	2CB *ad* DA + DG		2CB *ad* 3FA	
4	4p4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1
BF *ad* FA	3p4	GD *ad* GA
2BF *ad* 3FA		2GD *ad* 3GA
2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per 2p7*, ratio composita est 4GD2 *ad* 3GA2, hoc est 4GD2 *ad* 9GD2, vt satis constat ex scholio, quod præcedit theor. 16: igitur ratio composita est 4GD *ad* 9GD ‖ 4 *ad* 9: ergo *per 4p2*, patet 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4 arc. DM *in* DA + DG ductu 3 = 4 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XVIII.

Æquilateri coni, sphæræ circumscripti, tota superficies, quadrupla est superficiei totius coni inscripti eidem sphæræ. *Archimedis propositio* 41.

Fig. 46. Facta hypothesi, quod communem axem habeant, conus æquilaterus I A D sphæræ circumscriptus, & æquilaterus K C H, eidem sphæræ inscriptus: quodque baseos coni I A D, radius sit G D: quarta pars circumferentiæ, sit arcus M D: baseos verò coni K C H, radius sit L H: eius circumferentiæ quarta pars, sit arcus P H: sitque ducta B F, vt angulus A F B rectus sit, atque B F secet C H *in* Q.

Asseritur 4 arcus M D *in* D G † D A ductu 3 *ad* 4 arcus PH *in* H L † H C ductu 3 = 4 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda Logisticæ regula.

1	*c h*	4 arc. MD *ad* 4 arc. PH	3*p*5	DG *ad* HL	*b*	AF *ad* CQ	*b*	FB *ad* QB
2	*c h*	DG † DA *ad* HL † HC	*c h*	3DG *ad* 3HL	*b*	AF *ad* CQ	*b*	FB *ad* QB
3	4*p*4	1 *ad* 2	*n*3	1 *ad* 1		1 *ad* 1	·	1 *ad* 1
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est FB2 *ad* QB2 ll 2q *ad* 1q, vt patet ex scholio, quod præcedit Theor. 16. ergo *per* 4*p*2, etiam 4 arcus M D *in* D G † D A ductu 3 *ad* 4 arcus P H *in* H L † H C ductu 3 = 2q *ad* 1q ll 4 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

b, D G *ad* H L = A F *ad* C Q ll F B *ad* Q B: quandoquidem triangula C B Q, C H L, A B F, A D G, sint similia inter se, quod constat *ex* 3*p*4, quia in singulis vnus angulus rectus est, vt patet ex hypothesi: & præterea in singulis inuenitur vnus ex duobus angulis G C H, vel G A D, qui inter se æquales sunt, quia ex hypothesi coni sunt similes inter se.

Theorema XIX.

Sphæra, ad inscriptum sibi conum æquilaterum, eam proportionem habet, quam 32 *ad* 9. *Archimedis propositio* 19.

Fig. 46. Facta hypothesi, quod sphæræ, cuius centrum B, inscriptus conus æquilaterus sit K C H, habens axem C L: maximus sphæræ circulus, perpendicularis ad coni axem, habeat radium N B: atque hoc radio descripti circuli circumferentia adæquet 4 arcus N R; baseos coni radius sit L H: baseos quarta pars sit sector H L P.

Asseritur, 2CBN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4HLP *in* L C ductu 3 = 32 *ad* 9.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c h	2CBN	ad	4HLP	d	2BN2	ad	4HL2	2BC2	ad	4CQ2
2	c h	4 arc.NR	ad	LC	n3	4 arc.NR	ad	3 arc.NR	4	ad	3
3	4p8	2CB	ad	3 arc.NR		2CB	ad	LC	4LG	ad	3LG
4	4p4	3	ad	1		3	ad	1	3	ad	1

3p4	2CH2	ad	4CL2	f	8LH2	ad	12LH2	2	ad	3
	4	ad	3		4	ad	3	4	ad	3
	4	ad	3		4	ad	3	4	ad	3
	3	ad	1		3	ad	1	3	ad	1

Igitur *per* 2p7 patet, quod ratio composita sit 96 *ad* 27 ‖ 32 *ad* 9 : ergo *per* 4p2, constat 2 CBN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4HLP *in* LC ductu 3 = 32 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

d, Constat ex nota scholij in fine partis secundæ huius capitis.

f, Constat ex scholio antè theor. 16.

Theorema XX.

Conus equilaterus, sphæræ circumscriptus, coni æquilateri eidem sphæræ inscripti, octuplus est. *Archimedis propositio* 43.

Facta hypothesi, quod sphęræ centrum sit B : sphæræ circumscriptus conus I A D, habeat axem A G: eidem sphæræ inscriptus conus K C H, habeat axem C L, qui sit pars axeos A G : quarta pars baseos coni I A D, sit sector D G M : atque quarta pars baseos coni K C H sit sector H L P. Fig. 46.

Asseritur 4GDM *in* G A ductu 3 *ad* 4 HLP *in* LC ductu 3 = 8 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c h	4DGM	ad	4HLP	g	DG2	ad	HL2	3p4	AF2	ad	CQ2	3p4	FB2	ad	QB2
2	c h	GA	ad	LC	3p4	AF	ad	CQ		AF	ad	CQ	3p4	FB	ad	QB
3	4p4	1	ad	3	n3	1	ad	1		1	ad	1		1	ad	1
4	4p4	3	ad	1		3	ad	3		1	ad	1		1	ad	1

4	ad	1
2	ad	1
1	ad	1
1	ad	1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 8 *ad* 1 : ergo *per* 4p2, patet 4DGM *in* GA ductu 3 *ad* 4HLP *in* LC ductu 3 = 8 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

g, constat ex scholio in fine partis secundę huius capitis.

Theorema V.

Cuiuscunquæ sphæricę portionis superficies L A D, æqualis est circulo, cuius radius est recta A D, à puncto A vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli, qui est portionis basis. *Archimedis propositio 25.*

Fig. 39. Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B, eius axis sit A Q: circuli radio B A descripti, adeòque maximi sphæræ circuli circumferentia = 4 arcubus K R: radio A D descripti circuli circumferentia sit F; portionis L A D axis sit A G; denique ductæ sint rectæ A D, Q D, G D,

Asseritur arcum A D *in* 4 arcus K R ductu 5 = A D *in* F ductu 4.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*c b*	arc. AD *ad* AD	*n* 3	arc. AD *ad* arc. AD		1 *ad* 1	
2	*c b*	4 arc. KR *ad* F	3*p*5	BA *ad* AD	*n* 4	2BA *ad* AD	*c b*
3	4*p*8	AG *ad* arc. AD		AG *ad* AD	3*p*8	AD *ad* AQ	
4	4*p*6	2 *ad* 1		2 *ad* 1		1 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
AQ *ad* AD	*n* 3	AQ *ad* AQ		1 *ad* 1
AD *ad* AQ		AD *ad* AD		1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 1 *ad* 1; ergo *per* 4*p*2, patet arcum AD *in* 4 arcus A K ductu 5 = A D *in* F ductu 4. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Cylindri recti sphærę circumscripti curua superficies, æqualis est superficiei sphęræ. Et si cylindrus ac sphęra secentur planis ad axem rectis: erunt singula superficiei cylindricę segmenta, ęqualia singulis segmentis superficiei sphęricę. *Archimedis propositio 26.*

Fig. 40. Facta hypothesi, quod sphæræ, & cylindro sphæræ circumscripto, communis axis sit A Q: cētrum sphæræ sit B; plana ad axem AQ perpendicularia secantia sphæram, & cylindrum, intercipiant axeos partem C D, & arcum H G, laterisque cylindri partem F E: prætereà circumferentiæ circuli maximi ad axem A Q perpendicularis, quarta pars sit arcus N R: circumferentiæ baseos cylindri quarta pars sit arcus MP.

Asseritur primò, 4 arcus MP *in* M L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1.

Asse-

Aſſeritur ſecundò, 4 arcus M P *in* F E ductu 1 ad arcum G H *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1.

Demonſtratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*c b*	4 arc.MP *ad* 2 arc.AN	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	1 *ad* 1
2	*c b*	ML *ad* 4 arc.NR		ML *ad* 2AB	1 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*8	2 arc.AN *ad* 2AB	*n*3	2 arc.AN *ad* 2 arc.AN	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, conſtat 4 arcus M P *in* M L ductu 1 *ad* 2 arcus A N *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum in prima parte.

Demonſtratio ſecundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*c b*	4 arc.MP *ad* arc.GH	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	1 *ad* 1
2	*c b*	FE *ad* 4 arc.NR		FE *ad* CD	1 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
4	4*p*8	arc.GH *ad* CD	*n*3	arc.GH *ad* arc.GH	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita erit 1 *ad* 1: ergo, *per* 4*p*2, patet 4 arcus M P *in* F E ductu 1 ad arcum G H *in* 4 arcus N R ductu 5 = 1 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

Theorema VII.

Segmenta ſuperficiei ſphęricę parallelis circulis diuiſæ, eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri ad parallelos circulos rectę. *Archimedis propoſitio 27.*

Facta hypotheſi, quod arcus G H, ductu quinto, producat primum ſegmentum: quodque arcus H N, ductu quinto, producat ſecundum ſegmentum axeos, ſiue diametri ad parallelos circulos rectæ: pars C D arcui G H, & pars D B arcui H N reſpondeat; ſitque N R quarta pars circumferentiæ circuli maximi, in quem ductu 5 ducuntur arcus G H & H N. Fig. 40.

Aſſeritur, quod arcus G H *in* 4 arc. N R ductu 5 ad arcum H N *in* 4 arc. N R ductu 5 = C D *ad* D B.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*c b*	arc.GH *ad* arc.HN	*n*3	arc.GH *ad* arc.GH	1 *ad* 1
2	*c b*	4 arc.NR *ad* 4 arc.NR		1 *ad* 1	1 *ad* 1
3	4*p*8	CD *ad* arc.GH		CD *ad* DB	CD *ad* DB
4	4*p*8	arc.HN *ad* DB	*n*3	arc.HN *ad* arc.HN	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt C D *ad* D B: ergo *per* 4*p*2, conſtat quod arcus G H *in* 4 arcus NR, ductu 5, ad arcum H N *in* 4 arcus NR, ductu 5 = C D *ad* DB. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema VIII.

Omnis ſphęra X, ęqualis eſt cono Z, cuius altitudo æqualis eſt radio ſphęrę: baſis verò ęqualis eſt ſuperficiei ſphęrę. *Archimedis propoſitio* 28.

Facta hypotheſi, quod tota ſuperficies ſphęræ ſit A, eiuſque radius ſit B: tota coni baſis ſit C, eius altitudo ſit D.

Aſſeritur ſphæram X, hoc eſt A *in* B ductu 3 *ad* conum Z, hoc eſt C *in* D ductu 3 = 1 *ad* 1.

Prima conditio, A = C.

Secunda conditio, B = D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	A *ad* C	*c* 1	1 *ad* 1
2	*ch*	B *ad* D	*c* 2	1 *ad* 1
3	4*p*4	1 *ad* 3		1 *ad* 3
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 3 *ad* 3 ll 1 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet A *in* B ductu 3 *ad* C *in* D ductu 3 = 1 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IX.

Hemiſphęrium X, coni Z, ęqualem ſecum altitudinem, & baſim habentis, duplum eſt. *Archimedis propoſitio* 30.

Facta hypotheſi, quod hemiſphęrij baſim conſtituant 4 A B C: quodque coni baſim conſtituant 4 E F G: præterea hemiſphęrij altitudo ſit A D, coni altitudo ſit E H: denique circumferentia baſeos hemiſphęrij adæquet 4 arcus C B.

Fig. 41. & 42.

Aſſeritur, D A C *in* 4 arcus C B ductu 5 *ad* 4 F E G *in* E H ductu 3 = 2 *ad* 1.

Prima conditio B A C = F E G ll D A C.

Secunda conditio A D = E H.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	DAC *ad* 4FEG	*c* 1	1 *ad* 4		1 *ad* 4
2	*ch*	4 arc.CB *ad* EH	*n*3	4 arc.CB *ad* 3 arc.DC		4 *ad* 3
3	4*p*8	2DA *ad* 3 arc.DC		2DA *ad* EH	*c* 2	2 *ad* 1
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1		3 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 24 *ad* 12 ll 2 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, patet D A C in 4 arcus C B, ductu 5, *ad* 4 F E G *in* E H, ductu 3 = 2 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema X.

Cylindrus rectus, sphęrę cui circumscribitur, & soliditate, & superficie tota sesquialter est. *Archimedis propositio* 32.

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: axis QA: axi parallelum cylindri latus sit ML, tangens sphæram in N: basis cylindri adæquet 4PQM: quarta pars circumferentię circuli, radio BN descripti, sit arcus NR. Fig. 40.

Asseritur primò, QALM *in* 4 arcus MP ductu 4 *ad* 2ABN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4.

Asseritur secundò AL + QM *in* 4 arcus MP ductu 4 & + 4 arcus MP *in* ML ductu 1 *ad* 2 arcus AN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	QALM *ad* 2ABN	*n*3	QALM *ad* ABNL	*ch*	2 *ad* 1
2	*ch*	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	*ch*	1 *ad* 1		1 *ad* 1
3	4*p*6	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*8	3ABN *ad* ABNL		3ABN *ad* 2ABN		3 *ad* 2

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 6 *ad* 4: ergo *per* 4*p*2, patet QALM *in* 4 arcus MP ductu 4 *ad* 2ABN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Antequam demonstrem secundam partem: pro æquatione magis composita, quæ asseritur in secunda parte, assumo æquationem simpliciorem, atque commodiorem, sed tamen (vt constat ex nota, quæ demonstrationem sequitur) priori æquationi æquiualentem, eámque demonstro.

Asseritur itaque secundò 4 arcus MP *in* 3NL ductu 1 *ad* 2 arcus AN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	4 arc.MP *ad* 2 arc.AN	*n*3	4 arc.MP *ad* 4 arc.NR	*ch*	1 *ad* 1
2	*ch*	3NL *ad* 4 arc.NR		3NL *ad* NL		3 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*8	arc.AN *ad* NL	*n*3	arc.AN *ad* 2 arc.AN		1 *ad* 2

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 *ad* 2 || 6 *ad* 4: ergo *per* 4*p*2, constat 4 arcus MP *in* 3NL ductu 1 *ad* 2 arcus AN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Nota AL = QM || NL, adeoque AL + QM = 2NL: quare AL + QM *in* 4 arcus MP ductu 4 = 2NL *in* 4 arcus MP ductu 4 || 4 arcubus MP *in* NL ductu 1, vt constat ex theor. *6*. partis 4. cap. 8. Quoniam igitur AL + QM *in* 4 arcus MP ductu 4 = 4 arcubus MP *in* NL ductu 1: patet AL + QM *in* 4 arcus MP ductu 4 *et* + 4 arcus MP *in* 2NL ductu 1 = 4 arcubus MP *in* NL ductu 1 *et* + 4 arcus MP *in* 2NL ductu 1 || 4 arcubus MP *in* 3NL ductu 1.

Theorema XI.

Superficies ſphęrę, dupla eſt curuæ ſuperficiei cylindri quadrati ſphęrę inſcripti. *Archimedis propoſitio* 33.

Fig. 45. Facta hypotheſi, quod ſphæræ centrum ſit B: axis cylindri quadrati, ſphæræ inſcripti ſit C N, qui productus ſuperficiei ſphæræ occurrat in A: arcus A D & D F ſinguli ſint quarta pars circumferentiæ circulorum maximorum ſphæræ, ad inuicem perpendicularium: baſeos cylindri, radius ſit C G: circumferentiæ eius quarta pars ſit arcus G H; cylindri latus G L, ſecet radium B D in puncto M.

Aſſeritur 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* G L ductu 1 ≒ 2 *ad* 1.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	2 arc.AD *ad* 4 arc.GH	*n*3	2 arc.AD *ad* 2 arc.AD		1 *ad* 1		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arc.DF *ad* GL		4 arc.DF *ad* 4 arc.GH	3*p*5	BD *ad* CG	*ch*	BL *ad* MB
3	4*p*8	2AB *ad* 2 arc.AD	*n*3	2AB *ad* GL	*c* 1	AB *ad* ML		BL *ad* MB
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt B Lq *ad* B Mq ll 2 *ad* 1, vt patet ex 3*p*8, quia ex hypotheſi conſtat, eiuſdem quadrati diametrum eſſe B L: & latus eſſe B M: ergo *per* 4*p*2, conſtat 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* GL ductu 1 ≒ 2 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

Nota quod vndecim præcedentia huius partis theoremata ſint Archimedea: quæ verò ſubſequuntur, illa ſunt, quæ Archimedeis adduntur à P. Andrea Taquet, in appendice ſelectorum Archimedis theorematum, concomitante eius elementa Geometriæ planæ, & ſolidæ: atque hic à nobis numerantur inter theoremata Archimedea; vt diximus initio huius capitis.

Theorema XII.

Sphæræ ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 3 *Archimedis propoſitio* 34.

Fig. 45. Facta hypotheſi, quod ſphæræ centrum ſit B: axis cylindri quadrati, ſphæræ inſcripti C N, qui productus occurrat in puncto A ſuperficiei ſphærę: arcus AD & DF ſinguli ſint quarta pars circumferentiæ maximorum ſphæræ circulorum, ad inuicem perpendicularium; baſeos cylindri, radius ſit C G: circumferentiæ eius quarta pars, ſit arcus G H: cylindri latus G L, ſecet radium B D, in puncto M.

Aſſeritur 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 2 C G *in* 4 arcus G H ductu

ductu 4 *et* ✝ 4 arcus G H *in* G L ductu 1 ≍ 4 *ad* 3: vel quod idem, ſed commodius eſt, & patet ex nota: aſſeritur 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* 3 G M ductu 1 ≍ 4 *ad* 3.

Demonſtratio aſſertionis ſimplicioris atque commodioris. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	2 arc. AD *ad* 4 arc. GH	*n*3	2 arc. AD *ad* 2 arc. AD		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arc. DF *ad* 3 GM		4 arc. DF *ad* 4 arc. GH	3*p*5	BD *ad* BM
3	4*p*8	2 AB *ad* 2 arc. AD	*n*3	2 AB *ad* 3 GM	*ch*	2 BD *ad* 3 BM
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 2 BD2 *ad* 3 BM2 ll 2 BL2 *ad* 3 BM2 ll 4 *ad* 3: vt patet ex 3*p*8, quia ex hypotheſi conſtat, eiuſdem quadrati latus eſſe B M: & diametrum eſſe B L: ergo *per* 4*p*2, manifeſtum eſt 2 arcus A D *in* 4 arcus D F ductu 5 *ad* 4 arcus G H *in* 3 GM ductu 1 ≍ 4 *ad* 3. Quod erat demonſtrandum.

Nota 2 CG *in* 4 arcus G H ductu 4 ≍ 4 arcubus G H *in* G M ductu 1: quia enim cylinder ſupponitur quadratus, C G ≍ G M ll M L; hinc 2 CG *in* 4 arcus G H ductu 4 *et* ✝ 4 arcus G H *in* G L ductu 1 ≍ 4 arcubus G H *in* G M *et* ✝ 4 arcubus G H *in* 2 GM ll 4 arcubus G H *in* 3 G M.

Theorema XIII.

Cuiuſcunque ſectionis ſphæricę ſuperficies, ad curuam ſuperficiem coni maximi inſcripti, eam proportionem habet, quam coni latus ad baſeos radium. *Archimedis propoſitio* 35.

Facta hypotheſi, quod ſphærica ſectio ſit L A D: baſeos eius radius ſit G D; coni maximi, adeòque recti, ſectioni inſcripti, latus ſit A D; radius totius ſphæræ ſit B K: circumferentiæ circuli, radio B K deſcripti, quarta pars ſit arcus K R; denique circumferentiæ circuli, radio G D deſcripti, quarta pars ſit arcus X. Fig. 39.

Aſſeritur, quod arcus A D *in* 4 arcus K R ductu 5 *ad* 4 arcus X *in* D A ductu 3 ≍ A D *ad* G D.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	*ch*	arc. AD *ad* 4 arc. X	*n*3	arc. AD *ad* arc. AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc. KR *ad* AD		4 arc. KR *ad* 4 arc. X	3*p*5	BK *ad* GD	*ch*
3	4*p*8	AG *ad* arc. AD		AG *ad* AD		AG *ad* AD	*f*
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
AB *ad* GD	*n*3	AB *ad* AQ	*ch*	1 *ad* 2
AD *ad* AQ		AD *ad* GD		AD *ad* GD
2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt 2 A D *ad* 2 G D: ergò *per* 4*p*2; conſtat arcum A D *in* 4 arcus K R ductu 5 *ad* 4 arcus X *in* A D ductu 3 ≍ 2 A D *ad* 2 G D ll A D *ad* G D. Quod erat demonſtrandum.

f, Angulus A D Q rectus eſt *per* 3*p*7: adeòque *per* 3*p*8, conſtat AG *ad* AD ≍ A D *ad* A Q.

Theorema XIV.

Hemisphærij superficies, ad inscripti coni maximi, siue recti curuam superficiem: eam proportionem habet, quam in quadrato diameter ad latus; ad superficiem verò coni similis circumscripti, vt latus quadrati ad diametrum.

Archimedis propositio 36.

Facta hypothesi, quod hemisphærium sit L A D: hemisphærio, & inscripto cono, communis altitudo sit G A: baseos radius G D: baseos circumferentiæ quarta pars sit arcus D C; circumscripti similis coni altitudo sit G H: eius baseos radius sit G E: circumferentiæ verò baseos quarta pars, sit arcus E K. Denique pro conditione Archimedea, quæ requirit, vt inscriptus conus sit similis circumscripto, substituimus conditionem, quod G E = A D & L D = E H: quam ex priori sequi ostendimus in nota proposita in fine demonstrationum. Fig. 44.

Asseritur primò, arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus D C *in* D A ductu 3 = A D *ad* G D.

Asseritur secundò, arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus E K *in* E H ductu 3 = G D *ad* A D.

Conditio pro secunda assertione, G E = A D, & etiam L D = E H.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc.AD *ad* 4 arc.DC	*n*3	arc.AD *ad* arc.AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc.DC *ad* DA		4 arc.DC *ad* 4 arc.DC		1 *ad* 1	
3	4*p*8	GA *ad* arc.AD	*n*3	GD *ad* DA	*n*4	2GD *ad* DA	*ch*
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		1 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1
LD *ad* DA	3*p*8	DA *ad* GD
1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est A D *ad* G D: ergo *per* 4*p*2, patet arcum A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus D C *in* D A ductu 3 = A D *ad* G D. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc.AD *ad* 4 arc.EK	*n*3	arc.AD *ad* arc.AD		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc.DC *ad* EH		4 arc.DC *ad* 4 arc. EK	3*p*5	GD *ad* GE	*c* 1
3	4*p*	AG *ad* arc.AD	*n*3	AG *ad* EH		GD *ad* EH	*n*4
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
GD *ad* DA		GD *ad* DA		GD *ad* DA
2GD *ad* EH	*ch*	LD *ad* EH	*c* 1	1 *ad* 1
1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est G D *ad* D A: ergo *per* 4*p*2, arcus A D *in* 4 arcus D C ductu 5 *ad* 4 arcus E K *in* E H ductu 3 = G D *ad* A D. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

No-

Nota In casu theorematis G E = A D: & præterea L D = E H. Etenim posita recta G M, ità vt angulus G M E rectus sit: erit recta GM breuissima ducibilis ex puncto G ad rectam H E: ergo punctum M, reliquis lineæ H E punctis minus distat à puncto G: sed etiam manifestum est punctum, in quo H E tangit arcum A D, reliquis punctis lineæ H E minus distare à puncto G: ergo punctum M est illud, in quo recta H E tangit arcum A D: igitur rectæ G M & G D sunt radij eiusdem circuli: ergo G M = G D. Quoniam verò anguli G M E, G M H, A G D singuli sunt recti, & etiam anguli M E G, M H G, A D G, singuli sunt semirecti, quia angulus F H E rectus est; etiam *per* 3*p*4, triangula M G E, M H G, & G D A sunt similia: ergo G D *ad* G M = A G *ad* E M ll A D *ad* G E: & præterea G D *ad* G M = G A *ad* H M: sed G D = G M, vt prius ostensum est: ergo A G, hoc est G D = E M ll H M: & præterea A D = G E; quare etiam 2 G D, hoc est L D = 2 M E, hoc est H E. Constat igitur in casu theorematis G E = A D, & præterea L D = E H. Quod erat demonstrandum.

Theorema XV.

Superficies sphæricæ portionis, conum æquilaterum capientis: dupla est curuæ superficiei eiusdem coni. *Archimedis propositio* 38.

Facta hypothesi, quod sphæræ, cuius centrum B, inscriptus sit conus æquilaterus D A E, cuius axis A L, sit pars sphære axeos A C; circumferentię baseos coni pars quarta, sit arcus E F; circumferentiæ circuli radio B G descripti quarta pars sit arcus G H. Sitque ducta B M perpendicularis *ad* A E. Fig. 43.

Asseritur arcum A G E *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 = 2 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	arc. AGE *ad* 4 arc. FE	*n*3	arc. AGE *ad* arc. AGE		1 *ad* 1
2	*ch*	4 arcus GH *ad* EA		4 arcus GH *ad* 4 arcus FE	3*p*5	BG *ad* LE
3	4*p*8	AL *ad* arc. AGE	*n*3	AL *ad* EA		AL *ad* EA
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1
f	AB *ad* AM	3*p*4	AE *ad* AL	*n*3	AE *ad* AE	1 *ad* 1
	AL *ad* EA		AL *ad* EA		AL *ad* AL	1 *ad* 1
	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 2 *ad* 1: ergo *per* 4*p*2, constat arcum A G E *in* 4 arc. G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

f. Nota A M = L E, vt satis patet, tum ex hypothesi, tum ex scholio sequenti.

Scho-

Scholium.

Quoniam in sequentibus frequenter agendum est de cono æquilatero, ne sæpius idem cogar repetere, noto aliquas eius proprietates, quæ pro sequentibus theorematum demonstrationibus vtiles sunt.

Facta hypothesi, quod I A D sit conus æquilaterus, hoc est, quod habeat latera I A & A D, quæ singula inter se, & baseos diametro I D sint æqualia: quodque eius axis sit A G.

Dico primo, GDq *ad* DAq $=$ 1 *ad* 4.

Fig. 46. Dico secundò GDq *ad* GAq $=$ 1 *ad* 3.

Demonstratio primę partis. Per hypothesim I D $=$ D A, quia conus est æquilaterus: & præterea I G $=$ G D, quia A G est coni axis: quoniam igitur G D *ad* D I $=$ 1 *ad* 2, patet G D *ad* DA $=$ 1 *ad* 2; igitur GD2 *ad* DA2 $=$ 1q *ad* 2q ll 1 *ad* 4. Vt erat demonstrandum pro prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Quoniam per hypothesim A G, est coni axis, patet angulum A G D rectum esse: ergo *per* 3,8, AGq $+$ GDq $=$ ADq: ergo AGq $+$ GDq *ad* ADq $=$ 1 *ad* 1: sed per primam partem G Dq *ad* ADq $=$ 1 *ad* 4; igitur AGq $+$ 1 *ad* 4 $=$ 1 *ad* 1: ergo AGq $+$ 1 $=$ 4: ergo AGq $=$ 4 $-$ 1 ll 3. Vt erat demonstrandum pro secunda parte.

Theorema XVI.

Sphærę superficies, ad totam coni æquilateri inscripti superficiem, eam proportionem habet, quam 16 *ad* 9. *Archimedis propositio* 39.

Facta hypothesi, quod sphæræ, cuius centrum B, inscriptus sit conus æquilaterus D A E, cuius axis A L sit pars sphæræ axeos A C: circumferentiæ baseos coni quarta pars, sit arcus E F: & circumferentiæ circuli, radio BG descripti, quarta pars sit G H: sitque ducta recta B M, vt angulus A M B rectus sit.

Fig. 43.

Asseritur quod 2 arcus A G *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A ductu 3 *et* $+$ L E *in* 4 arcus E F ductu 4 $=$ 16 *ad* 9: hoc est, 2 arcus A G *in* 4 arcus G H ductu 5 *ad* 4 arcus F E *in* E A $+$ E L ductu 3 $=$ 16 *ad* 9.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticę.

1	*ch*	2 arc. AG *ad* 4 arc.FE	*n*3	2 arc.AG *ad* 2 arc.AG		1 *ad* 1	
2	*ch*	4 arc. GH *ad* EA † EL		4 arc.GH *ad* 4 arc. FE	3*p*5	BG *ad* LE	*ch*
3	4*p*8	2AB *ad* 2 arc.AG	*n*3	2AB *ad* EA † EL	*ch*	2AB *ad* 3EL	
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
AB *ad* LE	*b*	AB *ad* AM	*d*	AE *ad* AL
2AB *ad* 3LE		2AB *ad* 3AM	3*p*4	2AE *ad* 3AL
2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 4AE2 *ad* 3AL2 ll 16 *ad* 9, vt constat ex Scholio, quod præcedit: ergo *per* 4*p*2, patet quod 2 arcus AG *in* 4 arcus GH ductu 5 *ad* 4 arcus FE *in* EA † EL ductu 3 = 16 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

b. Quod LE = AM, constat ex scholio præcedenti, quare AB *ad* LE = AB *ad* AM.

d Quod AB *ad* AM = AE *ad* AL, constat, quia *per* 3*p*4, triangula AMB & ALE sunt similia, quandoquidem angulus AMB = ALE, singuli enim recti sunt, & præterea angulus LAE est communis.

Theorema XVII.

Sphæræ superficies, ad æquilateri coni sibi circumscripti totam superficiem, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 9. *Archimedis propositio* 40.

Facta hypothesi, quod sphæræ, habenti centrum B, circumscriptus conus æquilaterus sit 1 AD: baseos eius radius sit GD: axis eius GA secet sphæræ superficiem in C: circumferentiæ baseos coni quarta pars, sit arcus DM; coni latus AD, tangat spheram in F, præterea arcus CN, sit quarta pars circumferentiæ circuli radio BC descripti: & NR sit quarta pars circumferentiæ circuli, radio BN descripti, atque perpendicularis ad axem. Fig. 46.

Asseritur 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4 arcus DM *in* DA † DG ductu 3 = 4 *ad* 9.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	2 arc.CN *ad* 4 arc.DM	*n*3	2 arc.CN *ad* 2 arc.CN		1 *ad* 1	*ch*
2	*ch*	4 arc.NR *ad* DA † DG		4 arc. NR *ad* 4 arc.DM	3*p*5	BN *ad* GD	*ch*
3	4*p*8	2CB *ad* 2 arc. CN	*n*3	2CB *ad* DA † DG		2CB *ad* 3FA	
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1	

1 *ad* 1		1 *ad* 1
BF *ad* FA	3*p*4	GD *ad* GA
2BF *ad* 3FA		2GD *ad* 3GA
2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 4GD2 *ad* 3GA2, hoc est 4GD2 *ad* 9GD2, vt satis constat ex scholio, quod præcedit theor. 16: igitur ratio composita est 4GD *ad* 9GD ll 4 *ad* 9: ergo *per* 4*p*2, patet 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4 arc.DM *in* DA † DG ductu 3 = 4 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema XVIII.

Æquilateri coni, ſphæræ circumſcripti, tota ſuperficies, quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæræ. *Archimedis propoſitio* 41.

Fig. 46. Facta hypotheſi, quod communem axem habeant, conus æquilaterus I A D ſphæræ circumſcriptus, & æquilaterus K C H, eidem ſphæræ inſcriptus: quodque baſeos coni I A D, radius ſit G D: quarta pars circumferentiæ, ſit arcus M D: baſeos verò coni K C H, radius ſit L H: eius circumferentiæ quarta pars, ſit arcus P H: ſitque ducta B F, vt angulus A F B rectus ſit, atque B F ſecet C H *in* Q.

Aſſeritur 4 arcus M D *in* D G † D A ductu 3 *ad* 4 arcus PH *in* H L † H C ductu 3 = 4 *ad* 1.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda Logiſticæ regula.

1	*c h*	4 arc. MD *ad* 4 arc. PH	3*p*5	DG *ad* HL	*b*	AF *ad* CQ	*b*	FB *ad* QB
2	*c h*	DG † DA *ad* HL † HC	*c h*	3DG *ad* 3HL	*b*	AF *ad* CQ	*b*	FB *ad* QB
3	4*p*4	1 *ad* 2	*n*3	1 *ad* 1		1 *ad* 1	.	1 *ad* 1
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 2		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio compoſita eſt FB2 *ad* QB2 ll 2q *ad* 1q, vt patet ex ſcholio, quod præcedit Theor. 16. ergo *per* 4*p*2, etiam 4 arcus M D *in* D G † D A ductu 3 *ad* 4 arcus P H *in* H L † H C ductu 3 = 2q *ad* 1q ll 4 *ad* 1. Quod erat demonſtrandum.

b, D G *ad* H L = AF *ad* C Q ll F B *ad* Q B: quandoquidem triangula C B Q, C H L, A B F, A D G, ſint ſimilia inter ſe, quod conſtat *ex* 3*p*4, quia in ſingulis vnus angulus rectus eſt, vt patet ex hypotheſi: & præterea in ſingulis inuenitur vnus ex duobus angulis G C H, vel G A D, qui inter ſe æquales ſunt, quia ex hypotheſi coni ſunt ſimiles inter ſe.

Theorema XIX.

Sphæra, ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum, eam proportionem habet, quam 32 *ad* 9. *Archimedis propoſitio* 19.

Fig. 46. Facta hypotheſi, quod ſphæræ, cuius centrum B, inſcriptus conus æquilaterus ſit K C H, habens axem C L: maximus ſphæræ circulus, perpendicularis ad coni axem, habeat radium N B: atque hoc radio deſcripti circuli circumferentia adæquet 4 arcus N R; baſeos coni radius ſit L H: baſeos quarta pars ſit ſector H L P.

Aſſeritur, 2CBN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4HLP *in* L C ductu 3 = 32 *ad* 9.

Demonſtratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in ſecunda regula Logiſticæ.

1	c h	2CBN *ad* 4HLP	d	2BN2 *ad* 4HL2	2BC2 *ad* 4CQ2
2	c h	4 arc.NR *ad* LC	n3	4 arc.NR *ad* 3 arc.NR	4 *ad* 3
3	4p8	2CB *ad* 3 arc.NR		2CB *ad* LC	4LG *ad* 3LG
4	4p4	3 *ad* 1		3 *ad* 1	3 *ad* 1

3p4	2CH2 *ad* 4CL2	f	8LH2 *ad* 12LH2	2 *ad* 3
	4 *ad* 3		4 *ad* 3	4 *ad* 3
	4 *ad* 3		4 *ad* 3	4 *ad* 3
	3 *ad* 1		3 *ad* 1	3 *ad* 1

Igitur *per* 2p7 patet, quod ratio composita sit 96 *ad* 27 ll 32 *ad* 9 : ergo *per* 4p2, constat 2 CBN *in* 4 arcus NR ductu 5 *ad* 4HLP *in* LC ductu 3 = 32 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

d, Constat ex nota scholij in fine partis secundæ huius capitis.

f, Constat ex scholio antè theor. 16.

Theorema XX.

Conus equilaterus, sphæræ circumscriptus, coni æquilateri eidem sphæræ inscripti, octuplus est. *Archimedis propositio* 43.

Facta hypothesi, quod sphęræ centrum sit B : sphæræ circumscriptus conus I A D, habeat axem A G: eidem sphæræ inscriptus conus K C H, habeat axem C L, qui sit pars axeos A G : quarta pars baseos coni I A D, sit sector D G M: atque quarta pars baseos coni K C H sit sector H L P. Fig. 46.

Asseritur 4GDM *in* G A ductu 3 *ad* 4HLP *in* LC ductu 3 = 8 *ad* 1.

Demonstratio. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	c h	4DGM *ad* 4HLP	g	DG2 *ad* HL2	3p4	AF2 *ad* CQ2	3p4	FB2 *ad* QB2
2	c h	GA *ad* LC	3p4	AF *ad* CQ		AF *ad* CQ	3p4	FB *ad* QB
3	4p4	1 *ad* 3	n3	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p4	3 *ad* 1		3 *ad* 3		1 *ad* 1		1 *ad* 1

4 *ad* 1
2 *ad* 1
1 *ad* 1
1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 8 *ad* 1 : ergo *per* 4p2, patet 4DGM *in* GA ductu 3 *ad* 4HLP *in* LC ductu 3 = 8 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

g, constat ex scholio in fine partis secundę huius capitis.

Theorema XXI.

Sphæra, ad circumscriptum sibi conum æquilaterum, & soliditate, & tota superficie, eam proportionem habet, quam 4 *ad* 9.
***Archimedis propositio* 44.**

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: circumscriptus illi conus æquilaterus I A D habeat axem A G: baseos eius radius, sit G D: quarta pars circumferentię baseos, sit arcus M D: baseos verò quarta pars, sit sector D G M: præterea coni axis G A, secet superficiem sphæræ in C: sitque sphæræ radius B N perpendicularis ad sphæræ axem G C: & circumferentiæ circuli, radio B N descripti, atque ad axem perpendicularis, quarta pars sit arcus N R. Fig. 46.

Asseritur primò, 2 sectores C B N *in* 4 arcus N R ductu 5 *ad* 4 sectore D G M *in* G A ductu 3 $\sqsubseteq$ 4 *ad* 9.

Asseritur secundò, 2 arcus C N *in* 4 arcus N R ductu 5 *ad* 4 arcus D M *in* D A † D G ductu 3 $\sqsubseteq$ 4 *ad* 9.

Demonstratio primę partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	2CBN *ad* 4DGM	*d*	2CB2 *ad* 4DG2	*c h*	2BF2 *ad* 4AF2	*f*
2	*c h*	4 arc.NR *ad* GA		4 arc.NR *ad* 3 arc CN	3*p*5	4BN *ad* 3BN	
3	4*p*8	2CB *ad* 3 arc.CN	*n*3	2CB *ad* GA		2CB *ad* 3CB	
4	4*p*4	3 *ad* 1		3 *ad* 1		3 *ad* 1	

2BF2 *ad* 12BF2		2 *ad* 12	1 *ad* 6
4 *ad* 3		4 *ad* 3	4 *ad* 3
2 *ad* 3	*n*3	2 *ad* 1	2 *ad* 1
3 *ad* 1		3 *ad* 3	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 8 *ad* 18 ll 4 *ad* 9: ergo *per* 4*p*2, constat 2 sectores CBN *in* 4 arcus N R ductu 5 *ad* 4 sectores D G M *in* G A ductu 3 $\sqsubseteq$ 4 *ad* 9. Quod erat demonstrandum pro prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	2 arc.CN *ad* 4 arc.DM	*n*3	2 arc.CN *ad* 2 arc.CN		1 *ad* 1
2	*c h*	4 arc.NR *ad* DA † DG		4 arc. NR *ad* 4 arc.DM	3*p*5	CB *ad* GD
3	4*p*8	2CB *ad* 2 arc.CN	*n*3	2CB *ad* DA † DG		2CB *ad* 3GD
4	4*p*4	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

c h	1 *ad* 1		1 *ad* 1
	BF *ad* AF	3*p*4	DG *ad* GA
	2BF *ad* 3AF	3*p*4	2DG *ad* 3GA
	2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 4DG2 *ad* 3GA2 ll 4 *ad* 9: etenim ex scholio antè theor. 16. Constat 3GA2 $\sqsubseteq$ 9DG2: ergo *per* 4*p*2, constat quod 2 arcus C N *in* 4 arcus N R ductu 5 *ad* 4 arcus M D *in* D A † D G ductu 3 $\sqsubseteq$ 4 *ad* 9. Quod erat demonstrandum.

d. Constat ex scholio in fine partis secundæ huius capitis.

f. Constat ex scholio, quod præcedit theor. 16.

Theo-

Theorema XXII.

Conus æquilaterus, sphæræ circumscriptus, & cylindrus rectus, sphęrę similiter circumscriptus, & ipsa sphęra, eamdem rationem continuant, tam quoad soliditatem, quam quoad superficiem totam. *Archimedis propositio* 45.

Facta hypothesi, quod sphæræ centrum sit B: circumscriptus illi conus æquilaterus I A D, habeat axem A G: atque circumferentiæ baseos eius quarta pars, sit arcus D M; eidem sphæræ circumscriptus cylinder, habeat axem communem cum cono, qui sphæræ superficiem secet in C: cylindri latus sit H L: circumferentiæ baseos eius quarta pars, sit arcus H P. Sphæræ radius ad cylindri, & coni axem perpendicularis, sit B N: hoc radio descripti circuli circumferentiæ quarta pars, sit arcus N R: Denique ducta sit B F perpendicularis ad A D. Fig. 47.

Asseritur primò 4 sectores D G M *in* GA ductu 3 *ad* 4 sectores H G P *in* G C ductu 1 ≕ 9 *ad* 6.

Asseritur secundò, 4 sectores P G H *in* G C ductu 1 *ad* 2 sectores C B N *in* 4 arcus N R ductu 5 ≕ 6 *ad* 4.

Asseritur tertiò, 4 arcus D M *in* D A † D G ductu 3 *ad* 4 arcus P H *in* H L ductu 1 *et* † 4 arcus P H *in* 2HG ductu 3 ≕ 9 *ad* 6.

Asseritur quartò, 4 arcus P H *in* H L ductu 1 *et* † 4 arcus P H *in* 2HG ductu 3 *ad* 2 arcus C N *in* 4 arcus N R ductu 5 ≕ 6 *ad* 4.

Demonstratio primæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*cb*	4MGD *ad* 4PGH	*f*	GD2 *ad* GH2	*cb*	AF2 *ad* BF2	GA2 *ad* DG2
2	*cb*	GA *ad* GC		GA *ad* GC		3 *ad* 2	3 *ad* 2
3	4p4	1 *ad* 3		1 *ad* 3		1 *ad* 3	1 *ad* 3
4	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

a	3GA2 *ad* GA2	3 *ad* 1
	3 *ad* 2	3 *ad* 2
	1 *ad* 3	1 *ad* 3
	[illegible] 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 9 *ad* 6; ergo *per* 4p2, constat 4MGD *in* GA ductu 3 *ad* 4PGH *in* GC ductu 1 ≕ 9 *ad* 6. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*cb*	4PGH *ad* 2CBN	*f*	4GH2 *ad* 2BN2	*cb*	4 *ad* 2
2	*cb*	CG *ad* 4 arc.NR	*n*3	GC *ad* 2CB		1 *ad* 1
3	4p1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4p8	3 arc.CN *ad* 2CB		3 arc.CN *ad* 4 arc.NR		3 *ad* 4

Igitur *per* 2p7, ratio composita est 12 *ad* 8 ll 6 *ad* 4: ergo *per* 4p2, constat 4PGH *in* GC ductu 1 *ad* 2CBN *in* 4 arcus NR ductu 5 ≕ 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Demonstratio tertię partis. Hęc assertio, tantum paulò magis contracta, dicit 4 arcus DM *in* DA † GD ductu 3 *ad* 4 arcus PH *in* GC † HG ductu 1 ≕ 9 *ad* 6. Consideranderando hanc assertionem magis contractam, sed planè æquiualentem tertiæ assertioni prius propositę, vt satis manifestum est. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ,

1	*ch*	4 arc. DM *ad* 4 arc. PH	3*p*5	DG *ad* HG		DG *ad* HG
2	*ch*	DA † GD *ad* GC † HG	*ch*	2DG † DG *ad* 2HG † HG		3DG *ad* 3HG
3	4*p*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

ch	AF *ad* BF	AG *ad* GD
	AF *ad* BF	AG *ad* GD
	1 *ad* 2	1 *ad* 3
	1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est AG2 *ad* 2GD2 ll 3 *ad* 2, vt constat ex scholio antè theor. 16: ergo *per* 4*p*2, patet 4 arcus DM *in* DA † GD ductu 3 *ad* 4 arcus PH *in* GC † HG ductu 1 = 3 *ad* 2 ll 9 *ad* 6. Vt erat demonstrandum pro tertia parte.

Demonstratio quartæ partis. Hęc assertio, tantum magis contracta, dicit 4 arcus PH *in* GC † HG ductu 1 *ad* 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4. Considerando hanc assertionem magis contractam, sed planè æquiualentem quartę assertioni prius propositæ: ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*ch*	4 arc. PH *ad* 2 arc. CN	*n*3	4 arc. PH *ad* 4 arc. NR		1 *ad* 1
2	*ch*	GC † HG *ad* 4 arc. NR		GC † HG *ad* CB		3 *ad* 1
3	4*p*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*p*8	arc. CN *ad* CB	*n*3	arc. CN *ad* 2 arc. CN		1 *ad* 2

Igitur *per* 2*p*7, ratio composita est 3 *ad* 2 ll 6 *ad* 4: ergo *per* 4*p*2, manifestum est 4 arcus PH *in* GC † HG ductu 1 *ad* 2 arcus CN *in* 4 arcus NR ductu 5 = 6 *ad* 4. Quod erat demonstrandum in quarta parte.

f, patet ex scholio in fine partis secundæ.

a, patet ex scholio antè theor. 16.

CAPVT XIII.

Exempla tertię regulæ Logisticę.

QVam nos appellamus tertiam Logisticę regulam, concedimus conuenire cum celeberrima antiquæ Matheseos Analysi, prout describitur à doctissimo Marino Ghetaldo: idque expressè monendum putauimus capite 10. vbi proponimus huius regulę pręcepta: quo loco tamen non negauimus Logisticas scriptiones compendiatas, non omni ex parte apud antiquos vsitatas, aliqua ex parte commodiorem reddere huius regulæ vsum. Vt melius faciliusque intelligi possit, an hæc, vel aliqua, vel alicuius momenti commoditas sit, propono in prima parte nonnulla exempla, quę apud Ghetaldum inueniuntur in libro quem inscribit de resolutione & compositione Mathematica: vt quibus placuerit, conferre possint nostra aliqua huius regulę exempla, cum iisdem exemplis prout inueniuntur apud citatum authorem.

In hoc capite, pro citationibus retinentur scriptiones declaratæ initio capitis præcedentis.

PARS I.

Exempla tertię regulę Logisticę ex Marino Ghetaldo.

Problema I.

Data quęuis recta linea A B secanda sit in puncto X, ità vt A X — C = X B, supposito quod data recta C, sit minor tota A B. *Ghetaldi prob.* 1. *lib.* 1.

Resolutio. Sit factum, atque rectæ AB pars AD = C; igitur AX — C = XB, sed AD = C: ergo AX — AD = XB: atqui etiam manifestum est AX — AD = DX; igitur DX = XB. Quoniam igitur cognita est tota AB, & etiam pars eius A D, etiam reliqua D B est nota: quare eius medietas nota est, hoc est BX determinans punctum X, quod erat inueniendum. Hinc habetur. Fig. 48.

Solutio. Fiat AD = C; deinde DB secetur in puncto X, vt DX = XB, tunc AX — C = XB, vt petebatur.

Compositio, siue demonstratio: ex præmissa resolutione AD = C; sed etiam AX — AD = DX: ergo AX — C = DX; sed ex solutione constat DX = XB: ergo etiam AX — C = XB. Quod erat demonstrandum.

Nota, hoc idem problema apud Ghetaldum est primum, & proponitur pag. 13. lib. 1. Præterea non differt à problemate 1. partis 1. cap. 11. lib. 1. Logisticæ, nisi quod vnum petat præstari circa datam rectam, quod alterum petit præstari circa datum numerum: idemque circa datam quamcunque quantitatem præstat problema 1. partis 2. cap. 11. lib. 1. Logisticæ.

Problema II.

Datæ rectæ lineę A B, addere alteram B X, ità vt tota A X ad partem B X = D *ad* E, supposito quod data ratio D *ad* E sit maioris inæqualitatis. *Ghetaldi prob.* 2. *lib.* 1.

Resolutio. Sit factum: igitur AX *ad* BX = D *ad* E; sed AB + BX = AX: ergo AB + BX *ad* BX = D *ad* E: ergo *per* 1*p*10, AB + BX *in* E = BX *in* D: ergo AB *in* E *et* + BX *in* E = BX *in* D: ergo AB *in* E = BX *in* D *et* + BX *in* — E ll BX *in* D — E: ergo *per* 1*p*10, D — E *ad* E = AB *ad* BX. In hac vltima æquatione tres priores termini per hypothesim cogniti sunt, adeòque quartus fit cognitus per regulam auream cap. 3. lib. 1. Fig. 49.

Solutio, per regulam auream cap. 3, inueniatur recta BX, ità vt D — E *ad* E = AB *ad* BX, hæc addita datæ rectæ AB, satisfaciet quæsito.

Compositio, siue demonstratio solutionis inuentæ per resolutionem. Ex solutione patet D — E *ad* E = AB *ad* BX: ergo *per* 1*p*10, etiam AB *in* E = BX *in* D — E ll BX *in* D *et* + BX *in* — E: ergo BX *in* D = AB *in* E *et* + BX *in* E ll AB + BX *in* E *in* E : ergo *per* 1*p*10, etiam AB + BX *ad* BX = D *ad* E; ſed AB + BX = AX ergo AX *ad* BX = D *ad* E. Quod erat demonſtrandum.

Problema III.

Datam rectam A B producere in X, ità vt AB − BX *ad* AX = D *ad* E: ſuppoſito quod data ratio D *ad* E ſit minoris inæqualitatis. *Ghetaldi prob.* 3. *lib.* 1.

Fig. 50. Reſolutio. Sit factum; igitur AB − BX *ad* AX = D *ad* E: ergo AB − BX *ad* AB + BX = D *ad* E: ergo *per* 1*p*10, AB − BX *in* E = AB + BX *in* D : ergo AB *in* E *et* − BX *in* E = AB *in* D *et* + BX *in* D : ergo AB *in* E *et* + AB *in* − D = BX *in* D *et* + BX *in* E : ergo AB *in* E − D = BX *in* D + E: ergo *per* 1*p*10, patet D + E *ad* AB = E − D *ad* BX.

Solutio problematis. Per regulam auream cap. 3, ad tres terminos, quorum primus D + E, ſecundus AB, tertius E − D, inueniendo quartum proportionalem, habetur BX, quæ erat inuenienda.

Compoſitio, ſiue propoſitæ ſolutionis demonſtratio. Ex allata ſolutione D + E *ad* AB = E − D *ad* BX : ergo *per* 1*p*10, AB *in* E − D = BX *in* D + E : ergo AB *in* E *et* + AB *in* − D = BX *in* D *et* + BX *in* E : ergo AB *in* E *et* − BX *in* E = BX *in* D *et* + AB *in* D : ergo E *in* AB − BX = AB + BX *in* D : ergo *per* 1*p*10, AB − BX *ad* AB + BX = D *ad* E. Quod erat demonſtrandum.

Problema IV.

Datam rectam AB diuidere in puncto X, ità vt AX2 = BX2 + Z2; ſuppoſito quod data recta Z ſit minor recta AB. *Ghetaldi prob.* 4. *lib.* 1.

Fig. 51. Reſolutio: Sit factum; igitur AX2 = BX2 + Z2 : ergo AX2 − BX2 = Z2 : ſed *per prima hyp. cap.* 9. *aſſert.* 6. conſtat AX2 − BX2 = AX + BX *in* AX − BX: ergo Z2 = AX + BX *in* AX − BX ll AB *in* AB − 2XB : ergo *per* 1*p*10, AB *ad* Z = Z *ad* AB − 2XB.

Solutio problematis. Per regulam auream cap. 3, ad tres terminos, quorum primus ſit AB, ſecundus Z, tertius Z, inuentus quartus proportionalis AD, abſcindatur ex recta AB & reſiduum DB, diuidatur in X, vt DX = XB; erit AB diuiſa in puncto X, vt petebatur.

Compoſitio, ſiue ſolutionis demonſtratio. Ex allata ſolutione conſtat, AB *ad* Z = Z *ad* AB − 2XB: ergo *per* 1*p*10, Z2 = AB *in* AB − 2XB ll AX + BX *in* AX − BX ll AX2 − BX2, vt conſtat *ex aſſert. 6. prima hypoth. cap. 9*: ergo BX2 + Z2 = AX2. Quod erat demonſtrandum.

Pro-

Problema V.

Datam rectam AB secare in puncto X, vt AX *in* XB *ad* AXq = D *ad* E: qualiscunque sit ratio D *ad* E. *Ghetaldi prob. 5. lib. 1.*

RESolutio. Sit factum; igitur AX *in* XB *ad* AX2 = D *ad* E: ergo *per* 1p10, AX *in* AX *in* D = E *in* AX *in* XB: ergo singula diuidendo per AX, patet AX *in* D = E *in* XB: hoc est AB − XB *in* D = E *in* XB: ergo AB *in* D = XB *in* E *et* + XB *in* D ll XB *in* D + E: ergo *per* 1p10, constat D + E *ad* D = AB *ad* XB. Fig. 52.

Solutio problematis. Per regulam auream cap. 3, ad tres terminos, quorum primus est D + E, secundus D, tertius AB, inuentus quartus proportionalis terminus, erit æqualis lineæ XB, parti lineæ AB, quæ erat inuenienda.

Compositio, siue solutionis demonstratio. Ex allata solutione constat D + E *ad* D = AB *ad* XB: ergo *per* 1p10, AB *in* D = XB *in* D + E ll XB *in* D *et* + XB *in* E: ergo AB *in* D *et* − XB *in* D = XB *in* E: hoc est AX *in* D = XB *in* E: igitur singula ducendo in AX, etiam AX *in* AX *in* D = AX *in* XB *in* E: ergo *per* 1p10, AX *in* XB *ad* AX2 = D *ad* E. Quod erat demonstrandum.

Problema VI.

Datam rectam AB secare in puncto X, ità vt partium AX & XB, minor sit XB: atque AB *in* XB = AX *in* AX − BX. *Ghetaldi prob. 6. lib. 1.*

RESolutio. Sit factum, hoc est AB *in* XB = AX *in* AX − XB: ergo AB *in* AB − AX = AX *in* AX − XB: ergo AB2 *et* + AB *in* − AX = AX2 *et* + AX *in* − XB ll AX2 *et* + AX *in* − AB + AX ll AX2 + AX2 *et* + AX *in* − AB ll 2AX2 *et* + AB *in* − AX: ergo vtrinque auferendo AB *in* − AX, etiam AB2 = 2AX2: igitur AB *ad* AX = G *ad* H, supposito quod eiusdem quadrati, diameter sit G, latus verò H; quod facilè patet ex theor. 8. partis 3. cap. 8. Fig. 53.

Solutio. Per regulam auream cap. 3, ad tres terminos, quorum primus est diameter quadrati, secũdus est eiusdem quadrati latus, tertius, est data recta AB, inueniendo quartum terminum proportionalem: habetur AX, pars rectæ AB, quæ petitur.

Compositio, siue solutionis demonstratio: supposito quod eiusdem quadrati, diameter sit G, latus verò H. Per solutionem G *ad* H = AB *ad* AX: sed per 8. theor. par. 3. cap. 8. G2 = 2H2: ergo AB2 = 2AX2: ergo vtrinque addendo AB *in* − AX, etiam AB2 *et* + AB *in* − AX = 2AX2 *et* + AB *in* − AX ll AX2 + AX2 *et* + AX *in* − AB ll AX2 *et* + AX *in* − AB + AX ll AX2 *et* + AX *in* − XB ll AX *in* AX − XB: ergo AB2 *et* + AB *in* − AX = AX *in* AX − XB: ergo AB *in* AB − AX, hoc est AB *in* XB = AX *in* AX − XB. Quod erat demonstrandum.

Pro-

Problema VII.

Recta AB ſecanda ſit in puncto X, ità vt AX *in* XB = AX − XBq. *Ghetaldi prob. 7. lib. 1.*

Reſolutio. Sit factum; atque AX − XB = AZ. Quoniam AX *in* XB = AX − XBq ‖ AZ2: igitur AX − XBq *et* + AX *in* 4XB = 5AZ2: ſed *per 4. aſſert. 1. hyp. cap. 9.* conſtat AX − XBq *et* + AX *in* 4XB = AX + XBq ‖ AB2: ergo AB2 = 5AZ2: ſed ſuppoſito quod linea D ſit quinta pars rectæ AB, etiam AB2 = 5D *in* AB: ergo 5D *in* AB = 5AZ2: igitur D *in* AB = AZ2: ergo AB *ad* AZ = AZ *ad* D.

Fig. 54.

Solutio propoſiti problematis. Per prob. 1 part. 2. cap. 3. inueniatur media proportionalis inter AB, & rectam D, quæ ſit quinta pars totius AB: atque inuentæ mediæ proportionali, æqualis fiat recta AZ, pars rectæ AB: deinde recta ZB, ſecetur in X, ità vt ZX = XB; erit punctum X illud quod petitur, & in quo linea AB ſecanda erat.

Compoſitio, ſiue ſolutionis demonſtratio. Ex ſolutione conſtat, rectam D = quintæ parti rectæ AB; igitur AB *in* AB = 5D *in* AB: ſed quia per ſolutionem AB *ad* AZ = AZ *ad* D: *per axioma* 10. conſtat AB *in* D = AZ2, adeòque 5D *in* AB = 5AZ2: igitur AB *in* AB = 5AZ2: ſed AB *in* AB = AX + XBq: ergo AX + XBq = 5AZ2: ſed *per 4. aſſert. 1. hyp. cap. 9.* patet AX + XBq = AX − XBq *et* + AX *in* 4XB: ergo 5AZ2 = AX − XBq *et* + AX *in* 4XB: ſed ex ſolutione patet, AZ = AX − XB, adeòque AZ2 = AX − XBq: ergo 5AZ2 = AZ2 *et* + AX *in* 4XB: ergo vtrinque auferendo AZ2, etiam 4AZ2 = AX *in* 4XB: adeòque AX *in* XB = AZ2 ‖ AX − XBq, vt conſtat ex ſolutione: igitur AX *in* XB = AX − XBq. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Qvemadmodum præcedenti capite non attulimus qualiacunque exempla ſecundæ regulæ Logiſticæ, ſed tantum aliqua, quæ à Laudatiſſimis Mathematicis Euclide, & Archimede poſteritati relicta, habentur in precio, vt per collationem noſtrarum demonſtrationum, cum ijs, quæ à dictis authoribus proponuntur, facilius cognoſci poſſit, quæ vel qualis differentia intercedat inter antiquam, & Logiſticæ recentioris methodum; ità etiam in hac prima parte voluī afferre pro exemplis tertiæ regulæ Logiſticæ, problemata, quę in cognito aliquo, & à multis laudato opere inueniuntur ſoluta methodo à Logiſticæ methodo aliquantulum diuerſo; in hunc tamen finem videntur ſufficere pauca huius primæ partis problemata, præter quæ nulla alia continentur priori ex libris à Marino Ghetaldo conſcriptis de reſolutione & compoſitione Mathematica. Concedimus quidem, tertiam Logiſticæ regulam, quoad ſubſtantiam diuerſam non eſſe ab Analyſi antiquorum Mathematicorum: tamen ab his pauca nobis relicta ſunt huius regulæ exempla proportionata regulam diſcentibus; atque hæc cauſa eſt, quod exempla, quæ proponimus, non deſumpſerimus ex antiquiore aliquo Mathematico, ſed ex Marino Ghetaldo: is enim, præ cæteris mihi cognitis, videtur clarius expoſuiſſe antiquam Analyſim, eamque melius declaraſſe in exemplis diſcentibus proportionatis; in his adhibet quidem ſcriptiones, quæ non redolent ma-

magis vſitatam antiquæ Matheſeos praxim ſcribendi,productiorem atque moleſtiorem : ſed ſi non ſingula , plurima adhibet compendia ſcriptionis vſitata in noſtra Logiſtica; verum ſi regulæ documenta eadem perſeuerent,ſiue Gręcis, ſiue Latinis, aut literis, aut vocibus proponantur, eadem perſeuerat regula : nullamque regulæ diuerſitatem cauſare poteſt , quod eius exempla proponantur magis minuſue producta, vel eodem, aut diuerſo modo compendiata ſcriptione.

P A R S II.

Exempla tertiæ regulæ Logiſticę.

PRO exemplis tertiæ regulæ Logiſticæ, in priori parte attulimus problemata: in hac parte afferimus theoremata; præterea pro inſtituenda reſolutione, in prima parte , vt vera eſſumitur aſſertio probanda : in huius partis exemplis oppoſitum facimus,& pro inſtituẽda reſolutione,vt falſa aſſumitur aſſertio,cuius veritas probanda eſt: vtrumq;enim licere notauimus ad ipſam regulã: pro quinque prioribus eius exemplis aſſumimus nonnullas aſſertiones contentas in prima hypotheſi capitis 9. huius libri , ex quibus aliquæ magis reſtrictæ conſtituunt Euclidea theoremata elementaria : ſingula prout à nobis proponuntur , etiam annotata inueniuntur , tum apud Vietam , tum apud alios plures Algebrę ſcriptores, quos citare videtur ſuperfluum. Alijs nos diſputandum relinquimus, vtrum in hac parte propoſitæ reſolutiones conueniant, vel non conueniant cum celebri argumento adhibito ab Euclide in demonſtratione propoſitionis 12. lib.9. ſuorum elementorum : quam demonſtrationem pulchram , & ſubtilem aſſerit P. Andręas Taquet,in ſcholio quod ſequitur hanc propoſitionem in eius Arithmeticæ theoria: vbi indicat quo loco proponat longiorem diſputationem de hoc genere demonſtrationum, quod aliquibus videtur mirabile . Commemorata propoſitio 12. lib.9. elementorum Euclidis alijs verbis docet illud idem , quod hic aſſeritur , & conformiter ad præſcripta tertiæ regulæ Logiſticæ demonſtratur in ſexto theoremate : quare ſi reliqua quinque theoremata talia videantur vt ex illis non ſatis clarè colligatur quod paulò antè diximus nos alijs diſputandum relinquere : certè hoc colligi poterit ex collatione duorum diſcurſuum, quorum altero ab Euclide,altero à nobis demonſtratur eadem veritas; deniq; in ſeptimo theoremate propono aſſertionem coſmographicam,quam etiam demonſtro iuxta pręcepta tertiæ regulæ Logiſticę:deinde illi addo diſcurſum quo eamdẽ aſſertionem probat P. Taquet in appendice ſuorum Euclideorum elementorum planorum,& ſolidorum,vbi ex profeſſo diſputat de Euclideis, aliorumque demonſtrationibus , ex falſo verum inferentibus , quas ſupra diximus, multis videri mirabiles & dignas ſpeciali reflexione .

Theorema I.

Qualeſcunque quantitates repręſentent literæ X & Z quarum vna ſit maior altera .

DIco X † Zq = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z.

Reſolutio. Aſſumẽdo vt falſã aſſertionẽ probãdã: X † Z q nõ = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z : ſed X † Zq = X † Z *in* X *et* † X † Z *in* Z ‖ X2 *et* † X *in* Z *et* † X *in* Z *et* † Z2.

et + Z2 ∥ X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z : ergo X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z non = X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z : quod manifestè falsum est, adeòque vera est propositio quę in compositione assumitur.

Compositio, X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z = X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z: sed X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z = X *in* X *et* + Z *in* Z *et* + X *in* Z *et* + X *in* Z ∥ X *in* X *et* + Z *in* X *et* + Z *in* Z *et* + X *in* Z ∥ X + Z *in* X *et* + X + Z *in* Z ∥ X + Z *in* X + Z ∥ X + Zq : igitur X + Zq = X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema II.

Qualescunque quantitates repręsentent literę X & Z, quarum vna sit maior altera.

Dico X − Zq = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z.

Resolutio. Assumẽdo vt falsam assertionem probandam: X − Zq non = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z : sed X − Zq = X − Z *in* X *et* + X − Z *in* − Z ∥ X2 *et* + X *in* − Z *et* + Z2 *et* + X *in* − Z ∥ X2 + Z2 *et* + X *in* − 2Z ∥ X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z: ergo X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z non = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z : quod manifestè falsum est, adeòque patet verum esse quod in compositione assumitur.

Compositio, X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z : sed X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z = X *in* X *et* − Z *in* − Z *et* + X *in* − Z *et* − Z *in* + X ∥ X − Z *in* X *et* + X − Z *in* − Z ∥ X − Z *in* X − Z ∥ X − Zq: ergo X − Zq = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Qualescunque quantitates repræsentent X & Z, sic vt vna sit maior altera.

Dico X + Zq = X − Zq *et* + X *in* 4Z.

Resolutio. Assumendo vt falsam assertionem probandam : X + Zq non = X − Zq *et* + X *in* 4Z: sed per primum theorema constat, X + Zq = X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z, & per 2. theorema constat, X − Zq = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z : ergo X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z non = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z *et* + X *in* 4Z: ergo vtrinque auferendo X2 + Z2, etiam X *in* 2Z non = − X *in* 2Z *et* + X *in* 4Z : ergo per antithesim, X *in* 2Z *et* + X *in* 2Z non = X *in* 4Z : ergo X *in* 4Z non = X *in* 4Z: quod manifestè falsum est, adeòque patet verum esse quod assumitur in compositione.

Compositio, X *in* 4Z = X *in* 4Z : sed X *in* 4Z = X *in* 2Z *et* + X *in* 2Z : ergo X *in* 2Z *et* + X *in* 2Z = X *in* 4Z: ergo per antithesim, X *in* 2Z = − X *in* 2Z *et* + X *in* 4Z: ergo vtrinque addendo X2 + Z2, etiam X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z = X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z *et* + X *in* 4Z: atqui per 1. theor. constat, X2 + Z2 *et* + X *in* 2Z = X + Zq, & per 2. theor. etiam X2 + Z2 *et* − X *in* 2Z = X − Zq : ergo X + Zq = X − Zq *et* + X *in* 4Z. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema IV.

Qualeſcunque duas quantitates repreſentent X & Z, quarum vna ſit maior altera.

DIco $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$.
Reſolutio. Aſſumendo vt falſam aſſertionem probandam: $X2 - Z2$ non $= X + Z$ *in* $X - Z$: ſed $X + Z$ *in* $X - Z = X + Z$ *in* X *et* $+ X + Z$ *in* $- Z \parallel X2$ *et* $+ X$ *in* Z *et* $+ X$ *in* $- Z$ *et* $- Z2 \parallel X2 - Z2$: ergo $X2 - Z2$ non $= X2 - Z2$: quod manifeſtè falſum eſt, adeòque patet verum eſſe quod in compoſitione aſſumitur.
Compoſitio, $X2 - Z2 = X2 - Z2$: ſed $X2 - Z2 = X2 - Z2$ *et* $+ X$ *in* Z *et* $+ X$ *in* $- Z \parallel X + Z$ *in* X *et* $+ X + Z$ *in* $- Z \parallel X + Z$ *in* $X - Z$: ergo $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$. Quod erat demonſtrandum.

Theorema V.

Qualeſcunque quantitates repræſentent X & Z, ſic vt vna ſit maior altera.

DIco $X2 - Z2q = X + Zq$ *in* $X - Zq$.
Reſolutio. Aſſumendo vt falſam aſſertionem probandam: $X2 - Z2q$ non $= X + Zq$ *in* $X - Zq$: ſed 1 *in* $X2 - Z2q = X2 - Z2q$: ergo 1 *in* $X2 - Z2q$ non $= X + Zq$ *in* $X - Zq$: ergo per 10. axioma, etiam 1 *ad* $X + Zq$ non $= X - Zq$ *ad* $X2 - Z2q$: ergo $R1q1$ *ad* $R1qX + Zq$ non $= R1qX - Zq$ *ad* $R1qX2 - Z2q$, hoc eſt 1 *ad* $X + Z$ non $= X - Z$ *ad* $X2 - Z2$: ergo per 10. axioma, 1 *in* $X2 - Z2$, hoc eſt $X2 - Z2$ non $= X + Z$ *in* $X - Z$: quod, per theor. 4, falſum eſſe conſtat, adeòque verum eſt quod in compoſitione aſſumitur.
Compoſitio, per theor. 4. conſtat, $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$: ſed 1 *in* $X2 - Z2 = X2 - Z2$: ergo 1 *in* $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$: ergo per 10. axioma, 1 *ad* $X + Z = X - Z$ *ad* $X2 - Z2$, hoc eſt $R1q1$ *ad* $R1qX + Zq = R1qX - Zq$ *ad* $R1q\,X2 - Z2q$: ergo 1 *ad* $X + Zq = X - Zq$ *ad* $X2 - Z2q$: ergo per 10. axioma, 1 *in* $X2 - Z2q$, hoc eſt $X2 - Z2q = X + Zq$ *in* $X - Zq$. Quod erat demonſtrandum.

Theorema VI.

Si ab vnitate continuè proportionales fuerint quotcunque vulgares numeri A, B, C, D, hoc eſt ſi 1 *ad* $A = A$ *ad* $B \parallel B$ *ad* $C \parallel C$ *ad* D, atque numerus D habeat menſuram diuerſam ab vnitate.

DIco, numeros A & D habere menſuram communem diuerſam ab vnitate.
Nota, commoditatis gratia, quod ex hypotheſi facilè patet, nimirum $B = A2$, item $C = A3$, item $D = A4$; nam per hypotheſim 1 *ad* $A = A$ *ad* B: ergo per

10. axioma, B *in* 1, hoc est B = A *in* A, hoc est A2. Rursus quia per hypothesim, A *ad* B = B *ad* C, adeòque vt iam constat, A *ad* A2 = A2 *ad* C, etiam per 10. axioma, A *in* C = A2 *in* A2, hoc est A4: sed etiam A *in* A3 = A4: ergo C = A3. Rursus per hypothesim, B *ad* C = C *ad* D, adeòque, vt iam ostensum est, A2 *ad* A3 = A3 *ad* D: ergo per 10. axioma, A2 *in* D = A3 *in* A3, hoc est A6: sed etiam A2 *in* A4 = A6: ergo C = A4.

Resolutio. Supponendo falsam esse assertionem probandam: numeri A & D non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: sed per notam præmissam, D = A4: ergo A & A4 non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per theor. 6. cap. 10. lib. 2. etiam A4 & A4 non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: quod patet falsum esse, cum enim D = A4, & per hypothesim, D habeat mensuram diuersam ab vnitate, patet A4 & A4 habere mensuram communem diuersam ab vnitate, vt assumitur in compositione.

Compositio. Quia per notam præmissam, D = A4, & per hypothesim, D habet mensuram diuersam ab vnitate, patet A4 & A4 habere mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per theor. 6. cap. 10. lib. 2. etiam A & A4 habent mensuram communem diuersam ab vnitate: sed per notam præmissam, D = A4: igitur A & D habent mensuram communem diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema VII.

Agendo de aquis maritimis, neque ventis agitatis, neque littoribus impeditis, sed dispositis vt requirit natura aquæ non impeditæ.

Dico maris superficiem sphæricam esse.

Resolutio. Assumendo vt falsam assertionem probandam: in proposita hypothesi, maris superficies sphærica non est: ergo omnes partes superficiei maris non distant æqualiter ab eodem grauium centro: ergo vna pars superficiei maris est altior altera: ergo partes altiores non defluunt versus minus altas, quod falsum esse patet ex aquæ natura: adeòque verum est quod in compositione assumitur.

Compositio. Ex natura aquæ constat, quod superficiei eius partes altiores, in proposita hypothesi, defluant versus minus altas: ergo vna pars superficiei maris, non est altior altera: ergo partes omnes superficiei maris sunt æqualiter altę, hoc est æqualiter distant ab eodem grauium centro; ergo maris superficies sphærica est. Quod erat demonstrandum.

Cosmographicũ theorema, quod hic demonstratũ exhibuimus conformiter ad præscripta tertiæ regulæ Logisticæ: affert P. Andreas Taquet in appendice suorum Euclideorũ elementorum planosolidorum, tanquam exemplum illarũ demonstrationum, quas, vt initio huius partis diximus, singulari consideratione dignas arbitratur: argumentum quo huius theorematis veritatem probat, his verbis proponit. *Quoniam igitur maris superficies sphærica non est: ergo omnes superficiei maritimæ partes non distant æqualiter à centro: ergo vna est altior altera (altiorem enim esse aliud non est, quam longius à centro recedere) ergo eæ quæ altiores sunt, defluunt versus minus altas, seu decliuiores; hanc enim esse humidi naturam, experientia constat. Ex tali autem defluxu necessariò oritur omnium*

par-

partium superficiei maritimæ æqualis altitudo, seu distantia à centro. Æqualis verò omnium partium superficiei maritimæ à centro distantia, infert sphæricitatem eius perfectam. Ergo maris superficies sphærica est, vbi ad suum intentum concludit, *habemus igitur hanc assertionem, maris superficies sphærica est, directè, & affirmatiuè deductam ex sua contradictoria, maris superficies sphærica non est*. Ità ille; quod an verum sit, vel vtrum huiusmodi discursus conueniant, vel non conueniant cum discursibus qui conformes sunt tertiæ nostræ regulæ Logisticæ (quę docet celebrem antiquæ Matheseos resolutionem siue analysim, vt initio huius partis diximus) alijs relinquimus disputandum. De demonstrationum legitimarum subsistentia, aliqua paucis indicamus in reflexione 2. cap. 4. lib. 3. Inuentionis regulæ, quas cap. 10. proposuimus, dirigunt demonstrationis inuentionem, quæ directio parum vtilis est in casibus in quibus independenter à talibus regulis habetur modus demonstrandi propositam veritatem.

APPENDIX.

Proponuntur aliquę restrictiores regulæ spectantes ad vulgarem Arithmeticam practicam.

PRacticæ vulgaris Arithmeticæ scriptores, præter regulam quam vsitato nomine appellant auream, tradere consueuerunt nonnullas alias huius Arithmeticæ regulas: his neglectis in nostra Logistica practica, tantum tradidimus regulam quam cum ipsis appellamus auream: non ideò tamen reliquas damnamus vt prorsus inutiles, sed illas vtpote restrictiores, negligendas putauimus in vniuersaliori practica Mathesi quam in hoc libro scribimus: huic, ex restrictioribus tantum inseruimus, quæ videbantur conducere ad intentam vniuersalitatem: ad hanc non conducunt vulgaris practicæ Arithmeticæ regulæ, quæ ab aurea regula diuersæ sunt: sed ex vniuersaliori illa practica Mathesi, haberi possunt & restrictiores illæ regulæ vulgaris Arithmeticæ practicæ, & plures aliæ similiter restrictæ, & fortassis non minus vtiles.

Vt in nostra Logistica magis versati, facilius possint assequi quod hoc verum sit: & minus versati non suspicentur aliquem reprehensibilem defectum nostræ Logisticæ, in carentia prædictarum regularum vulgaris Arithmeticæ practicæ: iudicauimus, omnibus prodesse posse, breuiori qua possumus modo declaratas exhibere, & commemoratas vulgaris Arithmeticæ regulas restrictiores, & his similes aliquas, atque non minus vtiles: quas singulas vulgares appello, quia docent vsum vulgarium numerorum.

Vulgaris regula aurea.

REgula aurea dicitur quę docet ad tres datos terminos inuenire quartum proportionalem, hinc aliter regula trium, vel regula proportionum dicitur. In prima parte capitis tertij libri primi, proponuntur multæ praxes, quæ singulæ bonæ sunt, vt ad tres datos terminos inueniatur quartus proportionalis: priores tamen commodiores sunt, quando tres dati termini sunt vulgares numeri, vt fit in regula aurea de qua hic agitur, ideòque vulgaris dicitur: quoniam verò citato loco abundè proponimus, quod sufficit ad huius vulgaris aureæ regulæ solutionem, de eius solutione hic nihil remanet dicendum.

No-

Notandum tamen videtur, quod omnes propemodum scriptores vulgaris practicæ Arithmeticæ, diuidant regulam auream: primò, in directam & euersam; secundò, in simplicem & compositam; quarum diuisionum nusquam meminimus, tametsi proponamus longè vniuersaliorem atque magis accuratam vtilissimæ aureæ regulæ tractationem: etenim pro Logistica non tantū necessaria est inuentio quarti termini proportionalis in casu in quo dati tres termini sunt numeri vulgares (de quo solo casu agit vulgaris Arithmetica practica) verum etiam in quolibet alio casu, in quo dati tres termini sunt quantitates diuersæ à vulgaribus numeris: & etiam in casu in quo dati tres termini sunt quantitates quæ in Logistica nostra compensantes appellantur: in quo casu, omni Matheseos methodo à Logistica diuersæ, insolubilem regulam auream ostendimus in consideratione 7. cap. 5. lib. 3. Iam verò, licet adeò amplam vniuersalemque regulæ aureæ tractationem contineat, & pro illa exhibeat praxes sufficientes atque innixas legitimis demonstrationibus: nusquam tamen considerat, aut proponit regulæ aureæ diuisionem, proponi solitam ab Arithmeticæ vulgaris doctoribus: apud quos, vt diximus, regula aurea diuiditur, primò in directam & euersam: deinde in simplicem & compositam.

Prima diuisio regulæ aureæ in directam & euersam, prætermittitur in nostra Logistica, tum quia inutilis est, tum quia videtur impropria. Inutilis est, quia eoipso quod ex datis tribus terminis primus sit, qui iuxta regulæ aureæ præscripta allata in nostra Logistica, primus terminus debet appellari: nunquam seruit solutio quam afferunt pro regula aurea quam dicunt euersam. Videtur impropria, cum enim regula aurea, sit inuentio quarti proportionalis ad tres datos terminos, non nisi impropriè dici potest regula aurea, illa inuentio quarti termini, qui ad datos tres terminos proportionalis non est: sed quia per regulam auream quam appellant euersam, ex datis tribus terminis, primus ad secundum non habet eam rationem quam habet tertius ad inuentum quartū terminum: per regulam auream quam euersam appellant, non inuenitur quartus terminus, qui ad datos tres terminos proportionalis sit: igitur hæc inuentio quarti termini, ex datis tribus terminis, non nisi impropriè dici potest aurea regula.

Inter regulam auream quæ ab Arithmeticæ vulgaris practicæ scriptoribus, simplex dicitur, & eam quam appellant compositam: hæc sola diuersitas inuenitur: quod pro prima, tres dati termini singuli sint simplices vulgares numeri: pro secunda, ex datis tribus terminis aliqui non sint vulgares numeri simplices, sed constituantur à pluribus numeris vulgaribus simplicibus simul cohærentibus, qui termini nō malè appellari possunt compositi: verū si hęc diuersitas inter terminos datos pro regula aurea, sufficit vt admittatur duplex regula aurea, quarum altera simplex, altera composita dici debeat: tot diuersæ regulæ aureæ erunt admittendæ, quot datorum terminorum ternarij inueniri possunt, inter quos inuenitur tanta diuersitas, quanta intercedit inter commemoratos duos vulgarium numerorum ternarios, quorum alij pro regula aurea simplici, alij pro regula aurea composita requiruntur: & consequenter membris illius diuisionis in qua regula aurea diuiditur in simplicem & compositam, addi debebit regula aurea linearis, pro qua dati tres termini lineæ sunt: regula aurea radicalis, pro qua aliqui ex datis tribus terminis sunt numeri radicales: regula aurea vniuersalis, pro qua dati tres termini sunt quantitates vniuersales: regula aurea contrarians, pro qua tres dati termini sunt quantitates contrariantes: atque admittendæ erunt aliæ huiusmodi innumeræ regulæ aureæ, vix nominabiles, pro quibus aliqui ex datis tribus terminis diuersimodè inter se genere differunt, aut aliam habent diuersitatem non minorem, quam inueniatur inter vulgares terminos, ex quibus alios simplices, alios compositos appellari posse concessimus.

Quo-

Quoniam illa diuersitas quæ inuenitur inter vulgares numeros simplices atque compositos, siue ex pluribus simul cohærentibus numeris constantes, non videtur nobis sufficere ad considerandas plures aureas regulas: à nobis consideratur vnica regula aurea, quæ admittat, & hanc, & quamlibet aliam diuersitatem, inter tres terminos datos pro regula aurea: atque adeò admittat diuersos casus, vt alibi in similibus circumstantijs nobiscum loquuntur alij Mathematici. Casum in quo alij considerant compositam regulam auream, consideramus in sequenti nota, vbi indicamus quid in illo casu faciendum, vt, per vnicam illam quam admittimus regulam auream, habeatur quæsitus terminus proportionalis.

Notandum igitur pro casu in quo ex tribus terminis datis pro regula aurea, aliqui sunt vulgares numeri compositi, adeòque constituuntur à pluribus numeris vulgaribus simul cohærentibus, quod hoc casu pro singulis illis numeris compositis substituendi sint numeri vulgares simplices, compositis æquiualentes: talis verò simplex, atque composito æquiualens numerus, erit productum quod oritur ex omnibus numeris simplicibus compositum numerum constituentibus, simul multiplicatis.

Exemplum regulæ aureæ, pro casu in quo ex tribus datis terminis, aliqui constant ex pluribus vulgaribus numeris cohærentibus. Supponitur cognitum quod 8 mercatores, 1000 aureis lucrentur 700 aureos; quæritur quot aureos lucrabuntur 10 mercatores 4000 aureis. In proposita quæstione cohærent singuli numeri mercatorum, cum aliquo numero aureorum: itaque 8 mercatorum numerum ducendo in cohærentem numerum 1000 aureorum, habetur simplex numerus 8000, æquiualens priori composito numero. Similiter ducendo numerum 10 mercatorum, in cohærentem numerum 4000 aureorum, habetur simplex numerus 40000 æquiualens posteriori composito numero. Inuentos simplices numeros pro compositis substituendo quæstio erit.

8000 dat 700, quid dabit 40000? respondeo quod dabit 3500.

Hæc responsio, siue propositæ quæstionis solutio, habetur per quamlibet solutionem regulæ aureæ propositæ in parte 1. cap. 3. huius lib. Eritque verum, quod si 8 mercatores 1000 aureis lucrentur 700, etiam 10 mercatores 4000 aureis lucrabuntur 3500.

Aliud exemplum regulæ aureæ, pro casu in quo ex tribus datis terminis aliqui constant ex pluribus numeris vulgaribus cohærentibus. Supponitur cognitum quod 8 mercatores 1000 aureis 2 mensibus lucrentur 700 aureos; quæritur, quot aureos lucrabuntur 10 mercatores 4000 aureis 6 mensibus? In proposita quæstione cohærent singuli numeri mercatorum, cum aliquo numero aureorum, & alio numero mensium: itaque numerum 8 mercatorum, ducendo in cohærentes numeros 1000 aureorum, & 2 mensium: habetur simplex numerus 16000, æquiualens priori composito numero. Similiter ducendo numerum 10 mercatorum, in cohærentes numeros 4000 aureorum, & 6 mensium habetur simplex numerus 240000, æquiualens posteriori composito numero. Inuentos numeros simplices substituendo pro compositis quibus æquiualent quæstio erit.

16000 dat 700, quid dabit 240000? respondeo quod dabit 10500.

Hæc responsio siue solutio quæstionis, habetur per quamlibet ex praxibus propositis in parte 1. cap. 3. huius lib. eritque verum, quod si 8 mercatores, 1000 aureis, duobus mensibus lucrentur 700 aureos: 10 mercatores 4000 aureis, sex mensibus lucrabuntur 10500 aureos.

Vulgaris regula societatis.

HEc regula docet numerũ propositũ diuidere in partes, datis alijs numeris proportionales. Nomen accipit à societatibus mercatorijs, in quibus frequenter vsum habet eius praxis: ad hæc præcepta reduci potest. Primò, datorum numerorũ aggregatum, primum locum teneat; secundo loco consistat numerus distribuendus in partes; tertio loco successiuè ponendo singulos numeros datos, inueniantur tot quarti proportionales, quot sunt dati numeri quorum aggregatum constituit numerum primo loco consistentem: inuenti quarti proportionales satisfacient quæsito.

Nota, fieri posse, vt aliqui ex datis numeris constent ex pluribus simul cohærentibus: quo casu prius illi numeri simul cohærentes, simul multiplicando, reducendi sunt ad simplices ipsis æquiualentes: ac deinde addendi alijs datis vel similiter inuentis numeris simplicibus, vt constituant aggregatum ponendum primo loco.

Exemplum in quò dati numeri simplices sunt. Supponitur quod tres mercatores, Caius, Titius, & Meuius, inita societate lucrati sint aureos 4500: Caius contulerat aureos 100: Titius aureos 150: Meuius aureos 200: petitur quantum cuique debeatur ex communi lucro 4500 aureorum. Primò datos numeros 100, 150, 200, addendo, inuenitur aggregatum 450, quod ponitur primo loco: secundo loco statuitur 4500 quia verò numeri tertio loco statuendi, sunt tres diuersi, tres regulæ aureæ faciendæ sunt

Prima. 450 dat 4500 quid dabit 100? respondeo dabit 1000
Secunda. 450 dat 4500 quid dabit 150? respondeo dabit 1500
Tertia. 450 dat 4500 quid dabit 200? respondeo dabit 2000

Hinc, Caio, qui 100 aureos contulerat, debentur 1000 aurei. Titio, qui 150 aureos contulerat, debentur 1500 aurei. Meuio, qui 200 aureos contulerat, debentur 2000 aurei.

Aliud exemplum, in quo dati numeri constant ex pluribus simul cohærentibus. Caius, Titius, & Meuius, inita societate lucrati sunt aureos 10200. Caius contulerat 100 aureos, qui 16 mensibus in societate permanserunt. Titius contulerat 140 aureos, qui 10 mensibus in societate permanserunt. Meuius contulerat 300 aureos, qui 7 mensibus in societate permanserunt. Quæritur quantum singulis debeatur ex communi lucro 10200 aureorum?

In hoc exemplo, singuli numeri dati constant ex numero collatorum aureorum, & numero mensium quibus collati aurei permanserunt in societate: pro his numeris cohærentibus, antè omnia inueniendi, atque substituendi sunt simplices, ipsis æquiualentes. Caij numerum 100 aureorum, ducendo in numerum 16 mensium, habetur simplex numerus 1600, æquiualens numeris cohærentibus qui Caio respondent. Similiter Titij numerum 140 aureorum, ducendo in numerum 10 mensium, habetur simplex numerus 1400, æquiualens numeris cohærentibus qui Titio respondent. Pari modo Meuij numerum 300 aureorum, ducẽdo in numerũ 7 mensium, habetur numerus simplex 2100, æquiualens numeris cohærentibus qui respondent Meuio. Postquam in hunc modum ad simplices ipsis æquiualentes reuocati sunt, dati numeri constantes ex pluribus numeris simul cohærentibus, habetur quæstionis solutio, vt in primo exemplo. Primò statuendo primo loco aggregatũ numerorum simplicium, qui respondent Caio, Titio, & Meuio, quod aggregatum erit 5100; secundò loco ponendo commune lucrum 10200 aureorum; tertio verò loco statuendo successiuè singulos ex simplicibus nume-

numeris, Caio, Titio, & Meuio, correſpondentibus, atque ad numeros primo, ſecundo, & tertio loco ſtatutos, inueniendo quartum proportionalem; quare tres regulæ aureæ inſtituendæ, erunt ſequentes.

Prima. 5100 dat 10200, quid 1600? reſpondeo dabit 3200.
Secunda. 5100 dat 10200, quid 1400? reſpondeo dabit 2800.
Tertia. 5100 dat 10200, quid 2100? reſpondeo dabit 4200.

Hinc, Caio, qui 100 aureos, 16 menſibus in ſocietate reliquit, ex communi lucro debentur 3200 aurei. Titio, qui 140 aureos, 10 menſibus reliquerat in ſocietate, ex communi lucro debentur 2800 aurei. Meuio, qui 300 aureos, ſeptem menſibus in ſocietate reliquerat, debentur aurei 4200.

Vulgaris regula alligationis.

HÆC regula ſupponit ſciri precium quod habet aliqua eiuſdem nominis menſura diuerſarum rerum: ſuppoſitâ hac cognitione, docet, qualis pars menſuræ iſtius nominis ſumi debeat ex ſingulis illis rebus, vt partes iſtæ ſimul poſitæ, ſiue mixtæ, faciant vnam integram talis nominis menſuram, quæ habeat medium precium pro arbitrio aſſignatum; hoc eſt precium, minus quidem maximo, maius verò minimo, quod conuenit alicui ex rebus quarum partes inueniendæ atque miſcendæ proponuntur.

Primò, res propoſitæ, atque miſcendæ, breuiter nominentur: hoc eſt ſingulis rebus, ex quibus mixti menſura conſtare debet, apponatur aliqua alphabeti litera, vt eam rei ſpeciē breuiter ſignificet: hac tamen lege, vt res cuius precium deficit ab aſſignato precio medio, indicetur per aliquam ex prioribus alphabeti literis: reliquæ ſingulæ, quarum precium non deficit à precio medio aſſignato, ſignificentur per aliquam ex poſterioribus alphabeti literis. Secundò, res miſcendæ atque, vt diximus, nominatæ, cum appoſita differentia inter precium quod habent, & aſſignatum precium medium, ordinatè ſibi inuicem ſubſcribantur: erunt verò ordinatè ſcriptæ, ſi pars ſuperior huius ſcriptionis contineat omnia & ſola nomina deſumpta ex priori parte alphabeti, & inferior pars contineat omnia & ſola nomina deſumpta ex poſteriori parte alphabeti: ac præterea ſuperior & inferior pars huius ſcriptionis, æquè multa nomina contineat, atque tot nomina iterato poſita inueniantur in vna parte, quot in altera parte inueniuntur nomina quibus pro differentia reſpondet o. Efficere vt in hunc modum ſcriptio ordinata euadat, facillimum eſt, quandoquidem licitum ſit, in illa ſæpius pro libitu ſcribere, idem quodlibet nomen cum appoſita eadem differentia. Tertiò aſſumendo pro primo termino aggregatum omnium differentiarum appoſitarum nominibus, vt diximus ordinatè ſcriptis: pro ſecundo termino vnitatem: atque pro tertio termino differentiam alicui nomini adſcriptam: per regulam aureā inueniatur quartus terminus proportionalis, atque alterius partis nomini adſcribatur: hoc eſt, ſi pro inuentione quarti proportionalis adhibita eſt differentia adſcripta nomini inuento in ſuperiori parte ordinatæ ſcriptionis, erit quartus proportionalis inuentus adſcribendus nomini quod inuenitur in inferiori parte ordinatæ ſcriptionis: & è contra, inuentus quartus proportionalis, erit adſcribendus nomini quod inuenitur in ſuperiori parte ordinatæ ſcriptionis, ſi pro eius inuentione adhibita ſit differentia adſcripta nomini quod inuenitur in inferiori parte ordinatæ ſcriptionis: vbi obſeruandum, vt ſi inuentus quartus proportionalis eſt o, apponatur alicui nomini bis poſito in altera parte ordinatæ ſcriptionis. In hunc modum efficiendo, vt ſingulis nominibus ordinatæ ſcriptionis reſpondeat quartus proportionalis: hic indicabit, quot, ac quales menſuræ partes sumi debeant ex re per respondens nomen indicata, pro mixto quæsito, siue vt singulas illas mensuræ partes, à quartis proportionalibus indicatas, simul miscendo, habeatur vna mixti mensura, habens precium medium, quod pro libitu fuerat assignatum.

Nota. Si plures mixti mensuræ peterentur, quarum singulæ habeant precium pro libitu assignatum, in commemoratis regulis aureis pro vnitate constituente secundum regulæ aureæ terminum, poni potest numerus indicans datam talem mensurarum multitudinem: vel certè (quod in idem redit) inuenti vt diximus quarti proportionales termini, poterunt duci in numerum indicantem datam mensurarum multitudinem.

Exemplum. Supposito quod vna Croci libra constet iulijs 10. Quod vna Garyophilli libra constet iulijs 3. Quod vna Cinamomi libra constet iulijs 6. Quod vna Piperis libra constet iulijs 4. Quod vna Zingiberis libra constet iulijs 8. Quæritur, quantum ex singulis istis speciebus sumi debeat vt habeatur vna mixti libra, quæ constet iulijs 7?

Commoditatis gratia appellando Crocum P. Garyophillum A. Cinamomum B. Piper C. Zingiber Q, subsequens scriptio obseruatum exhibebit quod præscribitur in regula, nimirum ordinatam nominum scriptionem, singularumque aurearum regularum terminos positos vt præscribitur in regula.

15 dat 1, quid dabit 4. ex A? Respondeo dabit $\frac{3}{15}$

15 dat 1, quid dabit 1. ex B? Respondeo dabit $\frac{3}{15}$

15 dat 1, quid dabit 3. ex C? Respondeo dabit $\frac{1}{15}$

15 dat 1, quid dabit 1. ex Q? Respondeo dabit $\frac{3}{15}$

15 dat 1, quid dabit 3. ex P? Respondeo dabit $\frac{1}{15}$

15 dat 1, quid dabit 3. ex P? Respondeo dabit $\frac{4}{15}$

Igitur pro mixti libra, ex A siue Garyophillo sumendæ tres decimæquintæ partes vnius libræ, ex B siue Cinamomo sumendæ tres decimæquintæ partes vnius libræ, ex C siue Pipere sumenda vna decimaquinta pars vnius libræ, ex Q siue Zingibero sumendæ tres decimæquintæ partes vnius libræ, ex P siue Croco sumi debent quatuor, & insuper vna, hoc est quinque decimæquintæ partes vnius libræ.

Alterum exemplum propono in quo locum habet quod dicitur in nota regulæ apposita, nimirum vt precium medium pro arbitrio assignatum conueniat cum precio alicuius rei miscendæ; & quoniam pro regulæ exemplo nihil refert siue res miscendæ sint diuersæ species aromatum, aut vini vel alterius liquoris, aut metalli, aut aliarum quarumlibet rerum, tantum variando precium medium pro arbitrio assignatum: vt prius suppono, quod Croci vna mensura constet iulijs 10, quod similis mensura Garyophilli constet iulijs 3, quod similis mensura Cinamomi constet iulijs 6, quod similis mensura Piperis constet iulijs 4, quod similis mensura Zingiberis constet iulijs 8. Quæritur quantum ex singulis istis speciebus sumi debeat, vt habeatur vna talis mensura mixti, quæ constet 6 iulijs.

Vt prius factum fuit, commoditatis gratia appellando Crocum P, Garyophillum A, Cin-

Cinamomum R, Piper C, Zingiber Q, subsequens scriptio obseruatum exhibet quod præscribitur in regula: nimirum ordinatam scriptionem, singularumque aurearum regularum terminos.

14 dat 1, quid dabit 3. ex A? Respondeo dabit 0

14 dat 1, quid dabit 3. ex A? Respondeo dabit $\frac{4}{14}$

14 dat 1, quid dabit 2. ex C? Respondeo dabit $\frac{2}{14}$

14 dat 1, quid dabit 0. ex R? Respondeo dabit $\frac{3}{14}$

14 dat 1, quid dabit 4. ex P? Respondeo dabit $\frac{3}{14}$

14 dat 1, quid dabit 2. ex Q? Respondeo dabit $\frac{2}{14}$

Igitur pro vna mixti mensura, ex A, siue Garyophillo, sumendæ sunt quatuor decimæquartæ partes vnius mensuræ: ex C, siue Pipere, sumendæ sunt duæ decimæquartæ partes vnius mensuræ: ex R, siue Cinamomo, sumendæ sunt tres decimæquartæ partes vnius mensuræ: ex P, siue Croco, sumendæ sunt tres decimęquartæ partes vnius mensuræ: ex Q, siue Zingibero, sumendæ sunt duæ decimæquartæ partes vnius mensuræ.

Vulgaris regula simplicis falsæ positionis.

QVibus quæstionibus satisfaciat illa quæ ab Arithmeticis practicis appellatur regula simplicis falsę positionis, nusquam determinant; notant tamen, omnes quæstiones per hanc regulam solubiles, aliasque plurimas, solui posse per subsequentem regulam duplicis falsæ positionis: hac verò longè vniuersalior est prima Logisticæ regula, per quam soluuntur omnes omnino quæstiones quæ solui possunt per regulas, vnius, vel duplicis falsæ positionis, & aliæ innumeræ pro quibus istæ regulæ non sufficiunt. Appellantur regulæ falsæ positionis, vel falsi regulæ, quia in illis fit suppositio falsa, nimirum quod pro libitu assumptus numerus vulgaris X, satisfaciat quæstioni, quam in hac suppositione examinando, inuenitur falsam esse talem suppositionem, assumptumque numerum X aberrare à vero numero qui quæstioni satisfacit: sed inuentus vel vnus, vel duplex talis error, conducit ad cognitionem quæsiti ac veri numeri qui satisfacit quæstionis hunc verum numerum inuenire ex vnico errore, siue falsa positione, docet ea falsi regula quæ appellatur simplicis positionis: altera quæ duplicis falsæ positionis dicitur, eumdem illum verum atque quæstioni satisfacientem numerum inuenit ex duplici errore, siue falsa positione; prima Logisticæ regula easdem omnes aliasque plures, vt diximus, soluens quæstiones, dici non potest falsi regula, quia nullum errorem falsamue suppositionem adhibet.

Regulæ simplicis falsæ positionis præscripta hæc sunt. Primò, assumatur pro libitu aliquis vulgaris numerus X, atque examinando vtrum satisfaciat propositæ quæstioni, inueniatur numerus A: hic numerus A, erit numerus aberrans ex quo verus atque quæstioni satisfaciens numerus inueniendus est, si iuxta hoc examen, quæstioni non satisfaciat assumptus numerus X: si verò numerus X quæstioni

X 2 satis-

satisfacit, habetur soluta quæstio. Secundò, vt ex inuento numero aberrante cognoscatur verus atque quæstioni satisfaciens numerus, adhibenda est regula aurea, pro qua primus terminus constituatur ab inuento numero aberrante, siue numero A: secundus terminus sit assumptus numerus X: tertius terminus sit numerus Y, datus siue cognitus in proposita quæstione: ad hos tres terminos inuetus quartus proportionalis, erit numerus satisfaciens quæstioni, si quæstio solubilis est per regulam simplicis falsæ positionis.

Exempli gratia, supposito quod Titius, Caius, & Meuius, simul debeant 7000 aureos: ità tamen vt Titius debeat duplum Caij, Meuius autem triplum eius quod debet Caius: quæritur quantum debeant singuli?

Solutio. Assumendo pro Titij debito aureorum numerorum X, siue 200, iuxta quæstionem patet, Caij debitum esse 100 aureorum, Meuij verò debitum esse 300 aureorum: quæ tria debita simul, adæquant 600 aureos: verum iuxta propositam quæstionem, simul adæquare debent 7000 aureos: quare assumptus numerus X siue 200, non satisfacit quæstioni: inuentusque aberrans numerus A, erit 600: numerus verò Y ex quæstione cognitus, erit 7000. Itaque ad tres numeros quorum primus est A, siue 600: secundus est X, siue 200: tertius Y, siue 7000: ad hos inquam tres numeros per auream regulam inuentus quartus proportionalis, erit $2333\frac{2}{6}$: qui numerus indicabit Titij debitum quod petebatur: atque ex huius debiti cognitione patet quantum sit Caij vel Meuij debitum. Nam iuxta quæstionem, quia Titius debet $2333\frac{2}{6}$: patet Caium debere $1166\frac{4}{6}$: Meuium verò debere 3500, quæ tria debita simul adæquant debitum 7000. Vt supponebatur in quæstione.

Vulgaris regula duplicis falsæ positionis.

HÆC regula duplicis falsæ positionis multo vniuersalior est quam præcedens, quæ vnicam tantum adhibet falsam positionem. Eius præscripta hæc sunt. Primò, vt in præcedenti falsi regula simplici, assumendo pro libitu numerum vulgarem X, atque examinando propositam quæstionem, inueniatur numerus A; eius differentia à numero in quæstione cognito Y, qui per examen erat inueniendus, vocetur C, qui aliter dicitur error numeri A. Secundò, similiter assumendo alium vulgarem numerum Z, atque examinando propositam quæstionem, inueniatur numerus B; eius differentia à cognito numero Y vocetur D, qui erit error numeri B. Tertiò, per regulam auream inueniatur quartus proportionalis ad tres terminos, quorum primus sit aggregatum errorum C & D, si singuli aberrantes numeri A & B sint vel maiores vel minores, quam cognitus in quæstione numerus Y: vel certè primus regulæ aureæ terminus sit, differentia errorum C & D, quando ex numeris aberrantibus A & B, vnus maior est, alter minor numero Y. Secundus regulæ aureæ terminus sit, differentia assumptorum numerorum X & Z. Tertius terminus sit numerus C; ad hos tres terminos inuentus quartus proportionalis terminus vocetur K. Denique inuentus numerus K addatur numero X, si numerus aberrans A, est minor quam Y: vel certè numerus K subtrahatur à numero X, si numerus aberrans A, est maior quam Y. Sic enim habebitur numerus quæsitus satisfaciens propositæ quæstioni: si quæstio solubilis est per regulam duplicis falsæ positionis.

Eadem duplicis falsæ positionis regula, etiam paulò aliter in hunc modum solui potest. Primò, inuentis vt in priori solutione duobus numeris aberrantibus A & B atque illorum erroribus C & D inueniantur numeri E & F, sic vt E = X *in* D, & præ-

præterea F = Z *in* C. Denique, quando numeri aberrantes A & B, singuli sunt vel maiores, vel minores cognito quæstionis numero Y, diuidatur differentia numerorum E & F per differentiam numerorum C & D. Quando autem aberrantium numerorum A & B, vnus est maior, alter minor numero Y cognito in quæstione, summa numerorum E & F, diuidatur per summam numerorum C & D: ex hac diuisione productus numerus satisfaciet quæstioni, si solubilis est per regulam duplicis falsæ positionis.

Pro exemplo supponitur, quod Titius, Caius, & Meuius, simul lucrati sint 400 aureos: quodque Caius 12 aureos amplius lucratus sit quam Titius: lucrum verò Meuij, 16 aureos amplius contineat quam lucrum Caij. Quæritur quid singuli lucrati sint. Iuxta vtramque solutionem, prius inueniendi sunt duo numeri A & B, aberrantes à cognito in quæstione numero 400, qui repræsentatur per literam Y. Itaque supponendo quod Titij lucrum sit vnus aureus, qui aliter per literam X repræsentetur, iuxta quæstionis conditiones sequitur, Caij lucrum esse 13 aureorum, & Meuij lucrum esse 29 aureorum: adeòque totius lucri summa erit 43 aureorum: primusque aberrans numerus repræsentatus per literam A, erit 43 aureorum, & consequenter differentia inter A & Y, nimirum error numeri A, hoc est C = 357. Rursus, supponẽdo quod Titij lucrũ significatum per literam Z, sit duorum aureorum, Caij lucrum erit 14 aureorum, & Meuij lucrum erit 30 aureorum, atque totius lucri summa erit 46 aureorum; eritque secundus aberrans numerus B, 46 aureorum, & consequenter error numeri B, nimirum differentia inter B & Y, hoc est D = 354. His cognitis, atque adhibendo primam solutionem, quoniam singuli inuenti numeri A & B sunt minores cognito numero Y: iuxta vltimum primæ solutionis præscriptum, instituenda est regula aurea in qua primus terminus sit 3, nimirum differentia inter C & D, hoc est inter 357 & 354. Secundus terminus sit vnitas, nimirum differentia inter numeros X & Z, qui erant 1 & 2. Tertius terminus sit numerus C, hoc est 357. Iam verò quia 3 *ad* 1 = 357 *ad* 119: inuento numero 119 addendo numerum X, hoc est vnitatem, habetur 120, qui indicabit Titij lucrum, atque quæstionis solutionem: supposito enim quod Titij lucrum sit 120 aureorum, Caij lucrum erit 132 aureorum, & Meuij lucrum 148 aureorum: quæ tria lucra simul adæquant 400 aureorum lucrum: vt in quæstione supponebatur.

Secundæ solutionis præscripta adhibendo: inuentis vt prius numeris A, B, C, D, numerus E = X *in* D ‖ 1 *in* 354 ‖ 354: & numerus F = Z *in* C ‖ 2 *in* 357 ‖ 714: eritque numerorum E & F, hoc est 354 & 714 differentia 360: quoniam igitur singuli ex numeris A & B, hoc est 157 & 154, sunt minores numero Y, hoc est 400; iuxta vltimum secundæ solutionis præscriptum, diuidendo inuentam differentiam 360, per differentiam inter C & D, quæ est 3, habetur numerus 120, indicans Titij lucrum, vt in priori solutione.

Pro alio exemplo regulæ duplicis falsæ positionis supponitur, quod ætatem Titij, bis contineat ætas Caij, & insuper 4 annos: Meuij autem ætas contineat simul Caij & Titij ætatem, & insuper sex annos: omnium verò ætates simul conficiant 60 annos. Quæritur singulorum ætas?

Iuxta vtramque solutionem, prius inueniendi sunt duo numeri A & B, aberrantes à cognito in quæstione numero 60, qui repræsentatur per literam Y. Itaque supponendo quod Titij ætas, sit X, & quod X = 1, etiam Caij ætas = 6, præterea Meuij ætas = 13, denique ætates omnium simul = 20: vnde numerus A = 20: & numerus C = 40. Rursus, supposito quod Titij ætas sit Z, atque Z = 10: etiam Caij ætas = 24; præterea Meuij ætas = 40, atque ætates omnium simul = 74, quare B = 74: & numerus D = 14. His numeris cognitis, atque adhibendo primam solutionem; quoniam ex inuentis numeris A & B, vnus est minor, alter maior numero Y, hoc

Y, hoc est 60; iuxta vltimum primæ solutionis præscriptum, instituenda est regula aurea in qua primus terminus sit 54, hoc est aggregatum numerorum C & D: secundus terminus sit 9, hoc est differentia numerorum X & Z: tertius terminus sit 40, hoc est numerus C: ad hos tres terminos inuentus quartus proportionalis, nimirum K $= 6\frac{36}{54}$ ll $6\frac{2}{3}$, quia 54 *ad* 9 $=$ 40 *ad* $6\frac{36}{54}$: Deniq; quia numerus A siue 20, est minor quam Y siue 60: numerus K additus numero X, dabit $7\frac{2}{3}$. Quare Titij ætas, est septem annorũ cum duabus tertijs: quo supposito, Caij ætas erit annorum $19\frac{1}{3}$, Meuij verò ætas erit annorum 33: quæ ætates simul conficiunt 60 annos, vt dicitur in proposita quæstione.

Pro secunda solutione: cognitis, vt prius, numeris X, Z, A, B, C, D, quia X *in* D, hoc est 1 *in* 14 $=$ 14: etiam E $=$ 14: præterea quia Z *in* C, hoc est 10 *in* 40 $=$ 400: etiam F $=$ 400: quare E $+$ F $=$ 414: atque C $+$ D, hoc est 40 $+$ 14 $=$ 54: Denique diuidendo 414 per 54, habetur $7\frac{36}{54}$ ll $7\frac{2}{3}$: adeòque, vt in priori solutione, anni ætatis Titij erunt $7\frac{2}{3}$.

Vulgaris regula permutationum.

VOX *permutatio* hic intelligẽda est, vt significet solius ordinis variationẽ: quare petendo permutationes possibiles inter aliquam, aut literarum, aut aliarum rerũ pluralitatẽ: petitur quoties tota illa pluralitas proponi possit mutato ordine. Exempli gratia, quærendo permutationes possibiles vocis *amen*, quæritur quoties quatuor literæ constituentes vocem *amen* scribi possint, vt sibi inuicem succedant ordine diuerso ab eo quem habent in voce *amen*. Similiter, petendo permutationes possibiles in quinque personis simul mensę assidentibus, petitur quoties simul mensæ possint assidere, sic tamen vt non assideant eodem ordine.

Regula duplicem casum admittit: primus est, quando pluralitas cuius possibiles permutationes petuntur, omnes inter se sunt dissimiles. Secundus casus est, quando omnes non sunt dissimiles, vt contingit in voce siue pluralitate literarum, in qua plus quam semel inuenitur aliqua eadem litera.

Solutionis primi casus præscripta hæc sunt. Primò, incipiendo ab vnitate, ordine naturali successiuè scribantur tot numeri, quot res continentur in proposita pluralitate cuius possibiles permutationes petuntur. Secundò, inueniatur productum ex omnibus his successiuè scriptis numeris successiuè multiplicatis, hoc productum indicabit quæsitum.

Solutionis secundi casus præscripta hæc sunt. Primò, vt in primo casu, inueniatur numerus X indicans omnes permutationes possibiles in proposita pluralitate. Secundò, vt in primo casu, inueniatur numerus Z, indicans permutationes possibiles rerum inter se similium quæ in proposita pluralitate inueniuntur. Tertiò, inuentum prius numerum X diuidendo per numerum Z secundo loco inuentum, producatur numerus P: hic numerus P indicabit quæsitum.

Pro exemplo primi casus, de quatuor literis contentis voce *amor*, petitur quoties successiuè scribi possint permutato ordine? quoniam propositæ literæ sunt quatuor, ordine naturali incipiendo ab vnitate, scripti quatuor numeri erunt 1, 2, 3, 4: hi quatuor numeri successiuè multiplicati, dant 24, hoc est 1 *in* 2 *in* 3 *in* 4 $=$ 24: quare ad propositam quæstionem respondeo, illas literas simul permutato ordine scribi posse vigesies quater.

Pro exemplo secundi casus proposita sit vox *amare*, quinque literas continens, ex qui-

quibus solę quatuor sunt dissimiles. Primò, iuxta primum casum, 1 *in* 2 *in* 3 *in* 4 *in* 5 = 120, adeòque X = 120. Secundò, 1 *in* 2 = 2, adeòque Z = 2. Tertio, X *per* Z. hoc est 120 *per* 2 = 60: adeòque P = 60: quare ad propositam quæstionem respondeo, literas contentas voce *amare*, permutato ordine simul scribi posse sexagesies.

Vt melius appareat quantum excrescat permutationum possibilium multitudo, crescente rerum numero: iuxta hanc regulam inquirantur permutationes possibiles in 24 alphabeti literis: inuenietur numerus 620448401733239439360000, de quo facile foret ostendere, illo minorem esse numerum vocum omnium contentarum hactenus in vniuerso mundo scriptis libris: atque verissimum esse quod mille millionibus scriptorum, mille millionibus annorum, scribere non possent omnes possibiles permutationes 24 literarum alphabeti: vt de permutationibus agendo pluribus probat P. Taquet.

Vulgaris regula pro inueniendis terminis contentis in serie continuè proportionalium terminorum: ad quam spectant quæstiones de lucro successiuo, quod aliter lucri lucrum appellatur.

EX dictis de proportionibus cap. 3. huius libri, satis constat quid sint termini continuè proportionales: huiusmodi terminorum continuè proportionalium pluralitas, appellatur series continuè proportionalium terminorum, quæ aliter dicitur progressio Geometrica: ascendens quidem, si præcedentes termini succedentibus minores sint: descendens verò, si præcedentes termini succedentibus maiores sint. Huiusmodi series, siue progressiones, habent pulcherrimas proprietates, ex quibus aliquas, de more, nitidè proponit P. Andreas Taquet, in opusculo quod inscribitur Arithmeticę theoria & praxis: talis proprietas est, exempli gratia, terminos in huiusmodi progressione siue ascendente siue descendente possibiles, nullo numero esse exprimibiles: sed constituere vnum ex illis numeris quos appellamus potentiales: atque, iuxta considerationem 2. libri 3. Logisticæ, constituere numerum potentialem infinitum: & tamen infinito illi potentiali numero planè æquiualentem numerum actualem finitum dari posse ostendit: & docet quomodo inueniatur in quouis casu agēte de progressione Geometrica descendente. Huiusmodi proprietates plurimas atq; pulcherrimas habent Geometricæ progressiones, quæ licet dignissimæ sint attenta consideratione, eas tamen in his Logisticæ nostræ libris prætermittimus; quippe (vt iterum notamus in fine cap. 12. libri 2.) contenti solum in hoc libello proponere, firma, vniuersalia, commoda, & satis declarata Matheseos elementa quæ videbantur alibi non inueniri: atque hoc loco, de progressionibus Geometricis ea solum proponimus, quæ requiruntur pro regula de qua agimus.

Hæc regula admittit duos casus diuersos: in vtroque aliquid inueniendum est spectans ad progressionem, siue seriem de qua agitur. Primus casus supponit cognitum vnum aliquem seriei terminum, & præterea denominatorem seriei: hoc est communem denominatorem singularum proportionum quæ inueniuntur inter terminos constituentes propositam seriem. Secundus casus supponit cognitos duos terminos seriei siue progressionis de qua agitur.

In primo casu, siue supposita cognitione vnius termini F, & denominatoris X. Primò, denominator X toties in se ducatur quot sunt termini qui in serie intercedunt, inter terminum F & terminum inueniendum: atque hoc productum vocetur Z: secundò, terminus F ductus in Z, dabit terminum inueniendum, si sequitur ter-

terminum F: vel terminus F diuisus per Z, dabit terminum inueniendum, quando in progressione præcedit terminum F.

In secundo casu, siue supposita cognitione duorum terminorum B & F. Primò, scribatur numerus radicalis cuius numerator sit vnitas, & denominator cõtineat tot vnitates, quot termini in serie intercedunt inter datos terminos B & F; & post literam q scripta sit ad minimos terminos reducta vulgaris fractio, cuius numerator indicet subsequentẽ ex seriei cognitis terminis B & F, denominator verò indicet reliquũ, siue præcedentẽ ex cognitis seriei terminis B & F. Secundò, per dicta cap. 5. libri primi Logisticæ, inueniatur radix indicata à scripto radicali numero: hæc erit denominator seriei de qua agitur: hunc denominatorem per literam X indicando, iuxta dicta in primo casu adhibendo alterutrum ex terminis B vel F, inuenietur quæsitus seriei terminus.

Exempli gratia, progressionis siue seriei continuè proportionalium termini sint.

A	B	C	D	E	F
6	12	24	48	96	192

Seriei denominator X = 2.

Pro primo casu, suppono cognitum terminũ F siue 192, & denominatorem X siue 2: inueniendum verò terminum B, inter quem, & terminum F tres alij interponuntur. Primò itaque cognitum denominatorem X, nimirum 2, tertio ducendo in seipsum habetur numerus Z, qui erit 16: denique F siue 192, diuidendo per Z siue 16, habetur 12, qui erit quæsitus terminus B.

Pro secundo casu, suppono cognitos duos terminos, B siue 12, & F siue 192: quæri verò denominatorem X & reliquos seriei terminos. Primò, quia inter B & F tres alij termini interponuntur, scribendus radicalis numerus, erit $R3q\frac{16}{1}$: etenim fractio $\frac{192}{12}$ reducta ad minimos terminos, est $\frac{16}{1}$. Deinde, quia $R3q\frac{16}{1} = \frac{2}{1}$ ll 2: etiam quæsitus denominator X = 2. Denique ex terminis inter B & F medijs, quilibet inueniri potest iuxta præscripta pro primo casu: vel si omnes inueniendi sint, minorem B siue 12 ducendo in X siue 2, habetur C siue 24: & hunc iterum ducendo in X siue 2, habetur D siue 48: quem etiam ducendo in 2, habetur E siue 96.

Pro alio exemplo in quo vulgares fractiones constituunt Geometricæ progressionis, siue seriei continuè proportionalium terminos considerentur subsequentes.

A	B	C	D	E	F
$\frac{4}{1}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{64}{9}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{1024}{81}$	$\frac{4096}{243}$

Denominator X, sit fractio $\frac{4}{3}$

Pro primo casu suppono cognitum terminũ F siue $\frac{4096}{243}$, atq; denominatorem X, nimirum $\frac{4}{3}$: inueniendũ verò terminũ C, inter quem atq; terminum F duo alij termini intercedunt. Primò, cognitus denominator $\frac{4}{3}$ bis in se ductus, dat $\frac{64}{27}$, qui erit numerus Z: per hunc numerum diuidendo datum terminum F siue $\frac{4096}{243}$, productum erit terminus C, nimirum $\frac{64}{9}$.

ro secundo casu, cogniti sint duo termini, C siue $\frac{64}{9}$, & F siue $\frac{4096}{243}$: fractio quæ inuenienda præscribitur, erit $\frac{4096}{243}$ *per* $\frac{64}{9}$: hæc fractio reducta ad minimos terminos, erit $\frac{64}{27}$: quare numerus radicalis scribendus, erit $R2q\frac{64}{27}$: quæ radix, erit $\frac{4}{3}$, nimirum denominator X quæsitus; vnde, vt diximus in primo exemplo secundi casus, facile est inuenire quoslibet reliquos terminos progressionis de qua agitur.

Pro-

Pro quæstionibus de lucro successiuo, siue lucri lucro; præcognita hac regula, sufficit notare, quod numeri, lucrum successiuum indicantes, constituant terminos progressionis Geometricæ, quodque huius progressionis denominator indicetur à fractione minimis terminis expressa, in quâ numerator est aliquis progressionis terminus, denominator verò est terminus progressionis immediatè præcedens: quare supposito, quod 100 aurei vno anno lucrentur 5 aureos, atque hæc 100 aureorum summa, simul cum lucro suo subsequenti anno similiter lucretur, idemque successiuè fiat per annos aliquot: primus progressionis terminus erit 100: secundus, 100 simul cum suo lucro vnius anni, hoc est 105: Tertius terminus erit 105 simul cum suo lucro annuo, atque ità de cæteris. Denominator progressionis erit numerus $\frac{21}{20}$, hoc est ad minimos terminos reducta fractio $\frac{105}{100}$. Hinc supposito quod 100 aureorũ summa vno anno lucretur 5 aureos, adeòque quod vno anno fiat summa 105 aureorum, similiterque excrescat annis subsequentibus: quæratur quanta erit hæc summa 100 aureorum, anno 12? Datur progressionis primus terminus 100, & eius denominator $\frac{21}{20}$: quæritur verò terminus decimustertius: quæ quęstio spectat ad primũ casum propositæ regulę. Rursus, supposito quod summa 100 aureorum annis quinque excreuerit in summam $\frac{4084101}{3200000}$ aureorum: petatur verò qualem sui partem singulis annis lucrata fuerit: cognoscuntur duo progressionis termini, nimirum primus & sextus: quæritur verò progressionis denominator, qui erit $\frac{21}{20}$: & quæstio spectat ad secundum casum expositæ regulæ. Pari modo ijsdem suppositis, si quæratur quanta fuerit hæc summa anno septimo? ex duobus, nimirum primo & sexto progressionis terminis cognitis, petitur octauus terminus: quæ quæstio iterum spectat ad secundum casum propositæ regulæ.

Quæri, potest, vtrum pro quæstionibus de lucro successiuo proposita regula sufficiat pro omnibus quæstionibus agentibus de huiusmodi lucro? Dubitandi ratio potissimum resultare posset ex duplici quæsito: primum vocetur, quando summa cognita H (in quam lucro successiuo excrescere supponitur data altera minor summa) non inuenitur inter summas post primam summam A succedentes, atque constituentes reliquos terminos progressionis habentis datum denominatorem X. Secundum quæsitum appelletur, quando iuxta secundum allatæ regulæ casum scriptus radicalis numerus talis est, vt non inueniatur illi æquiualens vulgaris numerus qui in secundo casu inueniendus præscribitur.

Vt allatis dubitandi rationibus atque fundamentis satisfaciam, atque ità appareat quam vniuersalitatem habeat proposita lucri successiui regula, & constet, eam sufficere pro commemoratis quæsitis in ordine ad vsus ciuiles, pro quibus istæ vulgares regulæ proponuntur; idque verum esse supposito (vt hic supponi necessarium est) quod cum Arith[illegible] nobis sermo sit, adeòque pro his regulis nihil præscribere liceat quod non contineatur intra terminos vulgaris Arithmeticæ, hoc est nihil diuersum ab vsu vulgarium numerorum in operationibus Logisticis, atque inuentione radicum quas habent: de propositis duobus quæsitis paulò pluribus agendum est, & aliqua notanda, vel ad faciliorem regulæ vsum, vel ad clariorem eius intelligentiam.

In primo ex commemoratis duobus quæsitis, supponitur cognita summa lucrans A, & eius pars X quam lucratur vno anno; petitur quo tempore, successiuo lucro excrescat in cognitam summam H? Primò, inter summas annis subsequentibus correspondentes inuentas iuxta primum casum propositæ regulæ pro lucro successiuo, notentur duæ diuersæ E & F; ita vt vna E proximè minor, altera F proximè maior sit, data summa H. Secundò, inueniantur numeri P, Q, T, sic vt F − E = P, atque F − H = Q: præterea P *ad* Q = 365 *ad* T. Denique à cognito

 anno-

annorum numero quo summa lucrans A excrescit in summam F, auferendo dies indicatos ab inuento numero T, residuus annorum dierumque numerus proximè indicabit tempus quæsitum.

Exempli gratia, supposito quod A = 6 (siue placeat intelligere sex scuta, siue sex scutorum centena, aut millena, aut aliam quamcunque significationem quam placet huic numero concedere) hæc summa A tam multum lucretur vno anno vt excrescat in summam 18: adeòque progressionis quam constituunt subsequentibus annis respondentes summæ, denominator X, sit 3. His cognitis, quæratur quot anni requirantur vt data summa A siue 6 excrescat in summam H, quæ sit 1400. Primò, iuxta primi casus præscripta, inueniantur subsequentis progressionis termini.

A	B	C	D	E	F
6	18	54	162	486	1458

Ex his summis, progressionis terminos constituentibus, E siue 486, erit proximè minor: & F siue 1458, erit proximè maior summa H quæ est 1400. Præterea F — E, hoc est 1458 — 486 = P siue 972: atque F — H siue 1458 — 1400 = Q siue 58: & quia 972 *ad* 58 = 365 *ad* $21\frac{718}{972}$ neglectis fractionibus ad præsens institutũ parum vtilibus, numerus T erit 21. Deniq; ex quinque annis quibus summa A siue 6, excreuit in summam F siue 1458, auferendo dies 21 indicatos à numero T, remanent quatuor anni & dies 344, constituentes tempus, quo summa A siue 6, succesiuo lucro singulis annis in triplum excrescendo, proximè fieret summa 1400. Quod petebatur.

Notandum, nos asseruisse inuentam vt hic diximus propositi quæsiti solutionem, proximè satisfacere quæsito: hoc est quæsito satisfacere, non in rigore Mathematico, sed in eo rigore qui sufficit pro vsu ciuili propositæ lucri succesiui regulæ: in quo ciuili vsu regulæ, paucorum dierum error nullius momenti est, præsertim quando lucri tempus per annos integros computatur. Si tamen placeret huiusmodi quæsiti solutio magis accurata, vt posit adhiberi in circumstantijs, in quibus potius eligenda videtur, cum maiori solutionis molestia coniuncta accuratior solutio: quam cum minus accurata solutione, coniuncta minor molestia in solutionis inuentione: talis solutio, pro libitu magis magisque exacta haberi potest iuxta subsequentia præscripta. Primò. Ex cognita, vt in quæsito supponitur, summa A siue 6 & eius lucro annuo, iuxta primum casum propositæ regulæ, inueniatur summa B, in quam vno anno excrescit summa A. Secundò, iuxta dicta in secundo casu regulæ, inueniatur denominator progresionis, in qua, inter extremos terminos A & B tot medij intercedunt, quot in vno anno inueniuntur, aut menses, aut dies, aut horæ, aut aliæ quæuis mensuræ temporis, quarum vna in circumstantijs in quibus aliquis versatur, negligi potest. Tertiò, inuentus progresionis denominator toties succesiuè ducatur in terminum A, vt tandem producatur numerus H, vel illo proximè maior: sic enim institutarum multiplicationum numerus, in assumptis temporis mensuris indicabit quæsitum: nimirum tempus quo lucro succesiuo summa A excrescit in summam H; atque hæc solutio, si in rigore Mathematico exacta non sit, saltem ab hac exactitudine aberrare non poterit integra temporis assumpta mensura, quæ pro libitu quantumcunque parua assumi potest.

Pro secundo quæsito, quando non inuenitur vulgaris numerus qui sit radix numeri radicalis scripti vt præscribitur, per vulgarem Arithmeticam haberi non potest propositi quæsiti solutio quæ sit exacta in rigore Mathematico: sed tamen haberi potest solutio exacta in rigore ciuili: quæque à solutione exacta, in rigore Mathematico, aberret quidem, sed tam parum aberret, vt talis error in re ciuili pro nihilo reputetur: licet enim exacta radix commemorati numeri radicalis, exprimi

primi non posſit vllo vulgari numero, nihilominus iuxta dicta in praxi 3. cap. 5. lib. 1, appropinquando ad veram radicem, haberi poteſt numerus vulgaris, minus minuſque pro libitu aberrans à vera ſiue exacta radice, atque hæc aberrans radix adhiberi poterit, vt in ſecundo caſu adhibetur numero vulgari expreſſa vera radix, quando inueniri poteſt. Quod ad hoc ſecundum quæſitum diximus exemplo non indiget vt magis declaretur: quippe dictis ad ſecundum regulæ caſum, tantum addit, vt quando inueniri non poteſt vulgaris numerus qui ſit vera atque exacta radix, quæq; iuxta regulam lucri ſucceſſiui adhiberi debet, eius loco adhibeatur radix veræ proxima, ſiue ſatis parum aberrans à vera radice.

Si nobis hic ſermo non eſſet de ſolis regulis vulgaris Arithmeticæ, ſed ſimpliciter Arithmeticæ regulas proponeremus: laborandum non fuiſſet, ſiue ſcripti radicales numeri, habeant, ſiue nō habeant indicatam radicem exprimibilem per numerum vulgarem; ſiquidem Arithmeticæ non minus conueniat vſus radicalium, quam vulgarium numerorum: verum ad Arithmeticam vulgarem, ſpectat quidem inuentio radicum quas habent vulgares numeri, vel appropinquatio ad veras radices quas non habent: ſed tamen ad vulgarem Arithmeticam non ſpectat vſus numerorum radicalium pro Logiſticis operationibus; adeòq; pro vulgari Arithmetica illicitum putamus præſcribere, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, aut diuiſionem, numerorum radicalium; & conſequenter vſum denominatoris alicuius progreſſionis, eo ipſo quod talis denominator ſit numerus radicalis. Quoniam verò hæc appendix à nobis proponitur, non tam Logiſticæ noſtræ amatoribus, quam ijs qui potiſſimum delectantur vulgari practica Arithmetica in ordine ad vſus ciuiles; quod hos nihil iuuat, prætermittendum putamus: vt ſunt altiores praxium conſiderationes, aut demonſtrationes.

Ca-

PRimum Caput. Proponit annotata & paucis declarata quindecim axiomata nostræ Logisticæ.

Secundum Caput. Continet octo theoremata elementaria de proportionibus.

Tertium Caput. Continet nouem theoremata elementaria pro ijs quæ dependent ab angulis.

Quartum Caput. Continet octo theoremata elementaria de ductibus Geometricis nostræ Logisticæ.

Nota. Præcedentibus quatuor capitibus continentur illa omnia, quæ, supposita terminorum intelligentia, constituunt vniuersalia nostræ Logisticæ elementa speculatiua, quę afferuntur breuius proposita, latius patentia, solidius demonstrata quam Euclidea elementa: in reliquis capitibus, siue huius, siue etiam præcedentis libri, amplissimè declaratur vsus atque vtilitas istorum elementorum, ex quibus constant reliqua, siue problemata, siue praxes, siue theoremata, quæ aut hoc aut præcedenti libro continentur.

Quintum Caput. Ostendit veritatem praxium propositarum cap. 2. lib. 1. atque agentium de additione & subtractione.

Sextum Caput. Demonstrat subsistentiam praxium quæ in parte 1. cap. 3. lib. 1. afferuntur pro regula aurea, vel eius compendijs: quæ aliter dicuntur multiplicatio, aut diuisio, & proponuntur in capite 2. lib. 1.

Septimum Caput. Probat legitimas esse praxes quæ in diuersis partibus capitis 2. lib. 1. apponuntur declaratis illic operationibus Logisticis; quę omnes agunt de inuentione æquiualentium quantitatum.

Octauum Caput. Demonstrat nouemdecim diuersa problemata, vtilia pro Geometria practica, atque annotata cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Nonum Caput. Proponit demonstrationes singularum assertionum quæ ad sex diuersas hypotheses annotantur capite nono lib. 1; in singulis his assertionibus affirmatur aliqua æquatio inter diuersas quantitates.

Decimum Caput. In priori parte proponit, ac demonstrat aliqua theoremata, asserentia diuersas proprietates conuenientes numeris vulgaribus, aut illorum radicibus. In secunda parte demonstratas exhibet libri primi praxes agentes de numeris radicalibus.

Vndecimum Caput. Agit de resolutionibus æquationum, atque ostendit subsistentiam praxium propositarum cap. 7. lib. 1.

Appendix. Euclideorum elementorum, sex prioribus libris, quarto excepto, contentas propositiones exhibet demonstratas; in his tamen demonstrationibus nihil vnquam assumitur vt demonstratum vel ab Euclide vel ab alio Mathematico.

LIBER SECVNDVS LOGISTICÆ VNIVERSALIS

IN QVO

Demonſtrata proponuntur eius fundamenta ſpeculatiua: ex quibus inferuntur eius elementa practica.

SPeculatiuæ Logiſticę prima elementa conſideramus conſiſtere, in terminorum intelligentia, & veritatibus, quæ ſatis immediatè manifeſtæ ſunt ex terminorum intelligentia, quæque aliter appellantur axiomata. Quæ his primis elementis ſuccedunt, ideòque ſecunda ſpeculatiuæ Logiſticę elementa dici poſſent, aliter appellantur theoremata elementaria, & ſunt veritates, non admittendæ, niſi ex primis elementis legitimè inferantur. Quoniam verò manifeſtum eſt, ex primis elementis legitimè inferri: quæ vera eſſe euincuntur diſcurſu legitimo, in quo breuiter repetitur, atque commemoratur ſenſus terminorum alibi expoſitorum; reprehenſibilem non arbitror Logiſticam ex eo capite, quod inter elementaria numeret aliqua theoremata, non minus manifeſta ex terminorum intelligentia, quam ſint nonnullæ veritates, quæ proponuntur inter axiomata.

Inter theoremata Logiſticæ, quæ appellantur elementaria, non admittimus quæuis theoremata, licet pulchra ſint, & vtilia, atque non nimis difficilia pro ijs, qui accedunt ad Matheſeos ſtudium: ſed pro Logiſticæ ſpeculatiuæ elementis, à nobis electa theoremata, appellamus elementaria: elegimus autem pauca, ſed quę nobis videbantur magis neceſſaria, atque ſufficientia Logiſticæ Methodo, non tantum pro omnibus, verum etiam pro longè pluribus, quam ſint illa, pro quibus ſufficiunt prolixiora, atque paſſim vſitata Matheſeos elementa, quæ appellantur Euclidea: ſiue ſermo ſit de his elementis, vt ab antiquioribus fuerunt propoſita, ſiue vt reſtricta, vel ampliata, vel reſtituta, vel expurgata, vel quibuſcunque alijs ſimilibus titulis inſignita, proponuntur à Mathematicis magis modernis. Logiſticæ enim elementa licet breuiſſima, tamen ſufficere arbitramus, tum pro ijs, quæ antiquæ Matheſeos Methodo ex prędictis amplioribus elementis demonſtrantur, tum pro ijs, quæ ars illa magis moderna, atque celeberrima, quæ appellatur Algebra deducit ex ſuis elementis: tum etiam pro alijs, pro quibus non ſufficiunt, & antiquæ Matheſeos, & Algebræ elementa: qua de re pluribus agimus lib. 3. Logiſticæ.

Commemorata Logiſticæ elementa, fructu adeò ampla, quam mole exigua atque reſtricta ſint: ſatis conſtat ex præcedenti libro; ſiquidem eius theoremata omnia demonſtrationibus deſtituta, annotata inueniantur capite octauo primi libri Logiſticæ: vbi tamen pauciora, quam triginta theoremata inueniuntur: neque ab his alia theoremata requirimus, vt demonſtrata exhibeamus Logiſticę noſtræ elementaria theoremata, quæ ſimul cum terminorum expoſitionibus, & veritatibus ex terminorum intelligentia manifeſtis, conſtituunt vniuerſa elementa, quæ admittit, & requirit Logiſtica noſtra.

Horum elementorum intelligentiam requirimus, & sufficere existimamus Logisticæ studiosis, vt per legitimos, atque dialecticæ regulis conformes discursus, demonstrent, aut veritatem, aut falsitatem propositæ propositionis Mathematicæ: atque in hunc finem, non quidem necessarias, sed tamen maximè vtiles existimamus inuentionis regulas priori libro propositas: etenim licet asseruerimus prædicta Logisticæ elementa sufficere pro demonstranda veritate, aut falsitate propositę propositionis Mathematicæ, tamen non affirmauimus has demonstrationes semper obuias, & faciles esse. Immo verò independenter á secunda regula Logisticæ, exempli gratia demonstrare aliquod in posterioribus eius exemplis propositum theorema, adeò arduum est, atque difficile, vt illi, qui similes difficultates superarunt, numerentur inter Matheseos heroes: tamen conformiter ad eamdem secundam regulam, demonstratum exhibere idem illud theorema, labor est discenti Logisticam proportionatus: atque ad efformandam talem demonstrationem illi sufficiunt Logisticæ elementa; idque verissimum esse quilibet cognoscet, si considerando à nobis cap. 12. allatam talis theorematis demonstrationem, aduertat, nunquam citari vllum eiusdem capitis 12 theorema, sed tantum citari, aut Logisticæ veritates elementares capite 8. libri 1. enumeratas, aut veritates ex his elementis prius deductas, atque facilè deducibiles.

Dixi, pauciora quam triginta theoremata sufficere pro Logisticæ elementis: non tamen negaui, his plura addi posse, in multis circumstantijs satis vtilia, & maximè commoda, atque scitu dignissima; nihilominus augendum non putaui exiguum numerum elementarium theorematum nostræ Logisticę. Maximè vtiles asseruimus veritates annotatas capite 9. libri primi: & aliquam illarum vtilitatem exhibuimus in parte 3. cap. 11. eiusdem libri, in declinandis compositis æquationibus: & tamen veritates, siue theoremata, quæ continentur capite 9. remouenda putauimus ab elementis Logisticæ. Celeberrima præstantissimaque fatemur theoremata, quæ capite 12. libri 1. constituunt exempla secundæ regulæ Logisticæ: nulla tamen ex ipsis annumeranda putauimus Logisticæ elementis; sed pro elementaribus theorematis tantum pauca elegimus; minor enim elementarium theorematum numerus, multum conducit, vt elementa facilius discantur, atque retineantur, & in promptu habeantur. Aliud verò est, theorema esse vtile, aut commodum, in ordine ad finem intentum à Logistica: aliud est, quod sit vtile, aut commodum in ordine ad alium finem. Logistica intendit docere Methodum statuendi, an proposita propositio mathematica vera sit, vel falsa, atque inueniendi propositi problematis solutionem: huic fini accommodata esse debent eius elementa; hac de causa pro elementis Logisticæ pauca theoremata elegimus, sed quæ videbantur sufficere ad finem commemoratum: dummodo præter dicta elementa sciantur regulæ Logisticæ. Quam verò facilè illis sit ex Logisticæ elementis inferre, atque demonstrare singula theoremata proposita capite 12. satis manifestum est ex demonstrationibus illo capite annotatis. Similiter quam parum difficiles sint demonstrationes theorematum, quæ capite 9. continentur patebit ex huius libri capite, in quo singula exhibemus demonstrata. Denique si singula, aut plura huiusmodi theoremata ex Logisticæ elementis satis facilè deducibilia, annumeranda forent Logisticæ elementis, nihil remaneret, in quo Logisticæ studiosi sese vtiliter possent exercere, nisi illa, quæ proportionata non sunt Logisticam discentibus; eosque obrueret elementarium theorematum immensus numerus. An fortè vtile non est, vt Logisticæ studiosi, minores difficultates superando Logisticæ Methodo, veluti cum fortissimis antiquorum Romanorum militibus ad palum sese exerceant, & discant cum maioribus verisque difficultatibus congredi, & de illis gloriosam palmam referre, quam sperare non potest, nisi benè exercitatus? An laudabilius, atque vtilius non est, ex paucis

ele-

elementis expeditè inferre posse, vtrum verum, vel falsum, aut quomodo faciendum sit, de quo dubitatur: quam tantum meminisci, quod, vel etiam quomodo ab alijs ostensum fit: id verum, vel falsum esse, vel faciendum sit? Certè communi Mathematicorum iudicio, commiseratione, vel risu dignus haberetur, qui vellet in vnum volumen colligere maximam multitudinem problematum solutorum per regulam auream, vt deinde in hoc volumine inueniat solutionem problematis, de quo recurrit sermo. Etenim in expedito vsu regulæ aureæ, commodius atque decentius, quam in huiusmodi aliquo volumine circumferuntur, & vbi sese offert occasio in promptu habentur quælibet solutiones problematum spectantium ad regulam auream; quod autem communi Mathematicorum iudicio certissimum est de regula, quam vocant auream, alijsque similibus practicis regulis, quibus vtuntur: etiam, seruata proportione, verum existimamus de nostræ Logisticæ regulis speculatiuis dirigentibus discursus.

Hæc, & alia me mouerunt, vt proponerem Logisticæ elementa maximè contracta, atque pro illis elegerim pauciora quam 30. theoremata: immo verò hunc etiam numerum amplius contraxissem, nisi magis consultum existimassem inter elementaria theoremata numerare nonnulla, quæ potius pro subsequentium elementarium theorematum commoda demonstratione requirebantur, quam vt augerent numerum theorematum elementarium.

Elementaria Logisticæ theoremata in tres, vt ità dicam classes, siue species diuersas distinguo. Vna classis continet theoremata elementaria de proportionibus, siue rationibus. Altera proponit theoremata elementaria de angulis, vel ijs, quæ dependent ab angulis. Tertia continet theoremata elementaria agentia de productis ex Logisticæ ductibus Geometricis, atque nominatis. Diuersarum classium theoremata complector diuersis capitibus, quæ immediatè subsequuntur primum caput, in quo proponuntur axiomata; atque ità vniuersa Logisticæ nostræ speculatiua elementa, quæ à terminorum expositionibus diuersa sunt, complector quatuor prioribus capitibus huius libri. Pro terminorum expositionibus consulendus est index, in quo annotatus inuenietur locus, in quo declarantur. Hæc capita continentia Logisticæ elementa, subsequuntur reliqua, in quibus demonstratum proponitur, quod pro Logistica requiritur, & demonstratione indiget, atque diuersum est ab eius elementis speculatiuis.

CAPVT I.

Axiomata Logisticę.

Axioma dicitur propositio, quæ ex recta terminorum intelligentia, adeò manifesta est, vt nulla probatione indigeat. Talia axiomata existimamus singula, quæ subsequuntur; singulorum enim veritas immediatè patet ex terminis in Logistica adhibitis, dummodo intelligantur in sensu, qui declaratus inuenitur in loco citato in indice, etenim neque eodem in loco singuli termini declarantur, neque etiam singulis significatio illa attribuitur, quam habent apud alios Mathematicos. Hinc non rectam, sed planè perperam terminorum Logisticæ intelligentiam adhiberet, qui Logisticæ terminis attribueret significationem diuersam ab illa, quæ à nobis declaratur, atque hic supponitur, quando affirmatur, axiomata esse quæ subsequuntur. Si exemplum placet lege decimum subsequẽs axioma, & considera an axioma sit, eiusque veritas immediatè pateat, aut ex illa aliorum definitione rationis, quæ affirmat quod ratio, siue proportio, sit duarum eiusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatẽ habitudo, aut ex alijs vllis definitionibus, quæ apud Euclidem inueniuntur. Deinde considera in Logistica, prius quidem rationis, deinde rationum æqualium definitionem; sic enim intelligetur, quod in axiomate decimo asserta veritas immediatè manifesta sit ex terminis, prout in Logistica exponũtur, & adhibentur: nullatenus autem manifesta sit ex terminis prout adhibentur, & exponuntur ab Euclide: qui propterea inter sua theoremata numerat hanc veritatem à nobis assertam in decimo axiomate. Hæc non monui vt reprehendam, aut Euclidem, aut alium Euclidi assentientem quoad omnes definitiones quibus innititur eius doctrina de proportionibus (licet inter modernos Mathematicos, tales perpauci inueniantur) sed ideò tantum indicandum putaui, ne existimetur, à me, aut inutiliter, aut sine vrgenti necessitate dictum quod hic monui, nimirum Logisticæ terminos intelligendos esse in sensu, qui in Logistica declaratur, meque non aliter, quam supposito hoc sensu, asserere, subsequentes huius capitis propositiones, esse verissima, & propriè dicta, atque rigorosa axiomata: his tamen addo, quod terminorum expositionem, apud alios vsitatam, non variauerim, nisi me ad hoc impellente, aut vrgenti necessitate, aut maximè notabili commoditate, atque vtilitate: quod si ipsis Euclideæ doctrinæ, expositoribus, multo leuiori ex causa licitum fuit, & passim vsitatum: certè mihi illicitum dici non poterit, qui in tradenda Logistica, nullum ità ducem sequor, vt eius, aut doctrinam, aut doctrinæ partem vllam præsupponam.

Axioma I.

Duæ quantitates, eidem tertię quantitati ęquales, siue quoad magnitudinem, siue quoad valorem: etiam inter se ęquales erunt.

Nota, quod in hoc axiomate non determinem vtrum valor quantitatis, sit, vel non sit quantitas, de quo plura dicenda in loco citato in indice ad vocem valor quantitatis. Cæterum supposito quod valor quantitatis etiam sit quantitas, satis erat dicere, quod quantitates, eidem tertiæ æquales, sint inter se æquales. Si contrarium supponatur, verum non erit, quod duæ quantitates, quoad valorem eidem tertiæ æquales, sint inter se æquales; sed tamen erunt quantitates, quoad valorem inter se æquales, quæ aliter dicuntur quantitates inter se æquiualentes: possuntque inter se æquiualentes esse duæ quantitates, licet sint inter se maximè inæquales.

Axioma II.

Duo producta ex eadem operatione Logistica, sunt inter se æqualia: quando superiores genitores inter se, & etiam inferiores genitores inter se ęquantur.

Nota, quod in hoc axiomate breuius asseritur, non est diuersum ab eo, quod pluribus significaretur, dicendo. Primò quod æqualibus addendo æqualia, producantur æqualia. Secundò, quod ab æqualibus auferendo æqualia, remaneant

neant ęqualia. Tertiò quod inter se æqualia, ducendo in alia etiam æqualia inter se, producantur æqualia. Quartò, quod inter se æqualia diuidendo per alia inter se æqualia, producantur æqualia inter se: nullas enim præter has quatuor Logisticas operationes admittit Logistica: vbi tamen vlterius aduertendum, quod radicum extractio, sit species diuisionis, & consequenter iuxtà positam hic quartam assertionem, æqualium quantitatum radices eiusdem nominis, sint inter se æquales. Axioma manifestum est ex Logisticarum operationum intelligentia.

Axioma III.

Productum ex propriè dicta additione, est maius quolibet genitore.

Nota additio propriè dicta, est illa, in qua singuli genitores, & genitum, sunt quantitates eiusdem speciei: hoc est quantitates, quæ considerantur eodem modo restrictæ: reliquæ additiones omnes, non sunt additiones propriè dictæ, licet sint veræ, ac reales additiones, quibus omnino conueniat definitio additionis. Propriè dicta additio est, per quam equorum numero, addendo numerũ leonum, habetur maior animalium numerus: in quantum in hac additione equi, & leones tantum considerantur vt animalia sunt. Secundò propriè dicta additio est illa, per quam nummis aureis, addendo nummos argenteos, producitur maior nummorum numerus: in quantum aurei, & argentei nummi tantum considerantur vt nummi sunt. Tertiò, propriè dicta additio est, per quam vino bono addendo, & miscendo vinum corruptum, habetur maior vini quantitas. Quartò, propriè dicta additio est, per quam vnitatibus positiuis, addendo vnitates negatiuas, nascitur maior vnitatum numerus: in quantum vnitates positiuæ, & negatiuæ tantum considerantur vt vnitates sunt. Hic vlterius aduertendum, quod in primo, & secundo exemplo, etiam producti valor, maior sit valore cuiuslibet genitoris: verum in tertio, & quarto exemplo, producti valor, non est maior, immo est minor valore alicuius genitoris.

Rursus propriè dicta additio est, in qua puncti vnitas, additur punctorum numero: verum non est propriè dicta additio, in qua punctum, punctis additur: & productum ex hac impropria additione, non est maius quolibet producente: punctum enim quantitas non est: puncti vnitas, est vera vnitas, & quantitas discreta. Denique propriè dicta additio est, in qua valor vniuersalis lineæ, additur valori vniuersali superficiei, vel corporis, vel numeri: quodque ex hac additione producitur, est quantitas vniuersalis, maior quam inueniatur in quolibet genitore: præterea genitores, & genitum sunt quantitates eiusdem speciei, siue eodem modo restrictæ; propria additio non est, in qua lineæ additur superficies, vel corpus, vel numerus: quia genitores, & genitum non sunt eiusdem speciei, aut generis, neque productum, est maius quolibet genitore.

Axioma IV.

Productum ex propriè dicta subtractione, est minus aliquo genitore.

NOta propriè dicta subtractio est, in qua productum, est quantitas eiusdem speciei cum singulis genitoribus: hoc est, quantitas eodem modo restricta; reliquæ subtractiones, non sunt subtractiones propriè dictæ. Cæterum, quæ vlterius indicata sunt circa tertium axioma, vtilia sunt pro vlteriori intelligentia huius axiomatis.

Axioma V.

Quantitatum constantium ex antecedente, & consequente termino, qui connexi sunt particula *in*; *per*, *ad*, atque commune consequens habentium, additio absoluitur, quando manente eodem consequente termino, adduntur termini antecedentes.

NOta. Familiare, & necessarium est pro Logistica, considerare producta ex multiplicatione, & diuisione, indicata per genitores connexos particula *in*, vel *per*: ità scriptio 4 *in* 2, significat productum ex multiplicatione indicatum per genitores, quod productum planè æquiualet producto 8, quod ex tali multiplicatione etiam oritur, sed aliter quam per genitores indicatur. Similiter scriptio 8 *per* 2, significat productum ex diuisione, in qua 8 diuiditur per 2: sed est productum indicatum per genitores, planè æquiualens producto 4, quod ex eadem diuisione etiam oritur, sed non indicatur per genitores. Particula *ad* in Logistica adhibetur, vt per proportionis, vel rationis terminos exhibeatur proportio, nimirum eius terminos connectendo particula *ad*. Iam verò in huiusmodi scriptionibus, ex duobus terminis connexis aliqua particula *in*, *per*, *ad*, antecedens dicitur, qui præcedit, siue antè particulam positus est: alter terminus qui sequitur, siue post particulam positus est, appellatur consequens terminus. Ex his videtur manifestus, sensus quinti axiomatis; vt eius veritas manifestè pateat ex conceptu siue definitione additionis, satis arbitror post intelligentiam multiplicationis, diuisionis, & proportionis, reflectere, quod quemadmodum productum ex multiplicatione, est antecedens terminus ductus in consequentem: ità productum ex diuisione, est antecedens terminus diuisus per consequentem terminum: & proportio, est antecedens terminus, relatus ad consequentem terminum: ex quo fit, vt si manente inuariato consequente termino, antecedentes addantur, fiat additio singularum istarum quantitatum constantium ex antecedente, & consequente termino; non potest autem consequens terminus inuariatus permanere, nisi eumdem consequentem terminum habeant quantitates, antecedentes terminos constituentes, quæ adduntur.

Axio-

Axioma VI.

Quantitatum conſtantium ex antecedente, & conſequente termino, qui connexi ſint particula *in*, *per*, *ad*, atque commune conſequens habentium, ſubtractio abſoluitur, quando manente eodem conſequente termino, fit ſubtractio circa terminos antecedentes.

NOta, quod ad intelligendum huius axiomatis, aut ſenſum, aut veritatem, nihil deſiderari poſſe videatur diuerſum ab ijs, quæ iuſtè requiri poſſunt pro axiomate præcedenti: quare hic nihil addo, ſed Logiſticæ ſtudioſum remitto ad notas quinto axiomati appoſitas, ſi fortè in aliqua axiomatis parte aliquid inueniat ſibi minus intelligibile.

Axioma VII.

Poſt æquè multas, & additiones reales, & ſubtractiones æquiualentes inferiorum genitorum inter ſe æquiualentium: quoad valorem inuariatus manet ſuperior genitor.

NOta, in Logiſtica admitti, & maximè neceſſariam eſſe aliquam additionem, quæ, ſiue propriè, ſiue impropriè additio dicenda ſit: tamen eſt vera, & realis additio: atque illi conuenit definitio additionis, eſtque poſſibilis, & vtilis, vt cæteræ additiones; nimirum tam in caſu, in quo ex datis quantitatibus conſequens eſt minor antecedente, quam in caſu, in quo conſequens eſt maior antecedente: in quo ſecundo caſu ſubtractio poſſibilis non eſt. Iam verò prædicta realis, & vera additio, licet vera, & realis additio ſit, atque poſſibilis in omni caſu, nihilominus planè æquiualet ſubtractioni, & ſubtractionis loco adhiberi poteſt; tum in caſibus, in quibus ſubtractio poſſibilis eſt, quam in caſibus, in quibus eſt impoſſibilis. Prædicta additio, aliter dicitur ſubtractio æquiualens: & eſt illa, in qua quantitatibus poſitiuis adduntur quantitates negatiuæ, vel quantitatibus negatiuis, adduntur poſitiuæ; de quibus poſitiuis, & negatiuis, maximèque myſterioſis quantitatibus, conſuli poteſt index; de hac vera additione, quæ ſubtractioni æquiualet, agit ſeptimum axioma: quoniam verò ex eius intelligentia conſtet, quod talis additio realis, in ordine ad imminuendum valorem, omnino æquiualeat ſubtractioni, tam manifeſtè verum eſt, quod dicitur in axiomate, quam clarè patet, quod quantitas inuariatam retineat ſuam magnitudinem poſt æquè multas, eiuſdem alterius quantitatis, & additiones, & ſubtractiones.

Axio-

Axioma VIII.

Quando baseos, quę duci potest ductu primo Geometrico, & nominato, singuli termini oppositi, siue singula puncta terminantia lineas rectas, per basim excurrentes, assurgunt ad eamdem altitudinem: etiam tota basis assurgit ad eamdem altitudinem, ad quam assurgunt dicti baseos termini, aut puncta.

Nota. Basis quæ duci potest ductu primo Geometrico, atque nominato, non inuenitur vlla diuersa à plana superficie, vel linea, cuius partes omnes sint in eadem plana superficie: vt constat ex definitione illius ductus Geometrici, qui à nobis dicitur primus, eiusque intelligentia abundè videtur sufficere, vt propositum axioma, habeatur, non tantum verum, sed etiam clarissimum.

Axioma IX.

Basis quę est recta linea, vel plana superficies, mota per extensionem quam habet: non causat productum ex vllo ductu Geometrico: sed tantum causat obliquitatem in tali producto, quando concurrit cum motu baseos iuxtà extensionem, quæ in basi non inuenitur.

Nota. Triplex diuersa extensio tantum possibilis est. Prima est, extensio in longum. Secunda est, extensio in latum. Tertia est, extensio in altum. In linea inuenitur vnica tantum ex his tribus extensionibus: hæc secundum se considerata, indifferens est, vt dicatur, vel extensio in longum, vel extensio in latum, vel extensio in altum. In superficie duplex extensio inuenitur, quarum vna dicitur in longum; altera extensio, secundum se indifferens est, vt appelletur extensio, vel in longum, vel in latum. Supposito quod vnica illa extensio, quæ in linea inuenitur appelletur extensio in longum: quodque ex duabus extensionibus, quæ in superficie plana inueniuntur, vna dicatur extensio in longum, altera extensio in latum: axioma considerat duos casus; primus est, quando recta linea, vel plana superficies, tantum mouetur iuxtà extensionem quam habet: hoc est, quod recta linea, tantum extensa in longum, non aliter quam in longum moueatur: vel quod plana superficies, tantum extensa in longum, & in latum, moueatur quidem, sed non aliter quam in longum tantum, vel certè in latum tantum; in hoc primo casu, axioma negat ex tali motu nasci productum ex vllo ductu Geometrico. Secundus casus est, quando recta linea, tantum extensa in longum, moueatur quidem in longum, sed simul, siue eodem tempore, moueatur in latum: vel certè, quando plana superficies, tantum extensa in longum, & latum, moueatur quidem, vel in longum, vel in latum: sed simul siue eodem tempore moueatur in altum: atq; hoc casu axioma asserit, quod motus in longum, qui in linea inuenitur: vel certè motus in longum, aut in latum, qui inuenitur in superficie, causet obliquitatem in producto quod generatur per reliquum ex duobus motibus, qui hoc casu supponuntur simul concurrere. Intellecto axiomatis sensu, hic fusius declarato, videtur impossibile aliquem dubitare posse de eius veritate, dummodo intelligat primum, & secundum ductum Geometricum nostræ Logisticæ.

Axioma X.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D: supposito quod A *ad* B = C *ad* D, legitimè sequitur A *in* D = B *in* C: hoc est productum ex multiplicatione extremorum terminorum A & D, æquari producto ex multiplicatione mediorum terminorum B & C. Et vicissim, supposito quod A *in* D = B *in* C, legitimè sequitur A *ad* B = C *ad* D: & præterea A *ad* C = B *ad* D: hoc est inter se æquari duas rationes, quarum extremi termini constituuntur à terminis primi producti, nimirum A & D: termini autem medij constituantur à terminis secundi producti, nimirum B & C.

Nota in definitione rationum æqualium qua vtitur logistica, quæque proponitur initio cap. 3. lib. 1. considerari prius æqualitatem facilè cognoscibilem, vtpote consistentem inter duas quantitates absolutas; nimirum inter duo producta ex multiplicatione indicata per genitores, adeòque indicata quatuor diuersis terminis A, B, C, D. Deinde statuit, quod in omni, & solo casu, in quo verum est A *in* D = B *in* C, etiam iuxtà logisticam verum esse, A *ad* B = C *ad* D, hoc est antecedens primi producti ad antecedens secundi producti, habere eamdem rationem, quam consequens secundi producti, habet ad consequens primi producti. Quoniam enim per æqualium rationum definitionem hoc verum est, in solo casu, in quo A *in* D = B *in* C: patet verum esse in casu in quo per suppositionem verum est quod A *ad* B = C *ad* D: adeòque supposito quod A *ad* B = C *ad* D, necessariò verum est, atque legitimè infertur: ergo A *in* D = B *in* C: vt asseritur in prima parte axiomatis. [illegible] quia per æqualium rationum definitionem in omni casu, in quo verum est A *in* D = B *in* C: necessariò verum est A *ad* B = C *ad* D: etiam id verum est, in casu in quo per suppositionem verum est, quod A *in* D = B *in* C: adeòque supposito quod A *in* D = B *in* C, legitimè infertur: ergo A *ad* B = C *ad* D: vt primo loco asseritur in secunda parte axiomatis. Denique ex conceptu multiplicationis manifestum est B *in* C = B *in* C, & consequenter verum esse non posse A *in* D = B *in* C, nisi etiam A *in* D = C *in* B: ergo supposito quod A *in* D = B *in* C, necessariò verum est A *in* D = C *in* B: & consequenter, vt prius, per definitionem æqualium rationum, verum est A *ad* C = B *ad* D: igitur supposito quod A *in* D = B *in* C, etiam necessariò verum est, & legitimè sequitur: ergo A *ad* C = B *ad* D: vt secundo loco asseritur in secunda parte axiomatis.

Ex his constat quomodo singula, quę asseruntur in axiomate, manifesta sint ex intelligentia illius definitionis rationum æqualium, qua vtitur Logistica. Ex tribus tamen consequentijs, quæ in axiomate asseruntur legitimæ: prima quæ infert A *in* D = B *in* C: & præterea secunda, quæ infert A *ad* B = C *ad* D, immediatè patent ex hypothesi, & definitione rationum æqualium, qua vtitur Logistica. Vltima, quæ infert A *ad* C = B *ad* D, non constat immediatè ex hypothesi, & definitione rationum æqualium, qua vtitur Logistica, sed immediatè patet ex veritate euidenter non separabili ab hypothesi, & rationum æqualium definitione. Hæc veritas euidenter non separabilis ab hypothesi, quæ supponit A *in* D = B *in* C: est, quod A *in* D = C *in* B, quia C *in* B = B *in* C.

Axioma XI.

Proportionalitas, siue proportio quam habet vna ratio ad alteram rationem: æqualis est proportioni, quam primæ rationis antecedens terminus, habet ad secundæ rationis antecedentem terminum, quando vtriusque illius rationis consequens terminus idem est.

Nota, pro huius axiomatis intelligentia, necessaria esse pleraque, quæ notantur initio cap. 3. libri primi Logisticæ: ex quibus manifestum est, quod quantitas A, relata ad quantitatem B, sit illa quæ aliter dicitur ratio A *ad* B; similiter quantitas C relata ad quantitatem B, est illa quæ aliter appellatur ratio C *ad* B; diuersitas verò relatæ quantitatis siue magnitudinis, à qua vna aliqua vel seipsa, vel altera, etiam minore, maior dici potest: tantum causatur ex diuersa magnitudine termini ad quem fit relatio. Sic exempli gratia, quod quantitas 4, relata ad quantitatem 2, sit maior quantitate 8, relata ad quantitatem 6: tantum causatur ex inæqualitate terminorum 2 *et* 6, ad quos fit relatio. Pari modo, quod eadem quantitas 8, relata ad quantitatem 4, non sit æqualis quantitati 8, relatæ ad quantitatem 2, tantum causatur ex inæqualitate quantitatum 4 *et* 2, ad quas fit relatio. Si verò hi termini siue quantitates, ad quas fit relatio inæquales nō sint, ex ipsis nō resultat vlla inæqualitas in relatis quantitatibus: sed eamdem prorsus magnitudinem habent, siue relatæ, siue non relatæ considerentur: ex quibus manifestum est, quod quantitates A & C, singulæ semper eamdem magnitudinem habeant ad inuicem, siue vlterius non relatæ considerentur, siue considerentur relatæ ad eamdem quantitatem B; atque hoc est quod asseritur in axiomate, & significatur dicendo proportionalitatē rationis A *ad* B, relatę ad rationē C *ad* B = rationi A *ad* C: quod idem breuius indicatur hac scriptione A *ad* B respectu C *ad* B = A *ad* C

Axioma XII.

Recta linea cum altera recta linea, vel plana superficie tantum concurrit in vnico puncto.

Nota axioma agere de casu in quo recta linea concurrit cum altera recta linea, vel plana superficie: in quo casu asserit quod illud in quo fit cōcursus, adeòque commune est, & lineæ quæ concurrit, & lineæ aut superficiei cum qua concurrit,

rit, sit lineæ terminus, siue punctum, nullam habens, aut longitudinem, aut latitudinem, aut altitudinem, quæ singula satis manifesta sunt ex intelligentia rectæ lineæ, & superficiei planæ.

Axioma XIII.

Quando arcum circuli semel tantum intersecat, aut recta linea, aut alius circuli arcus: hæc intersectio fit in vnico puncto.

NOta, quam manifestum est præcedens axioma in casu in quo recta linea secat aliam rectam lineam: tam clarè patet veritas huius axiomatis, supposita intelligentia illius curuæ lineæ, quæ circuli arcus dicitur.

Axioma XIV.

Duæ superficies planę, tantum semel concurrunt, & hic concursus, siue communis intersectio, est recta linea.

NOta, ad cognoscendam huius axiomatis veritatem, nihil requiri videtur diuersum ab intelligentia illius quantitatis, quæ non tantum superficies, sed plana superficies dicitur.

Axioma XV.

Anguli rectilinei, aut plani, inter se habent eam proportionem, quam habent arcus, qui sunt ipsorum mensuræ.

NOta, de mensuris angulorum, aut rectilineorum, aut planorum, aliqua notata inueniri initio cap. 6. libri primi: ex quibus satis intelligibile, & manifestum est hoc axioma. Rationabiliter tamen dubitari posset, & peti an angulus, sit, vel non sit quantitas: supposito verò, quod sit quantitas, vlterius quæri posset, ad quod genus quantitatis pertineat: nusquam enim indicatum est genus quantitatis continens aperturas: angulum verò aperturam esse asseritur initio cap. 6. lib. 1. Supposito autem quod angulus non sit quantitas, vlterius peti posset quomodo hic dicamus vnum angulum ad alterum habere proportionem, quandoquidem Logistica non admittat proportionem, nisi inter quantitates, immo ad hoc requirit, vt sint duæ eiusdem generis quantitates. Respondeo aperturam quantitatem non esse, ideòque angulus quantitas non est, neq; vllo quantitatis genere continetur: tamen magnitudo aperturæ, siue anguli, quantitas est, & continetur eo genere quantitatis, quam appellauimus maximè vniuersalem. Hanc quantitatem in diuersa quantitatum genera subdiuisimus in parte 3. cap. 1. lib. 1; non egimus tamen de ſpeciebus diuerſis, quæ admittuntur à ſingulis iſtarum quantitatum generibus. Cæterum cum logiſtica admittat, magnitudinem vlterius non reſtrictam eſſe quantitatem, & per reſtrictiones diuerſas quas admittit, non deſinat eſſe quantitas: negare non poteſt magnitudinem anguli, ſiue aperturæ, quantitatem eſſe: & ſimiliter magnitudinem valoris, curuitatis, ſoni, impetus, &c. eſſe quantitatem; quoties verò conſideratur proportio vnius anguli ad alterum angulum, conſideratur magnitudo vnius anguli, relata ad magnitudinem alterius anguli, & ſic cum antiquis Geometris, & Euclide in propoſitione 20. lib. 3. quæ proximè conuenit cum theore.7.partis 3.cap.8.lib.1. Logiſticæ, benè, & verè aſſerimus, angulum ad centrum duplum eſſe anguli ad circumferentiam; & in hoc axiomate benè affirmamus angulos eamdem proportionem ad inuicem habere, quam habent angulorum menſuræ.

CAPVT II.

Theoremata elementaria de proportionibus.

ALiquos terminos pro rationum intelligentia magis neceſſarios declarauimus initio cap.3. lib.1. pro reliquis terminis citato loco non ſatis declaratis, conſuli poterit index.

Theorema I.

Qualeſcunque quantitates ſint A, B, C.

DIco primò legitimè ſequi, A = B : ergo A *ad* C = B *ad* C.

Dico ſecundò legitimè ſequi, A *ad* C = B *ad* C : ergo A = B:

Demonſtratur prima pars. Quoniam per hypotheſim A = B per axioma 2. Patet A *in* C = B *in* C : igitur per axioma 10. etiam A *ad* C = B *ad* C. Quod erat demonſtrandum in prima parte.

Demonſtratur ſecunda pars. Quoniam per hypotheſim A *ad* C = B *ad* C: etiam per primam partem axiomatis 10. patet A *in* C = B *in* C: ergo per ſecundam partem axiomatis 10. A *ad* B = C *ad* C: ſed C = C: ergo A = B. Quod erat demonſtrandum in ſecunda parte.

Theorema II.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, D : ità tamen vt A *ad* B = C *ad* D.

DIco legitimè ſequi, atque inferri poſſe.

Primò, ergo B *ad* A = D *ad* C; qui modus argumentandi dicitur *inuertendo*, quia termini, qui in hypotheſi ſunt antecedentes, fiunt conſequentes, in rationibus, quarum æqualitas infertur.

Secundò, ergo A *ad* C = B *ad* D; qui modus argumentandi appellatur *permutando*, quia primæ rationis conſequens terminus, permutatur cum antecedente termino ſecundæ rationis.

Ter-

Tertiò, ergo A + A *ad* B = C + C *ad* D : vel ergo A + B *ad* B = C + D *ad* D : vel A + C *ad* B + D = A *ad* B : hic modus argumentandi dicitur ***componendo***, siue similiter addendo æqualium rationum similes terminos.

Quartò, ergo A − A *ad* C − C = B *ad* D, vel A − A *ad* B = C − C *ad* D : vel A − B *ad* B = C − D *ad* D : vel A − C *ad* B − D = A *ad* B ; hic modus argumentandi dicitur ***diuidendo*** : siue comparando quantitates ortas per subtractionem realem vel æquiualentem terminorum qui in rationibus æqualibus similes sunt.

Demonstratio primæ assertionis. Quoniam per hypothesim A *ad* B = C *ad* D : per axioma 10. A *in* D = B *in* C : ergo per idem axioma B *ad* A = D *ad* C. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ assertionis. Per hypothesim, A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma, etiam A *in* D = B *in* C : ergo per idem axioma, A *ad* C = B *ad* D. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio tertiæ assertionis, quam claritatis gratia distinguo in tres partes correspondentes tribus diuersis exemplis appositis tertiæ assertioni. In prima parte, quia per hypothesim A *ad* B = C *ad* D : etiam per 10. axioma, A *in* D = B *in* C : igitur vtrinque addendo æqualia A *in* D, vel C *in* B : etiam per 2. axioma A *in* D *et* + A *in* D = C *in* B *et* + C *in* B : ergo contrahendo huius æquationis partes, A + A *in* D = C + C *in* B ; igitur per 10. axioma, A + A *ad* B = C + C *ad* D, vt dicitur in prima parte tertiæ assertionis.

In secunda assertionis parte, per hypothesim A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma A *in* D = B *in* C : ergo vtrinque addendo B *in* D, etiam per 2. axioma A *in* D *et* + B *in* D = B *in* C *et* + B *in* D : ergo contrahendo vtramque æquationis partem, A + B *in* D = B *in* C + D : igitur per 10. axioma, A + B *ad* B = C + D *ad* D ; vt dicitur in secunda parte tertiæ assertionis.

In tertia assertionis parte. Per hypothesim A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma, A *in* D = B *in* C : ergo vtrinque addendo C *in* D, etiam per 2. axioma, A *in* D *et* + C *in* D = B *in* C *et* + C *in* D : ergo contrahendo vtramque æquationis partem, A + C *in* D = B + D *in* C : igitur per 10. axioma, A + C *ad* B + D = C *ad* D ll A *ad* B, vt constat ex hypothesi : patet igitur quod in tertia assertionis parte demonstrandum erat.

Demonstratio quartæ assertionis, in qua iterum tres partes distinguo respondentes tribus exemplis allatis in assertione. In prima parte, per hypothesim, A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma, A *in* D = B *in* C : igitur vtrinque æquiualenter auferendo æqualia, A *in* D, vel B *in* C, per 2. axioma, A *in* D *et* − A *in* D = B *in* C *et* − B *in* C : ergo contrahendo hanc æquationem, A − A *in* D = C − C *in* B : ergo per 10. axioma, A − A *ad* C − C = B *ad* D, vel A − A *ad* B = C − C *ad* D. Quod asserebatur in prima parte quartę assertionis.

In secunda parte, per hypothesim, A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma, A *in* D = B *in* C : igitur vtrinque æquiualenter auferendo B *in* D, per 2. axioma A *in* D *et* − B *in* D = B *in* C *et* − B *in* D : ergo contrahendo hanc æquationem, A − B *in* D = C − D *in* B : ergo per 10. axioma, A − B *ad* B = C − D *ad* D, vt erat demonstrandum in secunda parte.

In tertia parte, per hypothesim, A *ad* B = C *ad* D : ergo per 10. axioma, A *in* D = B *in* C : ergo vtrinque æquiualenter auferendo C *in* D, per 2. axioma, A *in* D *et* − C *in* D = B *in* C *et* − C *in* D : ergo contrahendo hanc æquationem, A − C *in* D = B − D *in* C : ergo per 10. axioma, A − C *ad* B − D = C *ad* D ll A *ad* B, vt patet ex hypothesi : adeòque constat quod pro tertia assertionis parte erat demonstrandum.

Theorema III.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, D, E, F. Suppoſito tamen, quod A *ad* B = D *ad* E, & præterea B *ad* C = E *ad* F.

DIco etiam A *ad* C = D *ad* F. Hoc argumentum vſitato vocabulo appellatur, *ex æquo*, ſiue ex æqualitate rationum.

Demonſtratio. Quoniam per hypotheſim A *ad* B = D *ad* E, permutando, per theor. 2. patet A *ad* D = B *ad* E: eodem modo, quia B *ad* C = E *ad* F, permutando, patet B *ad* E = C *ad* F: igitur A *ad* D = C *ad* F, quia ſingulæ æquantur eidem tertiæ rationi B *ad* E: igitur permutando, A *ad* C = D *ad* F. Quod erat demonſtrandum.

Theorema IV.

Qualeſcunque ſint quantitates A, B, C.

DIco in quinque ſubſequentibus ſcriptionibus, antecedentem terminum ad conſequentem, eamdem rationem habere.

Prima,	A *ad* B.	Quarta	A *in* C *ad* B *in* C.
Secunda	$\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{C}$		
Tertia	$\frac{C}{B}$ *ad* $\frac{C}{A}$.	Quinta	C *in* A *ad* C *in* B.

Demonſtratio. Primò, quoniam ex terminorum intelligentia conſtat, A *in* $\frac{B}{C}$ = B *in* $\frac{A}{C}$: etiam per 10. axioma, A *ad* B = $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{C}$; vt aſſeritur de prima, & ſecunda ſcriptione.

Rurſus, quia ex terminorum intelligentia manifeſtum eſt, $\frac{C}{A}$ *in* A = C: & præterea $\frac{C}{B}$ *in* B = C: patet $\frac{C}{B}$ *in* B = $\frac{C}{A}$ *in* A: ergo per 10. axioma, $\frac{C}{B}$ *ad* $\frac{C}{A}$ = A *ad* B: vt de prima, & tertia ſcriptione aſſeritur.

Præterea, quandoquidem pateat, A *in* C *in* B = A *in* B *in* C, per 10. axioma, A *in* C *ad* B *in* C = A *ad* B: vt de prima, & quarta ſcriptione aſſeritur.

Denique, quia C *in* A *in* B = C *in* B *in* A, patet ex 10. axiomate, C *in* A *ad* C *in* B = A *ad* B; vt aſſeritur de prima, & quinta ſcriptione.

Quoniam igitur proportiones repræſentatę ſingulis ſcriptionibus, quæ primam ſubſequuntur, æquales ſunt proportioni, quæ repręſentatur prima ſcriptione: patet omnes iſtas proportiones inter ſe æquales eſſe, ſiue repręſentare eamdem, aut inter ſe æquales rationes. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema V.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D.

Dico subsequentes quatuor æquationes tales esse, vt supposita vnius veritate, necessariò veræ sint reliquæ omnes: tametsi prima consistat inter duas proportiones: reliquæ consistant inter quantitates diuersas à proportionibus.

Prima æquatio, $A \textit{ ad } B = C \textit{ ad } D$.

Secunda æquatio, $A \textit{ in } D = B \textit{ in } C$.

Tertia $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$

Quarta $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$

Demonstratio. Primæ, & secundæ æquationis veritatem, aut falsitatem, ità connexam esse, vt vna sine altera non possit esse vera, immediatè patet ex axiomate 10. Præterea facta hypothesi, quod $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$: singula ducendo in B, etiam $\frac{A}{B} \textit{ in } B$, hoc est $A = \frac{C}{D} \textit{ in } B \parallel \frac{C \text{ in } B}{D}$: & iterum singula ducendo in D, etiam $A \textit{ in } D = \frac{C \text{ in } B}{D} \textit{ in } D \parallel C \textit{ in } B$. Rursus facta hypothesi, quod $A \textit{ in } D = B \textit{ in } C$, singula diuidendo per D, etiam $\frac{A \text{ in } D}{D}$, hoc est $A = \frac{C \text{ in } B}{D}$: igitur singula diuidendo per C, etiam $\frac{A}{C} = \frac{B \text{ in } C}{D} \textit{ per } C \parallel \frac{B}{D}$. Hinc patet secundæ, & tertiæ æquationis, aut veritatem, aut falsitatem separari non posse.

Denique supponendo, quod $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$: singula ducendo in C, etiam $\frac{A}{C} \textit{ in } C$, hoc est $A = \frac{B}{D} \textit{ in } C \parallel \frac{B \text{ in } C}{D}$: igitur singula ducendo in D, etiam $A \textit{ in } D = \frac{B \text{ in } C}{D} \textit{ in } D \parallel B \textit{ in } C$. Si verò supponatur $A \textit{ in } D = B \textit{ in } C$: singula diuidendo per D, etiam $\frac{A \text{ in } D}{D}$, hoc est $A = \frac{B \text{ in } C}{D}$: ergo singula diuidendo per C, etiam $\frac{A}{C} = \frac{B \text{ in } C}{D} \textit{ per } C \parallel \frac{B}{D}$. Ex quo patet secundæ, & quartæ æquationis veritatem, aut falsitatem separabilem non esse.

Quoniam igitur constat, quod prima, & secunda æquatio ità ab inuicem dependent, vt ad vnius veritatem necessariò sequatur alterius veritas: & etiam ostensum sit eodem modo ab inuicem dependere, secundam, & tertiam, ac præterea secundam & quartam ex propositis æquationibus; patet omnes quatuor istas æquationes tales esse, vt ex ipsis vna aliqua vera esse non possit, quin reliquæ omnes veræ sint. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Proponuntur quatuor Logisticæ scriptiones, quæ per datos qualescunque tres terminos A,B,C. diuersimodè exhibent quartum, atque ad datos tres proportionalem terminum.

Dico primò, A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B \, in \, C}{A}$

Dico secundò, A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B}{A}$ *in* C

Dico tertiò, A *ad* B $=$ C *ad* B *in* $\frac{C}{A}$.

Dico quartò, A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{1}{A}$ *in* B *in* C.

Demonstratio. Primò, B *in* C $=$ A *in* $\frac{B \, in \, C}{A}$: ergo per axioma 10, patet, A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B \, in \, C}{A}$. Quod primo loco asseritur.

Secundò, $\frac{B}{A}$ *in* C $=$ $\frac{B \, in \, C}{A}$: sed iam ostensum est, quod A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B \, in \, C}{A}$: igitur etiam A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B}{A}$ *in* C. Quod secundo loco asseritur.

Tertiò. Per theor.4, constat $\frac{B}{A}$ *ad* $\frac{C}{A}$ $=$ B *ad* C: ergo per 10. axioma, $\frac{B}{A}$ *in* C $=$ B *in* $\frac{C}{A}$: sed iam ostensum est A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{B}{A}$ *in* C: ergo etiam A *ad* B $=$ C *ad* B *in* $\frac{C}{A}$. Quod tertio loco asseritur.

Quartò. A *in* $\frac{1}{A}$ $=$ 1: ergo singula ducendo in B *in* C, etiam A *in* $\frac{1}{A}$ *in* B *in* C $=$ 1 *in* B *in* C ll B *in* C: ergo per 10. axioma, A *ad* B $=$ C *ad* $\frac{1}{A}$ *in* B *in* C. Quod quarto loco asseritur.

Theorema VII.

Qualescunque, & quotcunque sint propositę rationes.

Dico primò, rationem extremorum terminorum esse compositam ex omnibus mediis rationibus.

Dico secundò, rationem quam habet productum ex omnibus antecedentibus successiuè multiplicatis, ad productum ex omnibus consequentibus terminis successiuè multiplicatis, esse rationem compositam ex omnibus propositis rationibus.

Hypothesis pro prima parte; extremi termini sint A & B, inter quos medij termini sint, exempli gratia tres diuersi, C,D,E, quo casu demonstrandum est, A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* E *in* E *ad* B $=$ A *ad* B.

Demonstratio primę partis. Per 11. axioma A *ad* C respectu C *ad* C $=$ A *ad* C, & præterea A *ad* D respectu C *ad* D $=$ A *ad* C: ergo per 1. axioma A *ad* C respe-

ctu

ctu C *ad* C = A *ad* D respectu C *ad* D: igitur per axioma 10, etiam A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* D *in* C *ad* C ll A *ad* D *in* 1 *ad* 1 ll A *ad* D: ergo A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* D: ergo singulas æquationis partes ducendo in D *ad* E: etiam A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* E = A *ad* D *in* D *ad* E: sed quia vt prius probauimus, A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* D: etiam manifestum est, A *ad* D *in* D *ad* E = A *ad* E; igitur A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* E = A *ad* E: ergo singulas æquationis partes ducendo in rationem E *ad* B: etiam A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* E *in* E *ad* B = A *ad* E *in* E *ad* B: sed argumento prius adhibito vt ostenderemus A *ad* C *in* C *ad* D = A *ad* D, etiam patet, A *ad* E *in* E *ad* B = A *ad* B: igitur A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* E *in* E *ad* B = A *ad* B. Quod erat demonstrandum in proposita hypothesi; quodque hic demonstrauimus in casu, in quo inter extremos terminos A & B interponuntur tres alij termini C, D, E, vniuersaliter verum esse, quotcunque, & qualescunque medij termini inter extremos interpositi sint, manifestè patet ex allata demonstratione.

Hypothesis pro secunda parte. Propositæ rationes sint quatuor diuersæ, A *ad* B, C *ad* D, E *ad* F, G *ad* H: quo supposito, asseritur, A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F *in* G *ad* H = A *in* C *in* E *in* G *ad* B *in* D *in* F *in* H.

Constructio. C *ad* D = B *ad* K: præterea E *ad* F = K *ad* L: denique G *ad* H = L *ad* M.

Demonstratio secundæ partis. Per 4. theorema huius capitis, A *in* C *ad* B *in* C = A *ad* B: & præterea B *in* C *ad* B *in* D = C *ad* D ll B *ad* K, vt constat ex constructione: ergo ex æquo per 3. theorema, A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* K: sed quia per constructionem C *ad* D = B *ad* K: etiam A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* B *in* B *ad* K ll A *ad* K, vt patet ex prima parte: ergo A *in* C *ad* B *in* D = A *ad* B *in* C *ad* D ll A *ad* K. Iterando hoc idem argumentum pro reliquis singulis rationibus, ex quibus probandum est componi rationem, de qua agitur: euincitur verum esse quod in secunda parte demonstrandum est; vt tamen hoc clarius pateat, bis repetendo idem argumentum ad longum, concludo, quod in præmissa hypothesi asseritur. Itaque rursus per 4. theorema, A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* E = A *in* C *ad* B *in* D ll A *ad* K, vt prius ostensum est: & præterea B *in* D *in* E *ad* B *in* D *in* F = E *ad* F ll K *ad* L, vt patet ex constructione: ergo ex æquo per 3. theorema, A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* F = A *ad* L: sed quia prius ostensũ est A *ad* B *in* C *ad* D = A *ad* K: & per constructionem E *ad* F = K *ad* L, patet A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F = A *ad* K *in* K *ad* L ll A *ad* L, vt constat ex prima parte: ergo A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* F = A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F ll A *ad* L. Denique iterum per 4. theorema, A *in* C *in* E *in* G *ad* B *in* D *in* F *in* G = A *in* C *in* E *ad* B *in* D *in* F ll A *ad* L, vt iam ostensum est: & præterea B *in* D *in* F *in* G *ad* B *in* D *in* F *in* H = G *ad* H ll L *ad* M, vt constat ex constructione: ergo ex æquo, A *in* C *in* E *in* G *ad* B *in* D *in* F *in* H = A *ad* M: sed quia prius ostensum est, A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F = A *ad* L: & per constructionem G *ad* H = L *ad* M: patet A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F *in* G *ad* H = A *ad* L *in* L *ad* M ll A *ad* M, vt constat ex prima parte: ergo A *in* C *in* E *in* G *ad* B *in* D *in* F *in* H = A *ad* B *in* C *ad* D *in* E *ad* F *in* G *ad* H. Quod erat demonstrandum.

Theorema VIII.

Qualescunque sint quantitates A, B, C, D,

Dico septem subsequentibus diuersis scriptionibus, indicatas rationes, inter se æquales esse.

Prima A *in* D *ad* B *in* C

Secunda $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{D}$

Tertia $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{D}$

Quarta A *ad* B *in* D *ad* C.

Quinta A *ad* C *in* D *ad* B

Sexta $\frac{A \; ad \; B}{C \; ad \; D}$

Septima $\frac{A \; ad \; C}{B \; ad \; D}$

Constructio, D *ad* C = B *ad* F. Supposita hac constructione, demonstro singulas ex septem repræsentatis rationibus, æquari rationi A *ad* F, adeòque omnes inter se æquales esse.

Demonstratio. Primò, per theor. 4. constat A *in* D *ad* B *in* D = A *ad* B, & præterea B *in* D *ad* B *in* C = D *ad* C ll B *ad* F, vt constat ex constructione: ergo ex æquo per 3. theorema, A *in* D *ad* B *in* C = A *ad* F.

Secundò. Per 4. theorema, $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{C}$ = A *ad* B, & præterea $\frac{B}{C}$ *ad* $\frac{B}{D}$ = D *ad* C ll B *ad* F, vt constat ex constructione: ergo ex æquo per 3. theorema, $\frac{A}{C}$ *ad* $\frac{B}{D}$ = A *ad* F.

Tertiò. Per 4. theorema, patet $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{B}$ = A *ad* C, & præterea $\frac{C}{B}$ *ad* $\frac{C}{D}$ = D *ad* B ll C *ad* F, vt permutando patet ex constructione: ergo ex æquo per 3. theorema, $\frac{A}{B}$ *ad* $\frac{C}{D}$ = A *ad* F.

Quartò. Per constructionem D *ad* C = B *ad* F: ergo A *ad* B *in* D *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* F ll A *ad* F, vt constat per 7. theorema: ergo A *ad* B *in* D *ad* C = A *ad* F.

Quintò. Quia per constructionem D *ad* C = B *ad* F, permutando, D *ad* B = C *ad* F: ergo A *ad* C *in* D *ad* B = A *ad* C *in* C *ad* F ll A *ad* F, vt constat ex 7. theoremate: ergo A *ad* C *in* D *ad* B = A *ad* F.

Sextò. Ex 7. theoremate constat, A *ad* B = A *ad* C *in* C *ad* D *in* D *ad* B: ergo singula diuidendo per C *ad* D, etiam $\frac{A \; ad \; B}{C \; ad \; D}$ = A *ad* C *in* D *ad* B ll A *ad* F, vt hic quinto loco ostensum est: ergo $\frac{A \; ad \; B}{C \; ad \; D}$ = A *ad* F.

Septimò. Ex 7. theoremate constat, A *ad* C = A *ad* B *in* B *ad* D *in* D *ad* C: ergo singula diuidendo per B *ad* D, etiam patet $\frac{A \; ad \; C}{B \; ad \; D}$ = A *ad* B *in* D *ad* C ll A *ad* F, vt hic quarto loco ostensum est: ergo $\frac{A \; ad \; C}{B \; ad \; D}$ = A *ad* F.

CA-

CAPVT III.

Theoremata elementaria dependentia ab angulis.

Nonnulli termini magis necessarij pro intelligentia angulorum, declarantur initio cap. 6. huius libri. Pro triangulis similibus, & reliquis, consuli poterit index.

Theorema I.

Ex puncto C ductæ sint tres rectæ lineæ C A, C D, C B, quæ singulæ sint in eodem plano: & rectæ C A, & C B, sint ad diuersas partes rectæ C D.

Dico primò, angulum A C D † D C B = duobus rectis angulis, quando puncta A, C, B, sunt in directum.

Dico secundò, puncta A, C, B, esse in directum, quando angulus A C D † D C B = duobus rectis angulis. Fig. 1.

Constructio. Centro C, quouis radio descriptus sit arcus, secans rectam C B in puncto K: rectam C D in puncto M: & rectam C A in puncto P.

Demonstratio primæ partis. Per hypothesim puncta A, C, B, sunt in directum, hoc est in eadem recta linea: ergo arcus PM † MK = dimidiæ integri circuli circumferentiæ: ergo arcus P M † M K = duabus quartis partibus integræ circumferentiæ circuli, hoc est duabus mensuris vnius recti anguli: sed arcus P M, est mensura anguli A C D, & arcus M K est mensura anguli D C B: ergo mensuræ angulorum A C D † D C B = mensuris duorum rectorum angulorum: ergo angulus A C D † D C B = duobus rectis angulis. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Demonstratio secundæ partis. Per hypothesim angulus A C D † D C B = duobus rectis angulis: sed mensuræ duorum rectorum angulorum adæquant dimidiam circuli circumferentiam: ergo mensuræ angulorum A C D † D C B, adæquant dimidiam circuli circumferentiam: sed arcus P M † M K = mensuris angulorum A C D † D C B: ergo arcus P M † M K = dimidiæ circumferentiæ circuli: ergo linea P C K, est diameter circuli, hoc est recta linea: & in hac recta linea sunt puncta A, C, B, vt patet ex constructione: ergo puncta A, C, B, sunt in directum, hoc est in eadem recta linea. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theorema II.

Duæ rectæ lineæ D F & G H sese intersecent in puncto C.

Dico angulos ad verticem oppositos inter se æquales esse; hoc est angulum D C H = angulo F C G. Fig. 2.

Demonstratio. Per hypothesim, & theorema 1. angulus D C H † angulo G C D =

duobus rectis: & similiter angulus F C G † angulo GCD = duobus rectis: ergo angulus D C H † G C D = angulo F C G † G C D: ergo vtrinque auferendo æqualia, nimirum angulum G C D: etiam angulus D C H = angulo F C G. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Tres rectæ lineæ A B, D F, G H, sint in eodem plano, atque rectas A B & D F, secet recta G H, in punctis E & C.

Dico primò. Supposito quod rectæ A B & D F sint parallelæ: legitimè sequitur.

Fig. 3. Primò. Angulum internum æquari angulo externo, ad eamdem partem posito: exempli gratia, angulum B E G = angulo F C G.

Secundò. Angulos alternos inter se æquales esse: exempli gratia, angulum B E G = angulo D C H.

Tertiò. Duos angulos internos, ad eamdem partem positos, simul, æquari duobus rectis; exempli gratia, angulum B E G † angulo F C H = duobus rectis angulis.

Dico secundò. Legitimè sequi, atque inferri posse, lineas A B & D F esse inter se parallelas.

Primò. Supposito quod angulus internus sit æqualis angulo externo, ad eamdem partem posito; exempli gratia, supposito quod angulus B E G = angulo F C G.

Secundò. Supposito quod duo anguli alterni inter se æquales sint; exempli gratia, supposito quod angulus B E G = angulo D C H,

Tertiò. Supposito quod duo anguli interni, ad eamdem partem positi, simul, sint æquales duobus rectis; exempli gratia, supposito quod angulus B E G † angulo F C H = duobus rectis angulis.

Demonstratio primæ partis. Per hypothesim, lineæ rectæ A B & D F sunt inter se parallelæ, & intersecantur à recta G H: ergo ex intelligentia linearum, quæ in Logistica dicuntur parallelæ (pro qua consuli potest index ad vocem parallelæ) manifestum est, angulum internum B E G = angulo externo F C G; vt in prima parte primo loco asseritur. Quoniam verò iam constat, angulum B E G = angulo F C G: & præterea per 2. theorema, angulus D C H = angulo F C G: patet angulum B E G = angulo D C H; vt secundo loco asseritur in prima parte. Denique, quia constat, angulum B E G = angulo F C G: vtrinque addendo eumdem angulum F C H, etiam angulus B E G † angulo FCH = angulo F C G † angulo F C H ll duobus rectis angulis, vt constat ex 1. theoremate: ergo angulus B E G † angulo FCH = duobus rectis angulis, vt in prima parte tertio loco asseritur. Constat igitur quidquid asseritur in prima parte, atque pro hac parte erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis. Supposito quod angulus B E G = angulo F C G: ex intelligentia linearum, quæ in Logistica dicuntur parallelæ (pro qua consuli potest index ad vocem parallelæ) manifestum est, rectas A B, & D F esse parallelas, vt in secunda parte primo loco asseritur. Præterea, supposito quod angulus B E G = angulo D C H, quoniam per 2. theorema, etiam angulus F C G = angulo D C H: patet angulum B E G = angulo F C G: igitur vt prius manifestum est, lineas A B & D F esse parallelas, vt in secunda parte secundo loco asseritur. Denique, supposito quod angulus B E G † angulo F C H = duobus rectis angulis: quoniam per 1. theorema, etiam angulus F C G † angulo F C H = duobus rectis

ctis angulis, patet angulum B E G † angulo F C H = angulo F C G † angulo F C H: igitur vtrinque auferendo æqualia, nimirum angulum F C H: etiam angulus B E G = angulo F C G; igitur vt prius manifestum est, lineas A B ·/· D F esse parallelas inter se, vt in secunda parte tertio loco asseritur. Cõstat igitur verũ esse quidquid in secunda parte asseritur, atque pro secunda parte erat demonstrandum.

Theorema IV.

Sint duo triangula plana, & rectilinea, A B C, & D E F.

Dico legitimè sequi, atque inferri posse, triangula A B C, & D E F, esse inter se similia.

Primò. Supposito quod angulus A = angulo D: & præterea angulus B = angulo E.

Secundò. Supposito quod angulus A = angulo D: & præterea recta A B *ad* D E = A C *ad* D F. Fig. 4.

Tertiò. Supposito quod recta A B *ad* D E = A C *ad* D F ‖ B C *ad* E F.

Constructio. Supra rectam D E intelligatur factum triangulum D K E, simile triangulo A C B; quod manifestè possibile est.

Demonstratio. Per constructionem triangulum A B C, est simile triangulo D K E: ergo angulus B A C = angulo E D K: sed per hypothesim, angulus B A C = E D F: ergo angulus E D K = angulo E D F; ex quo patet, lineas D F, & DK coincidere, siue diuersas non esse. Similiter, quia per constructionem, triangulum A B C, est simile triangulo D E K: constat angulum A B C = angulo D E K: sed per hypothesim, etiam angulus A B C = angulo D E F: ergo etiam angulus D E K = angulo D E F: ergo lineæ E F & E K coincidunt, siue diuersæ non sunt: igitur punctum K communis intersectio linearum D K & E K, diuersum non est à puncto F, quod est communis intersectio linearum D F & E F; igitur triangulum D K E diuersum non est à triangulo D F E: sed per constructionem, triangulum D K E, est simile triangulo A C B: ergo etiam triangulum D F E, est simile triangulo A C B. Quod primo loco erat demonstrandum.

Rursus; quia per constructionem, triangulum D E K, est simile triangulo A B C: angulus E D K = angulo B A C: sed per hypothesim, etiam angulus E D F = BAC: ergo angulus E D K = angulo E D F: ergo lineæ D K & D F coincidunt. Præterea, quia per constructionem, triangula A B C & D E K sunt similia: A B *ad* D E = A C *ad* D K; sed per hypothesim, etiam A B *ad* D E = A C *ad* D F: ergo A C *ad* D K = A C *ad* D F: igitur per 1. theor. cap. 2. D K = D F: sed etiam ostensum est lineas D K & D F coincidere; igitur puncta K & F diuersa non sunt, adeòque triangula D E K & D E F non sunt diuersa: sed per constructionem, triangulum D E K, est simile triangulo A B C: igitur etiam triangulum D E F, est simile triangulo A B C. Quod secundo loco erat demonstrandum.

Denique, quia per constructionem, triangula A B C & D E K sunt similia: etiam A B *ad* D E = A C *ad* D K: sed per hypothesim, etiam A B *ad* DE = A C *ad* D F: ergo A C *ad* D K = A C *ad* D F: ergo per 1. theor. cap. 2. patet, D K = DF: ergo puncta K & F sunt in eodem arcu, radio DK, & centro D descripto. Præterea, quia triangula A B C & D E K sunt similia per constructionem, patet A B *ad* D E = B C *ad* E K: sed per hypothesim etiam A B *ad* D E = BC *ad* E F: ergo B C *ad* E K = B C *ad* E F, adeòque per 1. theor. cap. 2. constat, E K = E F: ergo puncta K & F sunt in eodem arcu, radio E K & centro E descripto: ergo per axioma 12. patet, puncta K & F non esse diuersa, & consequenter diuersa non esse tri-

triangula D E K & D E F: sed per constructionem triangulum D E K, est simile triangulo A B C: ergo etiam triangulum D E F, est simile triangulo A B C. Quod tertio loco erat demonstrandum.

Theorema V.

Sint duo circulorum sectores F G H & F I K, in quibus angulus G F H = angulo I F K.

Dico arcum G H ad arcum I K = rectæ G F ad rectam I F.

Fig. 5. Constructio. Factum sit triangulum rectangulum A B C, ità vt A B = F G: præterea A D = F I: & etiam recta B C = arcui G H: denique ducta sit recta D E parallela rectæ B C, atque occurrens rectæ A C in puncto E.

Demonstratio. Ex intelligentia ductus tertij Geometrici atque nominati, manifestum est, quod duæ bases inter se æquales, quæ ductæ in altitudines inter se æquales, vniformiter ac totæ decrescunt: etiam æqualiter imminutæ, adeòque inter se æquales sint, postquam assurrexerunt ad æquales altitudines; sed per constructionem, basis B C = basi G H, præterea altitudo BA = altitudini G F: atque bases singulæ ductæ in has altitudines ductu tertio, totæ, atque vniformiter decrescunt: igitur postquam assurrexerunt ad altitudines B D & G I inter se æquales, etiam æqualiter imminutæ, & inter se æquales sunt: sed in casu de quo agimus, vniformiter imminutæ bases, sunt recta D E, & arcus I K, postquam ad æquales altitudines B D & G I assurrexerunt: igitur arcus I K = rectæ D E: sed etiam arcus G H = rectæ B C: ergo arcus G H ad arcum I K = B C *ad* D E: sed per 4. theorema constat, B C *ad* D E = B A *ad* D A ∥ radio G F ad radium I F, vt patet ex constructione: igitur arcus G H ad arcum I K = radio G F ad radium I F. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Sit quodvis triangulum A B C: & ex puncto B ducta sit recta linea occurrens basi A C in puncto D.

Dico primò. Supposito quod angulus A B D = angulo C B D: legitimè sequitur atque infertur, A D *ad* D C = A B *ad* BC.

Fig. 6. Dico secundò. Supposito quod A D *ad* D C = A B *ad* B C: legitimè sequitur atque infertur, angulum A B D = angulo C B D.

Constructio. Ex puncto C ducta sit recta parallela rectæ D B, occurrens rectæ A B productæ in F: & recta B E, sit perpendicularis ad rectam C F.

Demonstratio primæ partis. Quoniam per constructionem rectæ D B & C F sunt parallelæ, per 3. theorema, angulus B F C = angulo A B D ∥ angulo D B C, vt patet ex hypothesi: sed per 3. theorema, etiam angulus D B C = angulo B C F: ergo angulus B F C = angulo B C F: atqui per constructionem, etiam angulus B E C = angulo B E F: ergo per 4. theorema, triangula B E C & B E F sunt similia: ergo E B *ad* B C = E B *ad* B F: ergo per 1. theorema cap. 2. etiam C B = B F: ergo A B † B F = B C † A B: sed quoniam ostensum est, angulum A B D = angulo A F C, & præterea angulus A est communis, per 4. theorema, triangula

A B D

A B D & A F C sunt similia: adeòque A B *ad* B F † A B = A D *ad* D C † A D: ergo etiam A B *ad* B C † A B = A D *ad* D C † A D: igitur per 2. theor. cap. 2. patet A B *ad* B C = A D *ad* DC. Quod erat demonstrandum in prima parte.

Constructio pro secunda parte. Producta sit A B vsque in F, ità vt B F = B C: sitque posita recta F C, ad quam ducta sit recta B E, vt C E = E F.

Demonstratio secundæ partis. Per constructionem B C = B F: ergo per 1. theor. cap. 2. patet A B *ad* B F = A B *ad* B C: sed per hypothesim, A B *ad* B C = A D *ad* D C: ergo etiam A B *ad* B F = A D *ad* D C: ergo per 2. theorema cap. 2. etiam A B *ad* B F † A B = A D *ad* D C † A D: ergo A B *ad* A F = A D *ad* A C: sed etiam angulus A est communis: ergo per 4. theorema, triangula A B D & A F C sunt similia, adeòque angulus A F C = angulo A B D: igitur per 3. theorema, lineæ B D & F C sunt parallelæ: ergo per idem 3. theorema, angulus D B C = angulo B C E: sed quoniam per constructionem, B C *ad* B F = B E *ad* B E ll C E *ad* E F: per 4. theorema, triangula B E C & B E F sunt similia: adeòque angulus B C E = angulo B F E: ergo etiam angulus D B C = angulo B F C ll angulo A B D, vt prius ostensum est: igitur angulus A B D = angulo D B C. Quod erat demonstrandum in secunda parte.

Theorema VII.

Sint duo quiuis anguli, qui singuli æqualium circulorum, vel eiusdem circuli æqualibus arcubus insistant.

Dico primò. Si prior habeat verticem in centro, alter habeat verticem in circumferentia, prior erit duplo maior altero.

Dico secundò. Supposito quod singuli isti anguli habeant verticem, vel in centro, vel in circumferentia, inter se æquales erunt. Fig. 7.

Pro demonstratione primæ partis, distinguo tres casus diuersos. Primus casus supponit circuli centrum A, neque cadere intra, neque extra crura anguli habentis verticem in circumferentia, sed inueniri in vno ex his cruribus. Secundus casus supponit, circuli centrum A, cadere intra crura anguli habentis verticem in circumferentia. Tertius casus supponit, circuli centrum A, cadere extra crura anguli habentis verticem in circumferentia.

Hypothesis, & constructio pro primo casu. Angulus habens verticem in centro circuli, sit B A C: eidem arcui B C insistens alter angulus, habens verticem in circumferentia, sit B D C, cuius vnum crus B D transeat per centrum A: præterea ducta sit recta A E parallela rectæ D C: atque recta A F occurrat rectæ D C in puncto F, ità vt C F = F D.

Demonstratio primæ partis, in primo casu. Ex constructione constat, A C *ad* A D = A F *ad* A F ll C F *ad* F D: ergo per 4. theorema, triangula A C F & A D F sunt similia: adeòque angulus A C F = angulo A D F ll B D C, quia punctum A est in recta B D: sed quia per constructionem, A E & D C sunt parallelæ, per 3. theorema angulus B D C = angulo B A E, & præterea angulus E A C = angulo A C F: igitur inter se æquales sunt anguli B A E, E A C, B D C: ergo angulus B A E † angulo E A C, hoc est angulus B A C, duplus est anguli B D C. Quod erat demonstrandum in primo casu primæ partis.

Hypothesis, & constructio pro secundo casu primæ partis. Angulus habens verticem in centro A, sit B A C: eidemque arcui B C insistat angulus B D C, habens verticem in circumferentia, atque intra eius crura cadat centrum A, per quod ducta sit recta D F, arcui B C occurrens in F. demon-

Demonſtratio primæ partis in ſecundo caſu. Ex demonſtratione primi caſus conſtat, angulum B A F ad angulum B D F = 2 *ad* 1, & præterea angulum F A C ad angulum F D C = 2 *ad* 1: ergo per 2. theor.cap.2. angulus B A F + angulo FAC ad angulum B D F + F D C = 2 *ad* 1: ſed angulus B A F + F A C = angulo BAC, & etiam angulus B D F + F D C = angulo B D C; igitur angulus B A C ad angulum B D C = 2 *ad* 1. Quod in ſecundo caſu primę partis erat demonſtrandum.

Hypotheſis, & conſtructio tertij caſus primæ partis. Angulus habens verticem in centro, ſit B A C: eidemque arcui B C, inſiſtat angulus B D C, habens verticem in circumferentia: atque extra eius crura cadat centrum A, per quod ducta ſit recta D F, circumferentiæ occurrens in F.

Demonſtratio. Ex primo caſu conſtat, ang. F A C ad ang. F D C = 2 *ad* 1 ll ang. F A B ad ang. F D B: ergo per 2. theor.cap.2. etiam ang. F A C − F A B *ad* ang. F D C − F D B = 2 *ad* 1: ſed ang. F A C − F A B = ang. B A C: & præterea ang. F D C − F D B = ang. B D C: ergo ang. B A C *ad* B D C = 2 *ad* 1. Quod in tertio caſu primæ partis erat demonſtrandum.

Demonſtratio ſecundæ partis. Ex 15. axiomate conſtat, angulos inter ſe habere eam proportionem, quam habent ipſorum menſuræ: ſed angulorum habentium verticem in centro, eiuſdem, vel æqualium circulorum, menſurę ſunt, arcus quibus inſiſtunt: igitur ſuppoſito quod hi arcus ſint æquales, etiam anguli ſunt inter ſe æquales. Suppoſito verò quod æqualium circulorum æqualibus arcubus inſiſtant, ſed habeant verticem ad circumferentiam: hoc caſu, eiſdem arcubus inſiſtentes anguli ad centrum, inter ſe æquales erunt, vt iam oſtenſum eſt: ſed etiam hi anguli ad centrum ſinguli erunt duplo maiores angulis, qui eiſdem arcubus inſiſtunt, & verticem habent in circumferentia: igitur etiam iſti anguli inter ſe æquales erunt. Quod erat demonſtrandum pro ſecunda parte.

Theorema VIII.

In triangulo rectangulo A B C, ex puncto B, vertice recti anguli, ducta ſit recta B D perpendicularis ad baſim A C, atque illi occurrens in puncto D.

Dico primò inter ſe ſimilia eſſe triangula A B C, A D B, B D C.
Dico ſecu[illegible]D *ad* D B = D B *ad* D C.
Dico te[illegible]B C = B C *ad* D C.
Dico [illegible]C *ad* A B = A B *ad* A D.
Dic[illegible]tò, ACq = ABq + BCq.

Demon[illegible]o primæ partis. Per hypotheſim, angulus A B C = angulo A D B, quia vterque rectus eſt: & præterea angulus A eſt communis: ergo per 4. theor. triangula A B C & A D B ſunt ſimilia: ergo angulus C = angulo A B D: ſed etiam angulus A D B = angulo C D B, quia per hypotheſim vterque rectus eſt: igitur ſingula ex triangulis A B C, A D B, & B D C, habent illam duorum angulorum æqualitatem, ex qua in theoremate 4. oſtendimus neceſſariò eſſe inter ſe ſimilia: igitur tria iſta triangula inter ſe ſimilia ſunt. Quod erat primum.

Fig. 8.

Demonſtratio ſecundæ, tertiæ, & quartæ partis. Per primam partem, triangula A D B & B D C ſunt ſimilia: igitur A D *ad* D B = D B *ad* D C, vt ſecundo loco aſſeritur: Ruiſus per primam partem, triangula A B C & B D C ſunt ſimilia, igitur AC

ad BC

ad B C = B C *ad* D C vt tertio loco asseritur. Denique per primam partem inter se similia sunt triangula A B C & A D B, ergo A C *ad* A B = A B *ad* A D.
Demonstratio quintæ partis. Ex hypothesi patet A C = A D † D C: ergo A C *in* A C, hoc est A C q = A C *in* A D † D C ll A C *in* A D *et* † A C *in* D C: sed quoniam per 4. assertionem A C *ad* A B = A B *ad* A D, per 10. axioma A C *in* A D = A B q; & similiter quia per 3. assertionem A C *ad* B C = B C *ad* D C: per 10. axioma, A C *in* D C = B C q: ergo A B q † B C q = A C *in* A D *et* † A C *in* D C ll A C q, vt prius ostensum est: ergo A C q = A B q † B C q. Quod erat demonstrandum in quinta parte.

Theorema IX.

Cuiuscunque trianguli rectilinei, tres anguli interni simul sumpti, sunt æquales duobus rectis angulis.

Constructio. Qualecunque sit triangulum A B C, rectâ productum sit eius latus A B vsque in F vtcunque: & quæuis recta B E sit parallela lateri A C.
Demonstratio. Quoniam per constructionem B E & A C sunt parallelæ: per 3. theorema, angulus A = ang. F B E, & præterea ang. B C A = ang. C B E: ergo ang. A † ang. B C A = ang. F B E † ang. E B C ll ang. F B C: sed per 1. theor. ang. F B C † ang. A B C = duobus rectis angulis: ergo etiam ang. A † B C A † A B C = duobus rectis angulis. Quod erat demonstrandum. Fig. 9.

C A P V T IV.

Theoremata elementaria, de Logisticæ ductibus Geometricis atque nominatis.

Aliqua magis necessaria pro intelligentia ductuum Geometricorum, atque nominatorum de quibus hoc capite agimus, notantur in parte 4. & 5. cap. 1. lib. 1. pro reliquis quæ ad hanc intelligentiam vlterius desiderantur, consuli potest index.

Notandum quod singula huius capitis theoremata asserant aliquam proportionem, quam habet vnum productum ex aliquo ductu Geometrico ad aliud productum, quod oritur, vel ex eodem, vel ex diuerso ductu Geometrico: atque duo hæc producta indicantur per bases, & altitudines ex quibus oriuntur; iam verò quando istæ duæ, vel bases, vel altitudines, indicantur per easdem dignitates, diligenter aduertendum quænam sit illa basium, aut altitudinum identitas, quæ indicatur per eamdem dignitatem. Hæc identitas dignitatum in scriptione adhibitarum, tantum significat identitatem quoad magnitudinem, non verò identitatem quoad speciem in quantitatibus quæ per easdem dignitates significantur. Præterea dignitas quæ pro indicanda basi, vel altitudine adhibetur, significare non potest nisi quantitatem, quæ potest esse basis, vel altitudo in ductu de quo agit scriptio: quare malè intelligeret nostras scriptiones Logisticas, qui legendo, exempli gratia primi theorematis assertionem in qua dicimus A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = 1 *ad* 1, existimaret eius sensum esse, quod duo producti ex ductu primo, sint inter se æqualia, quando oriuntur ex basibus solo numero differentibus, & altitudinibus solo numero differentibus; longè vniuersalior est sẽsus huius assertionis: significat enim quod duo producta ex ductu primo sẽper sint inter se æqualia, dũmodo bases inter se, & altitudines inter se nõ differant quoad magnitudinẽ, quomodocunq; aliter inter se differant. Hinc supposito quod in primo producto, basis A significet quadratũ, in secũdo producto, basis A potest significare, aut circulũ, aut triangulũ, aut quãlibet aliã quantitatẽ, dummodo habeat has duas proprietates, primo, vt sit quantitas, quæ in ductu primo possit esse basis, secundo, vt sit quantitas æqualis quadrato, quod supponitur esse basis primi producti; & nisi in hoc sensu intelligantur assertiones huius capitis, cõtrarietatem inuoluunt omnes in quibus agitur de ductibus in quibus eadem quantitas basis esse non potest aut altitudo, & tamen bases, & altitudines ijsdem literis exprimuntur: exempli gratia, ex conceptu ductus primi patet in hoc ductu altitudinem esse rectam lineam: ex conceptu verò ductus quarti constat in hoc ductu altitudinem necessariò esse lineam circularem: igitur qui assertionem agentem de ductu primo, & quarto, atque eadem litera exprimentem altitudines in quas bases ducuntur, vellet intelligere, vt eadem litera tantum significaret eiusdem speciei lineas: aut talem assertionem intelligere non posset, aut prius deberet tollere specificam differentiam inter rectam, & circularem lineam: quarum prior curua non est, altera curua est.

Pro citationibus compendiatis præsertim necessarijs in discursibus qui conformes sunt exemplis secundæ regulæ Logisticæ, retineo, atque adhibeo scriptiones compendiatas expositas initio capitis 12. lib. 1. cum hac sola differẽtia, quod pro litera P, quæ illic partem significat, hic adhibeam literam C, quæ significat caput: hic enim in discursibus cito elementa, quæ hoc libro in diuersa capita distincta atque demonstrata proponuntur, quorum soli tituli capite 8. libri primi continentur distincta in diuersas partes.

Theorema I.

Qualescunque sint quantitates A & B, ita tamen vt A *in* B ductu primo, producat X; & A *in* B ductu primo, producat Z.

Dico A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = 1 *ad* 1, hoc est quantitatem X productam ex ductu 1, ad quantitatem Z, etiam productam ex ductu 1 = 1 *ad* 1: quando vtriusque producti bases inter se, & altitudines inter se æquales sunt.

Demonstratio. Quoniam ex intelligentia ductus primi constat, quod hoc ductu, bases nullo modo immutatæ, rectà siue perpendiculariter, assurgant in altitudinem: satis patet producta X & Z, per totam altitudinem planè vniformiter atque æqualiter participare eamdem totam basium longitudinem & latitudinem: sed per hypothesim, productorum X & Z, bases, inter se nullam habent inæqualitatem quoad longitudinem vel latitudinem: igitur in productis X & Z nulla inæqualitas inuenitur quoad longitudinem vel latitudinem: sed etiam in productis X & Z nulla inæqualitas inuenitur quoad altitudinem, quia altitudines in quas bases ductæ producunt X & Z, sunt inter se æquales: igitur inter producta X & Z, non inue-

inuenitur vlla inæqualitas, neque quoad longitudinem, neque quoad latitudinem, neque quoad altitudinem: patet igitur producta X & Z esse inter se æqualia: adeòque X *ad* Z = 1 *ad* 1: sed per hypothesim A *in* B ductu 1 = X, & præterea A *in* B ductu 1 = Z: igitur A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

Qualemcunque ex nominatis ductibus significet litera G.

Dico A *in* B ductu G *ad* A *in* B ductu G = 1 *ad* 1, dummodo ad ista duo producta non concurrat alia basium vel altitudinum diuersitas, quam quod vtriusque producti bases inter se æquales, aut altitudines inter se æquales, non sint similes.

Etenim hoc casu inter A *in* B ductu 1, & A *in* B ductu G, alia inæqualitas non inuenitur, quam inueniatur inter A *in* B, & $\frac{A \text{ in } B}{Z}$, vt constat ex ductuum conceptibus, & intelligentia eius de quo hic agimus, quando stabilimus proportiones quas habet ductus primus ad singulos ex reliquis nominatis ductibus: quoniam igitur A *in* B *ad* A *in* B = $\frac{A \text{ in } B}{Z}$ *ad* $\frac{A \text{ in } B}{Z}$, vt constat ex theor. 4. cap. 2. patet etiam A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = A *in* B ductu G *ad* A *in* B ductu G: sed A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 1 = 1 *ad* 1: ergo etiam A *in* B ductu G *ad* A *in* B ductu G = 1 *ad* 1: vt erat demonstrandum in hypothesi de qua agit Corollarium: hoc est quando ad ista producta non concurrit alia basium vel altitudinum diuersitas, quam quod vtriusque producti bases inter se æquales, & altitudines inter se æquales, non sint similes.

Ad faciliorem huius Corollarij intelligentiam, notandum, quod quando ex æqualibus basibus, ductis in æquales altitudines produci possunt inæqualia per ductus diuersos, hæc productorum inæqualitas oritur ex eo, quod bases illæ æquales diuersimodè assurgant in æquales altitudines; similiter ex æqualibus basibus diuersimodè ductis in æquales altitudines, produci possunt inæqualia eodem ductu, quando talis ductus admittit diuersos modos quibus basis possit assurgere in altitudines æquales. Exempli gratia in ductu 5. licet duo arcus inter se æquales, constituant duas bases, tamen isti arcus inter se æquales possunt esse diuersimodè inclinati ad axem, & consequenter possunt diuersimodè assurgere in altitudinem in quam ductu 5. intelliguntur assurgere: similiter in ductibus quos ampliatos nominamus, possunt bases æquales diuersimodè duci in altitudines æquales eodem ductu ampliato, in quantum bases possunt magis, vel minus decrescere, vel maiorem aut minorem ad axem inclinationem habere, licet in æquales altitudines ducantur.

Ex his satis patet quid sit æquales bases eodem ductu, sed diuersimodè assurgere in æquales altitudines: & consequenter qui sint casus qui excipiuntur in proposito Corollario, quod asserit in reliquis omnibus casibus æquales bases eodem ductu nominato assurgentes in æquales altitudines, producere quantitates æquales, quod idem de ductu primo asseritur in primo theoremate.

Theorema II.

Qualeſcunque ſint quantitates X & Z : ita tamen, vt A *in* B ductu E, producat quantitatem X, & præterea C *in* D ductu F, producat quantitatem Z.

DIco rationem quam habet quantitas X ad quantitatem Z, eſſe æqualem rationi compoſitæ ex quatuor rationibus, quarum prima eſt ratio baſis A ad baſim C: ſecunda eſt ratio altitudinis B ad altitudinem D: tertia eſt ratio ductus E ad ductum primum: quarta eſt ratio ductus primi ad ductum F.

Conſtructio, ſiue hypotheſis, pro demonſtratione.

M *ad* R = A *in* B ductu E *ad* A *in* B ductu 1.
R *ad* P = A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1.
P *ad* Q = C *in* D ductu 1 *ad* C *in* D ductu F.

Demonſtratio. Per conſtructionem A *in* B ductu E *ad* A *in* B ductu 1 = M *ad* R: ſed per conſtructionem, etiam A *in* B ductu 1 *ad* C *in* D ductu 1 = R *ad* P: ergo ex æquo per 3. theor. cap. 2. patet A *in* B ductu E *ad* C *in* D ductu 1 = M *ad* P, atqui etiam per conſtructionem, C *in* D ductu 1 *ad* C *in* D ductu F = P *ad* Q: ergo ex æquo, per 3. theor. cap. 2. conſtat, A *in* B ductu E *ad* C *in* D ductu F = M *ad* Q: ſed per 7. theor. cap. 2. conſtat, quod ratio M *ad* Q, æquetur rationi compoſitæ ex tribus rationibus M *ad* R, R *ad* P, P *ad* Q: ergo A *in* B ductu E *ad* C *in* D ductu F æquatur rationi compoſitæ ex tribus rationibus R *ad* P, M *ad* R, P *ad* Q: ſed quoniam per theor. 7. cap. 2. conſtat, quod ratio A *in* B *ad* C *in* D = rationi A *ad* C *in* B *ad* D, hoc eſt rationi compoſitæ ex duabus rationibus A *ad* C & B *ad* D, etiam ratio R *ad* P, quæ per conſtructionẽ æqualis eſt rationi A *in* B *ad* C *in* D, neceſſariò æqualis eſt rationi compoſitæ ex duabus rationibus A *ad* C & B *ad* D: ergo etiam A *in* B ductu E *ad* C *in* D ductu F = rationi compoſitæ ex quatuor rationibus A *ad* C, B *ad* D, M *ad* R, P *ad* Q: ſed ex hypotheſi conſtat, A *in* B ductu E = quantitati X: & præterea C *in* D ductu F = quantitati Z: ergo etiam ratio quantitatis X ad quantitatem Z = rationi compoſitæ ex quatuor rationibus A *ad* C, B *ad* D, M *ad* R, P *ad* Q: ſed ex conſtructione vel hypotheſi conſtat quod hæ quatuor rationes ſunt illæ quæ in aſſertione enumerantur: ergo ratio X *ad* Z = rationi compoſitæ ex quatuor rationibus in aſſertione enumeratis. Quod erat demonſtrandum.

Theorema III.

Qualeſcunque ſint quantitates A & B.

DIco A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 2 = 1 *ad* 1.

Demonſtratio. Cæteris paribus, ſiue ſuppoſitis ijſdem baſibus, & altitudinibus, tam pro primo, quam pro ſecundo ductu Geometrico: inter hos duos ductus, ſola iſta differentia inuenitur: quod in ductu primo, baſis præciſè tantum vchavehatur vnico motu per extensionem quam habet: in secundo verò ductu, basis vehatur duplici motu diuerso: nimirum motu per extensionem quam habet, & motu per extensionem quam non habet. Quoniam igitur primo, & secundo ductui communis est motus quo basis vehitur per extensionem quam non habet, cæteris paribus, quantum est ex vi huius motus ex eadem basi A, in eamdem altitudinem B assurgente, producuntur quantitates æquales inter se: hoc est A *in* B ductu 1 = A *in* B ductu 2: atqui alter motus, quo in ductu secundo basis A vehitur per extensionem quam habet (tantum proprius est ductui secundo, & in ductu primo non inuenitur) hic inquam motus, per axioma 9. cap. 1. planè inutilis est ad causandum aliquod productum ex ductu Geometrico, adeòque inutilis est ad vitiandam æqualitatem quam duo producta inter se habent, quantum est ex vi alterius motus vtrique ductui communis: igitur cæteris paribus, producta quæ quantum est ex vi primi motus, primo, & secundo ductui communis, sunt inter se æqualia; ex vi secundi motus, qui tantum in secundo ductu inuenitur, non desinunt esse æqualia: igitur tota diuersitas motuum quibus bases assurgunt in altitudines, ductu primo & secundo: hoc est tota diuersitas quæ inuenitur inter ductum primum & secundum: non causat productorum inæqualitatem, igitur supposito quod bases inter se æquales sint, & quod etiam altitudines inter se æquentur, producta ex ductu primo & secundo, sunt inter se æqualia: hoc est A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 2 = 1 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV.

Qualescunque sint quantitates A & B.

Dico primò, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 = 2 *ad* 1: quando baseos A, vnicà extensio tota decrescit.

Dico secundò, A *in* B ductu 1. *ad* A *in* B ductu 3 = 3 *ad* 1: quando baseos A duplex extensio tota decrescit.

Nota ex descriptione ductus tertij, quæ proponitur in parte 4. cap. 1. lib. 1. constat quod pro ductu tertio non admittamus basim, quæ sit linea, nisi omnes eius partes existant in eodem plano: quod autem circularis lineæ partes omnes sint in eodem plano, manifestum est, adeòque ex hoc capite non excluditur à lineis, quę possunt esse bases in ductu 3; prætereа linea circularis potest moueri, atque decrescere, vt requiritur pro ductu tertio, ideòque est vna ex lineis, quæ possunt esse bases pro ductu tertio, & hoc ductu potest producere, vel circulum, vel coni recti superficiem: vbi notatu digna videtur differentia inter hæc diuersa producta, quæ singula oriuntur ductu tertio, ex basi, quæ est circularis linea; hæc enim basis, quando ductu tertio producit circulum, ducitur in distantiam baseos à suo centro, hoc est in baseos radium, quæ est breuissima omnium linearum possibilium in quas duci potest ductu tertio; quando autem hæc eadem basis producit superficiem coni recti, ducitur in distantiam baseos ab aliquo suo polo, siue puncto axeos diuerso à centro, quæ distantia aliter appellatur latus coni recti, cuius superficies producitur; hæc verò distantia semper maior est semidiametro, & cęteris paribus, tanto maior est, quanto maior est axis coni, cuius superficies producitur. Iam verò ex ipso conceptu ductus tertij æqualiter manifestum est, ex basi quæ sit circularis linea, produci posse, & circulum, & coni recti superficiem: immo ex hic prænotatis vlterius cōstat, quod duo casus in quorum altero ex circu-

cu-

culari linea producitur circulus, in altero verò ex circulari linea producitur coni recti curua superficies: non aliter inter se differant, quam quod in priori casu basis illa quæ est circularis linea ducatur in breuissimam lineam in quam duci potest ductu 3: in altero verò casu, ducatur in lineam diuersam à breuissima, in quam duci potest.

Notandum etiam quod agendo hic de superficie coni quæ ductu 3 producitur ex basi quæ est circularis linea, tantum nominauerimus coni recti superficiem: etenim Logistica inter producta ex ductu tertio, admittit quidem conum obliquum: sed non superficiem coni obliqui; sicuti inter producta ex ductu tertio admittit quidem pyramides obliquas, sed non superficies obliquarum pyramidum: vtrobique eadem causa est, nimirum, quia vna eademque altitudo est, in quam tota basis, & singulæ eius partes intelliguntur assurgere, quando basis ductu tertio producit pyramidem, aut conum; verum quando circumferentia baseos producentis pyramidem obliquam, aut conum obliquum, producit superficiem talis pyramidis, aut coni: diuersæ partes circũferentiæ baseos assurgunt in diuersas altitudines; obliqui enim coni, & pyramidis vertex diuersimodè atque inæqualiter distat, saltem ab aliquibus partibus circumferentiæ baseos; hinc fit quod inter producta, quæ ex ductu tertio oriuntur non admittatur superficies obliquæ pyramidis, aut coni obliqui; superficies tamen pyramidis obliquæ constat ex aggregato plurium triangulorum, quæ singula quidem ex ductu tertio producuntur ex suis basibus, sed sicut singula ista triangula non habent aliquam eamdem altitudinem, singulæ triangulorum bases ductæ in aliquam eamdem altitudinem, non producunt illud triangulorum aggregatum, ex quo constat obliquæ pyramidis superficies; quare licet verum sit singula triangula constituentia obliquæ pyramidis superficiem produci ductu tertio, tamen falsum est totam obliquæ pyramidis superficiem produci ductu tertio, in quantum non inuenitur vlla aliqua eadem altitudo in quam ductu tertio assurgendo producere possit totam superficiem obliquæ pyramidis.

Pro demonstratione propositi theorematis distinguo tres casus diuersos. Primus casus est, quando baseos vnicam tantum extensionem habentis, vnica ista extensio tota decrescit. Secundus casus est, quando baseos duas extensiones habentis, vnica tantum extensio decrescit, ac tota decrescit. Tertius casus est, quando baseos duas extensiones habentis vtraque ista extensio tota decrescit. Ex his tribus casibus, priores duo pertinent ad primam assertionem propositi theorematis; tertius casus spectat ad secundam assertionem.

Constructio pro primo casu. Basis C D in B ductu 1, vel 2 producat parallelogrammum C D F E, cuius diameter sit C F, præterea proportio ductus primi ad ductum tertium, quæ ostendenda est æquari 2 *ad* 1, sit 2 *ad* X.

Fig. 10. Demonstratio primi casus in prima hypothesi. Considerentur duo producta, nimirum C D *in* B ductu 1 vel 2: & C D † E F *in* B ductu 3. Ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

1	*c h*	CD *ad* CD † EF	*c h*	1 *ad* 2
2	*c h*	B *ad* B		1 *ad* 1
3	4 *c* 1 vel 3	1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	*c h*	2 *ad* X		2 *ad* X

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita est 2 *ad* 2X: ergo per theor. 2. constat C D *in* B ductu 1 vel 2, hoc est parallelogrammum C D F E *ad* C D † E F *in* B ductu 3: hoc est triangulum C D F † F E C = 2 *ad* 2X: sed ex hypothesi patet, parallelogrammum C D F E *ad* triangulum C D F † F E C = 1 *ad* 1: ergo 1 *ad* 1 = 2 *ad* 2X: sed 1 = 1: ergo 2 = 2X: ergo X = 1: ergo 2 *ad* X = 2 *ad* 1: sed per constructionem 2 *ad* X est ratio ductus primi ad ductum 3: ergo etiam 2 *ad* 1 est

est ratio ductus primi ad ductum tertium in primo casu, quando basis A est recta linea: ergo per corollarium theorema 1. etiam 2 *ad* 1 est ratio ductus primi ad ductum tertium in primo casu quando basis est linea alterius speciei, quæ potest esse basis in ductu tertio. Quod erat demonstrandum in primo casu.

Tametsi primus casus hic sufficienter demonstratus sit, non tantum quando basis est recta linea, verum etiam quando basis est linea alterius speciei quę potest esse basis in ductu tertio: tamen animi gratia placet hic primum casum demonstrare, supposito quod basis sit arcus circuli, quodque hæc basis ducta in radium, producat sectorem circuli; pro qua tamen demonstratione suppono, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 2 *ad* 1, vt demonstratur in theor. 6, sed prorsus independenter ab hoc quarto theoremate: quare licitum est 6. theorema hic assumere licet non præcedat, sed sequatur.

Constructio. Sectoris circuli X, arcus sit A, radius sit B.

Demonstratio. Ex conceptu ductus tertij constat A *in* B ductu 3 = sectori X: sed ex conceptu ductus 4, etiam constat B *in* A ductu 4 = sectori X: ergo per 1. theorema cap. 2. constat B *in* A ductu 1 *ad* B *in* A ductu 4 = B *in* A ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3: sed per theo. 6. B *in* A ductu 1 *ad* B *in* A ductu 4 = 2 *ad* 1: ergo B *in* A ductu 1, hoc est A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Constructio pro secundo casu. Rectangulum C D E, hoc est C D *in* D E ductu 1 = basi A, præterea rectangulum C D E *in* B ductu 1 vel 2 = corpori K E, quod necessariò erit parallelepipedum: hoc verò parallelepipedum K E sectum intelligatur plano transeunte per puncta C F G. Fig. 11.

Demonstratio. Per constructionem, rectangulum C D E *in* B ductu 1 vel 2 = parallelepipedo K E ll parallelogrammo C D F K *in* D E ductu 1 (vtroque enim modo produci idem parallelepipedum K E, constat ex ductuum intelligentia) sed quoniam per primum casum constat, parallelogrammum C D F K *ad* triangulum C D F = 2 *ad* 1, vtrumque ductu primo ducendo in eamdem altitudinem D E, per theor. 1. & 2. etiam C D F K *in* D E ductu 1 *ad* C F D *in* D E ductu 1 = 2 *ad* 1: ergo etiam rectang. C D E *in* B ductu 1 vel 2 *ad* triang. C D F *in* D E ductu 1 = 2 *ad* 1; atqui C F D *in* D E ductu 1 = rectangulo C D E *in* B ductu 3, quando vnica baseos extensio decrescit (vtroque enim modo producitur idem prisma, constituens alteram ex duabus partibus in quas per constructionem sectum est parallelepipedum) ergo C D E *in* B ductu 1 vel 2 *ad* C D E *in* B ductu 3 = 2 *ad* 1. Iam verò quod hic ostendimus in secundo casu verum esse, quando basis A est rectangulum, vniuersaliter in secundo casu verum esse, satis patet ex corollario theorematis primi, adeòque constat in secundo casu vniuersaliter verum esse. Quod erat demonstrandum.

Constructio pro tertio casu. Basis A = triangulo K H C: ex quo ductu primo productum sit prisma triangulare, cuius altitudo C F aliter appelletur altitudo B: sintque ductæ rectæ lineæ K F, H O, H F, atque recta H I ad rectos angulos occurrat in puncto I rectæ lineæ K C. Fig. 12.

Demonstratio tertij casus. Triangulum K H C *in* C F ductu 3 = triangulo K F C *in* I H ducto 3, producunt enim diuersimodè eamdem numero pyramidem: atqui triangulum K H C *in* C F ductu 3 = triangulo O E F *in* E H ductu 3 (quandoquidem triangulum K H C = triangulo O E F, & etiam recta C F = rectæ E H) præterea triangulum K F C *in* I H ductu 3 = triangulo K F O *in* I H ductu 3: igitur triangulum K H C *in* C F ductu 3 = triangulo K F O *in* I H ductu 3 ll triangulo O E F *in* E H ductu 3: sed singula hæc tria producta ex ductu tertio sunt pyramides, quæ simul adæquant prisma productum ex triangulo K H C *in* C F ductu 1: igitur K H C *in* C F ductu 1 = 3 K H C *in* C F ductu 3: ergo K H C *in*

C F

C F ductu 1 *ad* K H C *in* C F ductu 3 = 3 *ad* 1, in tertio casu quando basis est triangulum: igitur per corollarium theor. 1. etiam constat A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 = 3 *ad* 1 in tertio casu, qualiscunque sit basis A & altitudo B. Quod erat demonstrandum.

Theorema V.

Qualescunque sint quantitates A & B.

Dico A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 ampliato = 2X *ad* X † Z. Supposito quod 2X = basi maiori A: quodque 2Z = basi minori.

Nota pro ductu tertio ampliato, basis A, vel est recta linea, vel circuli circumferentia: vtroque casu productum habet duas bases: nimirum basim maiorem, quæ in hoc ductu decrescit, & per literam A indicatur in præmissa assertione; ac præterea basim minorem, quæ post decrementum maioris baseos A remanet, & per literam D intelligi debet.

Constructio pro primo casu. Recta C E = basi A, atque productum ex A *in* B ductu 3 ampliato, sit figura C E K Q: præterea rectæ C Q & E K productæ concurrant in P: atque recta P L secet rectam C E in puncto L, vt C L = L E, atque occurrat rectæ Q K in puncto M; denique ductæ sint rectæ K I & Q G parallelæ rectæ P L, atque occurrentes rectæ C E in punctis I & G.

Fig. 13.

Demonstratio primi casus. Quoniam per constructionem C L = L E, atque inter se parallelæ sunt, tam rectæ C E & Q K, quam rectæ Q G & K I: per tertium caput huius libri constat, rectas Q M, G L, M K, L I inter se æquales esse, & consequenter C G = I E. Quoniam verò per hypothesim, C E *in* B ductu 3 ampliato = figuræ C Q K E ll triangulo C G Q † parallelogrammo G Q K I † triangulo I K E ll C G *in* B duc. 3 *et* † G I *in* B duc. 1 *et* † I E *in* B ductu 3 ll 2 C G *in* B ductu 3 *et* † G I *in* B ductu 1 (quia C G = I E) ll C G *in* B ductu 1 *et* † G I *in* B ductu 1 ll C G † G I *in* B ductu 1 ll C I *in* B ductu 1: patet, C I *in* B ductu 1 = C E *in* B ductu 3 ampliato: atqui C E *in* B ductu 1 *ad* C I *in* B ductu 1 = C E *ad* C I: ergo etiam C E *in* B ductu 1 *ad* C E *in* B ductu 3 ampliato = C E *ad* C I: sed C E = A & C I = X † Z, vt patet ex hypothesi: ergo A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 3 ampliato = A [illegible] † Z ll 2X *ad* X † Z. Quod erat demonstrandum.

Costructio pro secundo [illegible]ndo basis est linea circularis. Pro hoc casu basis sit circularis linea [illegible] diametrum C N: ex hac basi ducta in rectam C O ductu tertio am[illegible] producta superficies, sit illa pars superficiei coni recti C P N, quæ [illegible] circularibus lineis Y & S; Sitque circularis lineæ S diameter O L [illegible]terea ducta sit recta C E æqualis ipsi Y, atque perpendicularis ad rect[illegible]P: & rectæ E P occurrat in K, recta O K, parallela rectæ C E. His positis [illegible] Y ll 2X & præterea D = S ll 2Z.

Fig. 14.

Demon[illegible]io. Ex constructione & theor. 4. cap. 3. constat C E *ad* O K = C P *ad* O [illegible]N *ad* O L ll Y *ad* S, vt patet ex theor. 5. cap. 3. sed per constructionem C[illegible]Y: ergo O K = S: igitur C E *in* C P ductu 3, hoc est triangulum E P C [illegible] C P ductu 3, hoc est toti superficiei coni C P N, atque præterea O K *in* [illegible] ductu 3, hoc est triangulum K O P = S *in* O P ductu 3, hoc est toti superficiei conO P L: igitur triangulum C P E, ablato triangulo K P O, hoc est figura E K O C = superficiei coni C P N, ablata superficie coni O P L: hoc est superficiei

ficiei coni contentæ lineis circularibus Y & S, hoc est producto ex Y *in* C O ductu 3 ampliato; ergo Y *in* C O ductu 1 *ad* Y *in* C O ductu 3 ampliato = Y *in* C O ducto 1 ad figuram E K O C, hoc est ad E C *in* C O ductu 3 ampliato, vt patet ex constructione & intelligentia huius ductus: sed quia ex constructione constat C E = Y, patet C E *in* C O ductu 1 = Y *in* C O ductu 1: ergo etiam Y *in* C O duc. 1 *ad* Y *in* C O duc. 3 ampliato = C E *in* C O ductu 1 *ad* C E *in* C O ductu 3 ampliato: atqui per primum casum constat, C E *in* C O ductu 1 *ad* C E *in* C Q ductu 3 ampliato = 2X *ad* X † Z: ergo etiam Y *in* C O ductu 1 *ad* Y *in* C O ductu 3 ampliato = 2X *ad* X † Z. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Qualescunque sint quantitates A & B.

Dico A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 2 *ad* 1.

Nota. Pro ductu quarto, basis A necessariò est, vel recta linea, vel rectangulum planum; quamobrem propositi theorematis demonstratio duplicem admittit casum: primus est, quando pro ductu quarto basis A est recta linea: secundus casus est, quando basis A est rectangulum planum.

Constructio pro primo casu. Basis A = rectæ X Z, & centro Z, radio X Z descriptus sit quiuis arcus X R C: præterea centro C, radio C Z descriptus sit alius arcus Z Q D, æqualis arcui X R C. Fig. 15.

Demonstratur primus casus. Quando recta X Z ductu 4 producit sectorem X R C Z: tunc punctum X terminus rectæ X Z, tantum promouetur in altum, quanta est longitudo arcus X R C, & recta X Z peruenit vsque ad rectam Z C. Rursus quando hæc eadem linea X Z, siue C Z, ductu 4 producit sectorem Z Q D C: punctum Z, terminus rectæ X Z, tantum promouetur in altum, quanta est longitudo arcus Z Q D; sed per constructionem, arcus X R C = arcui Z Q D: igitur quādo recta X Z duc. 4 successiuè producit totam figuram R Q, tunc rectę lineæ X Z singuli termini X & Z assurgunt ad altitudinem æqualem arcui X R C; igitur hoc casu per axioma octauum, tota recta X Z assurgit ad altitudinem æqualem arcui X R C: ergo tota figura R Q, est æqualis producto ex tota linea X Z assurgente in altitudinem, æqualem arcui X R C: sed huic producto, etiam æquatur productum ex recta X Z; quando ductu primo assurgit in altitudinem æqualem arcui X R C: igitur XZ *in* X R C ductu 1 = X Z *in* X R C ductu 4 *et* † X Z *in* Z Q D ductu 4 ‖ 2 X Z *in* X R C ductu 4: igitur X Z *in* X R C ductu 1 *ad* X Z *in* X R C ductu 4 = 2 *ad* 1: sed per hypothesim, X Z = A, & insuper X R C = B: ergo A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 2 *ad* 1, quando basis A est recta linea. Quod erat demonstrandum.

Constructio pro secundo casu, quando basis A est rectangulum, pro quo basis A æquetur rectangulo E X Z I: & centro Z, radio X Z, descriptus sit quiuis arcus X R C, eodemque radio, sed centro C, descriptus sit arcus Z Q D, æqualis arcui X R C. Fig. 16.

Demonstratur secundus casus. Quando rectangulum E X Z ductu 4 producit partem cylindri recti insistētem sectori X R C Z, tunc tota recta X E, hoc est vnus baseos terminus, tantum promouetur in altum, quanta est longitudo arcus X R C, & basis E X Z peruenit in F C Z. Rursus quando hæc eadem basis E X Z, siue F C Z ductu 4, producit partem cylindri recti insistentem sectori C Z Q D; tunc recta

Z I, alter, siue oppositus baseos terminus, tantum promouetur in altum, quanta est longitudo arcus Z Q D; sed per hypothesim, arcus X R C = arcui Z Q D: igitur quando basis A, hoc est rectangulum E X Z, ductu 4 successiuè producit cylindri recti partes insistentes sectoribus X R C Z & C Z Q D, tunc baseos A, hoc est rectanguli E X Z, oppositi termini singuli assurgunt ad altitudinem æqualem arcui X R C: igitur hoc casu, per octauum axioma, tota basis A, siue rectangulum E X Z, assurgit in altitudinem æqualem arcui X R C: ergo productum ex ductu quarto insistens duobus sectoribus X R C Z, & C Z Q D, est æquale producto ex rectangulo E X Z assurgente in altitudinem æqualem arcui X R C: sed huic producto, etiam æquatur productum ex ductu primo, quando basis A, siue rectangulum E X Z, assurgit in altitudinem æqualem arcui X R C: igitur A, siue rectangulum E X Z *in* X R C ductu 1 = 2 A *in* XRC ductu 4: igitur A *in* X R C ductu 1 *ad* A *in* X RC ductu 4 = 2 *ad* 1; adeòque A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 = 2 *ad* 1, quando basis A est rectangulum, vt fit in secundo casu. Quòd erat demonstrandum.

Fig. 17. Placet hic animi gratia aliter demonstrare secundum casum. Pro qua demonstratione suppono recti cylindri X, basim esse A: huius baseos radium, esse E F: circumferentiam, esse 2 D; eiusdem cylindri axem esse F G; latus verò esse E H, denique rectangulum F H = B.

Demonstratio. Cylindri X, basis A = E F *in* 2 D ductu 4 ll E F *in* D ductu 1, vt constat ex primo casu: sed A *in* E H ductu 1 = cylindro X: ergo cylinder X = E F *in* D *in* E H ductu 1 ll E F *in* E H *in* D ll B *in* D ductu 1, vt constat ex constructione: sed etiam cylinder X = B *in* 2 D ductu 4: ergo B *in* D ductu 1 = B *in* 2 D, ductu 4: ergo B *in* D ductu 1 *in* 1 = B *in* D ductu 4 *in* 2: ergo per axioma 10. cap. 1. patet B *in* D ductu 1 *ad* B *in* D ductu 4 = 2 *ad* 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema VII.

Qualescunque sint quantitates A & B.

Dico A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 4 ampliato = 2 X *ad* X + Z, supposito quod X significet radium maiorem, & Z significet radium minorem, circularium linearum quæ describuntur ab extremis punctis baseos A in ductu quarto ampliato.

Fig. 18. Constructio. Rectæ L E obliquè insistat recta E K, atque ad rectam L E perpendicularis sit recta L M, constituens axem circa quem tantum rotando circumfertur basis E K quæ ducitur ductu quarto ampliato: atque quartam partem circularium linearum hoc casu descriptarũ à punctis E & K, repræsentent arcus E C & K D; præterea recta E K repræsentet basim A: & altitudo B sit quiuis arcus E R descriptus à puncto E, siue baseos extremo quod magis distat ab axe L M: atque recta K M, sit perpendicularis ad axem L M; quibus positis, A = rectæ E K: item B = arcui E R: item X = rectæ L E: item Z = rectæ M K.

Demonstratio. Ex conceptu ductuum qui dicuntur ampliati, satis constat, quod 4 arc. C E *in* E K ductu 3 ampliato = E K *in* 4 arcus C E ductu 4 ampliato, quandoquidem eadem prorsus superficies sit vtriusque productum: sed per theor. 4. constat 4. arc. E C *in* E K ductu 1 *ad* 4 arc. E C *in* E K ductu 3 ampliato = 4 arc. E C *ad* 2 arc. E C + 2 arc. K D: igitur 4 arc. E C *in* E K ductu 1, hoc est E K *in* 4 arc. E C ductu 1 *ad* E K *in* 4 arc. E C ductu 4 ampliato = 4 arc. E C

ad 2

ad 2 arc. E C † 2 arc. K D: sed quia per theor. 5. cap. 2. constat, quod 4 arc. E C *ad* 4 arc. K D = E L *ad* M K, menifestum est, 4 arc. E C *ad* 2 arc. E C † 2 arc. K D = 2 E L *ad* E L † K M: ergo K E *in* 4 arc. E C ductu 1 *ad* K E *in* 4 arc. E C ductu 4 ampliato = 2 E L *ad* E L † K M; sed quoniam per corollarium theorematis 1. constat, K E *in* 4 arc. E C duc. 1 *ad* K E *in* arc. E R duc. 1 = K E *in* 4 arc. E C duc. 4 ampliato *ad* K E *in* arc. E R duc. 4. ampliato: etiam permutando manifestum est, K E *in* 4 arc. E C duc. 1 *ad* K E *in* 4 arc. E C duc. 4 ampliato = K E *in* arc. E R duc. 1 *ad* K E *in* arc. E R duc. 4 ampliato: igitur K E *in* arc. E R duc. 1 *ad* K E *in* arc. E R duc. 4 ampliato = 2 E L *ad* E L † K M || 2 X *ad* X † Z, vt patet ex hypothesi: sed etiam per hypothesim, K E = A, & præterea arcus E R = B: igitur A *in* B duc. 1 *ad* A *in* B duc. 4 ampliato = 2 X *ad* X † Z. Quod erat demonstrandum.

Lemma I.

Qualescunque sint bases A & B, atque altitudines C & D: ita tamen vt A *ad* B = C *ad* D: quodque A *in* C ductu G *ad* A *in* C ductu 1 = X *ad* Z: & præterea etiam B *in* D ductu H *ad* B *in* D ductu 1 = X *ad* Z: quicunque sint ductus significati per literas G & H, siue inter se diuersi, aut non diuersi sint.

Dico A *in* C ductu G *ad* B *in* D ductu H = A2 *ad* B2:

Demonstratio. Considerando assertæ æquationis, quatuor rationes commemoratas in secunda regula Logisticæ.

1	ch	A *ad* B		A *ad* B	A *ad* B
2	ch	C *ad* D	ch	A *ad* B	A *ad* B
3	ch	X *ad* Z	n3	X *ad* X	1 *ad* 1
4	ch	Z *ad* X		Z *ad* Z	1 *ad* 1

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita erit A2 *ad* B2: ergo per theor. 2, huius capitis, A *in* C ductu G *ad* B *in* D ductu H = A2 *ad* B2. Quod erat demonstrandum.

Animi gratia, hoc lemma proposuimus, & demonstrauimus sub maiori vniuersalitate quam assumatur hoc capite, pro quo sufficit constare, quod circulus quouis radio A descriptus, ad circulum quouis radio B descriptum = A2 *ad* B2, quod manifestum est ex vniuersaliori proposito lemmate. Etenim circumferentiam prioris circuli appellando C, & posterioris circuli circumferentiam appellando D, per theor. 5. cap. 3. constat, A *ad* B = C *ad* D: præterea vterque iste circulus producitur ductu 4, qui ad ductum primum habet proportionem quam 1 *ad* 2, vt constat ex 6. theoremate: adeoque per demonstratum lemma, circulus radio A descriptus, ad circulum radio B descriptum = A2 *ad* B2.

Lemma II.

Fig. 19.

Angulus C L E rectus sit, atque ex puncto E ductæ sint tres rectæ lineæ inter se æquales: harum prima E F, sit parallela rectæ L C: secunda E K, sit inclinata ad rectam L C, sed cum illa non concurrat: tertia E H, habeat terminum H communem cum recta L C; denique ductæ sint rectæ F C & K M perpendiculares ad rectam L C.

Dico primò. E F circumductam circa axem L C *ad* K E circumductam circa axem L C = 2L E *ad* L E † M K.

Dico secundò. E F circumductam circa axem L C *ad* E H circumductam circa axem L C = 2L E *ad* L E.

Dico tertiò. E K circumductam circa axem L C *ad* E H circumductam circa axem L C = L E † M K *ad* L E.

Constructio. Sit arcus E R quarta pars circularis lineæ quæ describitur à puncto E, quando aliqua ex nominatis lineis circumducitur circa axem L C.

Demonstratio primæ assertionis. Ex intelligentia ductus primi patet, eamdem esse superficiem quam producunt, tum 4 arcus E R *in* E F ductu primo, tum E F circumducta circa axem L C: igitur E F circumducta = 4 arc. E R *in* E F duc. 1 ll E F *in* 4 arc. E R duc. 1: sed ex conceptu ductus quarti ampliati & proposita hypothesi, etiam constat, E K circumductam = E K *in* 4 arc. E R duc. 4 ampliato, quia vtroque modo producitur eadem prorsus superficies: igitur F E circumducta *ad* E K circumductam = E F *in* 4 arc. E R duc. 1 *ad* E K *in* 4 arcus E R ll 2L E *ad* L E † M K, vt constat ex theoremate 7. & hypothesi. Quod erat demonstrandum pro prima assertione.

Demonstratio secundæ assertionis. Ex hypothesi, & conceptibus ductus primi & tertij, manifestum est, eamdem superficiem produci, tum ex 4 arc. E R *in* E F duc. 1, atque ex E F circumducta: tum ex 4 arc. E R *in* E H duc. 3, atque ex E H circumducta: igitur E F circumducta *ad* E H circumductam = 4 arc. E R *in* E F duc. 1 *ad* 4 arcus E R *in* E H duc. 3 ll 4 arc. E R *in* E F duc. 3: sed per theor. 6. etiam 4 arc. E R *in* E F duc. 1 *ad* 4 arc. E R *in* E F duc. 3 = 2 *ad* 1 ll 2L E *ad* L E: ergo F E circumducta *ad* E H circumductam = 2L E *ad* L E. Quod erat demonstrandum pro secunda assertione.

Demonstratio tertiæ assertionis. Per primam assertionem E F circumducta *ad* E K circumductam = 2L E *ad* L E † M K: ergo inuertendo E K circumducta *ad* E F circumductam = L E † M K *ad* 2L E: sed per secundam assertionem, E F circumducta *ad* E H circumductam = 2L E *ad* L E: ergo ex æquo, E K circumducta *ad* E H circumductam = L E † M K *ad* L E. Quod erat demonstrandum pro tertia assertione.

Lem-

Lemma III.

Centro Y, diametro E P, deſcriptæ circularis lineæ pars aliqua non maior medietate, ſit arcus D P, qui diuiſus ſit in quotlibet partes inter ſe æquales, exempli gratia D B, B C, C Q, Q P: atque ex iſtorum arcuum terminis diuerſis, à punctis E & P, ductæ ſint rectæ perpendiculares ad diametrum E P, nimirum lineæ D L, B I, C H, Q F: ſitque ducta recta E Q. Fig. 20.

Dico D L + 2 B I + 2 C H + 2 Q F *in* P Q = L P *in* E Q.

Conſtructio. Rectæ D L, B I, C H, Q F productæ iterum occurrant circumferentiæ diametro E P deſcriptæ, in punctis M, N, O, R: & ductæ rectæ M B, N C, O Q ſecent diametrum E P in punctis K, S, G.

Demonſtratio. Ex theoremate 4. cap. 3. conſtat inter ſe ſimilia eſſe, ſingula triangula Q F P, Q F G, O H G, C H S, N I S, B I K, M L K, quia ſingulorum vnus angulus per hypotheſim rectus eſt, & præterea ex reliquis duobus angulis vnus habet verticem in circumferentia, atque hi ſinguli inſiſtunt arcubus æqualibus, adeòque per theor. 7. cap. 3. inter ſe æquantur: igitur Q F *ad* F P = Q F *ad* F G || O H *ad* H G || C H *ad* H S || N I *ad* I S || B I *ad* I K || M L *ad* L K. ergo per theor. 2. cap. 2. omnes antecedentes ſimul ad omnes conſequentes ſimul = Q F *ad* F P: atqui omnes antecedentes ſimul = M L + B I + N I + C H + O H + Q F + Q F || D L + 2 B I + 2 C H + 2 Q F, quandoquidem M L = D L, & etiam N I = B I, & præterea O H = C H; omnes verò conſequentes ſimul = L P, vt patet ex hypotheſi & conſtructione: igitur D L + 2 B I + 2 C H + 2 Q F *ad* L P = E Q *ad* P Q: ergo D L + 2 B I + 2 C H + 2 Q F *in* P Q = L P *in* E Q. Quod erat demonſtrandum.

Lemma IV.

Suppoſita hypotheſi tertij lemmatis, quodque E Q *ad* X = X *ad* P L. Fig. 20.

Dico circulum radio X deſcriptum = ſuperficiei productæ ex P Q + Q C + C B + B D circumductis circa axem E P.

Pro conſtructione ſuppono ſequentes æquationes.

P Q *ad* G = G *ad* Q F.
Q C *ad* K = K *ad* Q F + C H.
C B *ad* S = S *ad* C H + B I.
B D *ad* M = M *ad* B I + D L.

Nota. Lineæ quæ vnica litera indicantur, non repræſentantur à figura quæ citatur; quod verò eædem iſtæ literæ in figura denotent punctum aliquod, cauſare non poteſt

potest æquiuocationem: quandoquidem ex circumstantijs satis constet vtrum significent punctum, vel lineam. Quando verò tali vnica litera lineam significante, indicatur circulus: intelligendus est circulus habens radium æqualem lineæ significatæ per talem vnicam literam.

Demonstratio. Quoniam per hypothesim E Q *ad* X = X *ad* P L: per 10. axioma, etiam E Q *in* P L = X2; similiter ex constructione, & 10. axiomate constat, P Q *in* Q F = G2: item Q C *in* Q F † C H = K2: item C B *in* C H † B I = S2: item B D *in* B I † D L = M2; atqui per lemma 3. constat P L *in* E Q = P Q *in* 2 Q F † 2 C H † 2 B I † D L ‖ P Q *in* Q F *et* † P Q *in* Q F † C H *et* † P Q *in* C H † B I *et* † P Q *in* B I † D L: ergo X2 = G2 † K2 † S2 † M2: ergo per 1. lemma, circulus X = circulo G † circulo K † circulo S † circulo M: sed ex constructione, & lemmate secundo satis constat, circulum G = P Q circumductæ: item circulum K = Q C circumductæ: item circulum S = C B circumductæ: item circulum M = B D circumductæ; igitur circulus X = P Q † Q C † C B † B D circumductis. Quod erat demonstrandum.

Lemma V.

Fig. 21.

Sectori D A P inscripta sit figura æquilatera, cuius primum latus sit P Q, vltimum D B: eidemque sectori circumscripta sit figura æquilatera, inscriptæ figuræ similis, cuius primum latus F M sit parallelum lateri P Q, vltimum C G sit parallelum lateri D B; præterea in recta F A producta, notata sint puncta N & E, ita vt A N = A F, & etiam A E = A P: sintque ductæ rectæ N M & E Q; denique litera X significet omnia latera inscripta, quorum primum est Q P, vltimum D B: atque litera Z significet omnia latera circumscripta, quorum primum est F M, vltimum C G.

Dico primò, rectam N M = rectæ E P.
Dico secundò, X *ad* Z = E Q *ad* E P.

Constructio. Recta P K perpendicularis ad rectam E P, occurrat in puncto K rectæ E Q productæ: & recta A S perpendicularis ad P Q, occurrat in R arcui Q P.

Demonstratio primæ assertionis. Ex capite tertio & hypothesi vel constructione, satis manifestum est similia esse triangula E P K & E Q P: adeòque angulum Q K P = angulo S P A: sed angulus P Q K = angulo A S P, singuli enim recti sunt: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula A S P & P Q K sunt inter se similia: ergo P Q *ad* P K = A S *ad* A P ‖ A R *ad* A F ‖ Q P *ad* M F: patet enim triangula A S P, A R F, P Q K esse inter se similia: ergo Q P *ad* P K = Q P *ad* M F: ergo P K = M F: sed quoniam etiam similia sunt triangula E P K & N M F, constat P K *ad* M F = E P *ad* N M: igitur N M = E P. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ assertionis. Quoniam per hypothesim, X significat laterum Q P aliquem numerum K: & præterea Z significat laterum M F eumdem numerum K: patet, Q P *in* K = X: & præterea M F *in* K = Z: sed per theor. 4. cap. 2.

 con-

constat, Q P *in* K *ad* M F *in* K = Q P *ad* M F: ergo etiam X *ad* Z = Q P *ad* M F || E Q *ad* N M: sed per primam assertionem N M = E P: ergo X *ad* Z = E Q *ad* E P. Quod erat demonstrandum.

Lemma VI.

Centro A, diametro E P descriptus sit arcus D P, non maior dimidia circumferentia circuli: atque ex puncto D, perpendicularis ad diametrum E P, illi occurrat in puncto L: denique E P *ad* Y = Y *ad* L P. Fig. 21.

Dico arcum D P circumductum circa axem E P = circulo descripto radio Y.

Constructio. Supposita hypothesi lemmatis præcedentis, sectori D A P inscriptæ & circumscriptæ figuræ similes, tales sint, vt verificentur hic annotatæ hypotheses, quod possibile esse, satis manifestum est.

1. L P *ad* Y = Y *ad* E P.
2. L P *ad* S = S *ad* E Q.
3. E P *ad* T = T *ad* H F.
4. L P *ad* Y − R = Y − R *ad* G.
5. E P *ad* Y † R = Y † R *ad* C.
6. E Q sit maior quam G.
7. C sit maior quam H F.
8. R sit quelibet data linea.

Nota hic quod ante demonstrationem lemmatis 4. notatur.

Demonstratio. Per 4. hypoth. L P *ad* Y − R = Y − R *ad* G, & præterea per 2. hypoth. L P *ad* S = S *ad* E Q: sed per 6. hypoth. E Q est maior quam linea G: ergo linea S, est maior quam linea Y − R: ergo circulus S, est maior circulo Y − R: sed per lemma 4. circulus S = X circumductæ: ergo X circumducta, est maior circulo Y − R: atqui arcus D P circumductus, est maior quam X circumducta: ergo arcus D P circumductus, est maior circulo Y − R.

Rursus, per 7. hypoth. linea C est maior quam H F: ergo ex 3 & 5 hypothesi, patet quod linea Y † R, sit maior quam linea T: ergo circulus Y † R, est maior circulo T: sed quoniam per 3. hypoth. E P *ad* T = T *ad* H F, & per 5. lemma constat, E P = N M, patet etiam N M *ad* T = T *ad* H F, adeòque per 4. lemma circulus T = Z circumductæ: ergo circulus Y † R, est maior quam Z circumducta: sed Z circumducta, est maior arcu D P circumducto: ergo circulus Y † R, est maior arcu D P circumducto.

Quoniam igitur hic primo loco demonstratum est, arcum D P circumductum, esse maiorem quolibet circulo Y − R, qui sit minor circulo Y: & præterea secundo loco demonstratum est, arcum D P circumductum, esse minorem quolibet circulo Y † R, qui sit maior circulo Y; manifestum est arcum D P circumductum, neque maiorem, neque minorem esse circulo Y: adeòque arcum D P circumductum = circulo Y. Quod erat demonstrandum.

Lem-

Lemma VII.

Dimidia circuli circumferentia P K Q, diuisa sit in duas partes inter se æquales à puncto K; præterea in hac semicirculi circumferentia, notatum sit quoduis punctum D, ex quo ducta recta perpendicularis ad diametrum P Q illi occurrat in G, denique arcus K R sit quarta pars circularis lineæ quam describit punctũ K, quando semicirculus PQK circũuoluitur circa axem PQ.

Fig. 22.

Dico 4 arcus K R *in* G P ductu 1 = arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5.

Demonstratio. Assumpta recta linea M, ita vt P Q *ad* M = M *ad* G P: atque integra circuli circumferentia habens radium M, appelletur L. Considerando proportionem quam habet.

M *in* L ductu 4 *ad* 4 arc. K R *in* G P ductu 1.

Quatuor rationes commemoratæ in secunda regula Logisticæ erunt.

1	*c b*	M *ad* 4 arc. KR	*n* 3	M *ad* GP	*c b*	M *ad* GP	M *ad* GP	*c b*
2	*c b*	L *ad* GP		L *ad* 4 arc. KR	3 *c* 5	M *ad* PN	M *ad* 2 PN	
3	4 *c* 6	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2	1 *ad* 1	
4	4 *c* 1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1	

M *ad* GP
M *ad* QP
1 *ad* 1
1 *ad* 1

Igitur per capitis 2. theor. 7. ratio composita est M *in* M *ad* G P *in* Q P: sed quoniam per hypothesim P Q *ad* M = M *ad* G P: per axioma 10 constat, M *in* M = G P *in* P Q; igitur etiam M *in* L ductu 4 = 4 arc. K R *in* G P ductu 1; atqui per 4 lemma, constat M *in* L ductu 4 = arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5: ergo etiam 4 arc. K R *in* G P duc. 1 = arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5. Quod erat demõstrandũ.

Theorema VIII.

Qualescunque sint quantitates A & B.

Dico primo A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = E *ad* F ll 2 G *ad* H quando basis A est linea.

Dico secundo A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = 3 E *ad* 2 F ll 3 G *ad* H quando basis A est superficies.

Nota literas A, B, E, F, G, H pro hoc theoremate intelligendas esse, quando solitariè positæ inueniuntur vt

A = basi quæ ducitur ductu quinto: siue hæc basis sit arcus, siue sit sector circuli.
B = altitudini in quam basis ducitur ductu quinto.

E =

E = arcui qui est basis, vel qui terminat basim quando basis est sector circuli.
F = parti axeos, circa quem basis circumuoluitur ductu quinto, & respondet arcui E: siue intercipitur inter duas parallelas per terminos arcus E transeuntes, atque perpendiculares ad axem.
G = sectori terminato ab arcu E.
H = rectangulo quod oritur ductu primo, ex radio arcus E, ducto in F.

Constructio. Semicirculi centro N descripti, circumferentia sit P K Q: sintque arcus P K & K Q inter se æquales: atque in arcu P K Q notata sint duo puncta D & H, sic vt arcus P D sit maior arcu P H: rectæ lineæ D G & H I perpendiculariter occurrant axi P Q in punctis G & I: sitque arcus K R, quarta pars circularis lineæ quam describit punctum K, quando semicirculus P Q K circumuoluitur circa axem P Q. Fig. 22.

Pro prima parte primæ assertionis distinguo duos casus quos potest admittere. Primus casus est quando arcus qui est basis habet aliquem terminum communem cum axe P Q. Secundus casus est quando arcus qui est basis non habet aliquem terminum communem cum axe P Q.

Demonstratio primæ partis primæ assertionis, in casu in quo basis A = arcui P D: Pro hac demonstratione assumo rationem E *ad* X, vt significet rationem ductus 1 ad ductum 5. In primo casu per 5. lemma

4 arc. K R *in* GP ductu 1 = arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5.

Considerando hanc æquationem, quatuor rationes commemoratæ in secunda regula Logisticæ, erunt.

			n3			
1	ch	4 arc. KR *ad* arc. PD		4 arc. KR *ad* 4 arc. KR		1 *ad* 1
2	ch	GP *ad* 4 arc. KR		GP *ad* arc. PD	ch	F *ad* E
3	4c1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	ch	E *ad* X		E *ad* X		E *ad* X

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita est F *in* E *ad* X *in* E: sed ex æquatione quam consideramus, patet hanc rationem compositam, esse rationem æqualitatis; igitur F *in* E = X *in* E: adeòque F = X: igitur E *ad* F = E *ad* X: sed per hypothesim & constructionem, A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = E *ad* X: ergo etiam A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = E *ad* F, vt erat demonstrandum in primo casu primæ assertionis, quando basis est arcus P D habens aliquem terminum P communem cum axe P Q.

Demonstratio primæ partis primæ assertionis in secundo casu quando basis est arcus H D, non habens vllum terminum communem cum axe P Q. Per primum casum constat, arcum P D *in* 4 arc. K R ductu 1 *ad* arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5 = arc. P D *ad* G P, & præterea arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 1 *ad* arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 5 = arc. P H *ad* I P: igitur per theor. 2. cap. 2. etiam arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 1 *et* — arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 1 *ad* arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5 *et* — arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 5 = arc. P D — arc. P H *ad* G P — I P ll arc. D H *ad* G I: sed arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 1 *et* — arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 1 = arc. D H *in* 4 arc. K R ductu 1: & præterea arc. P D *in* 4 arc. K R ductu 5 *et* — arc. P H *in* 4 arc. K R ductu 5 = arc. D H *in* 4 arc. K R ductu 5: igitur arc. D H *in* 4 arc. K R ductu 1 *ad* arc. D H *in* 4 arc. K R ductu 5 = arc. D H *ad* G I ll E *ad* F, vt constat ex hypothesi. Quod erat demonstrandum in secundo casu primæ assertionis, quando basis quæ est arcus, non habet vllum terminum communem cum axe P Q.

Quoniam manifestum est, arcum, qui est basis, necessariò vel habere aliquem terminum cum axe communem, vel non habere aliquem terminum cum axe com-

communem: ex duabus propositis demonstrationibus constat veritas primæ partis primæ assertionis in quolibet casu.

Demonstratio secũdæ partis primæ assertionis, quæ asserit E *ad* F = 2G *ad* H. Quoniam ex theor. 6. constat N K *in* arc. H D ductu 4 *ad* N K *in* arc. H D ductu 1 = 1 *ad* 2; & ex hypothesi, & ductus quarti intelligentia constat, N K *in* arc. H D duc. 4. = sectori H N D: patet N K *in* arc. H D = duobus sectoribus H N D: ergo

Fig. 22. singula ducendo in rectam G I, etiam G I *in* N K *in* H D = G I *in* 2H N D: igitur per axioma 10. constat, H D *ad* G I = 2H N D *ad* G I *in* N K: sed per hypothesim, E = H D, item F = G I, item 2G = 2H N D, item H = G I *in* N K: ergo etiam E *ad* F = 2G *ad* H. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio primæ partis secundæ assertionis, in qua asseritur A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = 3E *ad* 2F, quando basis est superficies. Pro demonstratione, cõmoditatis gratia, suppono literam P significare K N *in* arc. D H duc. 4: & præterea literam Q significare arc. D H *in* 4 arc. K R duc. 5: atque retineo prius propositam constructionem. Ex ductuum conceptibus constat, idem omnino corpus esse quod producitur tum ex Q *in* K N ductu 3, tum etiam ex P *in* 4 arc. K R ductu 5; quare constat.

P *in* 4 arc. K R ductu 5 = Q *in* K N ductu 3.

Considerando hanc æquationem, atque supponendo quod hactenus incognita ratio ductus primi ad ductum 5 = X *ad* Z: ex quatuor rationibus commemoratis in secunda regula Logisticæ.

						KN	*ad*	arc. DH		KN	*ad*	KN
1	*ch*	P	*ad*	Q	*a*	arc. DH	*ad*	4 arc. KR	*n*3	arc. DH	*ad*	arc. DH
		1				1	*ad*	2		1	*ad*	1
						arc. HD	*ad*	GI		arc. HD	*ad*	GI
2	*ch*	4 arc. KR	*ad*	KN		4 arc. KR	*ad*	KN		4 arc. KR	*ad*	4 arc. KR
3	*ch*	Z	*ad*	X		Z	*ad*	X		Z	*ad*	X
4	4*cb*	3	*ad*	1		3	*ad*	1		3	*ad*	2

1	*ad*	1
1	*ad*	1
1	*ad*	1
arc. HD	*ad*	GI
1	*ad*	1
Z	*ad*	X
3	*ad*	2

Igitur per 2. capitis theor. 7. ratio composita, erit 3H D *in* Z *ad* 2G I *in* X: atqui ex æquatione quæ consideratur, & theor. 2. constat, hanc compositam rationem, esse rationem æqualitatis; ergo 3H *in* Z = 2G I *in* X: ergo per axioma 10. 3H D *ad* 2G I = X *ad* Z: sed vt supponebatur X *ad* Z = A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5: ergo A *in* B ductu 1 *ad* A *in* B ductu 5 = 3H D *ad* 2G I ll 3E *ad* 2F, vt constat ex hypothesi. Quod erat demonstrandum.

a Nota. Ex hypothesi, & theoremate secundo, constat quod ratio P *ad* Q sit composita ex quatuor rationibus, quarum prima est, K N ad arc. D H; secunda est arc. D H *ad* 4 arc. K R; tertia est, 1 *ad* 2, vt constat ex theor. 6; quarta est, arcus H D *ad* G I, vt constat ex prima parte huius theorematis; quare iuxta notam quartam secundæ regulæ Logisticæ, pro ratione P *ad* Q, quæ in prima rationum serie inuenitur, bene substituuntur, quatuor rationes cõponentes rationẽ P *ad* Q.

Demonstratio secundæ partis secundæ assertionis, quæ asserit 3E *ad* 2F = 3G *ad* H. Ex ductu 4 & constructione constat, 3 D N H = 3 D N *in* arc. D H ductu 4: igitur singula ad D N *in* G I habent eamdem rationem: ex his duabus inter se æqualibus rationibus posterior est.

3D

3 D N *in* arc. D H ductu 4 *ad* D N *in* G I ductu 1.

Considerando hanc rationem, illam componentes, quatuor rationes commemoratæ in secunda regulæ Logisticæ, erunt

1	*c b*	3 DN *ad* DN	3 *ad* 1
2	*c b*	arc.DH *ad* GI	arc.DH *ad* GI
3	4*c*6	1 *ad* 2	1 *ad* 2
4	4*c*1	1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur per secundi cap. theor. 7. ratio composita, erit 3 D H *ad* 2 G I ll 3 E *ad* 2 F, vt patet ex hypothesi; ergo 3 D N *in* arc. D H ductu 4 *ad* D N *in* G I ductu 1 = 3 E *ad* 2 F: sed prius hic etiam ostendimus, 3 D N *in* arc. D H duc. 4 *ad* D N *in* G I ductu 1 = 3 D N F *ad* D N *in* G I ll 3 D N F *ad* K N *in* G I ll 3 G *ad* H., vt patet ex hypothesi: igitur 3 E *ad* 2 F = 3 G *ad* H. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Tota Logisticæ nostræ elementaris doctrina de ductibus Geometricis atque nominatis, consistit in paucis theorematis hoc capite demonstratis, & terminorũ intelligentia, quam requirunt atque supponunt istæ demonstrationes: pro hac terminorum intelligentia consulendus est index: breuior enim atque pro praxi etiam requisita terminorum expositio, magna ex parte continetur libro primo: illa verò quæ paucis sufficienter proponi non poterat; & tamen requiritur pro Logistica speculatiua, continetur libro tertio. Ab his diuersa nonnulla atque non indigna consideratione, spectantia ad demonstrationes hoc capite propositas, videri possunt in loco citato ab indice ad vocem demonstratio.

Theoremata stabilita in posterioribus tribus capitibus præcedentibus, de proportionibus, de angulis, de ductibus: illa sunt, in quibus consistunt Logisticæ nostræ speculatiuæ elementares veritates indigentes demonstratione: etenim inter elementa speculatiuæ Logisticæ nostræ, non numeramus problemata aut praxes, aut pro his requisitas demonstrationes: sed problematum & praxium aut solutiones aut demonstrationes, annumeramus fructibus qui ex speculatiuis elementis producũtur: huiusmodi tamen problemata aut praxes à nobis distinguuntur in elementares, atque constituentes Logisticæ practicæ elementa, & non elementares; problemata & praxes elementares Logisticæ practicæ elementa constituentes, sunt, quæ continentur libro primo, in quo egimus de nostra Logistica practica. Ex his praxibus aliquæ satis manifestæ ex terminorum intelligentia, nulla indigent demonstratione: aliæ tamen indigent demonstratione, vt admitti debeant infallibiles atque sufficienter subsistentes; requisita vt tales admitti debeant singulæ praxes quæ libro primo continentur, proponimus aliquot capitibus subsequentibus; vt in hoc libro stabilita elementa speculatiuæ nostræ Logisticæ, immediatè succedant requisita ad firmam subsistentiam elementorum practicæ nostræ Logisticæ. Quoniam verò inter practica eius elementa, prima consistunt in inuentione productorum quæ oriuntur ex Logisticis operationibus, inter quas operationes præcedunt illæ quæ docent inuenire productum vel additionis vel subtractionis, hoc est duarum quantitatum aggregatum vel differentiam: de his agimus in capite proximè subsequente: à quo pergimus ad requisita pro praxibus docentibus inuenire producta, aut ex regula aurea, aut ex eius compendijs quæ aliter appellantur multiplicatio & diuisio, atque constituunt posteriores duas operationes Logisticas; & ita paulatim procedimus ad requisita pro speculatiua subsistentia reliquarum praxium, constituentium elementa practica nostræ Logisticæ: quæque in ordine ad praxim sufficienter declaratæ sunt in libro primo, in quo tamen libro, nihil diximus de speculatiua praxium subsistentia.

CAPVT V.

De additione & subtractione: atque ex his duabus operationibus productis quantitatibus, quæ aliter appellantur quantitatum aggregata vel differentiæ.

EX quatuor operationibus quarum praxes tradidimus superius cap. 2. lib. 1. duæ anteriores, cæterisque faciliores, sunt illæ, quarum altera dicitur additio, altera subtractio: prior docet inuenire duarum datarum quantitatum aggregatum, altera docet inuenire duarum datarum quantitatum differentiam. Diuersitas quantitatum, vel quæ dantur pro operatione, vel quæ per operationem inueniendæ sunt, notabilem causare potest diuersitatem inter has operationes: ideòque citatum caput diuidimus in octo diuersas partes, atque in singulis tradita quantitatum additio & subtractio, diuersa est, ab additione & subtractione quæ traditur in reliquis partibus.

Inter has quantitatum additiones & subtractiones reales, nulla quidem inuenitur quæ satis immediatè manifesta non sit, vel ex intelligentia terminorum quibus vtitur Logistica nostra, vel ex prius hic demonstratis eius elementis; vt tamen clarius constet hoc verissimum esse, non parum prodesse possunt subsequentes notæ.

Nota primò. Additio quantitatum A & B, est inuentio quantitatis C, quæ est aggregatum quantitatum A & B. Subtractio quantitatis A ex quantitate C, est inuentio quantitatis B, quæ est differentia quantitatum A & C. Licet hoc vniuersaliter, ac semper verum sit: quoniam tamen datæ quantitates, quarum aggregatum vel differentia inueniri debet, subinde considerantur vt tales quantitates sunt, subinde verò considerantur quoad valorem quem habent: etiam aggregatum vel differentia non semper eodem modo intelligi debet: sed aliquando est aggregatum vel differentia quantitatum quæ dantur pro additione vel subtractione: aliquando est aggregatum, vel differentia valorum quem habent illæ quantitates: atque ex circumstantijs in quibus de additione vel subtractione agitur, colligi debet quomodo considerentur datæ quantitates.

Nota secundò. Quemadmodum ductus Geometricos, pro speculatiua Logistica distinguimus, in reales & æquiualentes: vt pluribus declaramus in loco citato ab indice ad voces *ductus æquiualens*; ità etiam additionem & subtractionem distinguimus, in realem & æquiualentem: per realem intelligendo, illam, in qua adhibentur quantitates datæ pro operatione: per æquiualentem verò intelligendo, illam, in qua adhibentur, non quidem ipsæ quantitates datæ, sed aliæ siue alterius speciei, datis quantitatibus æquiualentes. Pro reali additione & subtractione sufficiunt præscripta quæ capite 2. lib. 1. traduntur sub titulo additionis vel subtractionis: pro ijs quæ æquiualentes appellantur, vtiles sunt praxes quæ eodem capite traduntur in fine diuersarum partium, in quas caput illud diuisum est: in quibus praxibus non docetur, neque additio, neque subtractio quantitatum, sed inuentio quantitatis alterius speciei, quæ alteri quidem datæ quantitati æquiualeat, habeat tamen proprietates diuersas ab illis quæ in data quantitate inueniuntur, quæque vtiliores sint ad propositum finem, nimirum inuentionem aggregati aut differentiæ.

Nota tertiò. Ex additionibus & subtractionibus de quibus agit nostra Logistica, alias

alias appellat propriè dictas, alias verò impropriè dictas: quidquid enim sit, an aliæ, alijs magis propriè loquendo dicendæ sint additiones aut subtractiones (quod non controuertimus, neque verum putamus) illam additionem aut subtractionem appellamus propriè dictam, in qua quantitates quæ adhibentur in additione vel subtractione, sunt quantitates eiusdem speciei: reliquas, in quibus quantitates quæ adhibentur, non sunt eiusdem speciei, sed inter se aut specie aut genere differunt, appellamus impropriè dictas additiones vel subtractiones. Hanc propriè & impropriè dictæ additionis intelligentiam, supponimus in tertio & quarto axiomate capitis 1. nobis enim non placet axioma in quo Euclides pronunciat omne totum qualibet sua parte maius esse, vt notabimus cap. 2. lib. 3. ad quartum Algebræ axioma; quandoquidem enim inter producta ex additione, quæ & aggregata & tota dici possunt, admittamus complexum ex superficie & linea, vel alijs quibuslibet duabus quantitatibus diuersi generis: & tamen in Logistica nostra, vt in antiqua Mathesi, nefas sit inter duas diuersi generis quantitates proportionem admittere, adeòque vnam altera maiorem aut minorem asserere: illicitum putamus, illud totum, quod est aggregatum ex linea & superficie, maius asserere, & sola linea, & sola superficie, quæ istius totius partes sunt. Fatemur quidem, complexum ex linea & superficie esse totum, quod excedat, tum solam superficiem, tum solam lineam: quia continet superficiem & aliquid amplius: & præterea continet lineam & aliquid amplius: atque vox *excedere* aliud non significat, quam alterum & aliquid amplius continere; hanc tamen significationem concedere non possumus voci *maius*: quia vt diximus in Mathesi vsitatum est, vocem *maius* ita intelligere, vt idem significetur, asserendo quantitatem A esse maiorem quantitate B, & asserendo quantitatem A ad quantitatem B habere rationem maioris inæqualitatis: quod dici non potest, eoipso quod genere inter se differant quantitates A & B.

Nota quartò. Ex additionibus & subtractionibus de quibus hic agimus, aliæ dicuntur compensantes, aliæ non compensantes. Additio vel subtractio appellatur compensans, si pro illa data quælibet quantitas, non sit ex illis quæ in Logistica nostra appellari possunt positiuæ: sed vna sit positiua, altera sit negatiua: siue vna sit affecta signo +, altera sit affecta signo −: quo casu datæ duæ quantitates, erunt quantitates compensantes; reliquæ additiones & subtractiones dicuntur non compensantes, & pro illis datæ quantitates (quæ singulæ sunt, aut positiuæ, aut negatiuæ, siue similibus signis affectæ) non sunt quantitates compensantes. In consideratione 2. cap. 5. lib. 3. vbi pluribus agimus de quantitatibus, compensantibus, siue affectis diuersis ex signis + vel −, quarum alias positiuas, alias negatiuas appellamus: satis declaramus istarum quantitatum significationem, & quomodo inter se differant: dicimúsque has quantitates inter se differre, vt merita bona, & merita mala; priora valent in ordine ad augendum præmium, vel imminuendam pænam: posteriora valent in ordine ad augendam pænam, vel imminuendum præmium. Ex hac intelligentia quantitatum positiuarum & negatiuarum, quarum aliæ signo +, aliæ signo − afficiuntur: satis manifestum est quod quẽadmodũ in ordine ad augmentũ præmij, vel pænæ imminutionem, inter se æquiualent, tum acquisitio siue additio quatuor graduum meriti boni, tum amissio, condonatio, siue subtractio quatuor graduum meriti mali: & similiter in ordine ad augmentum pænæ, vel præmij imminutionem, inter se æquiualent, tum acquisitio siue additio quatuor graduum meriti mali, tum amissio, perditio, siue subtractio quatuor graduum meriti boni; itá vniuersaliter inter se æquiualent, producta orta, tum ex numero negatiuo − 4, addito alteri numero siue positiuo siue negatiuo: tum ex numero positiuo + 4, subtracto ex eodem illo numero siue positiuo siue negatiuo; similiter inter se æquiualent, producta orta, tum ex numero

mero positiuo † 4 addito alteri numero siue positiuo siue negatiuo, tum ex numero negatiuo — 4 subtracto ex illo altero numero siue positiuo siue negatiuo. Ex quibus vlterius cōstat quod quemadmodū quatuor gradus meriti boni prius mutare in quatuor gradus meriti mali, & hos gradus addere alijs decem gradibus meriti boni vel mali, sit additio æquiualens subtractioni, in qua quatuor gradus meriti boni subtrahuntur ex decem gradibus meriti boni vel mali: vel certè quatuor gradus meriti mali prius mutare in quatuor gradus meriti boni atque illos addere decem gradibus meriti boni vel mali, sit additio æquiualens subtractioni in qua quatuor gradus meriti mali, subtrahuntur ex decem gradibus meriti boni vel mali; ita similiter atque vniuersaliter, quantitatis A; signum † prius mutare in signum —, ac deinde negatiuam quantitatem — A, addere positiuæ vel negatiuæ alteri quantitati: sit additio æquiualens subtractioni, in qua quantitas positiua † A subtrahitur ex altera quantitate positiua aut negatiua: vel certè quantitatis negatiuæ — A, signum — prius mutare in signum †, ac deinde quantitatem positiuam † A addere quantitati vel positiuæ vel negatiuæ, sit additio æquiualens subtractioni, in qua quantitas negatiua — A, subtrahitur ex altera quantitate siue positiua siue negatiua; in hac verò æquiualentia inter subtractionem sine vlla signorum mutatione, & additionē cum præcedente signi mutatione in quantitate subtrahenda, fundatur illa subtractio vniuersalis quæ proponitur in parte prima cap. 2. lib. 1. prædicta verò signi mutatio, tantum fieri debet circa subtrahendi numeri numeratorem: quia hic numerator adæquatè indicat, quot vnitates contineat numerus subtrahendus: & sicut dignitas, ac denominator, tantum indicant quales sint vnitates à numeratore indicatæ: ità cum numero subtrahendo particula *in* vel *per* connexi alij numeri, tantum indicant quales sint vnitates, quæ significantur à numeratore numeri subtrahendi, atque constituunt vlteriores restrictiones vnitatum indicatarum à numeratore numeri subtrahendi. Quod verò hæc signi mutatio pro libitu fieri possit vel in signo numeri subtrahendi, vel in signo vnius numeri particula *in* vel *per* connexi cum numero subtrahendo, inde tantum fit, quia idem numerus exempli gratia — 12 producitur, tum ex † 4 *in* — 3, tum ex — 4 *in* † 3: atque generaliter, cæteris paribus, inter se æquiualent, tum numerus positiuus ductus in numerum negatiuum, aut per illum diuisus: tum numerus negatiuus ductus in numerum positiuum, aut per illum diuisus: vt constabit ex dicendis de multiplicatione & diuisione istorum numerorum.

Nota quintò. Vox *aggregatum* in nostra Logistica ita intelligenda est, vt significet illud, quod adæquatè constat ex illis quorum aggregatum dicitur; ità aggregatum quantitatum A & B, significat complexum ex quantitatibus A & B: siue illud, quod constat ex quantitatibus A & B, & nulla alia quantitate diuersa à quantitatibus A & B; hinc numerus septem & nullus alius, est aggregatum numeri 4 & numeri 3; præterea complexum ex linea A & superficie B, aliter dicitur aggregatum lineæ A & superficiei B: neque refert vtrum aggregatum aliquod constituentes quantitates specie conueniant, vel inter se specie aut etiam genere differant. Omne etiam aggregatum aliter & bene dicitur totum, cuius partes sunt singulæ quantitates quarum aggregatum est: ità saltem voces *totum* & *pars* intelligi debent in nostra Logistica, tametsi in hoc sensu intelligendo voces *totum* & *pars*, verum non sit Euclideum axioma, asserens omne totum, qualibet sua parte maius esse: vt diximus in tertia nota.

Nota sextò. Quod vox *differentia* generaliter quidem significet omne illud propter quod vnum ens differt ab altero ente: atque ità curuitas benè dicitur differentia propter quam lineæ curuæ differunt ab ijs quæ curuæ non sunt: item extensio differentia est, propter quam quantitas continua differt à quantitate quæ continua non est: atque ità innumeris alijs diuersis modis inter se differre possunt

sunt duæ quantitates, & admittere differentias inter se diuersas. Quoties in Mathesi sermo est de aliqua ex innumeris istis, atque inter se diuersis differentijs, quæ inueniri possunt inter duas quantitates: exprimitur, & declaratur de qua differentia sermo sit, præterquam in vno casu, nimirum quando per differentiam duarum quantitatum A & B, intelligi debet quantitas quę est excessus quo vna ex his duabus quantitatibus excedit alterā. In hac significatione intelligēda est vox *differentia*, quando dicitur quod productū ex subtractione aliter appelletur differentia: hæc differentia duarum quantitatū A & C, necessariò quantitas est, & pars vnius ex istis duabus quantitatibus A & C: quare supposito quod B sit differētia duarū quantitatū A & C, necessariò verum erit quod B sit quantitas: item quod B sit pars quantitatis A vel quantitatis C. Præterea facta hypothesi quod B sit pars quantitatis C, necessariò verum erit, quod C sit aggregatum quantitatum A & B: item quod A sit differentia quantitatum B & C: non tamen necessariò verum erit, quod quantitates A & B sint quantitates eiusdem generis: aut quod quantitas A vel B (quæ singulæ sunt partes quantitatis C) sit minor quantitate C; id enim falsum est, saltem iuxta nostram Logisticam, eo ipso quod quantitates A & B genere inter se differunt: atque exempli gratia A significet lineam, B significet superficiem, quo casu C significat complexum siue aggregatum ex linea A & superficie B, cuius aggregati C, pars vna est linea A, pars altera est superficies B: in hoc casu aggregatum C, non potest dici maius, aut sua parte siue linea A, aut sua parte siue superficie B, sed tamen aggregatum C, excedit, atque superat, tum partem suam A, tum partem suam B: quia nimirum voces *excedere* & *superare*, quando vna quantitas C dicitur excedere aut superare quantitatem A vel B, tantum significant quod quantitas C contineat quantitatem A vel B, & aliam aliquam quantitatem, siue eiusdem generis, siue diuersi generis: verum quando quantitas C dicitur maior quantitate B, significatur quod quantitas C contineat quantitatem B & aliquam aliam eiusdem generis quantitatem: quod falsum est in præmissa hypothesi, in qua quantitas C continet quantitatem B, sed nullam aliam eiusdem generis quantitatem, licet vlterius contineat quantitatem A, quæ non est quantitas eiusdem generis cum quantitate B, vt supponitur in hypothesi de qua agitur: quodque hic diximus de differentia significationis excedere & maius esse, iterum notauimus in nota tertia.

His prænotatis circa additionem & subtractionem, aut quantitates productas ex his operationibus Logisticis, asserimus

Primò, quod additio & subtractio vniuersalis quæ traditur in prima parte cap. 2. lib. 1. Logisticæ, possit esse vel propriè dicta, vel etiam impropriè dicta, neque enim refert an specie conueniant, vel certè specie aut genere inter se differant, quantitates adhibitæ in hac operatione. Præterea quod singula huius siue additionis siue subtractionis præscripta ex terminis manifesta sint, supposita intelligentia eius quod in nota quarta dicitur de signi mutatione in quantitate subtrahenda.

Secundò, quod additio & subtractio vulgaris circa integros numeros quæ traditur in parte 2, supponat datos integros numeros, numerare vnitates eiusdem speciei, ideòque iuxtà notam 3. est additio & subtractio propriè dicta; eius præscripta cōstant ex intelligentia valoris proprij & localis quem habent notæ Arithmeticæ: qui diuersi istarum notarum valores declarantur in parte 1. cap. 1. lib. 1. Logisticæ.

Tertiò, quod additio & subtractio fractionum vulgarium quæ traditur in parte 3. cap. 2. lib. 1. sit additio & subtractio realis, & non differat ab additione & subtractione integrorum numerorum vulgarium, quando datæ fractiones, sunt fra-

ctio-

ctiones eiusdem nominis; si datæ fractiones non sint eiusdem nominis atque speciei, hæc additio & subtractio non est realis, sed æquiualens; etenim in operatione non adhibentur datæ atque inter se specie siue nomine differentes fractiones, sed aliæ fractiones eiusdem speciei siue nominis, quæ datis fractionibus æquiualeant; vt autem tales & datis æquiualentes & eiusdem nominis fractiones vulgares inueniri possint, potissimum seruiunt praxes quæ proponuntur in fine huius tertiæ partis. De his praxibus agemus cap. 7.; præscripta pro additione & subtractione reali non dependente ab his praxibus, ex eadem terminorum intelligentia manifesta sunt, ex qua constat quod dicitur de additione & subtractione numerorum vulgarium qui integri dicuntur.

Quartò, quod in 4. parte cap. 2. dicitur de additione vel subtractione, siue de contractione numerorum affectorum signis + vel —: manifestum est ex intelligentia significationis quam in Logistica nostra habent signa + vel —, de quibus signis hic videri potest nota 4: intellecta significatione istorum signorum, & quantitatum quarum aliæ positiuæ, aliæ negatiuæ appellantur: reflectendum tantum est, quod quidquid in his numeris subsequitur numeratorem, siue sit dignitas, siue dignitatis denominator siue aliquid connexum particula *in* vel *per*, se habeat vt in fractionibus denominator; adeò vt in his diuersitas, etiam causet, vel specificam, vel etiam genericam diuersitatem; vnde circa numeros talem habentes diuersitatem, inutilis est in hac 4. parte tradita contractio; circa cæteros numeros tradita contractio manifesta est ex intelligentia numerorum affectorum signis + vel — vt hic diximus.

Quintò, realis additio vel subtractio rationum quæ traditur in parte 5. cap. 2. satis manifesta est ex intelligentia rationum, pro qua videri potest quod dicitur initio cap. 3. lib. 1. Si pro additione vel subtractione datæ rationes non habent eumdem consequentem terminum, hęc rationum additio non absoluitur nisi prius pro datis rationibus substituendo rationes æquiualentes quæ habent eumdem consequentem terminum, & est additio siue subtractio æquiualens; vt habeantur rationes datis æquiualentes, atque habentes commune consequens, vtiles sunt praxes propositæ in fine partis quintæ, de quibus agimus in cap. 7.

Sextò, ex ijs quæ in 6. parte cap. 2. notantur circa additionem & subtractionem numerorum radicalium, constat, ad realem additionem tantum pertinere casum in quo illic agitur in prima nota, quando scilicet dati numeri radicales inter se nõ differunt, quo ad aliquid quod sequitur literam *q*; in quo casu satis manifestũ est quod dicitur de additione & subtractione in prima illius partis nota. Casus tertiæ notæ illius partis, spectat ad additionem & subtractionem vniuersalem traditam in prima parte capitis 2. Casus propositus in secunda nota 6. partis, agit de additione & subtractione æquiualente, atque dependente à praxibus propositis in fine huius 6. partis, de quarum subsistentia agitur cap. 10. huius libri.

Septimò, rectarum linearum additio vel subtractio quæ traditur in parte septima cap. 2. manifesta est, & tantum in Logistica proponitur inter reliquas additiones & subtractiones, propter causam illic indicatam.

Octauò, quod in parte 8. cap. 2. dicitur de additione & subtractione similium figurarum, manifestum non est ex terminorum intelligentia: tamen verum esse de figuris similibus quæ sunt quadrata, immediatè constat ex assertione 5. theor. 8. cap. 3. iam verò vt idem etiam constet de alijs figuris similibus de quibus agitur in parte 8. cap. 2. lib. 1. & præterea de multis figuris non similibus de quibus non agitur, sed agi poterat in parte 8. cap. 2.

Nota eamdem rationem quam inter se habent quadrata linearum AB, AC, BC etiam inueniri; primò inter figuras similes, atque productas ex aliquo eodem

du-

ductu Geometrico nominato, quarũ bases sunt prædictæ lineæ, vt constat ex corollario theorematis 1. cap.8. Secundò, inter figuras quæ singulæ sunt aggregata orta ex æquè multis figuris inter se similibus, additis singulis ex figuris similibus quæ pro basibus habent lineas A B, A C, B C, siue similiter additæ sint, adeòque simul figuras similes constituant: siue non similiter additæ sint, adeòque simul non constituant figuras similes; etenim hæc aggregata inter se habent eamdem rationem quam vna pars ad vnam partem similem, vt constat ex theor. 2. cap.2. Tertiò, inter figuras quæ habent pro basi vnam ex lineis A B, A C, vel B C, atque iuxta lemma 1. theor.8. cap. 4. habent inter se rationem quam habent istarum linearum quadrata.

De his omnibus siue inter se similibus, siue non similibus figuris quæ insistũt lineis A B, A C, C B, atque eamdẽ inter se rationem habẽt quam habent istarum linearum quadrata, asserimus verum esse, quod ex theoremate 8. cap.3. constat de istarum linearum quadratis; vt breuiter demonstrem hanc assertionem, facta hypothesi quod vox *figura* cum apposito nomine illius lineæ cui insistit, significet figuram tali lineæ insistentem, ità discurro; per hypothesim, figura A B *ad* figuram A C = A B2 *ad* A C2: & præterea figura B C *ad* figuram A C = B C2 *ad* A C2: ergo per dicta hic de additione rationum, etiam figura A B † figura B C *ad* figuram A C = A B2 † B C2 *ad* A C2: sed per assertionem 5. theor.8. cap.3. AB 2 † B C2 = AC2: ergo figura A B † figura B C = figuræ A C. Quod erat demonstrandum.

CAPVT VI.

De productis ex multiplicatione, & regula aurea, vel eius compendijs quæ aliter appellantur multiplicatio & diuisio.

MVltiplicatio dupliciter considerari potest, & pro nostra Logistica speculatiua necesse est eam dupliciter considerare; prima multiplicationis consideratio non dependet ab intelligentia rationum æqualium: immo est fundamentum doctrinæ de rationibus æqualibus; hoc modo breuiter definita multiplicatio proponitur initio cap.2. lib.1. Logisticæ nostræ: fusius verò exponitur in lib.3. [illegible] Logisticæ, atque ex eius notitia deriuatur decimum axioma propositum [illegible] stabilitis elementis doctrinæ de proportionibus qua vtitur nostra [illegible] huius libri demonstrata exhibuimus: aliter consideramus multip[illegible]ndenter ab æqualium rationum cognitione; in hac considera[illegible] dici potest compendium regulæ aureæ [illegible] ad datos tres terminos docet inuenire quartum terminum proportionalem, [illegible] hac aurea regula agitur in parte prima capitis 3. lib.1. vbi diuersæ eius solutiones afferuntur, nulla tamen quæ agat de casu in quo ex datis tribus quantitatibus duæ sunt ex illis quas cõpensantes appellamus, quarũ vna quidẽ est positiua, altera negatiua; cuius regulæ aureæ solutionem, ampliore consideratione dignam, prætermisimus in citato tertio capite libri primi, illam verò fusè declaramus in libro tertio.

Quoniam verò stabilita rationum doctrina elementari, quam capite secundo huius libri proposuimus, commodius est multiplicationem & diuisionem considerare vt compendia regulæ aureæ: hoc capite prius notamus requisita ad speculatiuam subsistentiam solutionũ regulæ aureæ quæ afferuntur in parte prima cap. 3.

lib. 1. Deinde proponimus requiſita ad ſpeculatiuam ſubſiſtentiam compendiorum regulæ aureæ, ſiue Logiſticarum operationum, quæ aliter dicuntur multiplicatio & diuiſio: quarum operationum præſcripta proponuntur cap. 2. lib. 1. quod amplectitur omnium Logiſticarum operationum praxes.

Septem priores regulæ aureæ ſolutiones propoſitæ in parte prima capitis 3. lib. 1. ſatis immediatè conſtant ex capite 2. huius libri: atque præſertim ex 6. theoremate illius capitis.

Suppoſita octaua ſolutione, atq; illi correſpondēte figura; quoniā rectæ B D & E C ſunt parallelæ, per theor. 3. cap. 3. conſtat, angulū A D B = angulo A E C, & angulus A eſt communis; igitur per theor. 4. cap. 3. triangula A D B & A E C ſunt inter ſe ſimilia, adeòque A B *ad* A C = A D *ad* A E. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita nona ſolutione, & figura quæ illi reſpondet, quoniam lineæ B C & E D ſunt parallelæ, per theor. 3. cap. 3. angulus C B A = angulo E D A, & præterea angulus B C A = angulo D E A: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula A B C & A D E ſunt ſimilia, adeòque A B *ad* A C = A D *ad* A E. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita ſolutione decima, & eius figura, per theor. 7. cap. 3. angulus C B E = angulo C D E, quia eidem arcui C E inſiſtunt: ſimiliter conſtat, angulum B C D = angulo B E D, quia eidem arcui B D inſiſtunt: ergo per theor. 4. cap. 3. inter ſe ſimilia ſunt triangula B A C & D A E, adeòque A B *ad* A C = A D *ad* A E. Quod erat demonſtrandum.

Pro eo quod dicitur in vndecima regulæ aureæ ſolutione propoſita cap. 3. lib. 1. Nota quod ex dictis in capite præcedenti de ſimilium figurarum additione & ſubtractione, ſatis conſtet, figuras ſimiles factas ſuper lineas A B, A C, A D, A E, habere proportionem quam habent iſtarum linearum quadrata: & ſimiliter patet, corpora ſimilia facta ſupra iſtas eaſdem lineas, habere proportionem quam habent iſtarum linearum cubi: atqui ex allata regulæ aureæ vndecima ſolutione, manifeſtum eſt, lineas iſtas conſtituere terminos duarum rationum æqualium, hoc eſt, A B *ad* A C = A D *ad* A E: adeòque iſtarum linearum quadrata aut cubos conſtituere terminos duarum æqualium rationum, hoc eſt AB2 *ad* AC2 = AD2 *ad* AE2: atque AB3 *ad* AC3 = AD3 *ad* AE3: patet igitur etiam figuras ſimiles, aut corpora ſimilia quæ ſimiliter inſiſtunt dictis lineis, conſtituere quatuor terminos duarum rationum æqualium, hoc eſt, figuram A B *ad* figuram A C = figuræ A D *ad* figuram A E: & etiam corpus A B *ad* corpus A C = corpori A D *ad* corpus A E: dummodò per figuras aut corpora quę habent idem nomen cum dictis lineis, intelligantur, ſuper iſtas lineas ſimiliter deſcriptæ figuræ, aut ſimiliter deſcripta corpora. Quod erat demonſtrandum.

Solutio regulæ aureæ pro qua ex datis quantitatibus aliquæ ſunt quantitates compenſantes, conſtat ex conſideratione 7. cap. 5. lib. 3.

Quod de multiplicatione & diuiſione vniuerſali dicitur in prima parte cap. 2. lib. 1. ſatis manifeſtum eſt ex regula aurea, dummodò conſtet quomodo hæc multiplicatio & diuiſio ſit compendium regulæ aureæ: pro quo nota, A *in* 1 = A: & etiam, A *per* 1 = A: adeòque A *in* B *per* 1 = A *in* B: & præterea A *in* 1 *per* B = A *per* B: quoniam igitur ſcriptio A *in* B *per* 1, indicat ſolutionem regulæ aureæ in qua primus terminus eſt vnitas, reliqui verò ſunt A & B: etiam ſcriptio A *in* B, indicat ſolutionem regulæ aureæ in qua primus terminus eſt vnitas, reliqui verò termini ſunt A & B: ſed ex duabus ſcriptionibus inter ſe æquiualentibus, quarum prima eſt A *in* B *per* 1, ſecunda eſt A *in* B: primæ ſcriptionis indicantis ſolutionem regulæ aureæ pro qua primus ex datis terminis eſt vnitas, compendiū eſt ſecūda; igitur ſecūda ſcriptio A *in* B eſt compendiū regulæ aureæ, pro qua primus ex datis terminis vnitas eſt: quod regulæ aureæ compendium aliter

voca-

vocatur multiplicatio. Rursus quoniam scriptio A *in* 1 *per* B, indicat solutionem regulæ aureæ in qua primus terminus est B, reliquorum verò vnus est vnitas, etiam scriptio A *per* B indicat solutionẽ regulæ aureæ in qua primus terminus est B, ex reliquis verò duobus alter est vnitas: sed ex duabus scriptionibus inter se æquiualentibus, quarum prima est A *in* 1 *per* B, secunda est A *per* B: primæ scriptionis indicantis solutionem regulæ aureæ pro qua primus terminus est B, ex reliquis verò datis duobus terminis vnus est vnitas, secunda scriptio compendium est: igitur secunda scriptio A *per* B est compendium regulæ aureæ in qua primus terminus est B, ex reliquis verò duobus terminis vnus est vnitas: quod regulæ aureæ compendium aliter appellatur diuisio.

Quod de multiplicatione & diuisione integrorum vulgarium numerorum dicitur in secunda parte capitis secundi, patet iterum ex regula aurea cuius compendia sunt: esse verò compendia regulæ aureæ, constat ex dictis de multiplicatione & diuisione vniuersali tradita in 1. parte cap. 2. lib. 1. qualescũque enim integros vulgares numeros repræsentent A & B, atque exempli gratia A $=$ 12, & B $=$ 3: sicut A *in* B, hoc est 12 *in* 3, est compendium regulæ aureæ A *in* B *per* 1, hoc est 12 *in* 3 *per* 1: ità numerus 36, qui est compendium numeri 12 *in* 3, etiam erit compendium regulæ aureæ 12 *in* 3 *per* 1. Rursus sicut A *per* B, hoc est 12 *per* 3, est compendium regulæ aureæ A *in* 1 *per* B, hoc est 12 *in* 1 *per* 3: ità numerus 4 qui est compendium numeri 12 *per* 3, est compendium regulæ aureæ 12 *in* 1 *per* 3.

Quod de multiplicatione & diuisione fractionum vulgarium dicitur in tertia parte cap. 2. lib. 1. quoad eam partem quæ agit de multiplicatione, patet vt patent hactenus dicta de multiplicatione: quandoquidem clarum sit, quod quemadmodum A *in* B est compendium regulæ aureæ A *in* B *per* 1: ità etiam $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{B}{D}$, sit compendium regulæ aureæ $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{B}{D}$ *per* 1, in qua regula aurea primus terminus est vnitas. Vt satis constet quod in hac parte dicitur de fractionum diuisione, ostendendum est, $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{D}{B}$. Vt hoc ostendam verum esse, suppono $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ E, qualiscunque sit quantitas repræsentata à litera E. Hoc supposito, quoniam 1 *in* $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$: etiam 1 *in* $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ E: sed 1 $=$ $\frac{B}{B}$: ergo $\frac{B}{B}$ *in* $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ E: ergo ex intelligentia regulæ aureæ $\frac{B}{D}$ *ad* $\frac{B}{B}$ $=$ $\frac{A}{C}$ *ad* E: atqui per theor. 4. cap. 2. $\frac{B}{D}$ *ad* $\frac{B}{B}$ $=$ B *ad* D: ergo $\frac{A}{C}$ *ad* E $=$ B *ad* D ll $\frac{B}{B}$ *ad* $\frac{D}{B}$, vt constat ex theor. 4. cap. 2. ergo per 10. axioma, etiam $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{D}{B}$ $=$ E *in* $\frac{B}{B}$ ll E: igitur $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{D}{B}$ $=$ E; sed per constructionem, etiam $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ E: ergo $\frac{A}{C}$ *per* $\frac{B}{D}$ $=$ $\frac{A}{C}$ *in* $\frac{D}{B}$. Quod erat demonstrandum.

Multiplicatio & diuisio quæ traditur in 4. parte cap. 2. agit de casu in quo datæ quantitates sunt compensantes: quomodo hæc multiplicatio vel diuisio sit compendium regulæ aureæ institutæ circa quantitates compensantes, dicitur in consideratione septima cap. 5. lib. 3, vbi traditur hæc aurea regula, & singula quæ spectant, aut requiri possent ad speculatiuam subsistentiam eorum quæ dicuntur in 4. parte cap. 2. lib. 1. de multiplicatione aut diuisione.

Quæ de multiplicatione & diuisione rationum dicuntur in parte 5. cap. 2. lib. 1. patent ex theor. 7. & 8. cap. 2. huius libri; etenim theor. 7. continet quidquid requiritur pro speculatiua subsistentia praxium agentium de rationum multiplicatione; praxis verò allata pro rationum diuisione, constat ex theoremate 8. vbi ostendimus A *ad* B *in* D *ad* C $=$ A *ad* B *per* C *ad* D.

Quod requiri posset ad speculatiuam subsistentiam multiplicationis aut diuisionis numerorum radicalium, seruamus pro cap. 10. quod agit de numeris radicalibus, & continet demonstrationes singularum praxium contentarum in 6. parte cap. 2. lib. 1.

Pro multiplicatione & diuisione, aut rectarum linearum, aut figurarum similium, nulla praxis affertur in parte 7. vel 8. cap. 2. lib. 1. quare nulla hic remanet aut declaranda aut demonstranda.

CAPVT VII.

De inuentione aliquarum quantitatum æquiualentium.

Datis quantitatibus, diuersimodè æquiualere possunt aliæ quantitates: nimirum in ordine ad finem aliquem, pro quo, æqualem vel etiam maiorem vtilitatem habent: præterea in quantum sunt ex illis quæ dicuntur habere eumdem aliquem ex diuersis valoribus, quos in quantitatibus considerat nostra Logistica: In ordine ad finem pro quo in nostra Logistica vtilis est æquationum consideratio, capite sexto lib. 1. afferuntur variæ praxes, frequentissimè vsitatæ in nostra Logistica, vt huiusmodi æquationes reddantur commodiores ad intentum finem. Similiter pro operationibus Logisticis, datæ quantitates non semper tales sunt, vt circa illas institui possit quæuis operatio Logistica, licet talis operatio institui possit circa alias quantitates datis æquiualentes. De huiusmodi quantitatum æquiualentijs agimus hoc capite, & potissimum afferimus requisita pro speculatiua subsistentia praxium quæ annotantur in quarto, & secundo capite libri primi.

In capite quarto lib. 1. Logisticæ proposita praxis prima, quæ antithesis appellatur, considerat duas æquationis partes, antecedentem quæ dicitur alteri æqualis, & consequentem cui antecedens pars æqualis dicitur; ex his duabus æquationis partibus, antecedens consequenti, & consequens antecedenti opposita est; antithesis verò docet, satis notabilem & commodam variationem, possibilem in æquationis partibus, sed tamen non vitiantem æquationem: docet enim æquationem nō vitiari, per translationem cuiusuis quantitatis (cum reliquis aliter quā signo + vel − connexis) ex vna æquationis parte, ad eius partem oppositam; adeòque supposito quod $A + B = C$: etiam necessariò $A = C - B$; hoc verissimum esse constat ex axiomate secundo cap. 1. & nota 4. capitis præcedentis, etenim in vna æquationis parte delere, siue omittere quantitatem $+ B$, nihil aliud est, quam ex hac æquationis parte subtrahere quantitatem positiuam $+ B$: verum mutato signo, siue eamdem illam quantitatem mutatam in negatiuam apponere oppositæ æquationis parti (iuxta notam 4. capitis præcedentis) est æquiualenter ex illa parte subtrahere positiuam quantitatem $+ B$: igitur facere quod præscribitur in antithesi, aliud non est, quam ex duabus æquationis partibus inter se æqualibus, subtrahere idem, siue æqualia: adeòque producta ex tali subtractione, iuxta secundum axioma sunt inter se æqualia; & consequenter, non magis per antithesim, quam per æqualium quantitatum subtractionem, vitiatur æqualitas, consistens inter oppositas partes æquationis.

Causa quare talis translatio ex vna æquationis parte ad partem oppositam, præscribatur circa solas quantitates non aliter quam signis + vel − inter se connexas, patet ex additionis & subtractionis intelligentia, quæ non fit circa quantitatum nomina, sed circa quantitatum numeratores: singulæ verò quantitates alteri cohærentes particula *in*, vel *per*, aut aliter quam signo + vel −, pertinent ad nomen vnitatum quæ à numeratore indicantur, iuxta dicta in nota 4. capitis præcedentis, & indicant cuius speciei sint vnitates quæ numerantur.

Quod dicitur in secunda praxe capitis 4. lib. 1. satis manifestum est ex nota 4. capitis

tis præcedentis, & significatione quam in nostra Logistica habent signa + & −. Etenim ex quantitatibus compensantibus, licitum, & arbitrarium est, vel has, vel illas pro negatiuis eligere, atque signo − afficiendas statuere: iam verò mutatio quæ in praxi permittitur, alia non est, nisi vt libera illa & ab arbitrio dependens electio quantitatum quas placet negatiuas appellare & signo − afficere, mutetur in contrariam electionem, in qua pro negatiuis atque signo − afficiendis quantitatibus, eligantur reliquæ quas prius non placebat vocare negatiuas.

Quod dicitur in tertia praxi cap.4. patet ex significatione quam particulæ *in* & *per* habent in compendiatis scriptionibus nostræ Logisticæ.

Quod dicitur in praxi 4. cap.4. constat ex eo quod capite præcedente demonstratum est, ad dicta de fractionum diuisione: nimirum $\frac{A}{B}$ *per* $\frac{C}{D} = \frac{A}{B}$ *in* $\frac{D}{C}$, notando quod C = C *per* 1, & præterea C = C *in* 1: vnde fit, quod sicut A *per* $\frac{C}{1}$ = A *in* $\frac{1}{C}$, ità A *per* C = A *in* $\frac{1}{C}$.

Quod dicitur in 5. praxi cap.4. lib.1. constat ex regula aurea, de qua agitur in præcedenti capite. Etenim supposito exempli gratia quod A + B *in* C = D: necessariò A + B *in* C = D *in* 1, adeòque per 10. axioma cap. 1. etiam C *ad* 1 = D *ad* A + B; igitur ex regulæ aureæ intelligentia, 1 *in* D *per* C = A + B: adeòque A + B = D *per* C: quare supposito quod A + B *in* C = D: etiam A + B = D *per* C: & vicissim, supposito quod A + B = D *per* C: etiam A + B *in* C = D, vt dicitur in quinta praxi cap.6. lib.1.

Quod dicitur in 6. praxi cap.4. lib.1. immediatè manifestum est ex 10. axiomate capitis 1.

Praxis 7. cap.4. lib.1. tres diuersos casus distinguit; quod docet in primo casu, A *per* B *ad* C *per* B = A *ad* C: demonstratum est in secunda assertione theorematis 4. cap.2. huius libri: ibidem in assertione tertia demonstratur quod in secundo casu docet hæc septima praxis, nimirum C *per* B *ad* C *per* A = A *ad* B. Denique quod hæc eadem praxis docet in tertio casu, nimirum A *per* B *ad* C *per* D = A *in* D *ad* B *in* C, demonstratur in theor.8. cap.2. huius libri.

Pro eo quod dicitur in praxi 8. cap.4. nota ex duabus diuisionibus in hac praxi præscriptis, vna talis est, vt productum necessariò sit numerus denominatus, alterius verò diuisionis productum necessariò est numerus vulgaris, vt patet ex ipsis praxeos præscriptis: quoniam igitur numeri qui diuiduntur, sunt inter se æquales & vtriusque diuisionis diuisor idem sit, ex axiomate 2. capitis 1. patet hæc producta inter se necessariò esse æqualia, adeòque in illis haberi numerum denominatum æqualem vulgari numero.

Quod dicitur in praxi 9. cap.4. libri 1. satis notum est ex terminorum intelligentia.

Quod dicitur in prima praxi partis 3. cap.2. lib.1. de mensura communi duorum numerorum vulgarium, magis propriè spectat ad huius libri caput decimum, vbi demonstratam exhibemus hanc primam praxem.

Quod dicitur in secunda praxi partis 3. cap.2. lib.1. de magnitudine aut paruitate, nō ipsarum fractionū, sed terminorum constituentiū duas fractiones inter se æquales: diuersum non est, ab eo quod capite 10. huius libri dicitur de magnitudine aut paruitate terminorum constituentium duas rationes inter se æquales: vt satis patet ex theor. 5. cap. 2. vbi demonstratum est, quod A *per* B = C *per* D, supposito quod A *ad* B = C *ad* D: & vicissim A *ad* B = C *ad* D, supposito quod A *per* B = C *per* D. Quare supposito quod datæ fractionis termini sint A & B, quodque iuxta praxim 2. partis 3. lib. 1. inuentæ fractionis termini sint C & D, per theor.2. cap.10. huius libri, ratio C *ad* D = A *ad* B, & præterea constat minimis integris terminis: igitur etiam fractio C *per* D = A *per* B, & præte-

rea

rea constat minimis integris terminis. Quod erat demonstrandum.

Praxis 3. partis 3. cap. 2. considerat datas duas fractiones $\frac{A}{B}$ & $\frac{C}{D}$: his fractionibus æquiualentes atque eumdem denominatorem habentes asserit esse fractiones $\frac{A \text{ in } D}{B \text{ in } D}$ & $\frac{B \text{ in } C}{B \text{ in } D}$; has duas fractiones eũdem habere denominatorem B *in* D manifestum est: fractionem $\frac{A}{B} = \frac{A \text{ in } D}{B \text{ in } D}$, patet ex theor. 4. cap. 2. ex quo eodem theoremate etiam constat $\frac{C}{D} = \frac{B \text{ in } C}{B \text{ in } D}$. Quod in praxi asseritur.

CAPVT VIII.

Continens requisita pro speculatiua subsistentia solutionum quam habent problemata pro vsu angulorum proposita cap. 6 lib. 1. Logisticæ.

SVppositis quæ præscribuntur in solutione problematis primi cap. 6. lib. 1. & in figura illic citata repræsentantur, ductæ sint rectæ lineæ F D, F C, F E. Per hypothesim, in triangulis D C F & E C F, recta D C *ad* C E = D F *ad* E F ll C F *ad* C F: igitur per theor. 4. cap. 3, triangula D F C & E F C sunt inter se similia: ergo angulus D C F = angulo E C F: sed hi duo anguli simul, per theor. 1. cap. 3. sunt æquales duobus rectis angulis: ergo singuli sunt recti: adeòque linea C F, est perpendicularis ad lineam A B. Quod erat demonstrandum.

Suppositis quæ præscribuntur in solutione problematis secundi cap. 6. lib. 1. in figura illic citata, ductæ sint rectæ D G, E G, D F, E F. Per hypothesim, in triangulis F G D & F G E; F D *ad* F E = D G *ad* G E ll F G *ad* F G: igitur per theor. 4. cap. 3. triangulum F G D est simile triangulo F G E: adeòque angulus G F D = angulo G F E: sed etiam F D *ad* F E = F C *ad* F C: ergo per theor. 4. cap. 3. angulus F C D = angulo F C E: atqui isti duo anguli simul æquantur duobus rectis per theor. 1. cap. 3: ergo angulus F C D rectus est; adeòque recta F C est perpendicularis ad rectam A B. Quod erat demonstrandum.

Solutio tertij problematis manifesta est ex intelligentia angulorum, pro qua sufficiunt quæ de angulis & angulorum mensuris annotantur in principio cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Pro solutione quarti problematis, sufficit intelligere quomodo in nostra Logistica declarentur rectæ lineæ parallelæ; de his lineis agitur in consideratione 8. cap. 5. lib. 3.

Pro subsistentia solutionis quinti problematis, sufficit terminorum intelligentia, supposito axiomate 13. cap. 1. huius libri: hoc Logisticæ nostræ axioma, non annotari, sed tamen ab Euclide supponi in demonstratione huius problematis (quod in eius elementis est primum lib. 1.) notamus in fine reflexionis 1. cap. 4. lib. 3. Logisticæ.

Suppositis quæ præscribuntur in solutione problematis 6. cap. 6. libri 1. & figura quæ illic citatur: ductæ sint rectæ lineæ F A, F B, F C. Per hypothesim, A E *ad* E B = E F *ad* E F, & præterea angulus A E F = angulo B E F: igitur per theorema 4. cap. 3. triangula A E F & B E F sunt similia; eodemque modo patet, triangula A D F & C D F inter se similia esse: igitur F A *ad* F B = F E *ad* F E, & præterea F A *ad* F C = F D *ad* F D: sed F E = F E, & etiam F D = F D: ergo F A = F B & etiam F A = F C: ergo tres rectæ F B, F A, F C sunt inter se æquales: ergo puncta B, A, C, æqualiter distant à puncto F: igitur centro F, radio F A de-

deſcripta circularis linea tranſit per puncta A, B, C. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſitis quæ præſcribuntur in ſolutione primæ partis problematis 7. cap. 6. lib. 1. & in figura illic citata repræſentantur: ductæ ſint rectæ D A, D B, E A, E B. Per hypotheſim, in triangulis D A E & D B E, patet A D *ad* D B = A E *ad* E B ll D E *ad* D E: igitur per theor. 4. cap. 3. triangula D A E & D B E ſunt inter ſe ſimilia: adeòque angulus A D E = angulo B D E: ſed etiam D A *ad* D B = D C *ad* D C: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula D C A & D C B ſunt inter ſe ſimilia: adeòque A C *ad* C B = D C *ad* D C: ſed D C = D C: ergo A C = C B. Quod erat demonſtrandum pro prima parte.

Suppoſitis quæ præſcribuntur in ſolutione ſecundæ partis problematis 7. cap. 6. lib. 1. & in figura illic citata repræſentantur, ſit F C æqualis E F, ſitque ducta recta C B. Per hypotheſim, A C & B D ſunt parallelæ: igitur ex conſideratione 8. cap. 5. lib. 3. conſtat quod C A vehendo tantum promota per rectam C B, perueniat in D B, ſic vt ſingula puncta C, F, E, deſcribant lineas C B, F G, E H, inter ſe parallelas: ergo per theor. 3. cap. 3. anguli A L E, A K F, A B C sũt inter ſe ęquales: ſed angulus C A B eſt communis: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula A L E, A K F, A B C, ſunt inter ſe ſimilia: ergo A L *ad* A E = A K *ad* A F ll A B *ad* A C: igitur per theor. 2. cap. 2. etiam A L *ad* A E = L K *ad* E F ll K B *ad* F C: quoniam igitur per hypotheſim, A E, E F, F C inter ſe æquantur, etiam A L, L K, K B inter ſe æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita ſolutione allata in problemate 9. cap. 6. lib. 1. & figura illic citata. Per hypotheſim, lineæ D E, F H, G K ſunt inter ſe parallelæ: ergo per theor. 3. cap. 3. inter ſe æquales ſunt anguli C D E, C F H, C G K: angulus verò D C E communis eſt: ergo per theor. 4. cap. 3. inter ſe ſimilia ſunt triangula C D E, C F H, C G K: igitur C D *ad* C E = C F *ad* C H ll C G *ad* C K, atque diuidendo per theor. 2. cap. 2. etiam C D *ad* C E = F D *ad* H E ll G F *ad* K H ll C G *ad* C K. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita ſolutione problematis 9. capitis 6. lib. 1. & figura illic citata, centro D, radio D B deſcriptus ſit ſemicirculus occurrens rectæ D A vtrinque productæ in Z & X: ſintque ductæ rectæ X B & B Z. Quoniam per theor. 7. cap. 3. angulus X B Z rectus eſt, per theor. 8. capitis 3. patet X A *ad* A B = A B *ad* A Z: ergo X A *in* A Z = A B *in* A B: atqui X A *in* A Z = D Z *in* A Z *et* + D A *in* A Z ll D A *in* A Z *et* + A Z *in* A Z *et* + D A *in* A Z ll 2DA *in* A Z *et* + A Z *in* A Z ll A B *in* A C *et* + A C *in* A C, quia ex hypotheſi patet, 2DA = A B, ac præterea A Z = A C: ergo A B *in* A C *et* + A C *in* A C = A B *in* A B ll A B *in* A C *et* + A B *in* B C: ergo vtrinque auferendo A B *in* A C, etiam A B *in* C B = A C *in* A C: ergo per axioma 10. cap. 1. A B *ad* A C = A C *ad* C B. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita ſolutione problematis decimi capitis 6. lib. 1. atque illic citata figura: recta A B ſecet rectam E D in puncto G: atque ex puncto F centro arcus A B, ductę ſint rectę F A & F B. Ex demonſtratione problematis 7. cap. 6. lib. 1. conſtat A G = G B; igitur A G *ad* G B = F G *ad* F G ll F A *ad* F B: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula A F G & B F G ſunt inter ſe ſimilia, adeòque angulus A F C = angulo B F C; igitur iſtorum angulorum menſuræ inter ſe æquales ſunt, hoc eſt arcus A C = arcui C B. Quod erat demonſtrandum.

Suppoſita quauis ſolutione problematis vndecimi, atq; illic citata figura; quoniã in ſolutione primę partis, angulus C A B rectus ſupponitur, & in ſolutione ſecundæ partis, etiã angulus C A B rectus eſt, vt patet ex ſolutione & theor. 7. cap. 3. ſumẽdo in recta A B quantũcunq; producta, quodcunq; punctũ D, diuerſum à puncto A, atq; ducendo rectam C D, per theor. 8. cap. 3. patet CD2 = AC2 + AD2: igitur re-

recta C D necessariò est maior recta C A: atqui C A est circuli radius: ergo C D est maior circuli radio, adeòque punctum D cadit extra circulum, sed ex hypothesi, punctum D, est quodlibet punctum lineæ A B, diuersum à puncto A: igitur quodlibet punctum lineæ A B diuersum à puncto A, cadit extra circulum, igitur linea A B occurrit quidem circulo in A, reliqua verò eius puncta cadunt extra circulū, adeòq; linea A B tangit circulū in puncto A. Quod erat demonstrandum.

Nota, simili planè discursu constare, quod recta A B secet circulum, si angulus B A C rectus non est, adeòque duci possit recta C D, vt angulus C D A rectus sit: hoc enim casu C D erit minor quam C A, adeòque punctum D cadet intra circulum.

Supposita solutione problematis 12. cap. 6. lib. 1. atque figura illic citata: ducta sit recta A F, quæ sit diameter circuli, & recta F D. Per theor. 7. cap. 3. angulus A D F rectus est: ergo per theor. 9. cap. 3. patet angulum A F D + ang. F A D = vni recto angulo, sed quia A B est tangens circuli, & eius diameter est A F: ex demonstratione præcedentis problematis patet, angulum F A B rectum esse, adeòque angulum B A D + ang. F A D = vni recto angulo, igitur angulus A F D + ang. F A D = angulo B A D + ang. F A D, igitur vtrinque subtrahendo vel addendo angulum F A D, etiam angulus A F D = angulo B A D: atqui per theor. 7. cap. 3. quiuis angulus factus in segmento A F D, æqualis est angulo A F D: ergo angulus B A D æqualis est cuiuis angulo facto in segmento A F D. Quod erat demonstrandum.

Supposita solutione problematis 13. cap. 6. atq; illic citata figura; quoniam per hypothesim, angulus B A C rectus est, patet vt in demonstratione vel nota vndecimi problematis, rectā B A esse tāgentem circuli, centro C, & radio C A descripti: ergo vt in pręcedenti, hic etiam constat, quod angulus quem capit segmentum descriptum, supra rectam A D, sit æqualis angulo B A D. Quod erat demonstrandum.

Supposita solutione problematis 14. cap. 6. lib. 1. & figura illic citata, patet angulum C A B = angulo F D E, & præterea angulum C B A = angulo F E D: ergo per theor. 4. cap. 3. triangulum A C B est simile triangulo D F E. Quod erat demonstrandum.

Supposita solutione problematis 15. cap. 6. lib. 1. & figura illic citata: ex ijs quæ in consideratione 9. cap. 5. lib. 3. dicuntur de figuris similibus, manifesta est solutio huius problematis.

Fig. 23. & 24. In problemate 16. cap. 6. lib. 1. agitur de triangulo & quadrato. Talis trianguli A B C basis sit A C, altitudo D B, quadrati verò basis sit E F, altitudo F G: quibus suppositis, ostendendū est, triāgulum A B C = quadrato E F, siue quod idem est

Ostendendum A C *in* D B ductu 3 = E F *in* F G ductu 1.

Supposito primo E F = F G.

Secundo A C *per* 2 *ad* E F = F G *ad* D B.

Considerando assertam atque probandam æquationem, rationes commemoratæ in secunda regula Logisticæ, erunt

1	*c h*	AC *ad* EF	AC *ad* EF	*n* 3	AC *ad* AC *per* 2	2 *ad* 1
2	*c h*	DB *ad* FG	FG *ad* AC *per* 2		EF *ad* EF	1 *ad* 1
3	4*c*4	1 *ad* 2	1 *ad* 2		1 *ad* 2	1 *ad* 2
4	4*c*1	1 *ad* 1	1 *ad* 1		1 *ad* 1	1 *ad* 1

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita est 2 *ad* 2: ergo per theor. 2. cap. 4. patet A C *in* D B ductu 3 *ad* E F *in* F G ductu 1 = 2 *ad* 2: atqui 2 = 2: ergo A C *in* D B ductu 3 = E F *in* F G ductu 1. Quod erat demonstrandum.

Fig. 23. & 25. In problemate 17. cap. 6. lib. 1. agitur de triangulo & parallelogrammo. Talis trianguli A B C basis sit A C, altitudo D B; parallelogrammi verò F E H basis sit E F alti-

altitudo G H; ex hypothesi, patet angulum F E H ęquari dato angulo; ostendendum verò triangulum A B C = parallelogrammo F E H: siue quod idem est,

Ostendendum A C *in* D B ductu 3 = E F *in* G H ductu 1 vel 2.

Supposito quod A C *per* 2 *ad* E F = G H *ad* D B.

Considerando assertam atque probandam ęquationem, rationes commemoratę in secunda regula Logisticæ, erunt

1	*c b*	AC *ad* EF		AC *ad* EF	*n*3	AC *ad* AC *per* 2		2 *ad* 1
2	*c b*	BD *ad* GH	*c* 1	EF *ad* AC *per* 2		EF *ad* EF		1 *ad* 1
3	4*c*4	1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2		1 *ad* 2
4	4*c*1 vel 2	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita erit 2 *ad* 2: ergo per theor. 2. cap. 4. patet A C *in* D B ductu 3 *ad* E F *in* G H ductu 1 vel 2 = 2 *ad* 2: atqui 2 = 2: ergo A C *in* D B ductu 3 = E F *in* G H ductu 1 vel 2. Quod erat demonstrandum.

Solutio problematis 18. cap. 6. lib. 1. nulla indiget probatione, singula enim huius solutionis præscripta, vel ex terminis manifesta sunt, vel constant ex demonstrationibus problematum quæ in solutione citantur.

In problemate 19. cap. 6. lib. 1. agitur de quadrato & circulo. Talis quadrati basis sit E F, altitudo F G: circuli radius sit A B: dimidia circumferentia B C D. Fig. 24. & 26.

Ostendendum est E F *in* F G ductu 1 = A B *in* 2 BCD ductu 4.

Supposito primo quod E F = F G.

Secundo quod A B *ad* E F = E F *ad* B C D.

Considerando hic assertam atque demonstrandam ęquationem, rationes commemoratę in secunda regula Logisticę, erunt

1	*c b*	EF *ad* AB	*c* 2	BCD *ad* EF	*n*3	BCD *ad* 2 BCD		1 *ad* 2
2	*c b*	FG *ad* 2BCD		FG *ad* 2 BCD		FG *ad* EF	*c* 1	1 *ad* 1
3	4*c*1	1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1		1 *ad* 1
4	4*c*6	2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1		2 *ad* 1

Igitur per theor. 7. cap. 2. ratio composita erit 2 *ad* 2: ergo per theor. 2. cap. 4. constat E F *in* F G ductu 1 *ad* A B *in* 2 BCD ductu 4 = 2 *ad* 2: atqui patet 2 = 2: ergo etiam E F *in* F G ductu 1 = A B *in* 2 BCD ductu 4. Quod erat demonstrandum.

CAPVT IX.

Proponuntur hypotheses contentæ cap. 9. lib. 1. atque in singulis assertæ veritates demonstratæ exhibentur.

PLeræque veritates, quæ hoc capite à nobis proponuntur & demonstrantur, annotatæ inueniuntur in Analytica siue Algebra, tum à Francisco Vieta, tum à diuersis alijs Algebræ Doctoribus conscripta: vbi inferuntur discursibus, qui non multum dissimiles sunt ab illis quibus nos vtimur; in his tamen ipsi supponunt Algebræ scriptionum intelligentiam, vt nos hic supponimus intelligentiam Logisticarum scriptionum. Magna autem differentia intercedit, inter nostras, & illorum demonstrationes earumdem veritatum, resultans ex eo capite, quod apud ipsos speculatiuè non subsistant praxes, ex quarum subsistentia dependet demonstrationis illatio; in Logistica verò nostra, praxes illæ omnes, speculatiuè subsistant; ex quo fit quod nostræ demonstrationes legitimæ sint, atque speculatiuè subsistentes: illorum verò demonstrationes, si bonæ sint, non nisi practicæ dici possint. Hoc verissimum esse, facilè colligitur reflectendo ad vsum signorum † & —, in his demonstrationibus communem, tum nobis, tum Algebræ scriptoribus: deinde considerando quod libro 3. nostræ Logisticæ dicimus, de diuersitate significationis quam habent hæc signa † & —, in Algebra, & nostra Logistica; sic vt exempli gratia praxis quæ docet — 4 *in* — 4 = † 16, vera demonstretur in consideratione 7. cap. 5. lib. 3. Logisticæ, intelligendo signa † & — in significatione quam requirit atque supponit nostra Logistica: verum intelligendo hæc eadem signa † & —, in significatione quam requirit & supponit Algebra, praxis illa docens — 4 *in* — 4 = † 16, tantum practicè vera euincitur, in quantum innumeris exemplis vera comprobatur, vt ex Algebræ Doctoribus notamus in primo paradoxo cap. 3. libri 3. Logisticæ: si tamen verius non est quod probatur in paradoxo 6. eiusdem capitis: nimirum prædictam Algebræ praxim, (quæ in theorematum de quibus hic agimus demonstrationibus vera supponitur atque assumitur) tam malè cohærere cum reliquis Algebræ principijs, vt non minus facilè euincatur falsa, quam vera.

Prima Hypothesis.

Supponit duas qualescunque quantitates quarum vna sit maior altera: quo supposito

PRimò asseritur, X = X † Z † X — Z *per* 2 ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ † $\frac{X - Z}{2}$

Demonstratio. Manifestum est † Z — Z = O: ergo 2X † O = X † X † Z — Z ll X † Z † X — Z: ergo singula diuidendo per numerum 2. etiam X = X † Z † X — Z *per* 2 ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ † $\frac{X - Z}{2}$: quæ singula patent ex scriptionum Logisticarum intelligentia, ex qua proinde constat primæ assertionis veritas, quæ hic erat demonstranda.

Secundò asseritur, Z = X † Z — X † Z *per* 2 ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ — $\frac{X \dagger Z}{2}$ ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ † $\frac{X - Z}{-2}$

Demonstratio. Vt in præcedente demonstratione, patet † X — X = O, adeòque 2Z = Z † Z † X — X ll † X † Z — X † Z: ergo singula diuidendo per numerum 2. etiam Z = X † Z — X † Z *per* 2 ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ — $\frac{X \dagger Z}{2}$ ll $\frac{X \dagger Z}{2}$ † $\frac{X - Z}{-2}$, quia per partem 4. cap. 1 lib. 1. — $\frac{X \dagger Z}{2}$ = † $\frac{X - Z}{-2}$: constat igitur veritas quæ hic erat demonstranda.

Tertiò asseritur, X † Zq = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z.

Demonstratio. Ex scriptionum Logisticarum intelligentia constat, X † Zq = X † Z *in* X † Z ll X *in* X *et* † Z *in* Z *et* † X *in* Z *et* † X *in* Z ll X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z: etenim primam scriptionem paululum producendo, habetur secunda, quam vlterius producendo, habetur tertia, hanc verò contrahendo, habetur quarta: igitur etiam prima æquatur quartæ, hoc est X † Zq = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z. Quod erat demonstrandum.

Quartò asseritur X † Zq = X — Zq *et* † X *in* 4Z.

Demonstratio. Ex intelligentia Logisticarum scriptionum constat, X — Zq = X — Z *in* X — Z ll X *in* X *et* — Z *in* — Z *et* † X *in* — Z *et* † X *in* — Z ll X2 † Z2 *et* † X *in* — 2Z, vt patet ex parte 4. cap. 2. lib. 1: ergo per antithesim, X — Zq *et* † X *in* 2Z = X2 † Z2: ergo vtrinque addendo X *in* 2Z, etiam X — Zq *et* † X *in* 4Z = X2 † Z2 *et* † X *in* 2Z ll X † Zq, vt constat ex tertia assertione: ergo X † Zq =

X—

$X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z$. Quod erat demonſtrandum.

Quintò aſſeritur $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z$.

Demonſtratio. Initio præcedentis demonſtrationis oſtenſum eſt, ex ſcriptionum Logiſticarum intelligentia conſtare, $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $- 2Z$: ſed $+ X$ *in* $- 2Z = - X$ *in* $2Z$ iuxta praxim 2. cap. 7. lib. 2. ergo $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z$. Quod erat demonſtrandum.

Sextò aſſeritur $X2 - Z2 = X + Z$ *in* $X - Z$.

Demonſtratio. Ex ſcriptionibus Logiſticis conſtat quod $X + Z$ *in* $X - Z = X$ *in* X *et* $+ X$ *in* $- Z$ *et* $+ X$ *in* Z *et* $+ Z$ *in* $- Z \parallel X2$ *et* $+ X$ *in* $- Z$ *et* $+ X$ *in* Z *et* $- Z2$: ergo per antitheſim transferendo X *in* $- Z$, etiam $X + Z$ *in* $X - Z$ *et* $+ X$ *in* $Z = X2 - Z2$ *et* $+ X$ *in* Z: ergo vtrinque auferendo X *in* Z, etiam $X + Z$ *in* $X - Z = X2 - Z2$. Quod erat demonſtrandum.

Septimò aſſeritur, $X2 - Z2q = X + Zq$ *in* $X - Zq$.

Demonſtratio. Per ſextam aſſertionem $X + Z$ *in* $X - Z = X2 - Z2 \parallel X2 - Z2$ *in* 1: ergo per axioma 10. patet, 1 *ad* $X + Z = X - Z$ *ad* $X2 - Z2$: ergo ſingulos iſtarum æqualium rationum terminos ducendo in ſe ipſos, etiam $1q$ *ad* $X + Zq = X - Zq$ *ad* $X2 - Z2q$: ergo per 10 axioma, $X2 - Z2q$ *in* $1q$, hoc eſt $X2 - Z2q = X + Zq$ *in* $X - Zq$. Quod erat demonſtrandum.

Secunda Hypotheſis.

Supponit $X + Z$ *ad* $P = P$ *ad* Z, & præterea $X + Z$ *ad* $Q = Q$ *ad* X.

Primò aſſeritur, $Q2 = X$ *in* $X + Z$. Quod immediatè patet ex hypotheſi & axiomate 10. cap. 1.

Secundò aſſeritur, $P2 = Z$ *in* $X + Z$. Quod immediatè patet ex hypotheſi & axiomate 10. cap. 1.

Tertiò aſſeritur, $X + Zq = P2 + Q2$.

Demonſtratio. $X + Zq = X + Z$ *in* $X + Z \parallel X$ *in* $X + Z$ *et* $+ Z$ *in* $X + Z$: ſed per ſecundam aſſertionem, Z *in* $X + Z = P2$, & præterea per primam aſſertionem, X *in* $X + Z = Q2$: igitur $X + Zq = P2 + Q2$. Quod erat demonſtrandum.

Quartò aſſeritur, $X - Zq = P2 + Q2$ *et* $- X$ *in* $4Z$.

Demonſtratio. Per aſſertionem 4. primæ hypotheſis, $X - Zq$ *et* $+ X$ *in* $4Z = X + Zq$ ergo per antitheſim, $X - Zq = X + Zq$ *et* $- X$ *in* $4Z$, ſed per tertiam aſſertionem, $X + Zq = P2 + Q2$: ergo etiam $X - Zq = P2 + Q2$ *et* $- X$ *in* $4Z$. Quod erat demonſtrandum.

Tertia Hypotheſis.

Conſiderat tres quantitates A, B, C in tribus diuerſis caſibus.

Primus caſus ſupponit $A = B + C$; in hoc primo caſu aſſeritur, $A2 = A + B$ *in* C *et* $+ B2$.

Demonſtratio. Per hypotheſim, $A = B + C$: ergo vtrinque addendo B, etiam $A + B = 2B + C$: ergo $A + B$ *in* $C = 2B + C$ *in* C: ergo vtrinque addendo $B2$, etiam $A + B$ *in* C *et* $+ B2 = 2B + C$ *in* C *et* $+ B2 \parallel B2 + C2$ *et* $+ C$ *in* $2B \parallel B + Cq$. vt con-

constat ex 3. assertione primæ hypothesis: sed quoniam per hypothesim $A = B + C$, etiam $A2 = B + Cq$: ergo $A2 = A + B$ *in* C *et* $+ B2$. Quod erat demonstrandum.

Secundus casus supponit, $A = B$; in hoc casu asseritur, $A + Cq = A + B + C$ *in* C *et* $+ B2$.

Demonstratio. Per hypothesim $A = B$: ergo vtrinque addendo $B + C$, etiam $A + B + C = 2B + C$: ergo $A + B + C$ *in* $C = 2B + C$ *in* C: ergo vtrinq; addendo $B2$, etiã $A + B + C$ *in* C *et* $+ B2 = 2B + C$ *in* C *et* $+ B2 \parallel B2 + C2$ *et* $+ C$ *in* $2B \parallel B + Cq$, vt patet ex 3. assertione primæ hypothesis: igitur $B + Cq = A + B + C$ *in* C *et* $+ B2$. Quod erat demonstrandum.

Tertius casus supponit, A *ad* $B = B$ *ad* C.

In tertio casu asseritur primò, $\frac{A}{2} + Cq = \frac{A2}{4} + B2 + C2$.

Demonstratio. Per 3. assertionem primæ hypothesis, $\frac{A}{2} + Cq = \frac{A}{2}q + C2$ *et* $+ \frac{A}{2}$ *in* $2C \parallel \frac{A2}{4} + C2$ *et* $+ A$ *in* C: atqui A *in* $C = B2$, quia per hypothesim, A *ad* $B = B$ *ad* C: ergo $\frac{A}{2} + C2q = \frac{A2}{4} + B2 + C2$. Quod erat demonstrandum.

In tertio casu asseritur secundò, $A + Cq = A2 + 2B2 + C2$.

Demonstratio. Per assertionem 3. primæ hypothesis, $A + Cq = A2 + C2$ *et* $+ A$ *in* $2C$: sed quia per hypothesim, A *ad* $B = B$ *ad* C, per 16. axioma A *in* $C = B2$, adeòque A *in* $2C = 2B2$: ergo $A + Cq = A2 + C2 + 2B2 \parallel A2 + 2B2 + C2$. Quod erat demonstrandum.

In tertio casu asseritur tertiò, $B2 = A + Cq - A2 - B2 - C2$.

Demonstratio. Per præcedentem assertionem, $A2 + 2B2 + C2 = A + Cq$: ergo per antithesim, $B2 = A + Cq - A2 - B2 - C2$. Quod erat demonstrandum.

Quarta Hypothesis.

Supponit X *in* $Z = A$, & præterea $X2 + Z2 = B$, ac denique quantitatem X, esse maiorem quantitate Z.

Primò asseritur, $\frac{R1q\,B + 2A}{2} + \frac{R1q\,B - 2A}{2} = X$

Secundò asseritur, $\frac{R1q\,B + 2A}{2} - \frac{R1q\,B - 2A}{2} = Z$

Demonstratio vtriusque assertionis. Per assertionem 3. primæ hypothesis, $X + Zq = X2 + Z2$ *et* $+ X$ *in* $2Z$: sed vt supponitur, $X2 + Z2 = B$, & præterea X *in* $2Z = 2A$: ergo $X + Zq = B + 2A$: ergo $R1q\,B + 2A = R1q\,X + Zq \parallel X + Z$. Rursus per assertionem 5. primæ hypothesis, $X - Zq = X2 + Z2$ *et* $- X$ *in* $2Z \parallel B - 2A$, vt patet ex conditionibus hypothesis: ergo $R1q\,B - 2A = R1q\,X - Zq \parallel X - Z$, hoc est differentiæ quantitatum X & Z: atqui per assertionem 1. primæ hypothesis, dimidio $X + Z$ addendo dimidiũ $X - Z$, habetur maior ex quantitatibus X & Z, hoc est quãtitas X, vt patet ex hypothesi: & præterea ex dimidio $X + Z$ auferendo dimidiũ $X - Z$, habetur minor ex quantitatibus X & Z, hoc est quantitas Z, vt constat ex hypothesi: igitur etiam $\frac{R1q\,B + 2A}{2} + \frac{R1q\,B - 2A}{2} = X$, & præterea $\frac{R1q\,B + 2A}{2} - \frac{R1q\,B - 2A}{2} = Z$. Quod erat demonstrandum.

Quin-

Quinta Hypotheſis.

Supponit duas rectas A B & C D ſeſe interſecantes in puncto E, habere terminos ſiue puncta A, B, C, D, in circumferentia eiuſdem circuli.

Aſſeritur, AE *in* EB — DE *in* EC.

Demonſtratio. Ductis rectis A C & D B: per theor. 7. cap. 3. angulus C A B = angulo C D B, quia eidem arcui C B inſiſtunt, & prætereа angulus A C D = angulo A B D, quia eidem arcui A D inſiſtunt: ergo per theor. 4. cap. 3. inter ſe ſimilia ſunt triangula A E C & D E B, adeòque A E *ad* D E = C E *ad* E B: igitur per 10. axioma, A E *in* E B = D E *in* E C. Quod erat demonſtrandum. Fig. 27.

Sexta Hypotheſis.

Supponit ex puncto A, conſtituto extra circulum, ductas duas rectas, alteram A B tangentem circulum in puncto B: alteram A D, prius in puncto C, deinde in puncto D occurrentem circumferentiæ circuli.

Aſſeritur D A *in* A C = A Bq.

Conſtructio. Centro E propoſiti circuli, & radio E A, deſcriptæ circulari lineæ occurrat in puncto G, recta A D producta: eidemque circulari lineæ occurrat in punctis F & H recta F H tangens in puncto C propoſitum circulum C B D. Fig. 28.

Demonſtratio. Per aſſertionem præcedentis hypotheſis, A C *in* C G = H C *in* C F: ſed ſatis patet, G D = C A, adeòque C G = D A: ergo A C *in* D A = H C *in* C F: ſed quoniam per conſtructionem, H F tangit circulum C B D in puncto C, adeòque perpendicularis eſt ad radium E C, patet H C = C F, adeòq; H C *in* C F = C Fq: ergo A C *in* D A = C Fq: ſed etiam ex hypotheſi & conſtructione ſatis conſtat, tangentem A B = tangenti F C, adeòque A Bq = C Fq: igitur D A *in* A C = A Bq. Quod erat demonſtrandum.

Nota, in præcedenti demonſtratione duas veritates aſſumimus quæ nobis videntur ſatis manifeſtæ ex hypotheſi & conſtructione, nimirum G D = C A: & prætereа B A = C F; ſi fortaſſis alicui videantur non admittendę ſine demonſtratione: eas hic exhibemus demonſtratas; itaque ſuppoſita hypotheſi & conſtructione allatæ demonſtrationis.

Dico primò G D = C A.

Dico ſecundò B A = C F.

Demonſtratio primæ aſſertionis. Vel A G tranſit per commune centrum E, vel non tranſit per centrum; in primo caſu, patet, tam rectam D G, quam rectam C A, eſſe reſiduum quod relinquitur quando ex maiori radio minor aufertur, adeòque conſtat, G D = C A. In ſecundo caſu, ducta ſit recta E K, rectæ A G perpendiculariter occurrens in puncto K, & etiam ductæ ſint rectæ D E, C E, G E, A E. Per theor. 8. capitis 3. & antitheſim patet GE2 — EK2 = GK2, & etiam AE2 — EK2 = KA2: ſed quia G E = E A, etiam GE2 — EK2 = EA2 — EK2: ergo

GK2

$GK2 = AK2$, adeòque $GK = AK$. Similiter patet, $DE2 - EK2 = DK2$, item $EC2 - EK2 = CK2$; sed quia $DE = EC$, etiam $DE2 - EK2 = EC2 - EK2$: ergo etiam $DK2 = CK2$, adeòque $DK = CK$: igitur $GK - DK$, hoc est $GD = AK - CK$, hoc est AC. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ assertionis. Ductis rectis EA, EB, EF, EC: quoniam per hypothesim, BA & CF singulæ sunt tangentes, ex demonstratione problematis vndecimi cap. 8. constat, angulos EBA & ECF rectos esse: ergo ex theor. 8. cap. 3. & per antithesim patet, $EA2 - EB2 = BA2$, & præterea $EF2 - EC2 = CF2$: atqui $EA2 - EB2 = EF2 - EC2$: ergo $BA2 = CF2$, adeòque $BA = CF$. Quod erat demonstrandum.

CAPVT X.

De numeris radicalibus.

IN consideratione quinta capitis quinti libri tertij Logisticæ, agitur de diuersis quantitatum mensuris, atque declaratur quid sit duas quantitates esse commensurabiles vel incommensurabiles; & quomodo aliquæ quidem quantitates continuæ, vel etiam discretæ, sint incommensurabiles: tales verò nullæ inueniantur inter numeros qui in nostra Logistica vulgares appellantur: ex quo fit quod si duæ quantitates A & B sint incommensurabiles, omnino impossibile sit exhibere duos vulgares numeros C & D, ità vt ratio C *ad* D = A *ad* B; hæc tamen proportio A *ad* B exprimi potest per duos numeros qui sint vulgarium numerorum radices; atque ex hoc capite resultat vsus & vtilitas radicum vulgarium numerorum: siquidem per tales radices exhiberi possit, quælibet duarum incommensurabilium quantitatum proportio, licet per vulgares numeros tantum exhiberi possit proportio duarum commensurabilium quantitatum. Varias praxes vtiles pro vsu radicalium numerorum, afferuntur libro primo nostræ Logisticæ: hic verò acturi de istarum praxium subsistentia speculatiua, præsens caput diuidimus in duas partes; in prima parte afferimus aliqua, tum axiomata, tum theoremata constituentia istarum praxium magis propria fundamenta: axiomata huic materie magis propria, quæ hic annotamus, notiones appellamus, vt sic melius distinguantur ab illis quæ annotantur in capite primo huius libri. In secunda parte agimus de subsistentia praxium agentium de numeris radicalibus atque expositarum in libro primo nostræ Logisticæ.

PARS I.

Proponuntur ac demonstrantur nonnullæ proprietates numerorum vulgarium ex quibus resultat vsus numerorum radicalium.

Notiones, siue veritates satis manifestæ ex intelligentia terminorum.

PRimò, quod metitur mensuram, etiam metitur mensuratum à tali mensura.
Secundò, quod metitur singulos genitores additionis vel subtractionis realis

etiam

etiam metitur productum ex tali reali additione vel subtractione.

Tertiò, quando singuli genitores multiplicationis, sunt numeri vulgares integri, etiam singuli genitores metiuntur productum ex multiplicatione.

Quartò, quando singuli genitores diuisionis, sunt numeri vulgares integri, & præterea productum ex diuisione est numerus vulgaris integer, tam diuisor, quam numerus ex diuisione productus, singuli metiuntur numerum qui diuiditur.

Theorema I.

In serie diuisionum, prima sit in qua maior integer numerus A, diuiditur per minorem integrum numerum B: in subsequentibus verò, semper proximè antecedentis diuisor per eius residuum diuidatur, donec ex diuisione nullum remaneat residuum: atque huiusmodi diuisionis diuisor sit Z.

Dico numerorum A & B, maximam communem mensuram esse numerum Z. Constructio. In prima diuisione A — C *per* B = F, adeòque residuum sit C; in secunda diuisione B — D *per* C = G, adeòque huius diuisionis residuum sit D; in tertia diuisione C — Z *per* D = K, adeòque residuum sit Z; in quarta diuisione D *per* Z = L, adeòque huius diuisionis nullum residuum remaneat. Denique numerus X sit maxima communis mensura numerorum A & B.

Ostendendum, numerum X æquari numero Z, adeòque per factas diuisiones inuentum numerum Z, esse maximam mensuram communem numerorum A & B.

Demonstratio. Per hypothesim, A — C *per* B = F: ergo per prax. 5. cap. 7. etiam A — C = F *in* B: sed per hypothesim, X metitur B: ergo per 3. notionem, X metitur F *in* B: ergo X metitur A — C: sed per hypothesim, etiam X metitur A: ergo per 2. notionem, X metitur C. Rursus B — D *per* C = G: ergo B — D = G *in* C: sed ostensum est X metiri C, adeòque per 3. notionem, X metitur G *in* C: ergo etiam X metitur B — D: sed per hypothesim, etiam X metitur B: ergo per 2. notionem, X metitur D. Rursus supponendo C — Z *per* D = K, etiam C — Z = K *in* D: sed prius ostensum est X metiri D, adeòque per 3. notionem, X metitur K *in* D: ergo X metitur C — Z: atqui prius ostensum fuit, X metiri C: ergo per 2. notionem, X metitur Z. Eodem prorsus argumento euincitur, numerum X necessariò metiri residua singula remanentia ex subsequentibus diuisionibus, si plures forent faciendæ antequam haberetur numerus Z, per quem diuidendo diuisorem proximè antecedentis diuisionis nullum relinquitur residuum: & consequenter semper verum esse, quod numerus X metiatur numerum Z: atque hinc patet quod numerus X non sit maior numero Z. Quoniam verò D *per* Z = L, patet, Z metiri D, adeòque per 3. notionem, Z metitur D *in* K: sed D *in* K = C — Z: ergo Z metitur C — Z: sed etiam metitur Z: ergo per 2. notionē, Z metitur C, adeòque per 3. notionem, Z metitur G *in* C: sed G *in* C = B — D: ergo Z metitur B — D: sed prius ostensum est, Z etiam metiri D: ergo per 2. notionem, Z metitur B: adeòque per 3. notionem, Z metitur B *in* F: atqui B *in* F = A — C: ergo Z metitur A — C: sed ostensum fuit quod Z etiam metiatur C: ergo per 2. notionem, Z metitur A: sed prius ostensum fuit quod Z metiatur B: igitur Z metitur A & B: atqui per constructionem, maxima mensura numerorum A & B,

est

est numerus X : igitur Z non est maior numero X : sed prius etiam ostensum fuit quod numerus Z non sit minor numero X : ergo numerus X = numero Z: atqui per constructionem, maxima communis mensura numerorum A & B, est numerus X : ergo etiam Z est maxima mensura communis numerorum A & B. Quod erat demonstrandum.

Corollarium.

HInc constat quod maxima mensura communis numerorum A & B erit vnitas, adcòque numeros A & B non habere pro communi mensura vllum numerum vnitate maiorem, si per continuatam, vt diximus, diuisionum seriem inuentus numerus Z, sit vnitas.

Theorema II.

Singulæ literæ A, B, C, D, repræsentent integros vulgares numeros: præterea A *ad* B = C *ad* D, atque proportio A *ad* B constet minoribus terminis quam proportio C *ad* D.

DIco primò, proportionem A *ad* B non constare minimis terminis integris, si A non metitur C.

Dico secundò, A metiri C, & præterea B metiri D : si proportio A *ad* B constet minimis terminis integris.

Demonstratio primæ assertionis. Per hypothesim A *ad* B = C *ad* D: ergo per theor. 8. cap. 2. etiam C *per* A = D *per* B : ergo vtriusque huius diuisionis productum maximum atque integrum, est aliquis idem numerus K; & quia per hypothesim, A non metitur C, etiam C *per* A non = K : ergo etiam D *per* B non = K : itaque residuum ex diuisione C *per* A, sit E : & residuum ex diuisione D *per* B, sit F : hoc supposito, patet, numerum A esse maiorem numero E, & numerum B esse maiorem numero F, atque præterea A *in* K = C — E, & etiam B *in* K = D — F, ex quo constat, A *in* K *ad* B *in* K = C — E *ad* D — F : sed per theor. 4. cap. 2. A *in* K *ad* B *in* K = A *ad* B || C *ad* D, vt constat ex hypothesi : ergo C *ad* D = C — E *ad* D — F : ergo per theor. 2. cap. 2. C *ad* D = E *ad* F : sed per hypothesim A *ad* B = C *ad* D : ergo A *ad* B = E *ad* F : atqui etiam ostensum est A esse numerum maiorem quam E, & B esse numerum maiorem quam F : ergo proportio A *ad* B constat maioribus terminis, quam illi æqualis proportio E *ad* F : igitur proportio A *ad* B non constat minimis terminis. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis. Si numerus A non metiretur numerum C : per primam partem, proportio A *ad* B non constaret minimis integris terminis : sed per hypothesim proportio A *ad* B constat minimis integris terminis : ergo A metitur C : ergo C *per* A = numero integro G ; sed quia per hypothesim A *ad* B = C *ad* D, per theor. 8. cap. 2. etiam C *per* A = D *per* B : ergo D *per* B = numero integro G : igitur A metitur C, & etiam B metitur D. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema III.

Singulæ literæ A & B, integros vulgares numeros repręsentent.

Dico primò, proportionem A *ad* B cǫnstare minimis terminis: si A & B non habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Dico secundò, proportionem A *ad* B non constare minimis terminis: si A & B habeant communem mensuram diuersam ab vnitate.

Demonstratio primæ partis. Sit enim ratio F *ad* K minimis integris terminis expressa, sic vt F *ad* K = A *ad* B; igitur per theor 2. patet, F metiri A, adeòque A *per* F = integro numero X: sed quoniam per hypothesim, F *ad* K = A *ad* B, etiam per theor. 8. cap. 2. constat, A *per* F = B *per* K: ergo etiã B *per* K = eidẽ integro numero X: ergo per 4. notionem, numerus X metitur A & B: sed per hypothesim, A & B non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo X = 1: ergo A *per* F = 1, & etiam B *per* K = 1: ergo A = F, & præterea B = K: sed per hypothesim, ratio F *ad* K expressa est minimis integris terminis: ergo etiam ratio A *ad* B cônstat minimis integris terminis. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis. Per hypothesim A & B habent aliquam mensuram communem atq; diuersam ab vnitate, hanc mensuram repræsentet litera Z: ergo A *per* Z = integro numero F, & etiam B *per* Z = integro numero K: ergo A = F *in* Z, & præterea B = K *in* Z: ergo A *ad* B = F *in* Z *ad* K *in* Z: sed per theor. 4. cap. 2. constat, F *in* Z *ad* K *in* Z = F *ad* K: ergo A *ad* B = F *ad* K: sed quoniam A *per* Z = F, constat ex 4. notione, F metiri A: ergo per theor. 2. proportio A *ad* B non constat minimis integris terminis. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV.

Singulę literæ A & B repręsentent vulgares integros numeros, quorum maxima communis mensura sit Z, atque A *per* Z = F: præterea B *per* Z = K.

Dico, proportionem F *ad* K, expressam esse minimis integris terminis, atque F *ad* K = A *ad* B.

Demonstratio. Per hypothesim, Z est maxima communis mensura numerorũ A & B: ergo qualemcunque integ[illegible] numerum ab vnitate diuersum repræsentet X, semper numerus Z *in* X erit [illegible] numero Z: ergo Z *in* X non est mensura communis numerorum A & B: ergo A *per* Z *in* X non = integro numero, & etiam B *per* Z *in* X non = integro numero: sed A *per* Z *in* X = A *in* 1 *per* Z *in* X ll $\frac{A \text{ in } 1}{Z \text{ in } X}$ ll $\frac{A}{Z}$ *in* $\frac{1}{X}$ ll $\frac{A}{Z}$ *per* $\frac{X}{1}$ ll $\frac{A}{Z}$ *per* X: atque similiter patet, B *per* Z *in* X = $\frac{B}{Z}$ *per* X: igitur $\frac{A}{Z}$ *per* X non = integro numero, & etiam $\frac{B}{Z}$ *per* X non = integro numero: sed per hypothesim, $\frac{A}{Z}$ = F, & pręterea $\frac{B}{Z}$ = K: ergo F *per* X non = integro numero, & etiam K *per* X non = integro numero: ergo numerus X non metitur numeros F & K: sed numerus X est quilibet numerus integer diuersus ab vnitate: ergo nullus numerus integer diuersus ab vnitate metitur numeros F & K: ergo numeri F & K non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per theor. 3. proportio F *ad* K est expressa minimis integris terminis: quoniam verò per hypothesim, A *per* Z = F, & præterea B *per* Z = K, atque per theor. 4. cap. 2. constat, A *per* Z *ad* B *per* Z = A *ad* B: patet etiam F *ad* K = A *ad* B. Quod erat demonstrandum.

Theorema V.

Singulæ literæ A, B, C repræsentent integros vulgares numeros.

Dico primò, numerum A *in* B, & numerum C, habere communem mensuram diuersam ab vnitate: si numeri C & A, vel numeri C & B, habeant talem mensuram communem.

Dico secundò, numerum A *in* B, & numerum C, non habere communem mensuram diuersam ab vnitate; si, neque C & A, neque C & B habeant talem mensuram.

Demonstratio primæ partis. Per hypothesim, aliquis integer numerus X, metitur singulos numeros A & C, vel singulos numeros B & C: sed numerus qui metitur vel A vel B, per notionem 3. metitur A *in* B: ergo aliquis integer numerus X, metitur singulos numeros C, & A *in* B: atqui per hypothesim, numerus X est integer atque diuersus ab vnitate: ergo numerus A *in* B, & numerus C, singuli mensurantur ab aliquo integro numero X diuerso ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis. Si fieri potest, numerus X diuersus ab vnitate, sit communis mensura numeri C, & numeri A *in* B: ergo A *in* B *per* X = integro numero F: ergo A *in* B = F *in* X: ergo per 10. axioma cap. 1. etiam X *ad* A = B *ad* F: quoniam verò per hypothesim, X metitur C, adeòque per notionem 1. quælibet mensura numeri X mensurat numerum C: & præterea per hypothesim, nullus numerus diuersus ab vnitate mensurans numerum C, mensuret numerum A, patet igitur nullũ numerũ diuersum ab vnitate atque mensurantem numerũ X, mensurare numerum A: ergo per 3. theorema, ratio X *ad* A, est expressa minimis integris terminis: sed iam ostensum est, X *ad* A = B *ad* F: ergo per 2. theorema X metitur B: atqui numerus X est diuersus ab vnitate, atque mensurat numerum C: ergo numeri B & C habent communem mensuram diuersam ab vnitate: igitur supposito quod numerus C, & numerus A *in* B, habeant communem mensuram diuersam ab vnitate, constat etiam, numeros C & B, habere communem mensuram diuersam ab vnitate: atqui per hypothesim, numeri C & B non habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo numerus C, & numerus A *in* B, non habent communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema VI.

Singulæ literæ A & B, repręsentent vulgares integros numeros: præterea litera *n*: significet aliquem denominatorem apponibilem dignitatibus A vel B.

Dico primò, A & B*n*, & præterea A*n* & B*n*, habere mensuram communem diuersam ab vnitate: quando A & B habent talem mensuram.

Dico secundò, neque A & B*n*, neque A*n* & B*n*, habere mensuram communem diuersam ab vnitate, quando A & B non habent talem mensuram.

Demonstratio primæ partis primæ assertionis. Per hypothesim A & B habent communem mensuram diuersam ab vnitate: ergo per theor. 5. etiam B *in* B & A, hoc est B2 & A, habent talem mensuram: sed per hyp. etiam A & B habent talem mensuram: ergo per theor. 5. etiam constat, B2 *in* B & A, hoc est B3 & A, habere talem mensuram: atqui per hyp. A & B habent talem mensuram: ergo per 5. theor. B3 *in* B & A, hoc est B4 & A, habent talem mensuram. Simili planè argumento patet de B5 & A, item de B6 & A, atq; ità de cæteris dignitatibus B quemcunque denominatorem *n* habentibus, quod habeant communem mensuram ab vnitate diuersam cum dignitate A. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis primæ assertionis. Per primam partem, A & B*n* habent aliquam communem mensuram Z, diuersam ab vnitate: igitur numerus Z est diuersus ab vnitate, & metitur A & B*n*: sed quoniam Z metitur A, per notionem 3 etiam metitur A*n*: igitur A*n* & B*n* habent aliquam communem mensuram Z, diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio primæ partis secundæ assertionis. Per hypothesim, A & B non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per theor. 5. etiam A & B *in* B, hoc est A & B2, non habent mensuram communem diuersam ab vnitate, & insuper per hypothesim, A & B non habent talē mensurā: ergo per theor. 5. patet, A & B2 *in* B, hoc est A & B3, non habere talem mensuram. Rursus quoniam constat, A & B3 non habere mensuram communem diuersam ab vnitate, & insuper [illegible] hypothesim, A & B non habent talem mensuram communem, patet per 5. theore[illegible] *in* B, hoc est A & B4, non habere talem mensuram. Simili planè argumento patet de reli[illegible] significatis à dignitate B cum apposito quouis denominatore *n*, quo[illegible] habeant communem mensuram diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundæ partis, secundæ assertionis. Per primam partem, B*n* & A non habent mensuram communem diuersam ab vnitate: ergo per 5. theorema, B*n* & A *in* A, hoc est B*n* & A2, non habent talem mensuram communem: sed per hypothesim, neque B*n* & A habent talem mensuram: ergo per 5. theorema B*n* & A2 *in* A, hoc est B*n* & A3, non habent talem mensuram; eodemq; argumento idem verum esse euincitur de numero B*n*, & dignitate A cum apposito quouis denominatore *n*: ex quo patet, B*n* & A*n* non habere mensuram communem diuersam ab vnitate. Quod erat demonstrandum.

Theorema VII.

Litera *n* significet nomen cuiuscunque radicis: atque datus vulgaris integer numerus A non habeat huius nominis radicem, integro vulgari numero exprimibilem.

Dico, numerum A non habere radicem cuius nomen indicatur à litera *n*, exprimibilem per duos integros vulgares numeros constituentes fractionem vulgarem.

Demonstratio. Supposito quod R1*q*A = C *per* D, patet $\frac{C}{D}$ *in* $\frac{C}{D}$ = A ll $\frac{A}{1}$; igitur ex dictis de multiplicatione fractionum vulgarium, C *in* C = A, & etiam D *in* D = 1: ergo R1*q*D *in* D = R1*q*1: sed R1*q*D *in* D = D, & R1*q*1 = 1: ergo D = 1: ergo fractio C *per* D = vulgari integro: sed per hypothesim, fractio C *per* D, est quæuis fractio vulgaris, æqualis radici primæ numeri A: ergo numerus A nō habet radicem primam quæ sit fractio vulgaris diuersa à fractione quæ æquiualet integro vulgari numero. Simili prorsus argumento constat, quod A non habeat radicem secundam, vel tertiam, vel aliam à denominatore *n* indicatam, quæ sit fractio vulgaris C *per* D non æquiualens integro vulgari numero: etenim quemadmodum numerus C *per* D semel in se ductus, æquatur numero A, supposito quod R1*q*A = C *per* D: ità numerus C *per* D toties in se ductus quot vnitates indicantur à litera *n*, necessariò æquatur fractioni A *per* 1, supposito quod R*nq*A = C *per* D: quare siue semel, siue sæpius in se ductus numerus C *per* D, semper verum erit quod A producetur ex numero C sæpius in se ducto: quodque 1. producetur ex numero D sæpius in se ducto: & consequenter quod D = 1, adeòque fractio C *per* D = C *per* 1: & quoniam manifestum est, fractionem C *per* 1 æquari integro: etiam fractio C *per* D, hoc est R*nq*A, non potest esse vulgaris fractio, nisi fractio æquiualens vulgari integro numero. Quod erat demonstrandum.

Theorema VIII.

Singulę literę A, B, C, D, integros vulgares numeros reprę sentent.

Dico, proportionem A *per* B *ad* C *per* D, consistentem inter duas vulgares fractiones, exhiberi posse per duos integros vulgares numeros.

Demonstratio. Per theor 8. cap. 2. patet, A *per* B *ad* C *per* D = A *in* D *ad* B *in* C: sed quoniam singuli termini A, B, C, D, sunt integri vulgares numeri, patet, etiam numeros A *in* D & B *in* C, esse integros vulgares numeros: igitur proportio A *in* D *ad* B *in* C expressa est duobus integris vulgaribus numeris, & tamen æqualis est proportioni quam habet fractio A *per* B *ad* C *per* D. Quod erat demonstrandum.

Theo-

Theorema IX.

Sit quęuis vulgaris fractio C *per* D, habens radicem indicatam à denominatore *n*: atque fractioni C *per* D æquiualeat fractio X *per* Z constans minimis terminis integris.

Dico, ſingulos numeros integros X & Z, habere radicem *n*.

Demonſtratio. Suppoſito quod denominator *m* vnam amplius vnitatem contineat quam denominator *n*: quodque per hypotheſim, poſſibilis atque minimis terminis conſtans fractio A *per* B = R*nq*X *per* Z; quoniam fractio A *per* B conſtat minimis terminis, per theor. 6, etiã fractio A*m per* B*m* cõſtat minimis terminis; quia verò fractio A *per* B = R*nq*X *per* Z, & manifeſtũ eſt, fractionem A *per* B = R*nq*A*m per* B*m*: patet quod fractio X *per* Z = fractioni A*m per* B*m*: igitur fractio X *per* Z = fractioni A*m per* B*m*, atque vtraque conſtat minimis, adeòque ijſdem ſiue æqualibus terminis: ergo A*m* = X, & B*m* = Z: ſed patet etiam quod A = R*nq*A*m*, quodque B = R*nq*B*m*: igitur A = R*nq*X, & etiam B = R*nq*Z: ergo quantitates X & Z, ſingulæ habent radicem indicatam à denominatore repræſentato à litera *n*. Quod erat demonſtrandum.

Theorema X.

Singulę literę A, B, C, D, vulgares integros numeros repręſentent, ità tamen vt A *ad* B = C *ad* D: atque proportio A *ad* B expreſſa ſit minimis terminis, & aliquis ex terminis A & B non habeat radicem *n* exprimibilem vulgari numero.

Dico, proportionem R*nq*C *ad* R*nq*D non eſſe exprimibilem vulgaribus numeris: adeòque eius terminos R*nq*C & R*nq*D eſſe quantitates inter ſe incommenſurabiles.

Demonſtratio. Per hypotheſim, A *ad* B = C *ad* D: ergo per theor. 8. cap. 2, etiam A *per* B = C *per* D, eritque fractio A *per* B expreſſa minimis terminis, quia per hypotheſim, ratio A *ad* B eſt expreſſa minimis terminis: ſed quia per hypotheſim, aliquis ex terminis A & B non habet radicem *n* exprimibilem vulgaribus numeris, etiam per theor. 9, fractio A *per* B non habet radicem *n* exprimibilem vulgaribus numeris: ergo fractio C *per* D æqualis fractioni A *per* B, non habet radicem *n* exprimibilem vulgaribus numeris: ergo R*nq*C *diuiſa per* R*nq*D, eſt fractio non exprimibilis vulgaribus numeris: ergo proportio R*nq*C *ad* R*nq*D, eſt proportio non exprimibilis vulgaribus numeris, adeòque eius termini ſunt incommenſurabiles. Quod erat demonſtrandum.

Theo-

Theorema XI.

Eiusdem quadrati latus sit X, diameter Z.

Dico, rationem X *ad* Z exprimi non posse vllis numeris vulgaribus: adeòque quantitates, siue lineas X & Z, esse incommensurabiles.

Demonstratio. Manifestum est, rationem 1 *ad* 2 constare minimis terminis, & tamen numerum 2 non habere radicem primam exprimibilem integro vulgari numero: ergo per 10. theorema, ratio quam habet R1q1 *ad* R1q2, non est exprimibilis vllis numeris vulgaribus, atque huius rationis termini sunt quantitates incommensurabiles: sed quoniam per theor. 8. cap. 3, constat, X2 *ad* Z2 = 1 *ad* 2, patet etiam, X *ad* Z = R1q1 *ad* R1q2: ergo ratio X *ad* Z non est exprimibilis vllis numeris vulgaribus, adeòque quantitates, siue lineæ X & Z, sunt incommensurabiles. Quod erat demonstrandum.

Theorema XII.

In triangulo D A B angulus A rectus sit, atque D A *ad* A B = 1 *ad* 2.

Dico, rationem D B *ad* B A, nullis numeris vulgaribus exprimi posse: adeòque lineas D B & B A, esse inter se incommensurabiles.

Demonstratio. Manifestum est rationem 5 *ad* 4 constare minimis integris terminis, & tamen numerum 5 non habere radicem primam exprimibilem integro vulgari numero: ergo per theor. 10. ratio quam habet R1q5 *ad* R1q4, non est exprimibilis vllis numeris vulgaribus, atque huius rationis termini sunt quantitates inter se incommensurabiles; quoniam verò per hypothesim, A B = 2DA, adeòque AB2 = 4DA2, & per theor. 8. cap. 3. etiam DB2 = AB2 + DA2: manifestum est, DB2 = 5DA2: quare DB2 *ad* AB2 = 5DA2 *ad* 4DA2 ll 5 *ad* 4, & consequenter R1qDB2 *ad* R1qAB2, hoc est D B *ad* A B = R1q5 *ad* R1q4: ergo ratio D B *ad* A B non est exprimibilis vllis numeris vulgaribus, atque huius rationis termini, hoc est lineæ D B & B A, sunt quantitates inter se incommensurabiles. Quod erat demonstrandum.

Theorema XIII.

Recta A B secta sit in C, extrema & media ratione: hoc est vt A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Dico, rationem A B *ad* A C exprimi non posse vllis numeris vulgaribus: adeòque huius rationis terminos, siue lineas A B & A C, esse quantitates incommensurabiles.

Constructio. Ducta sit A D, vt angulus B A D rectus sit, atque D A sit dimidia A B; præterea in recta A B notatum sit punctum E, vt D E = D A.

De-

Demonstratio. Quoniam angulus B A D rectus est, & præterea 2DA = A B: per theor. 12. patet, rationem D B *ad* B A exprimibilem non esse vllis numeris vulgaribus, adeòque eius terminos esse quantitates incommensurabiles: ergo ex ratione D B *ad* B A auferendo rationem D E *ad* B A (per hypothesim æqualem rationi 1 *ad* 2, adeòque exprimibilem numeris vulgaribus) residua ratio E B *ad* A B, adeòque ratio A B *ad* E B, erit ratio non exprimibilis vllis numeris vulgaribus, eiusq; termini erunt quantitates incommensurabiles: sed quoniam ex constructione & demõstratione problematis 9. cap. 8. cõstat quod A C = B E, quãdo recta A B secta est extrema & media ratione, vt hic supponitur, etiam ratio A B *ad* A C = A B *ad* E B: ergo etiam ratio A B *ad* A C non est exprimibilis vllis numeris vulgaribus, adeòque eius termini sunt quantitates inter se incommensurabiles. Quod erat demonstrandum.

Theorema XIV.

Eiusdem quadrati diameter sit Z, latus verò sit X.

Dico, Z *ad* X = R1q2 *ad* R1q1 ll R1q2 *ad* 1.

Demonstratio. Per theorema 8. cap. 3. patet, Z2 = 2X2, adeòque Z2 *ad* X2 = 2 *ad* 1: ergo R1qZ2 *ad* R1qX2 = R1q2 *ad* R1q1: sed manifestum est, R1qZ2 = Z, & etiam R1qX2 = X, adeòque Z *ad* X = R1qZ2 *ad* R1qX2: igitur Z *ad* X = R1q2 *ad* R1q1 ll R1q2 *ad* 1, quia R1q1 = 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema XV.

Recta linea A B secta sit in C extrema & media ratione, hoc est vt A B *ad* A C = A C *ad* C B.

Dico, A C *ad* C B = R1q4 *ad* R1q5 — R1q1 ll 2 *ad* R1q5 *et* — 1.

Constructio. Angulus B A D rectus sit, atque B A = 2DA: & rectę D B, pars D E = D A; denique vnitas vulgaris (quæ quamlibet quantitatem repræsentare potest) significet lineam D A. Fig. 29.

Demonstratio. Quoniam per constructionem D A = 1, atque D A *ad* A B = 1 *ad* 2: etiam A B = 2: ergo DA2 = 1q, & præterea AB2 = 2q ll 4: igitur per theor. 8. cap. 3. etiam DB2 = 4 + 1 ll 5: sed linea D B = R1qDB2: ergo linea D B = R1q5: atqui ex demonstratione theorematis 13. patet, D B — D E, hoc est D B — D A = A C: ergo A C = R1q5 — R1q1: ergo A B *ad* A C = R1q4 *ad* R1q5 — R1q1 ll 2 *ad* R1q5 *et* — 1, quia R1q4 = 2, & R1q1 = 1: atqui per hypothesim, A B *ad* A C = A C *ad* C B: ergo etiam A C *ad* C B = R1q4 *ad* R1q5 — R1q1 ll 2 *ad* R1q5 *et* — 1. Quod erat demonstrandum.

Theorema XVI.

Qualescunque quantitates significent literæ X, Z, A, B: ità tamen vt X *per* Z ═ R*nq*A *per* B.

Dico X *ad* Z ═ R*nq*A *ad* B.

Demonstratio. Per hypothesim X *per* Z ═ R*nq*A *per* B: ergo X *per* Zq*n* ═ A *per* B: sed X *per* Zq*n* ═ Xq*n* *per* Zq*n*: ergo Xq*n* *per* Zq*n* ═ A *per* B: ergo per theor. 8. cap. 2. etiam Xq*n* *ad* Zq*n* ═ A *ad* B: sed per theor, 7. cap. 2. patet, Xq*n* *ad* Zq*n* ═ X *ad* Zq*n*: ergo X *ad* Zq*n* ═ A *ad* B: igitur X *ad* Z ═ R*nq*A *ad* B. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Notantur aliqua spectantia ad rationes quæ exhiberi non possunt vllis numeris vulgaribus integris aut fractis; & paucis indicatur aliqua ex causis quare neglexerimus indiuisibilium methodum siue Geometriam.

IN theoremate 14. per numeros radicales exhibetur ratio quam in quadrato habet diameter ad latus: quam rationem nullis numeris vulgaribus exhiberi posse demonstratur in theoremate 12; similiter in theoremate 15. per numeros radicales exhibetur ratio quæ inuenitur inter partes lineæ sectæ extrema & media ratione: quam rationem exhiberi non posse per numeros vulgares docet theorema 13. ex quibus patet quomodo vulgarium numerorum radices subministrent, quod haberi non potest per numeros vulgares.

Quoniam verò impossibile est aliquam ex enumeratis duabus rationibus per numeros vulgares exhibere, manifestum est impossibile esse, afferre solutionem problematis, in quo petitur diuisio alicuius propositi numeri vulgaris in duas partes, sic vt maior pars ad minorem habeat proportionem quam habet eiusdem quadrati diameter ad latus; vel certè diuisio alicuius propositi vulgaris numeri, vt partes inter se habeant eam proportionem, quæ inuenitur inter partes lineæ sectæ extrema & media ratione. Quod hæc duo problemata insolubilia sint per numeros vulgares, causa est, quia singula petunt rationem aliquam cuius termini sunt quantitates incommensurabiles: tales verò terminos non inueniri inter vulgares integros numeros, etiam satis patet ex vulgarium numerorum integrorum intelligentia, ex qua manifestum est omnes & singulos mensurari à vulgari vnitate; ne de fractis vulgaribus numeris remaneret dubium, in theoremate 8. huius capitis ostendimus, quamlibet proportionem exprimibilem per fractos vulgares numeros, exhiberi posse per vulgares integros numeros. Ex dictis de impossibilitate solutionis duorum problematum enumeratorum, satis manifestum est, propter eamdem causam esse impossibilem solutionem omnium problematum, in quibus petitur vt per vulgares integros aut fractos numeros exhibeatur aliqua proportio consistens inter duas quantitates inter se incommensurabiles:

&

& etiam patet, quod talem problematis solutionem petere, aliud non foret, quam supposito quod termini A & B incommensurabiles sint, petere vt pro termino B, alius illi æqualis substituatur, qui cum termino A sit commensurabilis: adeòque petere duos terminos B & C inter se æquales, sic vt terminus C cum termino A habeat mensuram communem, & tamen terminus B cum termino A non habeat vllam communem mensuram.

Commemorata impossibilitas, per duos vulgares numeros exprimendi rationem quæ inuenitur inter partes lineæ sectæ extrema & media ratione, aut eiusdem quadrati diametrum & latus, abundè sufficit vt cognoscatur insubsistentia doctrinæ quorumdam modernorum Mathematicorum, qui vt ità dicam geometrizare volunt circa vulgares numeros, siue continuæ quantitatis proprietates inferre ex sola vulgarium numerorum consideratione; in quem finem docent, lineas, ac reliquas continuas quantitates, esse considerandas vt quædam punctorum siue indiuisibilium aggregata, adeòque vt numeros vulgares; in quo primo huius indiuisibilium Geometriæ fundamento, supponendo eamdem esse conditionem lineæ, & vulgarium vnitatum aggregati: etiam supponunt non aliter lineam, quam vulgarem numerum diuidi posse, nullasque proportiones inueniri lineis exprimibiles, quæ exhiberi non possint per vulgares numeros; quantum hæc suppositio atque fundamentalis doctrina Geometriæ indiuisibilium aduersetur Logisticæ nostræ doctrinæ hoc capite traditæ, nemo non videt: hanc tamen demonstratiuè deducimus ex Logisticæ nostræ fundamentis, quodque de eiusdem quadrati diametro, & latere ostendimus, nimirum proportionem quam inter se habent, non inueniri inter vllos duos numeros vulgares, etiam in Euclideis elementis tam solidè verũ euincitur, vt apud Geometras omnes habeatur indubitatum. Quapropter nemo mirari debet quod in nostra Logistica agendo de multiplici methodo Geometrizandi, illam negligendam putauerimus, quæ appellatur Geometria indiuisibilium: hanc non negamus præstantis ingenij partum, alijsque similibus dignam laudibus: nostro tamen iudicio pro speculatiua Mathesi parum vtilis est, sed fortassis non parum noxia; quam deformem atque monstruosam sibi fingat continuam quantitatem, melius cognosci potest ex conclusionibus docentium de quantitate continua sententiam apud modernos satis nominatam, atque ex ijsdem fundamentis genitam vel illis innixam, quam communiter dicunt sententiam de punctis inflatis: hæ conclusiones asserunt quantitates continuas aliud non esse quam indiuisibilium aggregata, adeòque illam intelligi volunt compositam per additionem: quemadmodum tamen rationes compositæ, non per additionem, sed per ductum siue multiplicationem componuntur: & dignitates secundæ, tertiæ, quartæ, &c. ex primis componuntur, non per additionem, sed per ductum siue multiplicationem; sic continuæ quantitates intelligi debent natæ, productæ, siue compositæ, non ex additione, sed ex ductu siue multiplicatione; ità docet nostra Logistica, & in hac doctrina insistit antiquæ Matheseos documentis, vt notamus initio partis 4. cap. 1. lib 1. Præterea statuunt, ex his indiuisibilibus per additionem componentibus continuam quantitatem, alia alijs maiora esse: ex quo, in bona Mathesi, sequitur, quod inter se proportionem habeant, adeòque singula quantitatibus annumeranda sint: quippe inter solas quantitates proportio admittitur à Mathesi; non dicunt tamen cuius generis quantitatibus indiuisibilia illa debeant annumerari, ne fortè asserendo singula illa indiuisibilia, esse continuas quantitates, non inueniant ab his prioribus diuersa alia indiuisibilia, quorum aggregata dici possint priora illa indiuisibilia. Affirmant indiuisibilia simul addita constituere continuam quantitatem: quæ proinde quantitas continua, dici debet tantum diuisibilis in partes indiuisibiles quas continet, ne eius partes indiuisibiles, dicendæ sint diuisæ aut diuisibiles; hæc profectò quantitas continua solis Matheseos ignaris cognita dici debet: etenim continua quantitas, de qua agit Mathesis, in eius elementis, tum Euclideis, tum nostris, statuitur, & demonstratur semper vlterius diuisibilis in infinitum. Docent ex indiuisibilium pluralitate constantem quantitatem continuam, realiter quidem indiuisibilem esse in quotlibet partes, sed tamen æquiualenter semper vlterius diuisibilem esse; igitur noua illa, atque ex indiuisibilibus composita quantitas continua, tantum est semper vlterius diuisibilis, vt vnitas vel quiuis numerus vulgaris: in quantum per fractas vnitates exhiberi potest quælibet vnitatum multitudo, quæ æquiualeat vel vnitati vulgari, vel dato vulgari numero: hoc est, tantum semper vlterius diuisibilis dicenda est ea diuisione, quæ aliter dicitur compendium regulæ aureæ: non verò ea diuisione, quæ aliter dicitur sectio, qua diuisione indiuisibilis est vulgaris vnitas: tamen hanc diuisionem siue sectionem, semper vlterius admittendam in quauis quantumcunque parua quantitate continua, illud est, quod asserunt, & demonstrant Matheseos elementa.

Qui desiderat plures differentias inter quantitatem continuam de qua agit sententia de punctis inflatis, aut indiuisibilium Geometria: quod huius sententiæ, aut Geometriæ doctores, aut supponunt, aut asserunt, de illa continua quantitate, de qua agunt, conferat cum ijs, quæ in libri tertij, prima, secunda, vel quinta consideratione docet nostra Logistica; cui propositum est, non aliorum defectus exhibere, sed sua declarare, atque pro viribus, à defectibus expurgata proponere; quæ verò hic insinuauimus, sufficere arbitramur, vt constet, a nobis non immerito, vt parum vtilem pro speculatiua Mathesi, neglectam indiuisibilium methodum siue Geometriam, vbi cum nostræ Logisticæ methodo conferimus, tum Algebræ, tum antiquæ Matheseos methodum.

PARS II.

Demonstrationes praxium contentarum lib. 1. Logisticæ atque agentium de numeris radicalibus.

INter praxes libro primo propositas, atque agentes de radicibus vulgarium numerorum: reliquas præcedunt, quæ proponuntur in initio partis 6. cap. 2. lib. 1. vbi agendo de operationibus Logisticis circa numeros radicales, præmittitur additio, & subtractio: deinde subsequitur multiplicatio, & diuisio; in hoc capite, ab ijsdem illis Logisticis operationibus desumitur exordium proponendarum demonstrationum: prius tamen agitur de multiplicatione, & diuisione, quia in demonstratione additionis, & subtractionis radicalium numerorum, assumitur aliquid quod constat ex multiplicationis demonstratione. Reliquæ praxes agentes de numeris radicalibus, demonstratæ exhibentur eo ordine quo proponuntur in libro primo nostræ Logisticæ.

Multiplicatio numerorum radicalium proposita in parte 6. cap. 2. lib. 1. Logisticæ, docet quod qualescunque numeri vulgares repræsententur à literis A & B, semper verum sit.

R*nq*Aq*n* *in* R*nq*Bq*n* = R*nq*A *in* Bq*n*.

Demonstratio. Ex scriptionibus Logisticis declaratis in parte 2. cap. 1. lib. 1. Logisticæ, manifestum est, quod A = R*nq*Aq*n*, & etiam B = R*nq*Bq*n*: ergo A *in* B = R*nq*Aq*n* *in* R*nq*Bq*n*: sed etiam similiter manifestum est, quod A *in* B = R*nq*A *in* Bq*n*: igitur R*nq*Aq*n* *in* R*nq*Bq*n* = R*nq*A *in* Bq*n*. Quod erat demonstrandum.

Diui-

Diuisio numerorum radicalium proposita in parte 6.cap.2.lib.1. Logisticæ, docet, quod qualescunque numeri vulgares repræsententur a literis A & B, semper verum sit,

R*nq*Aq*n* *per* R*nq*Bq*n* = R*nq*A *per* Bq*n*.

Demonstratio. Ex scriptionibus Logisticis declaratis in parte 2. cap.1. lib.1. Logisticæ manifestum est, quod A = R*nq*Aq*n*, & etiam B = R*nq*Bq*n*: ergo A *per* B = R*nq*Aq*n* *per* R*nq*Bq*n*: sed etiam similiter manifestum est, quod A *per* B = R*nq*A *per* Bq*n*: igitur R*nq*Aq*n* *per* R*nq*Bq*n* = R*nq*A *per* Bq*n*. Quod erat demonstrandum.

Pro additione, & subtractione numerorum radicalium, quæ traditur in parte 6. cap.2. lib.1. Logisticæ, tribus diuersis notis, tres casus inter se diuersi, ab inuicem distinguuntur: pro casibus contentis prima & tertia nota, nulla requiritur demonstratio, sed sufficiunt, quæ superius capite 5. notamus de hac additione, & subtractione; reliquum igitur est, vt hic afferatur demonstratio additionis atque subtractionis, spectantis ad casum secundæ notæ.

In additione spectante ad casum secundæ notæ, asseritur, quod qualescunque vulgares numeros repræsentent literæ A, C, X, Z, ità tamen, vt R*nq*A *ad* R*nq*C = X *ad* Z semper verum sit,

$$\mathrm{R}nq\mathrm{A} + \mathrm{R}nq\mathrm{C} = \mathrm{R}nq\ \frac{\mathrm{X} + \mathrm{Zq}n \textit{ in } \mathrm{C}}{\mathrm{Zq}n}$$

Demonstratio. Per hypothesim R*nq*A *ad* R*nq*C = X *ad* Z: ergo componendo, R*nq*A + R*nq*C *ad* R*nq*C = X + Z *ad* Z ll R*nq*X + Zq*n* *ad* R*nq*Zq*n*, quia X+Z = R*nq*X + Zq*n*, & etiam Z = R*nq*Zq*n*: ergo per 10. axioma, R*nq*A + R*nq*C *in* R*nq*Zq*n* = R*nq*X + Zq*n* *in* R*nq*C ll R*nq*X + Zq*n* *in* C, vt patet ex hic dictis de multiplicatione: ergo R*nq*A + R*nq*C *in* R*nq*Zq*n* = R*nq*X + Zq*n* *in* C *in* 1. igitur per 10. axioma, 1 *ad* R*nq*A + R*nq*C = R*nq*Zq*n* *ad* R*nq*X + Zq*n* *in* C: ergo per theorema 8. capitis 2. etiam R*nq*A + R*nq*C *per* 1, hoc est R*nq*A + R*nq*C = $\frac{\mathrm{R}nq\mathrm{X} + \mathrm{Zq}n \text{ in C}}{\mathrm{R}nq\mathrm{Zq}n}$ ll R*nq* $\frac{\mathrm{X} + \mathrm{Zq}n \text{ in C}}{\mathrm{Zq}n}$, vt patet ex paulò antè dictis de diuisione: igitur etiam R*nq*A + R*nq*C = R*nq* $\frac{\mathrm{X} + \mathrm{Zq}n \text{ in C}}{\mathrm{Zq}n}$. Quod erat demonstrandum.

In subtractione spectante ad casum secundæ notæ, atque suppositis, quæ paulò antè fuerunt supposita pro additione, asseritur semper verum esse,

$$\mathrm{R}nq\mathrm{A} - \mathrm{R}nq\mathrm{C} = \mathrm{R}nq\ \frac{\mathrm{X} - \mathrm{Zq}n \textit{ in } \mathrm{C}}{\mathrm{Zq}n}$$

Demonstratio. Per hypothesim R*nq*A *ad* R*nq*C = X *ad* Z: ergo diuidendo, R*nq*A − R*nq*C *ad* R*nq*C = X − Z *ad* Z ll R*nq*X − Zq*n* *ad* R*nq*Zq*n*: ergo per 10. axioma, R*nq*A − R*nq*C *in* R*nq*Zq*n* = R*nq*X − Zq*n* *in* R*nq*C ll R*nq*X − Zq*n* *in* C, vt constat ex hic dictis de multiplicatione: ergo R*nq*A − R*nq*C *in* R*nq*Zq*n* = R*nq*X − Zq*n* *in* C *in* 1: ergo per 10. axioma, 1 *ad* R*nq*A − R*nq*C = R*nq*Zq*n* *ad* R*nq*X − Zq*n* *in* C: ergo per theor. 8. cap. 2. etiam R*nq*A − R*nq*C *per* 1, hoc est R*nq*A − R*nq*C = $\frac{\mathrm{R}nq\mathrm{X} - \mathrm{Xq}n \text{ in C}}{\mathrm{R}nq\mathrm{Zq}n}$ ll R*nq* $\frac{\mathrm{X} - \mathrm{Zq}n \text{ in C}}{\mathrm{Zq}n}$, vt constat ex paulò antè dictis de diuisione; igitur etiam R*nq*A − R*nq*C = R*nq* $\frac{\mathrm{X} - \mathrm{Zq}n \text{ in C}}{\mathrm{Zq}n}$. Quod erat demonstrandum.

Quod docetur in prima praxi partis 6. cap. 2. lib. 1. immediatè manifestum est ex scriptionibus Logisticis declaratis in parte 2 cap. 1. lib. 1. ex quibus constat X = R*nq*Xq*n*, hoc est quantitatem X æquari radicali numero cuius denominator est *n*, numerus verò post literam *q* scriptus, est Xq*n*, hoc est numerus X toties in se ductus quot vnitates indicantur à denominatore *n*.

Vt constet vniuersaliter verum esse, quod docetur in praxi secunda partis 6. cap. 2. lib. 1. illud exhibeo æquatione indicata breui scriptione Logistica, atque illam æquationem ostendo legitimam: itaque

Dico A *in* R*nq*B = R*nq*Aq*n* *in* B.

Demonstratio. A = R*nq*Aq*n*: ergo A *in* R*nq*B = R*nq*Aq*n* *in* R*nq*B: sed R*nq*Aq*n* *in* R*nq*B = R*nq*Aq*n* *in* B, vt constat ex paulò antè dictis de multiplicatione: ergo A *in* R*nq*B = R*nq*Aq*n* *in* B. Quod erat demonstrandum.

Subsistentia praxis tertiæ, partis 6. lib. 1. ex praxeos præscriptis tam manifesta est, vt prorsus inutile videatur ad eius subsistentiæ probationem aliquid afferre: nullum enim præscriptum continet quod indigeat probatione: ex declaratione compendiatarum scriptionum quibus vtitur Logistica nostra pro indicandis radicalibus numeris, immediatè constat, A = R*1q*A2 ll R2*q*A3 ll R3*q*A4 ll R4*q*A5, & sic de cæteris; iam verò inter has aut similes diuersi nominis numeros radicales inter se æquiualentes, sumere aliquos, qui in casu proposito possint pro alijs substitui, vt habeantur nomine conuenientes numeri radicales, qui datis æquiualeant: illud est, quod pluribus docet hæc praxis: vt in re ex terminis nota, prosit practicis, in terminorum intelligentia non satis versatis.

Quod docetur in praxi 4. partis 6. capitis 2. lib. 1. verum esse constat ex eo, quod iuxtà praxeos illic citatæ præscripta inueniatur cuiusuis integri vulgaris numeri radix *n*, quando talis integer numerus habet huius nominis radicem: ex quo patet, datum vulgarem numerum X non habere radicem *n*, quando talis eius radix non inuenitur modo in praxi indicato; quando autem propositus numerus vulgaris, integer non est, sed est fractio constans ex duobus integris numeris constituentibus fractionem expressam minimis terminis, ex theoremate 9. partis præcedentis constat hanc fractionē non habere radicem nominis indicati à litera *n*, nisi singuli numeri integri X & Z, constituentes hanc fractionem, habeant radicem *n*: quare quotiescunque modo in praxi citato non inuenitur vtriusque numeri integri X & Z radix *n*, patet fractionem ex his duobus integris numeris constantem non habere radicem *n*.

Quod docetur in praxi 5. partis 6. cap. 2. lib. 1. verissimum esse constat ex theoremate 10. partis 1. huius capitis.

Circa primam praxem, inueniendi proximam cuiusuis nominis radicem quam habet propositus vulgaris numerus, contentam cap. 5. lib. 1. Logisticæ, obseruatu digna videntur sequentia.

Primò. Numerus notarum arithmeticarum contentarum membris à primo diuersis, dependet à numero notarum quarum radix potest esse simplex, hoc est vnica nota arithmetica exprimibilis; sic quia 9 est prima, & simplex radix numeri 81, qui indicatur duabus notis arithmeticis; etiam pro extrahenda prima radice, singula membra, à primo diuersa, continere debent duas notas arithmeticas. Similiter, quia 9, est secunda, & simplex radix numeri 729, qui indicatur tribus notis arithmeticis, etiam pro extrahenda secunda radice, singula membra, à primo diuersa, continere debent tres notas arithmeticas, atque ità de cæteris: etenim ex singulis membris successiuè colligendo radicem simplicem vnica nota arithmetica exprimibilem, inuenitur tota propositi vulgaris numeri radix propositi nominis.

Secundò. Inter productum ex A + B aliquoties in se ductum, & formulam huic producto respondentem (de quibus agitur capite 5. lib. 1. duplex differentia inuenitur: prima est, quod in tali formula non inueniatur vllus numerus denominatus A*n*, qui non sit connexus particula *in* cum aliquo eiusdem membri numero B: in producto autem, quod respondet tali formulæ, inueniatur vnus huiusmodi

modi numerus denominatus A*n*. Causa huius differentiæ est, quia formula tantum indicat valorem subtrahendum ex proposito numero pro inuenta quotientis nota à prima diuersa: verum numerus denominatus A*n*, qui in formula non inuenitur, sed inuenitur in producto quod illi respondet, indicat valorem subtrahendum pro quotientis prima nota arithmetica. Secunda differentia in eo consistit, quod in formula singulis numeratoribus dignitatum A, tot cyfræ appositæ sint, quot formulæ membra sequuntur: quæ cyfræ non inueniuntur in producto cui respondet formula: hæ formulæ cyfræ ad hunc finem tantum seruiunt, vt nimirum indicetur valor localis singulorum membrorum ipsius formulæ, atque ità sine decussata scriptione (etiam vsitata in vulgarium numerorum diuisione) in vnam summam colligendo singulos membrorum valores, commodius inueniatur totius formulæ valor.

Tertiò. Ille numerus denominatus A*n*, quem diximus prætermissum in formula radicis inueniendæ, licet præcedat in producto cui respondet formula: indicat valorem subtrahendũ ex primo membro, atque huius valoris radix indicata à denominatore numeri A*n*, constituit primam notam quotientis: quæ singula exhibet tabella; ex subtractione valoris A*n* remanenti residuo, successiuè adscriptum membrum immediatè subsequens, dat nouum numerum, ex quo elicienda est subsequens nota quotientis. Tota hæc inuentio primæ notæ quotientis, siue quæsitæ radicis: aliter non differt ab inuentione primæ notæ quotientis in diuisione vulgarium numerorum: nisi quod in vulgarium numerorum diuisione, prima quotientis nota, debeat esse maxima, quæ auferri potest ex primo membro, non vtcunque, sed ducta in diuisorem propositæ diuisionis: verum in radicum extractione, prima quotientis nota debeat esse maxima, quæ auferri possit ex primo membro, non vtcunque, sed toties in se ducta quoties vnitas continetur in denominatore radicis inueniendæ.

Quartò. Vt successiuè inueniantur singulæ ex reliquis quotientis notis, quæ à primo diuersæ sunt: seruit formula respondens radici illius nominis, quæ quæritur. Hæc formula per literas A & B indicat valorem subtrahendum ex numero ex quo noua nota colligenda est, in hypothesi quod A 1 significet numerum prius scriptum in quotiente, quodque B 1 significet maximam notam arithmeticam simplicem, quæ talis sit, vt in hac hypothesi valorum A 1 & B 1, inuentus valor totius formulæ subtrahi possit ex numero ex quo colligenda est noua quotientis nota significata per B 1; residuo ex hac subtractione successiuè apponendo subsequens membrum, habetur nouus numerus, ex quo immediatè subsequens nota quotientis colligenda est: atque hoc eodem modo successiuè inueniuntur singulæ quotientis notæ, quæ à prima diuersæ sunt. Inter modum quo in vulgarium numerorum diuisione, & radicum extractione inueniuntur quotientis notæ à prima diuersæ, hæc differentia intercedit: quod talis nota quotientis, in vulgarium numerorum diuisione, debeat esse maxima, quæ ducta in diuisorem subtrahi possit ex numero ex quo colligenda est; in radicis extractione, debeat esse maxima, quæ assumi potest pro valore dignitatis primæ B, vt in hypothesi quod A 1 significet numerum prius scriptum in quotiente, inueniatur totius formulæ valor auferibilis ex numero ex quo colligenda est noua nota quotientis.

Quintò. Indicatus formulæ valor, est ille, qui subtrahi debet ex numero ex quo colligenda est quotientis nota à prima diuersa, quod satis constare videtur ex formulæ compositione, declarata cap. 5. lib. 1. quæ vix aliud requirit, quam facillimam multiplicationem numerorũ denominatorũ, traditam in par. 1. c. 2. lib. 1.

Sextò. Pro radicum cuiusuis nominis inuentione, propositæ vniuersaliori praxi respondens, atque eamdem vniuersalitatem habens, demonstratio in forma proposita, requireret prolixiorem discursum: quem vt inutilẽ prætermittimus: quippe

qui

qui, nostro iudicio, ad praxeos subsistentiam intelligendam prodesse non potest parum versatis in nostra Logistica: reliquis ad hunc finem abundè sufficiunt, quæ hic breuiter annotauimus, aut in praxi 1. cap.5. lib.1. traduntur de modo inueniendi proximam radicem cuiusuis nominis, quam habet propositus numerus vulgaris.

Quod dicitur in praxi secunda cap.5. lib.1. de inuenienda radice cuiusuis fractionis: satis manifestum est ex theor.9. partis primæ huius capitis: vbi ostendimus quod quotiescunque proposita fractio vulgaris X *per* Z constat minimis terminis, necessariò singulos istos terminos X & Z habere radicem *n*, quando fractio proposita habet radicem *n*.

Quod dicitur in praxi tertia cap.5. lib.1. satis manifestum videtur ex praxeos præscriptis, atque hactenus dictis de radicalibus numeris: ità vt nullum praxeos præscriptum videatur indigere noua demonstratione.

Scholium.

De radicibus rationum.

IVxta Logisticam nostrã, proportiones omnes quantitatibus annumerandę sunt, & circa illas Logisticæ operationes omnes instituuntur: quare quemadmodũ peti potest propositi nominis radix cuiusuis numeri vulgaris, aut alterius quantitatis: ità etiã peti potest propositi nominis radix cuiusuis proportionis: & quẽadmodũ R*nq*A, aliud non est quam quantitas, quæ toties in se ducta, quoties vnitas continetur denominatore *n*, adæquet quantitatem A: ità etiam R*nq*A *ad* B, aliud non est, nisi ratio, quæ toties in se ducta, quoties vnitas continetur denominatore *n*, adæquet rationem A *ad* B. De inuentione huiusmodi radicis cuiuscunque propositæ rationis, pluribus separatim non egimus, licet enim satis magnam vtilitatem habeat, tamen diuersa non est ab inuentione radicis, quam habet fractio constans iisdem terminis quibus constat ratio proposita: quod vniuersaliter verum esse satis constat ex theoremate 16. primæ partis huius capitis.

CAPVT XI.

De inuentione mediorum proportionalium terminorum ex cognitione extremorum.

DE practica inuentione vnius pluriumue terminorum, qui inter duos extremos datos, sint medij proportionales, agitur in parte 2. cap.3. lib.1. Logisticæ nostræ; vbi triplici problemate exponitur, non illud quod in hoc genere maximè expetendũ arbitrantur, maximoque & per plura secula continuato labore inquisiuerunt cultores antiquæ Geometriæ, & fortassis desiderandum foret pro speculatiua Geometria: sed illud præter quod nihil in hoc genere desiderandum videtur ad practicæ Matheseos, vel commoditatem, vel vtilitatem, iuxtà ea quæ notantur in scholio proposito ad calcem huius capitis.

In primo problemate partis 2. cap.3. lib.1. Logisticæ, traditur modus inueniendi terminum B, qui inter duos datos terminos A & C sit medius proportionalis: cuius problematis duplex solutio affertur; in prima solutione supponitur terminos A & C esse vulgares numeros: præterea supposito quod B = R1*q*A *in* C.

Asse-

Asseritur A *ad* B = B *ad* C

Demonstratio. Manifestum est, quod R1qA *in* C semel in se ducta = A *in* C: sed per hypothesim, B = R1qA *in* C: ergo B semel in se ductum, hoc est B *in* B = A *in* C: ergo per 10. axioma, A *ad* B = B *ad* C. Quod erat demonstrandum.

Secunda solutio supponit datos terminos A & C esse rectas lineas: in hac hypothesi, & supposita solutione secunda, in figura quæ pro illa citatur, ductæ sint rectæ X P & R P.

Asseritur A *ad* Z P = Z P *ad* C.

Demonstratio. Per theo. 7. cap. 3. patet, angulum X P R rectum esse, quia per constructionem insistit semicirculo: igitur per 8. theorema cap. 3. X Z *ad* Z P = Z P *ad* Z R: sed per hypothesim X Z = A, & præterea Z R = C: ergo etiam A *ad* Z P = Z P *ad* C. Quod erat demonstrandum.

In secundo problemate partis 2. cap. 3. lib. 1. nostræ Logisticæ, agitur de modo inueniendi duos terminos B & C, qui inter datos duos terminos A & D sint medij proportionales, hoc est vt A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D. Huius problematis duplex solutio affertur.

Prima solutio supponit datos extremos terminos A & D esse numeros vulgares: quo supposito præscribitur, vt inueniatur R2qD *per* A, atque vocetur X: deinde A *in* X = B, & B *in* X = C: his peractis

Asseritur A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D.

Demonstratio. Manifestum est, 1 *in* X2 = X *in* X, adeòque per 10. axioma, 1 *ad* X = X *ad* X2: similiter patet, X *in* X3 = X2 *in* X2, adeòque per 10. axioma, X *ad* X2 = X2 *ad* X3: igitur 1 *ad* X = X *ad* X2 ll X2 *ad* X3: ergo singulos istarum proportionum terminos ducendo in A: etiam A *in* 1 *ad* A *in* X = A *in* X *ad* A *in* X2 ll A *in* X2 *ad* A *in* X3: atqui patet, A *in* 1 = A, & ex hypothesi constat, A *in* X = B, atque A *in* X2 = C: præterea quia R2qD *per* A bis in se ducta = D *per* A, & per hypothesim, X = R2qD *per* A, etiam X bis in se ductum, hoc est X3 = D *per* A, & consequenter A *in* X3 = A *in* D *per* A ll D: igitur etiam A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D. Quod erat demonstrandum.

Secunda solutio supponit duos datos extremos terminos, esse rectas lineas, nimirum A B & A C: peractis verò quæ in solutione præscribuntur, atque repræsentantur in citata illic figura: recta F C producta, iterum circulo occurrat in puncto G, sitque ducta recta B G.

Asseritur A B *ad* B E = B E *ad* C F ll C F *ad* A C.

Demonstratio. Per theor. 7. cap. 3. semicirculo insistens angulus B G C, rectus est: sed etiam per hypothesim patet, rectum esse angulum A C G: ergo per theor. 3. cap. 3. parallelæ sunt lineæ A C & B G: sed per theor. 3. cap. 3. etiam recta E B est parallela rectæ A C, quia per hypothesim, angulus E B A = B A C: patet igitur lineas E B & B G habentes commune punctum G, esse in directũ, siue quod constituant vnam rectam lineam: ergo per 6. hypothesim cap. 9. patet G E *in* E B = A E *in* E D ll D F *in* F A, quia per hypothesim E D = A F, & consequenter etiam A E = D F: atqui per 6. hypothesim cap. 9. etiam D F *in* F A = G F *in* F C: ergo G E *in* E B = G F *in* F C: ergo per 10 axioma, G F *ad* G E = E B *ad* C F: sed G F *ad* G E = A B *ad* E B, triangula enim E G F & E B A, per theor. 4. cap. 3. sunt inter se similia, quia angulus G E F est communis, & prius ostensum est angulum E B A = angulo E G F: ergo A B *ad* B E = B E *ad* C F: sed etiam A B *ad* B E = C F *ad* C A, sunt enim similia triangula E B A & A C F, vt constat ex theor. 4. cap. 3. quia per hypothesim, angulus E B A = angulo A C F; & præterea per theor. 3. cap. 3. angulus B E A = angulo C A F, quia ostensum est rectas E B & A C esse parallelas: igitur A B *ad* B E = B E *ad* C F ll C F *ad* C A. Quod erat demonstrandum.

Inter-

In tertio problemate partis 2. cap. 3. lib. 1. nostræ Logisticæ, agitur de modo inueniendi quotcunque terminos, qui inter duos datos extremos medij proportionales sint, cuius problematis duplex solutio affertur; primæ solutionis demonstratio non differt à demonstratione primæ partis secundi problematis, nisi in quantum quod pro secundo problemate dicitur de secunda radice fractionis factæ ex propositis vulgaribus numeris, similiter verum est de eiusdem fractionis tertia, quarta, quinta, aut cuiuscunque alterius nominis radice. Vt clarius hoc constet, placet hanc demonstrationem proponere de inuentione quatuor terminorum proportionalium inter datos A & H, de quorum inuentione agitur in exemplo tertij problematis partis 2. lib. 1.

Constructio. Supponitur R4qH *per* A = X: item A *in* X = B: item B *in* X = C: item C *in* X = D: item D *in* X = E.

Asseritur A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D ll D *ad* E ll E *ad* H.

Demonstratio. Manifestum est, 1 *in* X2 = X *in* X, adeòque per 10. axioma 1 *ad* X = X *ad* X2; rursus patet X *in* X3 = X2 *in* X2, adeòque per 10. axioma X *ad* X2 = X2 *ad* X3: eodē modo, quia X2 *in* X4 = X3 *in* X3, per 10. axioma etiam X2 *ad* X3 = X3 *ad* X4: similiter quia X3 *in* X5 = X4 *in* X4, per axioma 10. constat, X3 *ad* X4 = X4 *ad* X5: igitur 1 *ad* X = X *ad* X2 ll X2 *ad* X3 ll X3 *ad* X4 ll X4 *ad* X5: ergo ducendo A in singulos istarum æqualium rationum terminos, etiam A *in* 1 *ad* A *in* X = A *in* X *ad* A *in* X2 ll A *in* X2 *ad* A *in* X3 ll A *in* X3 *ad* A *in* X4 ll A *in* X4 *ad* A *in* X5; sed patet A *in* 1 = A: & per constructionem constat, A *in* X = B; item B *in* X, hoc est A *in* X2 = C; item C *in* X, hoc est A *in* X3 = D; item D *in* X, hoc est A *in* X4 = E: præterea quia X = R4qH *per* A, & manifestum est R4qH *per* A quater in se ductam = H *per* A, etiam X quater in se ductum, hoc est X5 = H *per* A, adeòque A *in* X5 = A *in* H *per* A ll H: igitur etiam A *ad* B = B *ad* C ll C *ad* D ll D *ad* E ll E *ad* H. Quod erat demonstrandum.

Secunda solutio tertij problematis partis 2. cap. 3. lib. 1. Logisticæ, supponit datos extremos terminos esse rectas lineas.

Constructio. Datæ rectæ, atque extremæ lineæ, sint A B & A G; inter has, exempli gratia inueniendę sint quatuor mediæ proportionales; in hac hypothesi, latera normarum dispositarum, vt dicitur in problematis solutione, cum lateribus regularum quæ normas continent, constituent triangula A B C, A C D, A D E, A E F, A F G.

Demonstratio. Ex solutione patet, triangula esse A B C, A C D, A D E, A E F, A F G, & singula illa triangula habere vnum rectum angulum, ac præterea singulis communem esse angulum A: ergo per theor. 4. cap. 3. inter se similia erunt, & habebunt latera homologa proportionalia: igitur A B *ad* A C = A C *ad* A D ll A D *ad* A E ll A E *ad* A F ll A F *ad* A G. Quod erat demonstrandum.

Scholium.

Notantur aliqua de diuersis gradibus æstimabilitatis, qui inueniuntur inter diuersas problematum solutiones.

IAm inde ab antiquioribus illis temporibus quibus Platonem floruisse legimus, celebre fuit problema in quo petitur, quomodo inter datas duas rectas lineas, duę mediæ proportionales possint inueniri: huius enim problematis solutioni nar-

narrantur multum insudasse cum ipso Platone quotquot Geometras eo tempore numerabat, studijs Mathematicis florentissima Græcia; neque succedentibus temporibus cessauit hic labor; etenim ab illis nominatissimis Græciæ sapientibus non satis ex voto relatam palmam, suam facere conati sunt, quotquot propemodum in toto terrarum orbe ipsis successerunt Geometræ. Hinc factum est quod quamplurimæ extent solutiones commemorati problematis: nulla tamen inter illas inuenitur pro qua sufficiant magis propria Geometriæ instrumenta, simplex nimirum circinus & recta regula, hoc est circulariũ vel rectarum linearum intersectiones: quæ sufficiunt vt inter datas duas rectas inueniatur vna media proportionalis, atque huic solutioni altera similis desiderabatur pro duarum mediarum proportionalium inuentione. Etenim antiquiores Geometriæ fundatores, in problematum solutionibus notarunt varios gradus æstimabilitatis; reliquis omnibus præferebant solutiones, pro quibus sufficiebant circularium & rectarum linearum intersectiones, quas admittebant pro ea Geometria quam appellabant strictiorem ac magis rigorosam; his succedebant illæ problematum solutiones, pro quibus requirebatur linea Parabolica, vel Elliptica, vel hyperbolica: hoc est, aliqua ex tribus illis reliquis lineis quas præter rectam & circularem exhibere potest conus sectus plano aliquo: quas problematum solutiones appellabant solutiones conicas; quemadmodum Geometriam considerantem figuras Parabolicas, Ellipticas, vel Hyperbolicas, dicebant Geometriam conicam. Conicis problematum solutionibus postponendæ habebantur Mechanicæ ad quas requirebatur linea spiralis, conchois, quadratrix aut huiusmodi linea aliqua, quæ exhiberi non poterat nisi mediante aliquo ex instrumentis quæ intelligi volebant per vocem machina; nisi enim fallor, considerando lineas oriri ex puncti motu, ductu, vel fluxu: aduertebant motum puncti lineam describentis posse esse maximè simplicem, vt est rectus & circularis: rectus tantum, inuenitur in stili vertice iuxtà regulæ rectæ directionem describentis lineam: circularis tantum, inuenitur in pede circini circularem lineam describentis; has duas lineas maximè simplici motu descriptibiles admittebant pro solutionibus præstantioribus strictioris Geometriæ. Etenim vt testatur Proclus in priores Euclidis libros iuxtà Barocij interpretationem pag. 60. *Plato quidem lineæ duas simplicissimas præcipuasque ponens species, rectam vtique & circularem, reliquas omnes ex mixtione ex his progenitas docebat.* Huiusmodi simplicissimo moto descriptis lineis rectis & circularibus succedebant lineæ quæ aliter dicuntur conicæ sectiones: etenim quia in motu puncti talem lineam describentis, aduertebant motum mi[illegible] compositum ex pluribus motibus simplicibus, rectis vel circularibus: videba[illegible] postponendæ, præferendæ tamen pluribus alijs lineis ad quarum descriptionem [illegible] diuersi motus simplices: atque adeò mereri specialem gradum & appellationem; tum quia speciale nomen habebat Geometria considerans istarum linearum proprietates, quæ Geometria conica dicitur: tum quia hæ lineæ cum rectis & circularibus in hoc conueniebant, quod exhiberi possent in cono secto aliquo plano: qua sectione præter tres prædictas lineas, parabolicam, ellipticam, & hyperbolicam numeratas inter conicas sectiones, etiam exhiberi possunt [illegible] & rectæ lineæ. Reliquæ lineæ quæ haberi non poterant nisi mediante motu [illegible]licibus composito, atque causato à directione alicuius instrumenti, [illegible] putabant inter mechanicas: etenim instrumenta causantia talem compositum puncti motum, intelligi volebant per machinas: per quam vocem intelligi nolebant aut rectam regulam, aut circinum, licet apud grammaticos rectè dicantur machinæ: quemadmodum per polygona siue multilateras figuras intelligi nolebant aut triangulum aut quadratum, licet à grammatico malè negarentur figuræ multilateræ aut polygona. Fortè prædicta antiquorum Mathematicorum placita tam liberè non damnasset Cartesius initio secundi libri suæ Geometriæ, si assecutus fuisset commemorata motiua, quæ nisi fallimur, præstantissimos antiquiores Geometras impulerunt, vt in problematum solutionibus Geometricis distinguerent commemoratos gradus æstimabilitatis; hos retinẽdos putamus, sicut retinentur apud plerosque modernos speculatiuæ Geometriæ cultores: hæc tamen graduum distinctio parum iuuat solius practicæ Matheseos cultores, quibus non malè Cartesium annumerari posse fortassis constabit ex dicendis libro tertio nostræ Logisticæ: quod si verum est, neque ipse, neque eius sequaces damnandi sunt, quod cum reliquis practicæ Geometriæ cultoribus sibi negligendam arbitrentur considerationem æstimabilitatis, non ad praxim, sed ad speculatiuam spectantem.

Non malè aliter quam supra diximus considerari possunt problematum solutiones: nimirum in ordine ad finem atque vtilitatem quam habent; atque ab hoc fine sumendo æstimabilitatem, in ordine ad speculatiuam Mathesim magnopere æstimandam putamus solutionem primi problematis, quæ supponit datos duos extremos terminos lineas esse, eamque multum præferri debere, allatis secundi & tertij problematis solutionibus, similiter supponentibus datos duos extremos terminos lineas esse: primi enim problematis solutio à rigorosa Geometria admittenda est, à qua admitti non possunt reliquæ, quæ tantum mechanicæ sunt: tamen in ordine ad practicum vsum problematis, nulli solutioni postponenda nobis videtur solutio tertij problematis, quæ supponit datos duos extremos terminos esse vulgares numeros: etenim in ordine ad vsum practicum id præferendum est, quod magis iuuat ad exactam accuratamque praxim: iam verò Geometricam primi problematis solutionem in praxi adhibendo, nunquam haberi potest aliquid tam exactum atque accuratum in praxi, sicut adhibendo tertij problematis solutionem supponentem datos extremos terminos esse vulgares numeros, ad quos mediante scala tam facilè & exactè reuocantur datæ lineæ, quam facilè & exactè determinantur linearum intersectiones. Triangulorum per lineas resolutio Geometrica, commoda est, & facilis, atque speculatiuè exacta in omni rigore Geometrico: quis tamen huic triangulorum resolutioni, in ordine ad accuratam praxim, non præfert vsum tabularum Sinuum, Tangentium, atque Secantium? in quo vsu practico, authoritate omnium, exactas praxes amantium, habemus comprobatum, quod hic diximus de solutione tertij & primi problematis. Quibus addo, quod tabulæ sinuum, tangentium, atque secantium, cognitis omnibus vitijs laborent: solutio verò tertij problematis, in omni rigore præstet quæsitum: ità tamen, vt hoc quæsitum exhibeat per numeros vulgares, quando ex propositis extremis terminis constans fractio vulgaris, habet vulgari numero exprimibilem radicem requisitam pro solutione problematis: si verò non habeat talem radicem, hoc casu tamen in numeris radicalibus exhibet quæsitum in omni rigore.

Hæc videntur sufficere, vt constet quo fundamento afferamus, vniuersaliorem tertij problematis solutionem, præferendam rigorosæ Geometriæ solutioni primi problematis, in ordine ad vsum practicum; ex quo sequitur, in ordine ad hunc vsum problematis, paruam omninò iacturam resultare, ex eo quod, tertium, immo etiam secundum problema solutum non inueniatur, solutione admittenda à strictiori Geometria; si hinc resultat damnum aliquod speculatiuæ Matheseos, certè videtur damnum proprium Geometriæ, non verò commune Mathesi, quæ amplectitur Geometriam & Arithmeticam: etenim ex libro tertio nostræ Logisticæ constabit, quod numeri radicales, verè ac propriè numeri sint, siue discretæ quantitates: igitur problematis solutio quę in omni rigore atque exactissimè quæsitum indicat per numeros radicales, negari non potest solutio legitimè atque in omni rigore quæsito satisfaciens per discre-

tas

tas quantitates: si verò legitima atque pro speculatiua Mathesi subsistens dicenda est solutio, quæ hoc præstat per quantitates continuas: negari non potest legitima, atque subsistens pro Mathesi speculatiua, quæ hoc præstat per quantitates discretas: & consequenter in Mathesi speculatiua non deest ~~exacta~~ atque legitima solutio tertij problematis.

CAPVT XII.

De resolutione æquationum.

QVid per æquationum resolutionem intelligamus: quomodo has resolutiones subdiuidamus; dictum est cap. 7. lib. 1. vbi duas diuersas resolutiones proposuimus: prima agit de resolutione æquationum vnius nominis, pro qua, vltra scriptionum Logisticarum intelligentiam, nihil requiritur præter regulam auream, satis declaratam in præcedentibus: quare hic nihil dicendum superest de subsistentia illius praxeos, quæ in libro primo affertur, pro resolutione æquationum vnius nominis.

Secunda æquationum resolutio à nobis proposita in libro primo, indiget demonstratione; hæc resolutio agit de omnibus, & solis æquationibus duorum nominum habentiū proportionē duplam, sic vt maius nomen ad nomen minus habeat proportionem, quam numerus duo ad vnitatem: praxis huius resolutionis satis clarè proponitur, atque diuersis exemplis declaratur in cap. 7. lib. 1. huc spectant requisita ad praxeos subsistentiam, pro qua afferimus aliquot theoremata: suppositis enim tribus illis diuersis casibus qui annotantur citato cap. 7. lib. 1. præter quos alios nullos admittere potest hæc praxis, in primo theoremate ostendimus, quomodo in singulis casibus, ex proposita æquatione legitimè inferatur altera æquatio, cum priori conueniens quoad dignitatem: data enim æquatio consistit inter complexum ex duobus incognitis numeris *d*A*m* atque *e*A*n*, & cognitum numerum F: illata verò æquatio, consistit inter complexum ex duobus incognitis numeris *d*A*n* atque *f*A*on*, & cognitum numerum E: atque incognitis istis numeris omnibus communis est dignitas A: tamen in illata æquatione numerus cognitus E, indicat differentiam vel aggregatum duorum numerorum *d*A*n* & *f*A*on* contentorum altera æquationis parte. Quomodo ex ijsdem illis numeris *d*A*n* & *f*A*on*, productum per multiplicationem cognitum fiat, docet secundum theorema. Denique quicunque aut qualescunque sint duo numeri, quorum productum per multiplicationem, atque aggregatum cognoscatur, etiam singulos istos duos numeros inuenire, illud est, quod docet problema 7. cap. 11. lib. 1: similique discursu facilè est singulos istos duos numeros cognitos reddere, præsupposita cognitione producti quod ex illis nascitur per multiplicationem, atque differentiæ quam habent inter se. Praxis quæ duplici hoc vniuersali problemate infertur, constituit posteriorem partem praxeos allatæ cap. 7. lib. 1. pro secunda illic proposita resolutione æquationis duorum nominum: huius resolutionis commemoratam posteriorem partem legitimam esse, euincunt posteriora duo theoremata hoc capite proposita; ex his tertium, supponit iuxtà primam huius resolutionis partem, cognosci numerorum *d*A*n* & *f*A*on*, tum productum ex multiplicatione, tum etiam differentiam: ex qua præcedente cognitione, de duobus numeris X & Z inuentis iuxtà secundam resolutionis partem, docet tertium theorema, minorem Z in primo casu, maiorem X in secundo casu, æqualem esse numero *d*A*n*. Quartum denique theorema ostendit ex duobus numeris X & Z (inuentis iuxta secundam partem propositæ resolutionis, ex præcedente cognitione, tum producti ex multiplicatione, tum aggregati numerorum *d*A*n* & *f*A*on*) vnum necessariò æqualem esse numero dAn. In primo & secundo casu, ex ipsa æquatione constat quis ex numeris dAn & $fAon$ maior sit, etenim ex æquatione patet maiorẽ esse qui signo $+$ afficitur, ideòque etiam scitur quis ex inuentis duobus numeris X & Z, æquiualeat numero dAn, quandoquidem constet, X esse maiorem quam Z. In tertio casu, ex æquatione in qua $dAn + fAon$ cognoscuntur æquari numero E, non constat quis ex numeris dAn & $fAon$ sit maior: ideòque nescitur quis ex his duobus numeris æquetur numero maiori X, vel minori Z: verum quod hoc ignoretur nullo modo vitiat propositam ęquationis resolutionẽ.

Theorema I.

Qualescunque numeros vel alias quantitates repræsentent literę D, E, F: quæ solitariè positę maiuscula scribuntur, minuscula verò quando reprę sentant dignitatis A numeratorem: atque denominator m ad denominatorem $n = 2$ *ad* 1. His suppositis, considerantur tres casus diuersi, in primo supponitur $dAm + eAn = F$. In secundo supponitur $dAm - eAn = F$. In tertio supponitur $- dAm + eAn = F$.

Dico primò, quod in primo casu, siue supposito quod $dAm + eAn = F$: etiam $- dAn + fAon = E$.

Dico secundò, in secundo casu, siue supposito quod $dAm - eAn = F$: etiam $dAn - fAon = E$.

Dico tertiò, in tertio casu, siue supposito quod $- dAm + eAn = F$: etiam $dAn + fAon = E$.

Demonstratio primi casus. Per hypothesim, m *ad* $n = 2$ *ad* 1: ergo $dAm = dAn$ *in* An: sed per hypothesim, $dAm + eAn = F$: ergo etiam dAn *in* An *et* $+ eAn = F$: ergo singula huius æquationis membra diuidendo per An, etiam $dAn + E = fAon$: ergo per antithesim, etiam $dAn - fAon = - E$: ergo in singulis membris mutando singum, $- dAn + fAon = E$. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio secundi casus. Quia m *ad* $n = 2$ *ad* 1, patet, $dAm = dAn$ *in* An: sed per hypothesim, $dAm - eAn = F$: ergo etiam dAn *in* An *et* $- eAn = F$: ergo singula membra diuidendo per An, etiam $dAn - E = fAon$: ergo per antithesim, $dAn - fAon = E$. Quod erat demonstrandum.

Demonstratio tertij casus. Quia m *ad* $n = 2$ *ad* 1, patet, $dAm = dAn$ *in* An, adeòque $- dAm = - dAn$ *in* An: sed per hypothesim $- dAm + eAn = F$: ergo $- dAn$ *in* An *et* $+ eAn = F$: ergo singula membra diuidendo per An, etiam $- dAn + E = fAon$: ergo per antithesim, $- dAn - fAon = - E$: ergo singulorum membrorum signa mutando, $dAn + fAon = E$. Quod erat demonstrandum.

Theorema II.

Supposita significatione literarum vt in primo theoremate.

Dico dAn *in* $fAon = F$ *in* D.

Demon-

Demonstratio. Ex Logisticarum scriptionum intelligentia patet, *d*A*n* *ad* D = F *ad* *f*A*on*: igitur per 10. axioma, *d*A*n* *in* *f*A*on* = F *in* D. Quod erat demonstrandum.

Theorema III.

Supposita hypothesi proposita in primo theoremate, quodque quantitatum *d*A*n* atque *f*A*on*, maiorem quidem repræsentet litera X, minorem verò repræsentet litera Z, adeòque X — Z = differentiæ quantitatum *d*A*n* & *f*A*on*: quodque P = E2 *et* † F *in* 4D.

Dico quod maior ex quantitatibus *d*A*n* & *f*A*on*, hoc est X, æquetur $\frac{R1qP}{2}$ † $\frac{E}{2}$

Demonstratio. Per assertionem 4. primæ hypothesis capitis 9. constat, X † Zq = X — Zq *et* † X *in* 4Z: sed ex hypothesi etiam patet, X — Z = E; adeòque X — Zq = E2, atque præterea X *in* Z = F *in* D, vt constat ex hypothesi & theoremate 2: igitur X † Zq = E2 *et* † F *in* 4D ll P, vt constat ex hypothesi: ergo X † Z = R1qP: sed etiam per hypothesim, X — Z = E: igitur per primam assertionem primæ hypothesis cap. 9. patet, $\frac{R1qP}{2}$ *et* † $\frac{E}{2}$ = X ll maiori ex quantitatibus *d*A*n* & *f*A*on*, vt patet ex hypothesi. Quod erat demonstrandum.

Theorema IV.

Suppositis quæ supponuntur in tertio theoremate, ità tamen vt E2 — F *in* 4D = P.

Dico quod maior ex quantitatibus *d*A*n* & *f*A*on*, hoc est X, æquetur $\frac{R1qP}{2}$ † $\frac{E}{2}$

Demonstratio. Per assertionem 4. primæ hypothesis capitis 9. constat, X † Zq = X — Zq *et* † X *in* 4Z: ergo per antithesim, X † Zq *et* — X *in* 4Z = X — Zq: sed quia per hypothesim, X † Z = E, patet, X † Zq = E2; & præterea X *in* Z = F *in* D, vt constat ex theor. 2. & hypothesi, adeòque X *in* 4Z = F *in* 4D: igitur X — Zq = E2 *et* — F *in* 4D ll P, vt constat ex hypothesi: ergo X — Z = R1*q*P: sed per hypothesim, etiam X † Z = E: igitur per primam assertionem primæ hypothesis cap. 9. constat, quod maior ex quantitatibus *d*A*n* atque *f*A*on*, hoc est quod quantitas X = $\frac{R1qP}{2}$ *et* † $\frac{E}{2}$. Quod erat demonstrandum.

Compositarum æquationum resolutiones, vtiles sunt in casibus in quibus discursus instituti iuxta primam regulam Logisticæ deducunt ad compositam æquationem: ea hoc casu resoluenda est, vt habeatur solutio propositi problematis, quæ tali discursu erat inferenda; in Logistica quam scribimus, nusquam inuenitur vlla necessitas vllius resolutionis compositæ æquationis: singula enim problemata quę afferuntur in parte 3. cap. 11. lib. 1. solui quidem possunt discursu deducente ad æquationem compositam: sed etiam solui possunt, atque soluta exhibentur, alio discursu qui non deducit ad compositam æquationem. Vt tamen indicaremus non esse prorsus inutiles discursus deducentes ad compositas æquationes, voluimus

mus aliquid notare de modo resoluendi compositas æquationes; præterea, prima Logisticæ nostræ regula, iuxta quam hi discursus instituuntur, proximè conuenit cum ea quam alij appellant Algebræ regulam; pro hac apud Algebræ scriptores celeberrimæ sunt resolutiones compositarum æquationum, de quibus passim proponuntur longiores tractationes: vt videri potest apud Franciscum Vietam, Renatum Descartes, Iosephũ Zaragozà, Claudium Franciscum Milliet de Chales, postremosque Algebræ promotores, sæpius à nobis nominatos in tertio nostræ Logisticæ libro; hi omnes, pluribus scripserunt de resolutionibus compositarum æquationum, sed nõ planè eodem modo: sic vt dicendi non sint, sua transtulisse de charta in papyrum: cæterum, alij innumeri inueniuntur Algebræ scriptores, à quibus proponuntur longiores tractationes de hac materia, de qua agunt ea serietate, ac si scriptæ ab ipsis Algebræ, maxima vtilitas consisteret in resolutionibus compositarum æquationum. Satis nobis erat, alicuius amanuensis labor, vt plures ex huiusmodi compositarum æquationum resolutionibus, ad hunc locum transferendo, efficeremus, vt hoc vnum caput sua magnitudine adæquaret omnia simul quæ in hoc libro præcedunt; sed vt verum fatear, prorsus ignoro vtilitatem fructuum, quos ex tam laboriosis suis tractationibus collegerunt Algebræ scriptores; hi alium finem non habent quam problematum de quibus agunt solutiones: iam verò cõsiderando problemata quæ constituunt fructus quos afferunt istarum compositarũ ęquationũ resolutiones, aliquibus pleraq; videntur talia, vt illorum solutionibus allaborare, arbitrentur dici posse, occupari muscarum aucupio, ac bonas horas malè perdere; insudari potest muscarum aucupio, quo non tantum pueri subinde defatigantur, sed per plures nonnunquam horas insudasse Regem aliquem, non sine risu narrant historici: verum quę ex huiusmodi, vel puerili, vel regia venatione vtilitas, quis fructus? Si fortè inueniantur vtiliora, vel non adeò inutilia problemata quæ mereantur diligentiorem considerationem resolutionum requisitarum pro compositis ęquationibus: vel plura placeant de hac materia, consuli poterunt Algebrę scriptores. In vniuersalis nostrę Logisticę tractatione his tribus libris proposita, non decebat pluribus agere de compositis æquationibus, vbi longè præstantiora, atque vtiliora prætermissa sunt, quia non spectant ad doctrinas elementares Matheseos, quæ his nostris scriptis considerantur: tales sunt considerationes pulcherrimarum atque vtilissimarum proprietatum, quæ ab antiquæ, vel Arithmeticæ, vel Geometriæ cultoribus proponuntur, de progressionum seriebus, de conicis sectionibus, de triangulis sphæricis, de diuersis curuis lineis, vt sunt spiralis, conchois, cyclois, &c. pro his alijsque Mathematis contemplationibus, sufficientia, firmaque elementa proponere, spectat ad eam quam scribimus Logisticam, non verò de singulis istis instituere longiores tractationes.

APPENDIX.

Euclideis elementis contentę propositiones ordine enumerantur, & indicatur vbi in Logistica inueniantur, vel vnde constent singularum veritates.

PRoponendæ huius appendicis, duplex nobis vtilitas sese offerebat: prima in eo consistit, quod in libris Mathematicis passim citatæ inueniantur Euclidea elementa: hæ citationes molestæ esse possent Mathesim discentibus Logisticæ nostræ methodo, si in illa nusquam inueniretur indicatum, quomodo ex nostra

Logi-

Logistica constet verum esse, quod in huiusmodi citationibus supponitur ab Euclide demonstratum. Altera vtilitas in eo consistit, quia existimo quod non exiguam consolationem afferre possit Logisticæ methodo Mathesim discentibus, collatio demonstrationum, quarum aliæ Euclidea, aliæ Logisticæ nostræ methodo probant easdem propositiones. Non enumero tamen in hoc capite satis celebres propositiones vndecimi vel duodecimi libri elementorum Euclidis, præcipuæ enim istorum duorum librorum propositiones, ordine propositæ & demonstratæ, in cap. 12. lib. 1. Logisticæ, constituunt exempla secundæ regulæ Logisticæ. Prætermitto etiam propositiones minus frequenter citatas, aut libri quarti, aut aliorum librorum qui sextum sequuntur, pro quibus minus militant indicata motiua proponendi hanc appendicem; frequentissimè citatę inueniuntur propositiones Euclideæ, contentæ libro primo, secundo, tertio, quinto, vel sexto: & magis necessariæ sunt, pro ijs, quos iuuant Euclidis tales citationes; quamobrem hic ordine enumeratas proponimus istorum librorum Euclideas propositiones: ad eas quæ in nostra Logistica inueniuntur, notamus quo loco proponantur: maior tamen pars istarum propositionum à nobis neglecta est, vel vt parum vtilis, vel vt non necessaria in methodo nostræ Logisticæ: his annotamus vnde ex Logistica constet veras esse: & si fortè demonstratione indigeant; ea affertur ex Logistica: nunquam assumendo, aut citando, à nobis neglectam aliquam Euclideam propositionem: vt sic etiam constet quam parum necessarię sint in methodo nostræ Logisticæ.

Nota. Nos, in serie propositionum Euclidis, sequi ordinem Theonis Alexandrini, qui etiam in codicibus Græcis obseruari cernitur. Hoc ideò dixerim, quoniam à quibusdam Geometris propositiones Euclidis iuxta ordinem Campani citantur, qui traditionem Arabum est secutus, quorum ordo propositionum non conuenit cum ordine Græcorum.

Elementorum Euclidis liber primus.

Propositio 1. *Super data recta, triangulum æquilaterum constituere*; hoc est, ex datis tribus rectis inter se æqualibus, construere triangulum. Neglecta est, quia vniuersalius proponitur in problemate 5. cap. 6. lib. 1. Notatu dignum, quod de Euclidea huius problematis demonstratione indicatur in fine reflexionis 1. cap. 4. lib. 3. Logisticæ.

Propositio 2. *Ad datum punctum, data recta, æqualem ponere.*

Propositio 3. *Duabus datis rectis lineis, minorem ex maiori auferre.* Pro hac secunda, & tertia propositione Euclidea, consule partem 7. cap. 2. lib. 1.

Propositio 4. *Si duo triangula duo latera duobus æqualia habeant, vtrumque vtrique: habeant verò angulum angulo æqualem sub æqualibus lateribus contentum: & basim basi æqualem habebunt, eritque totum triangulum æquale triangulo: & anguli correspondentes æqualibus lateribus, æquales erunt.* Neglecta, nam quod de laterum vel angulorum proportione æqualitatis asseritur, constat ex vniuersaliori theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ. Quod asseritur de ęqualitatis proportione inter superficies triangulares, constat ex vniuersaliori theoremate 4. partis 2. cap. 12. lib. 1. Logisticę, quod apud Euclidem constituit propositionem 19. lib. 6.

Propositio 5. *Isoscelium triangulorum, qui ad basim sunt anguli, inter se sunt æquales, & productis lateribus, qui sub basi fiunt anguli, inter se sunt æquales.* Neglecta, nam prior pars patet ex vniuersaliori theoremate 6. cap. 3. lib. 2. Logisticæ, quod constituit propositionem 3. lib. 6. Euclidis. Posterior pars patet ex priore & theoremate 1. cap. 3. lib. 2. Logisticę, quod apud Euclidem constituit propositionem 13. lib. 1.

Pro-

Propositio 6. *Si trianguli duo anguli æquales inter se fuerint: & ab æqualibus angulis subtensa latera inter se æqualia erunt*. Neglecta, nam ducta perpendiculari ad basim connectentem ęqualium angulorum vertices, ex theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticę patet haberi duo triangula similia, & latera de quibus agit Euclides æqualia esse.

Propositio 7. *Super eadem recta linea, duabus eisdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineę æquales, altera alteri, non constituentur ad aliud atque aliud punctum, ad easdem partes, eosdemq; quos primæ rectæ lineæ terminos habentes*. Neglecta, nam patet ex axiom. 13. cap. 1. lib. 2. Logisticæ, quod axioma ab Euclide assumi in demonstratione propositionis primæ lib. 1. ad hanc eius propositionem paulò antè notauimus. Aliqui ex Euclidis expositoribus negligendam asserunt hanc eius propositionem, inter quos P. Andreas Taquet.

Propositio 8. *Si duo triangula duo latera habuerint duobus lateribus æqualia vtrumque vtrique, habuerint verò & basim basi æqualem: angulum quoque sub æqualibus rectis lineis contentum, angulo æqualem habebunt*. Neglecta, quia constat ex vniuersaliori theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 9. *Datum angulum rectilineum bifariam secare.* Patet ex problemate 10. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 10. *Datam rectam bifariam secare*. Est prima pars problematis 7. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 11. *Data recta linea, à puncto in ea dato ad rectos angulos lineam ducere.* Est problema 3. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 12. *Super datam rectam lineam, à puncto quod in ea non est, perpendicularem rectam ducere*. Est problema 4. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 13. *Cum recta linea super rectam insistens lineam angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales faciet*. Est prima pars theorematis primi cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 14. *Si ad aliquam rectam lineam, atque ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes positæ, angulos qui deinceps sunt, duobus rectis æquales fecerint; ipsę rectæ lineæ in directum sibi inuicem erunt*. Est secunda pars theorematis primi cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 15. *Si duæ rectæ lineæ se inuicem secuerint, angulos qui ad verticem sunt, inter se æquales efficient*. Est theorema 2. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 16. *Cuiuscunque trianguli vno latere producto, externus angulus vtrolibet interno, & opposito maior erit*. Neglecta, nam vt benè notat Andreas Taquet continetur in huius libri propositione 32. quæ in Logistica est theorema 9. cap. 3. lib. 2.

Propositio 17. *Cuiuscunque trianguli duo anguli simul sumpti, sunt minores duobus rectis*. Neglecta, quia, vt benè notat Andreas Taquet, continetur in huius primi libri propositione 32. quæ in Logistica est theorema 9. cap. 3. lib. 2.

Fig. 30. Propositio 18. *Omnis trianguli maius latus, maiorem angulum subtendit*. Sensus est, ex eo quod in triangulo A B C aliquod latus A C maius est latere B C, necessariò angulum C B A oppositum maiori lateri A C, esse maiorem angulo C A B, qui opponitur minori lateri B C. In Logistica neglecta est vt parum vtilis. Vt ex eius elementis constet veram esse, in recta C A quæ maior supponitur, notatum sit punctum D, vt C A *ad* C B = C B *ad* C D sitque ducta recta D B. Nam per constructionem C A *ad* C B = C B *ad* C D: sed per hypothesim, C A est maior quam C B: ergo etiam C B, adeòque C A est maior quam C D: ergo punctum D cadit intra puncta C & A: ergo angulus C B A, est maior angulo C B D: sed quia per constructionem, C A *ad* C B = C B *ad* C D, & angulus C communis est per theor. 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ, constat triangula A C B

la A C B & B C D esse similia, adeòque angulum C A B = angulo C B D: ergo etiam angulus C B A maior est angulo C A B. Quod erat demonstrandum.

Propositio 19. *Omnis trianguli maior angulus à maiori latere subtenditur*. Sensus est, ex eo quod in triangulo A B C aliquis angulus A B C, maior sit altero angulo C A B: necessariò etiam latus A C oppositum maiori angulo A B C, esse maius latere C B quod opponitur minori angulo C A B. In Logistica neglecta est vt parum vtilis; vt ex eius elementis constet veram esse, ex puncto B vertice anguli qui maior supponitur, ducta sit recta C D occurrens rectæ A C *in* D, vt angulus C B D = angulo C A B. Nam per constructionem, angulus C B D = angulo C A B, qui per hypothesim minor est angulo C B A: ergo recta B D cadit intra rectas B C & B A: adeòque recta C A est maior quam recta C D; sed quia per constructionem, angulus C A B = angulo C B D, & præterea angulus C est communis, per theor. 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ constat, similia esse triangula A C B & B C D: adeòque A C *ad* B C = B C *ad* C D: ergo etiam recta A C maior est recta B C. Quod erat demonstrandum. Fig. 30.

Propositio 20. *Omnis trianguli qualibet duo latera simul sumpta, reliquo sunt maiora*. Neglecta. Andreas Taquet in suis elementis Euclideis benè notat hanc propositionem immediatè manifestam esse ex Archimedea rectæ lineæ definitione, quæ asserit rectam lineam esse quæ est minima, siue breuissima omnium quæ duci possunt inter istos eosdem terminos: quod idem significat Euclidea definitio, asserens quod recta linea sit, quæ ex æquo suis terminis interijcitur: adeòque nulla indiget probatione.

Propositio 21. *Si super trianguli vno latere, ab extremitatibus duę recta linea ducta fuerint qua interius iungantur; ha linea reliquis trianguli duobus lateribus minores erunt, maiorem verò angulum continebunt*. Neglecta. Prior pars non indiget probatione: quæ enim à breuissima minus recedunt, simul breuiores esse rectas lineas manifestum est. Si placet posterioris partis probatio, hæc facilè habetur ex theoremate 9. cap. 3. lib. 2. cum enim interius triangulum vtrumque angulum ad basim habeat minorem, patet reliquum esse maiorem.

Propositio 22. *Ex tribus datis lineis, quarum duę simul tertia sint maiores, triangulum construere*. Est problema 5. capitis 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 23. *Ad datam rectam lineam, datumque in ea punctum, dato angulo rectilineo, aqualem constituere*. Est problema 3. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 24. *Si duo triangula duo latera duobus lateribus aqualia habuerint alterum alteri, angulum autem angulo maiorem, qui aqualibus lineis continetur: & basim basi maiorem habebunt*. Neglecta est in Logistica; cæterum facilè constat ex theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 25. *Si duo triangula duo latera duobus lateribus aqualia habeant alterum alteri, basim verò basi maiorem; & angulum angulo, qui aqualibus lateribus continetur, maiorem habebunt*. Neglecta in Logistica: facilè patet ex theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 26. *Si duo triangula duos angulos duobus angulis aquales habeant, alterum alteri: vnumque latus vni lateri aquale, vel quod aqualibus adiacet angulis, vel quod vni aqualium angulorum subtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus aqualia alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo aqualem habebunt*. Neglecta, quia constat ex vniuersaliori theoremate 4. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 27. *Si in duas rectas, recta linea incidens, alternos angulos inter se aquales fecerit, parallela erunt recta linea*. Vide theorema 3. cap. 3. lib. 2. Logisticę.

Propositio 28. *Si in duas rectas lineas recta incidens externum angulum interno & opposito ad eamdem partem aqualem fecerit, aut internos ad eamdem partem duobus rectis aquales, parallela erunt ista recta linea*. Vide theorema 3. cap. 3. lib. 2.

Propositio 29. *In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter se æquales; & exteriorem interiori & opposito ad eamdem partem æqualem; & interiores ad easdem partes duobus rectis æquales efficiet*. Vide theorema 3. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 30. *Quæ eidem rectæ sunt parallelæ, inter se sunt parallelæ*. Patet ex theoremate 3. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 31. *Per datum punctum, data rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere*. Est problema 4. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 32. *Omnis trianguli vno latere producto, exterior angulus, duobus interioribus & oppositis est æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales sunt*. Posterior pars constituit theorema 9. cap. 3. lib. 2. Logisticæ: ex hac parte & theoremate 1. cap. 3. lib. 2. patet veritas prioris partis.

Propositio 33. *Quæ æquales, & parallelas, ad easdem partes coniungunt rectæ lineæ, & ipsæ æquales & parallelæ sunt*. Neglecta est. Cæterum constat, quia istæ lineæ erunt latera opposita in parallelogrammo: hæc verò latera inter se æqualia esse, patet ex genesi parallelogrammi, quod generatur primo vel secundo ductu nominato.

Propositio 34. *Parallelogrammorum spaciorum latera quæ ex opposito, & anguli inter se æquantur, & diameter ea bifariam secat*. Neglecta est. Prior pars agens de æqualitate, aut laterum, aut angulorum, oppositorum in parallelogrammo: patet ex origine parallelogrammi, quod producitur primo vel secundo ductu Geometrico nominato, de posteriori parte dubitare non potest vel leuiter versatus in Logisticæ nostræ materia de ductibus Geometricis nominatis.

Propositio 35. & 36. Constituit theorema 1. partis 1. cap. 12. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 37. & 38. Constituit theorema 2. partis 1. cap. 12. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 39. *Triangula æqualia in basibus æqualibus ad easdem partes constituta, in ijsdem quoque sunt parallelis*. Neglecta est. Ex Logisticæ doctrina de ductibus, patet huiusmodi triangula necessariò habere æquales altitudines; quę cum sint ad eamdem partem basium in eadem recta consistentium, has altitudines, siue triangulorum vertices connectens linea, basibus parallelam esse patet.

Propositio 41. Est theorema 3. partis 1. cap. 12. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 42. *Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo*. Vide problema 17. cap. 6. lib. 1.

Propositio 43. *Omnis parallelogrammi spatij, eorum quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum supplementa inter se sunt æqualia*. Neglecta est. Ex hypothesi & solutione 9. regulæ aureæ proposita in parte 1. cap. 3. lib. 1. Logisticæ atque demonstrata cap. 6. lib. 2. Logisticæ, constat quod hæc parallelogramma necessariò habeant latera circa æquales angulos reciprocè proportionalia: ergo per theorema 2. partis 2. cap. 12. lib. 1. Logisticæ, sunt inter se æqualia.

Propositio 44. *Ad datam rectam lineam, dato triangulo æquale parallelogrammum applicare*. Vide problema 17. cap. 6. lib. 1 Logisticæ.

Propositio 45. *Rectilineo dato æquale parallelogrammum constituere, in dato angulo rectilineo*. Vide problema 18. cap. 6. lib. 1. Logisticæ.

Propositio 46. *A data recta linea quadratum describere*. Consule scholium ante problema 16. cap. 6. lib. 1.

Propositio 47. *In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum subtendente describitur quadratum, æquale est quadratis quæ à lateribus rectum angulum continentibus describuntur*. Est quinta pars theorematis 8. cap. 3. lib. 2. Logisticæ.

Propositio 48. *Si quadratum quod describitur ab vno latere trianguli, æquale sit quadratis quæ à reliquis trianguli lateribus describuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit*. Est conuersa pręcedentis atque ex eius demonstratione manifesta.

Ele-

Elementorum Euclidis liber secundus.

PRopositio 1. *Si fuerint duæ rectæ, quarum altera secta sit in quotcunque partes: erit rectangulum sub illis duabus comprehensum, æquale rectangulis, quæ sub insecta & singulis sectæ partibus continentur*. Neglecta est. Cæterum intellecto ductu primo Geometrico, non minus manifestè patet hæc veritas, quam aggregatum æquari simul omnibus partibus quarum aggregatum est.

Propositio 2. *Si recta secta sit vtcunque, duo rectangula, sub tota & partibus comprehensa, quadrato totius æqualia sunt*. Neglecta est. Cæterum veram esse patet ex terminorum intelligentia; immo vniuersaliter patet, & ab Euclide vt euidens assumitur, totam quamlibet superficiem, æquari omnibus partibus in quas secta est.

Propositio 3. *Sit recta vtcunque secta: erit rectangulum sub tota & partium alterutra comprehensum, æquale rectangulo sub partibus, vna cum quadrato dictæ partis*. Neglecta est. Ex scriptionum Logisticarum intelligentia patet verum esse, quod qualescunque sint quantitates A & B, semper A † B *in* B = A *in* B *et* † B *in* B: id autem verum esse in casu quod quantitates A & B sint rectæ lineę, totum est quod asseritur in proposita propositione.

Propositio 4. *Sit recta vtcunque secta: erit quadratum totius æquale quadratis partium, & bis rectangulo sub partibus contento*. Assertio 3. primæ hypothesis cap. 9. lib. 2. docet vniuersaliter verum esse quod hæc propositio asserit de solo casu in quo singulæ ex literis A & B significant rectas lineas.

Propositio 5. *Si recta secta fuerit æqualiter & inæqualiter: erit rectangulum sub inæqualibus partibus contentum, vna cum quadrato partis intermediæ, æquale quadrato dimidiæ*. Primus casus tertiæ hypothesis cap. 9. lib. 2. docet vniuersaliter verum esse quod hæc propositio asserit de solo casu in quo singulæ literæ A, B, C, singulas rectas lineas significant.

Propositio 6. *Si recta sit bifariam secta, eique recta quædam adijciatur: erit rectangulum sub tota composita & adiecta contentum, vna cum quadrato dimidiæ, æquale quadrato compositæ ex dimidia & adiecta*. Secundus casus tertiæ hypothesis cap. 9. lib. 2. docet vniuersaliter verum esse quod hæc propositio asserit de solo casu in quo singulæ literæ A, B, C, singulas rectas lineas repræsentant.

Propositio 7. *Si recta fuerit vtcunque secta: erunt quadrata totius & segmenti alterutrius, æqualia, bis rectangulo contento sub tota & segmento dicto, vna cum quadrato segmenti alterius*. Neglecta est. Cæterum vniuersaliter proponi potest, dicendo, qualescunque sint quantitates B & C: dico B † Cq † B2 = 2B *in* B † C *et* † C2. Etenim per assertionem 3. primæ hypothesis cap. 9. lib. 2. constat, B † Cq = B2 † C2 *et* † 2B *in* C: ergo vtrinque addendo B2, etiam B † Cq † B2 = 2B2 † C2 *et* † 2B *in* C ‖ 2B *in* B *et* † 2B *in* C *et* † C2 ‖ 2B *in* B † C *et* † C2: ergo B † Cq † B2 = 2B *in* B † C *et* † C2. Vt asserebatur.

Propositio 8. *Si recta fuerit secta bifariam, eique quædam recta adijciatur: erit rectangulum quod sub dimidia, & composita ex dimidia & adiecta continetur, quater sumptum, vna cum quadrato adiectæ, ęquale quadrato totius compositę*. Neglecta est. Poterat vniuersalius proponi, dicendo, qualescunque quantitates significent literæ A, B, C, ità tamen vt B = 2A; dico B † Cq = 4A *in* A † C *et* † C2: Etenim per hypothesim, B = 2A: ergo B † Cq = 2A † C *in* 2A † C ‖ 2A *in* 2A *et* † 2A *in* C *et* † C *in* 2A *et* † C *in* C ‖ 4A *in* A *et* † 4A *in* C *et* † C2 ‖ 4A *in* A † C *et* † C2: ergo B † Cq = 4A *in* A † C *et* † C2. Vt asserebatur.

Propositio 9. *Si recta sit diuisa bifariam & non bifariam: erunt quadrata partium* *inæqualium dupla quadratorum dimidiæ, & partis intermediæ*. Neglecta eſt; poterat vniuerſalius proponi, dicendo, qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, ità tamen vt A = B + C: dico A + Bq + C2 = 2A2 + 2B2. Etenim quia per hypotheſim, A = B + C: patet, A *in* 2B *et* + C2 = B + C *in* 2B *et* + C2 ll B *in* 2B *et* + C *in* 2B *et* + C2 ll B *in* B *et* + B *in* B *et* + C2 *et* + C *in* 2B ll B2 + B2 + C2 *et* + 2B *in* C: ſed per 3. aſſertionem primæ hypotheſis cap. 9. conſtat, B2 + C2 *et* + 2B *in* C = B + Cq ll A2, quia A = B + C: ergo A *in* 2B *et* + C2 = A2 + B2: ſed quia per 3. aſſertionem primæ hypotheſis cap. 9. etiam A + Bq = A2 + B2 *et* + A *in* 2B, patet, A + Bq *et* + C2 = A2 + B2 *et* + A *in* 2B *et* + C2: ergo A + Bq *et* + C2 = A2 + B2 + A2 + B2 ll 2A2 + 2B2. Vt aſſerebatur.

Propoſitio 10. *Si recta ſit bifariã ſecta, eique quadam recta adjiciatur: erunt quadrata totius compoſitæ & adiectæ, dupla quadratorum quæ deſcribuntur ſuper dimidia, & ſuper compoſita ex dimidia & adiecta*. Neglecta eſt. Poterat vniuerſalius proponi, dicendo qualeſcunque ſint quantitates A, B, C, ità tamen vt A = 2B: dico A + Cq + C2 = 2B2 *et* + B + Cq *in* 2. Etenim per aſſertionem 3. primæ hypotheſis cap. 9. patet, A + Cq = A *in* A *et* + C *in* C *et* + 2A *in* C ll 2B *in* 2B *et* + C *in* C *et* + 4B *in* C (quia per hypotheſim A = 2B) ll 2B2 + 2B2 + C2 *et* + 4B *in* C: ergo vtrinque addendo C2, etiam A + Cq + C2 = 2B2 + 2B2 + 2C2 *et* + 4B *in* C: ſed ex aſſertione 3. primæ hypotheſis cap. 9. ſatis patet, B + Cq *in* 2 = 2B2 + 2C2 *et* + 4B *in* C: ergo A + Cq + C2 = 2B2 *et* + B + Cq *in* 2. Vt aſſerebatur.

Propoſitio 11. *Datam rectam ità ſecare vt rectangulum ſub tota & vna parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ*. Eſt problema 9. cap. 6. lib. 1. Logiſticæ.

Propoſitio 12. *In trigono obtuſangulo, quadratum lateris obtuſo angulo oppoſiti, quadrata laterum reliquorum excedit, bis rectangulo quod comprehenditur ſub latere alterutro obtuſum angulum continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ſub intercepta exterius linea inter perpendicularem & obtuſum angulum*. Neglecta eſt. Suppoſito quod in triangulo A B C, latus A B obtuſo angulo opponatur, quodque recta A F perpendiculariter in F occurrat lateri B C producto; aſſeritur quod A Bq = B Cq + A Cq *et* + 2B C *in* C F. Etenim per theor. 8. cap. 3. lib. 2. A Bq = A Fq + B Fq: ſed per idem A Fq = A Cq − C Fq, & per 3. aſſertionem primæ hypotheſis cap. 9. etiam B Fq hoc eſt B C + C Fq = B Cq + C Fq *et* + 2B C *in* C F: ergo A Bq = A Cq − C Fq + B Cq + C Fq *et* + 2B C *in* C F ll A Cq + B Cq *et* + 2B C *in* C F. Vt aſſerebatur. (Fig. 31.)

Propoſitio 13. *In triangulo quocunque, quadratum lateris acuto angulo oppoſiti, à quadratis laterum reliquorum exceditur, bis rectangulo quod continetur ſub latere alterutro acutum angulum comprehendentium, in quod cadit perpendicularis ab oppoſito angulo, & ſub intercepta inter perpendicularem & acutum angulum*. Neglecta eſt. Suppoſito quod in triangulo A B C, latus A B opponatur acuto angulo, quodque recta A F perpendiculariter in F occurrat lateri B C: aſſeritur A Bq = B Cq + A Cq *et* − 2B C *in* C F. Etenim per theor. 8. cap. 3. lib. 2. conſtat, A Bq = A Fq + B Fq: ſed quia per aſſertionem 3. primæ hypotheſis cap. 9. B Cq = B Fq + C Fq *et* + 2B F *in* C F, etiam B Cq − C Fq *et* − 2B F *in* C F = B Fq: præterea quia per theor. 8. cap. 3. lib. 2. conſtat, A Cq = A Fq + C Fq, etiam A Cq − C Fq = A Fq: adeòque A Fq + B Fq = A Cq − C Fq + B Cq − F Cq *et* − 2B F *in* C F ll A Cq + B Cq *et* − 2C F2 *et* − 2B F *in* C F ll A Cq + B Cq *et* − 2B C *in* C F, quia − 2C F2 = − 2 C F *in* C F: & manifeſtum eſt − 2C F *in* C F *et* − 2B F *in* C F = − 2B C *in* C F: igitur A Bq = A Cq + B Cq *et* − 2B C *in* C F. Vt aſſerebatur. (Fig. 32.)

Propoſitio 14. Dato rectilineo æquale quadratum conſtruere. Vide problema 18. cap. 6. lib. 1.

Ele-

Elementorum Euclidis liber tertius.

PRopositio 1. *Dati circuli centrum inuenire*. Patet ex problemate 6. capitis 6. lib. 1.

Propositio 2: *Si in circuli peripheria duo qualibet puncta accepta fuerint: recta linea quæ ad ipsa puncta adiungitur, intra circulum cadet.* Neglecta, quia ex terminis manifesta est.

Propositio 3. *Si in circulo recta quædam linea per centrum extensa, quandam non per centrum extensam bifariam secet: & ad angulos rectos illam secabit. Et si ad angulos rectos eam secet: bifariam quoque illam secabit.* Neglecta. Tales lineæ sint A B & C D sese secantes in F, atque prior transeat per centrum E. In primo Fig. 33.
casu patet, E C *ad* E D = C F *ad* F D ll F E *ad* F E: quare per theor. 4. cap. 3. lib. 2. triangula C F E & D F E sunt similia, adeòque angulus C F E = angulo D F E: igitur per theor. 1. cap. 3. lib. 2. singuli recti sunt. In secundo casu, per theo. 8. cap. 3. lib. 2. C Eq = C Fq † F Eq, & prętereà E Dq = D Fq † F Eq: sed quia C E = E D, patet, C Eq = D Eq: ergo C Fq † F Eq = D Fq † F Eq: ergo ablato communi F Eq, etiam C Fq = F Dq, adeòque C F = F D. Vt asserebatur.

Propositio 4. *Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secent, non per centrum extensę: sese mutuo bifariam non secabunt.* Neglecta. Sit vna A B, bifariam secta ab altera C D in puncto E, quod centrum non sit. Per hypothesim 5. cap. 9. lib. 2. Fig. 27.
constat, A E *in* E B = C E *in* E D: ergo per 10. axioma, C E *ad* A E = E B *ad* E D: sed A E = E B: ergo C E *ad* A E = A E *ad* E D. Iam verò quia E centrum non est, recta A E non æquatur singulis rectis C E & E D, sed vna, exempli gratia C E, maior est: ergo altera E D minor est, & consequenter C E non = E D. Vt asserebatur.

Propositio 5. *Si duo circuli sese mutuo secent: non erit idem illorum centrum.* Neglecta; patet ex terminis.

Propositio 6. *Si duo circuli sese mutuo interius tangant: eorum non erit idem centrum.* Neglecta. Patet ex terminis.

Propositio 7. *Si in diametro circuli quodpiam sumatur punctum, quod circuli centrum non sit, ab eoq; puncto in circulum quædam rectæ lineæ cadant; maxima quidem erit ea in qua centrum, minima verò reliqua; aliarum verò propinquior illi, quæ per centrum ducitur; remotiore semper maior est: duæ autem solum rectæ lineæ æquales ab eodem puncto in circulum cadunt, ad vtrasq; partes minimæ vel maximæ.* Neglecta. Vt constet veram esse: circuli diameter sit A B, centrum E, diametri punctum à cętro diuersum sit F, per quod ducta sit quæuis recta G F H non transiens per centrum, atque circumferentiæ occurrens [illegible] ducta recta G E. Patet G E † E F esse maiorem quam G F: sed quia G E = A [illegible] E † E F = A E † E F ll A F: ergo A F est maior quam G F: sed G F est quæuis nō per centrum transiens: ergo A F per centrū transiens, est maior quauis G F quæ non transit per centrum; quod erat primum. Præterea ex hyp. 5. cap. 9. & axiomate 10. constat, A F *ad* G F = H F *ad* B F: sed quia ostensum est, A F esse maiorē quam G F, patet, A F *ad* G F esse rationem maioris inæqualitatis: ergo etiam H F *ad* B F est ratio maioris inæqualitatis, adeòque H F (quæ per constructionem est quęlibet quæ producta non transit per centrum) est maior quam B F, quę proinde minima est. Tertiò, patet quod à recta A F magis distans linea K E necessariò faciat angulum K E F minorem quam sit angulus G E F: sed huic minori angulo (cuius latus K E = lateri G E, & latus F E est commune) necessariò respondere minorem lineam, patet ex ipsa anguli intelligentia: igitur à recta A F in sensu Euclideo magis

à recta

distans linea K F, necessariò minor est quam linea G F. Quartò, quia ex tertia parte constat, duas huiusmodi lineas non posse esse æquales nisi æqualiter distent à recta F A, & manifestum est, quod non ab eadem, sed tantum à diuersis partibus rectæ A F, possint æqualiter distare: constat etiam non nisi ad diuersas partes rectæ A F, duci posse duas rectas inter se æquales. Vt asserebatur.

Propositio 8. *Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, ab eoque puncto ad circulum deducantur rectæ quædam lineæ, quarũ vna quidem per centrum protendatur, reliquæ verò vt libet: in cauam peripheriam cadentium rectarum linearum maxima quidem est illa, quæ per centrum ducitur; aliarum autem propinquior ei quæ per centrum transit, remotiore semper maior est: in conuexam verò peripheriam cadentium rectarũ linearũ minima quidem est illa, quæ inter punctum, & diametrũ interponitur; aliarum autẽ ea, quæ propinquior est minimæ, remotiore semper minor est. Duæ autem tantum rectæ lineæ æquales ab eo puncto in ipsum circulum cadunt, ad vtrasque partes minimæ vel maximæ.* Neglecta. Vt constet veram esse:

Fig. 35. ex puncto F extra circulum constituto, recta per centrum E transiens, prius in A, deinde in B circumferentiæ occurrat: atque ex puncto F ducta, quæuis altera recta, prius in G, deinde in H occurrat circumferentiæ circuli: cui similiter altera remotior prius in K, deinde in L occurrat: denique ex punctis G, K, L, H, ad centrum E ductæ sint rectæ. His positis, patet, F E † E H esse maiores F H: sed F E † E H = F E † E B ll F B: ergo F B per centrum transiens, est maior quauis F H quæ per centrum non transit: vt primo loco asserebatur. Secundò, quia F H propinquior est rectæ E B, quam sit recta F L, patet, angulum F E H, esse maiorem angulo F E L: sed latus H E = lateri L E, & latus E F est commune: ergo F H est maior quam F L. Tertiò, E G † G F simul maiores sunt quam E F ll A E † E F: igitur vtrinque ablatis æqualibus, remanet G F maior quam A F. Quartò, quia rectæ F B, propinquior est recta F G quam recta F K: patet, E K † K F simul maiores esse quam E G † G F: igitur ablatis vtrinque æqualibus K E & E G, etiam K F maior est quam G F. Quintò, manifestum est ex puncto F ad eamdem partem F B duci non posse duas rectas æqualiter distantes à recta F B: eas verò duci posse ad diuersas partes rectæ F B: quoniam igitur inæqualiter distantes à recta F B, necessariò inæquales esse constat ex prioribus partibus: etiam manifestum est ex puncto F ad circumferentiam circuli, duas rectas æquales duci posse, non quidem ad eamdem partem rectæ F B, sed tantum ad diuersas eius partes.

Propositio 9. *Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & ab eo puncto ad circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales; acceptum punctum centrum est ipsius circuli.* Neglecta est. Veram esse, patet, ex demonstratione problematis [illegible] proponitur cap. 8. lib. 2.

Propositio 10. *Circulus, circulum in pluribus, quam duobus punctis non secat.* Neglecta est. Satis patet ex terminis: vel etiam vt præcedens; vel vt quarta pars propositionis septimæ.

Propositio 11. *Si duo circuli sese intus contingant, atque accepta fuerint eorum centra; ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta, in contactum circulorum cadet.* Neglecta est. Patet ex demonstratione problematis 11, cap. 4. lib. 1; ducta enim ad commune punctum tangente, hæc cum vtriusque circuli radio constituet angulum rectum, adeòque per theor. 1. cap. 3. isti radij constituent rectam lineam vtriusque circuli centrum connectentem, atque recta ex contactu ad vnius circuli centrum ducta, etiam transit per centrum alterius circuli. Vt asserebatur.

Propositio 12. *Si duo circuli sese exterius contingant, linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur, per contactum transibit.* Neglecta est. Patet vt præcedens; ducta enim ad commune punctum tangente, patet vt prius etiam rectum angulum facere cum vtroque radio ad contactum ducto, adeòque hi duo radij per theor.

theor. 1. cap. 3. sunt in directum: ergo vnam rectam lineam constituunt vtrumque centrum & contactus punctum connectentes duo radij. Vt asserebatur.

Propositio 13. *Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quam vno, siue intus, siue extra tangat.* Neglecta est. Cæterum cum tangere in pluribus punctis idem sit, ac habere arcum aliquem communem vtrique circulo qui se tangunt. In primo casu in quo duo circuli centris A & B descripti, supponuntur habere arcum C D communem: ad hæc puncta C & D, ex centris A & B ductæ sint rectæ: hoc posito, anguli C A D & C B D habebunt eamdem mensuram, adeòque æquales erunt: quod patet esse impossibile: adeòque impossibile est illud vnde hoc sequitur, nimirum circulos, centris A & B descriptos, habere communem aliquem arcum C D; vt in primo casu asseritur. In secundo casu, in quo circuli centris B & E descripti supponuntur habere communem aliquem arcum F G, ducta sit recta linea B E: hanc per vtrumque punctum F & G non transire manifestum est: supposito verò quod non transeat per punctũ F, ductæ sint rectæ F B & F E. Quoniam vt supponitur, punctum F est in circumferentia vtriusque circuli centris B & E descripti, patet, B F † F E = B E, quia vtraque pars huius æquationis continet duos eorumdem circulorum radios: quandoquidem igitur manifestè impossibile sit in triangulo, B F E, rectas B F † F E = B E: constat impossibile esse illud vnde hoc sequitur, nimirum circulos centris B & E descriptos, habere arcum F G communem. Vt in secundo casu asserebatur. Fig. 36.

Propositio 14. *In circulo æquales rectæ lineæ, æqualiter distant à centro. Et quæ æqualiter distant à centro, æquales sunt inter se.* Neglecta est. In circulo centro A descripto, ductæ sint rectæ B C & D E: atque ex punctis B, C, D, E, ad centrum, A positæ sint rectę lineæ: deniquæ rectæ lineæ A F & A G perpendiculares sint, ad rectas B C & D E. Quia in primo casu, per hypothesim, B C = DE, patet, B C *ad* D E = A B *ad* A D ll A C *ad* A E: igitur per theorema 4. cap. 3. triangula B A C & D A E sunt similia, adeòque angulus C B A = angulo E D A: sed per constructionem, etiam angulus B F A = angulo D G A, quia vterque rectus est: ergo per theorema 4. cap. 3. triangula F A B & G A D sunt inter se similia, adeòque B A *ad* D A = F A *ad* G A: sed patet, B A = D A: ergo etiam F A = G A. Quod in primo casu asserebatur. In secundo casu, quia per constructionem, anguli A F B & A G D singuli recti sunt, per theor. 8. cap. 3. constat, A Fq † F Bq = ABq, & præterea A Gq † GDq = A Dq: sed patet, A Bq = A Dq: ergo etiam A Fq † FBq = A Gq † G Dq: sed quia in secundo casu, per hypothesim, A F = A G, manifestum est A Fq = A Gq: ergo etiam F Bq = G Dq, adeòque F B = G D. Simili prorsus argumento patet, F C = G E: igitur F B † F C, hoc est B C = G D † G E, hoc est D E. Vt dicitur in secundo casu. Fig. 37.

Propositio 15. *In circulo maxima quidem linea est diameter; aliarum autem propinquior centro, remotiore semper maior est.* Neglecta est. In circulo centro A descripto, diameter sit B C: quæuis distans à centro, sit D E: hac magis distans, sit F G: atque ex centro A, ductæ sint rectæ lineę ad puncta D, E, F, G. Manifestum est D A † A E excedere rectam D C: sed etiam patet, D A † A E = B A † A C ll diametro B C: igitur diameter B C excedit rectam quamlibet D E à centro distantem; vt primo loco asserebatur. Præterea quia per hypothesim, recta F G magis distat à centro: quam recta D E: patet, angulum D A E esse maiorem angulo F A G: sed istorum angulorum latera inter se ęqualia sunt: igitur recta D E minus distans à centro, est maior quam recta F G, quę magis distat à centro. Vt secundo loco asserebatur. Fig. 38.

Propositio 16. *Quę ab extremitate diametri cuiusque circuli ad angulos rectos ducitur, extra ipsum circulum cadet; & in locum intra ipsam rectam lineam, & peripheriam comprehensum, altera recta linea non cadet: & semicirculi quidem angulus, quouis angulo acuto rectilineo maior est, reliquus autem minor.* Neglecta est.

Cæte-

Cęterum quod recta linea quę ad extremitatem diametri ad angulos rectos ducitur circulum tangat, sed non secet, adeòque extra circulum cadat: alteram verò quamlibet rectā ab extremitate diametri ductam infra tangentem, necessariò circulum secare: & consequenter in locum comprehensum intra tangentem & peripheriam cadere non posse vllam rectam ductam ab extremitate diametri, satis facilè patet ex theoremate 8. cap.3. eodem discursu quo cap.8. lib.2. demonstratur prob.11. cap.6. lib.1. Quod vltimo loco asseritur in hac 16.propositione Euclidea, nimirum semicirculi angulum maiorem esse quouis acuto angulo rectilineo; reliquum verò, hoc est contactus angulum, esse minorem quouis angulo acuto rectilineo: admitti non potest à Logistica: iuxta quam angulus semicirculi, & angulus contactus, vtpote anguli non rectilinei: ad angulos rectilineos nullam habent proportionem; quia sunt quantitates diuersi generis, ideòque dici non potest quod aliquis ex his angulis non rectilineis, sit maior vel minor angulo rectilineo recto vel acuto: hoc tamen ab Euclide hic asseritur; quam immania paradoxa, & insolubiles difficultates, ad hanc Euclideam assertionem sequantur, videri potest apud Peletarium, Clauium, Taquet, aliosque. De hac Logisticæ nostræ doctrina, Euclideæ non planè consona, pluribus agitur lib.3. vel cap.4. reflexione 7. vel cap.5. consideratione 9.

Propositio 17. Est problema 11. cap.6. lib.1.

Propositio 18. *Si circulum tangat recta quępiam linea, à centro autem ad contactum adiungatur recta quędam linea: quę adiuncta fuerit, ad ipsam contingentem perpendicularis erit*. Neglecta est, cæterum est conuersa propositionis 16. huius lib.3. Euclidis, & non minus facilè patet ex theoremate 8. cap.3. lib.2. Logisticæ.

Propositio 19. *Si circulum tetigerit recta quępiam linea, à contactu autem recta linea ad angulos rectos ipsi tangenti excitetur: in excitata erit centrum circuli*. Neglecta est, cæterum vt in præcedenti, vel 16. propositione, ex contactus puncto ad tangentem perpendicularem esse radium facilè constat per theorema 8. cap.3: sed etiam patet, ex cōtactus puncto, ad tangentem non nisi vnicam perpendicularem lineam duci posse: igitur quæ ex contactu ad tangentem perpendicularis est, necessariò transit per centrum. Vt asserebatur.

Propositio 20. Est theorematis 7. cap.3. prima assertio.

Propositio 21. Est theorematis 7. cap.3. secunda assertio.

Propositio 22. *Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt ęquales*. Neglecta est; veram esse facilè constat ex theoremate 7. cap.3. ex quo satis patet mensuram anguli ad circumferentiam æquari dimidiæ circumferentiæ cui insistit angulus, sed etiam manifestum est, in commemorato quadrilatero duas circumferentias quibus isti oppositi anguli insistunt, simul constituere integram circuli circumferentiam: igitur istorum duorum angulorum mensuræ, simul adæquant dimidiam circuli circumferentiam, siue duos quadrantes, adeòque isti anguli simul æquantur duobus rectis angulis. Vt asserebatur.

Propositio 23. *Super eadem recta linea, duo segmenta circulorum similia, & inęqualia, non constituentur ad easdem partes*. Neglecta est, Euclides in huius libri definitione 10. statuit circuli segmenta dicenda esse similia: quæ capiunt angulos æquales: vnde propositionis sensus est, quod eidem rectæ ad easdem partes insistentes anguli ad circumferentiam, inæquales esse non possint; quod patet ex theor.7. cap.3. vbi demonstratum est omnes istos angulos inter se æquales esse.

Propositio 24. *Super æqualibus rectis, similia circulorum segmenta sunt inter se ęqualia*. Neglecta est. Iuxta Euclidis libri 3. definitionem 10. sensus est, quod si in circulis, centris A & B descriptis, anguli ad circumferentiam C D E & F G H sint

Fig. 39.

inter

inter se æquales: atque prætereа rectæ quibus insistunt C E & F H æquales fuerint, etiam inter se æqualia esse segmenta C D E & F G H. Hæc propositio apud Euclidem non inuenitur vniuersalius proposita, licet in sexto libro vniuersalius proponat, permultas propositiones magis restrictas præcedentium librorum; vniuersalius proponi poterat, dicendo, quod si in circulis, centris A & B descriptis, anguli ad circumferentiam C D E, & F G H sint inter se æquales, etiam segmentum C D E *ad* segmentum F G H = C Eq *ad* F Hq. Etenim ductis rectis A C, A E, B F, B H; per theor. 7. cap. 3. angulus C A E duplus est anguli C D E: & angulus F B H duplus est anguli F G H: sed per hypothesim, angulus C D E = angulo F G H: ergo angulus C A E = angulo F B H: sed etiam patet, C A *ad* F B = A E *ad* B H: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula C A E & F B H sunt similia: igitur per propositionem notatam in scholio quod sequitur theorema 14. partis 2. cap. 12. lib. 1. constat, triangulum C A E *ad* triangulum F B H = C Eq *ad* F Hq ll A Cq *ad* B Fq. Præterea quia iam ostensum est, angulum C A E = angulo F B H, per theorema 5. cap. 3. etiam arcus C E *ad* arcum F H = rectæ C A *ad* rectam F B: sed per theorema 5. cap. 3. etiam circulorum radijs A C & B F descriptorum circumferentia *ad* circumferentiam = A C *ad* B F: igitur etiam arcus C D E *ad* arcum F G H = A C *ad* B F: igitur per propositionem scholij hic prius citati, sector A C D E productus ex radio A C *in* arcum C D E ductu 4. *ad* sectorem B F G H productum ex radio B F *in* arcum F G H ductu 4 = A Cq *ad* B Fq ll triangulo C A E *ad* triangulum F B H, vt prius ostensum est: igitur per theorema 2. cap. 2. sector A C D E † triangulo C A E *ad* sectorem B F G H † triangulo F B H = triangulo C A E *ad* triangulum F B H ll C Eq *ad* F Hq, vt prius ostensum est: atqui ex hypothesi & constructione patet, sectorem A C D E † triangulo C A E = segmento C D E; & etiam sectorem B F G H † triangulo F B H = segmento F G H: igitur segmentum C D E *ad* segmentum F G H = C Eq *ad* F Hq. Quod erat demonstrandum. Vt ex hac vniuersaliori propositione constet magis restricta propositio Euclidea, quæ hic est 24, satis est subsumere, sed quia per hypothesim C E *ad* F H = 1 *ad* 1, patet, C Eq *ad* F Hq = 1q *ad* 1q ll 1 *ad* 1: ergo segmentum C D E *ad* segmentum F G H = 1 *ad* 1; vt asseritur in Euclidea propositione. Fig. 39.

Propositio 25. *Circuli segmento dato, describere circulum cuius est segmentum*. Patet ex problemate 6. cap. 6. lib. 1. nam in dati segmenti arcu sumendo tria puncta, atque iuxta citatum problema describendo lineam circularem per tria illa puncta transeuntem, habebitur quæsitum.

Propositio 26. *In æqualibus circulis, æquales anguli æqualibus periferijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant*. Neglecta est. Veram esse patet ex theoremate 7. cap. 3.

Propositio 27. *In æqualibus circulis, anguli, qui æqualibus periferijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant*. Neglecta est. Veram esse patet ex theoremate 7. cap. 3.

Propositio 28. *In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt, maiorem quidem maiori, minorem autem minori*. Neglecta est. Veram esse ex angulorum æqualium intelligentia videtur satis manifestum; cæterum constat vt prop. 23. vel etiam, tum ex theor. 4. cap. 3, tum ex theor. 7. cap. 3. facilè infertur.

Propositio 29. *In æqualibus circulis, æquales peripherias, æquales rectæ lineæ subtendunt*. Neglecta est. Constat vt præcedens.

Propositio 30. *Datam peripheriam bifariam secare*. Est problema 10. cap. 6. lib. 1.

Propositio 31. *In circulo angulus, qui in semicirculo, rectus est: qui autẽ in maiore segmento, minor recto: qui verò in minore segmento, maior est recto. Et insuper angu-*

lus maioris segmenti, recto quidem maior est: minoris autem segmenti angulus, minor est recto. Neglecta est. Singulæ huius propositionis partes, satis immediatè manifestæ sunt ex theoremate 7. cap. 3, ex quo constat, dimidium arcus cui insistit angulus ad circumferentiam, esse eius mensuram: vnde si insistit dimidiæ circumferentiæ, eius mensura est quadrans circumferentiæ, adeòque rectus est; si dimidia circumferentia minori arcui insistit angulus, recto minor erit: talis est qui est in segmento quod semicirculo maius est; si denique est in segmento quod est minus semicirculo, insistit arcui qui est maior dimidia circumferentia: ideòque angulus talis recto maior est.

Propositio 32. *Si circulũ tetigerit aliqua recta linea, à contactu autẽ producatur quadam recta linea circulum secans: anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt ijs, qui in alternis circuli segmentis consistunt, angulis*. Neglecta est. Veram esse constat ex demonstratione quæ cap. 8. huius libri affertur pro subsistentia problematis 12. & 13. cap. 6. lib. 1. quæ problemata respondent duabus proximè subsequentibus propositionibus Euclideis.

Propositio 33. *Super data recta linea describere segmentum circuli, quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo*. Est problema 13. cap. 6. lib. 1.

Propositio 34. *A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo*. Est problema 12. cap. 6. lib. 1.

Propositio 35. *Si in circulo duæ rectæ lineæ sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, æquale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur, rectangulo*. Est hypothesis 5. cap. 9.

Propositio 36. *Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum secet, altera verò tangat: quod sub tota secante, & exterius inter punctum & conuexam peripheriam assumpta comprehenditur rectangulum, æquale erit ei, quod à tangente describitur quadrato*. Est hypothesis 6. cap. 9.

Propositio 37. *Si extra circulum sumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum secet, altera in eum incidat; sit autem, quod sub tota secante, & exterius inter punctum & cõuexam peripheriam assumpta, comprehenditur rectangulum, æquale ei, quod ab incidente describitur, quadrato: incidens ipsa circulum tanget*. Neglecta est. Cæterum & vera est, & conuersa præcedentis: atque manifesta ex demonstratione hypothesis 6. cap. 9.

Elementorum Euclidis liber quintus.

Sex priores huius libri propositiones tantum seruiunt pro methodo Euclidea, quæ per multiplices, & æque multiplices, intendit probare eam proportionum doctrinam quæ ab Euclide affertur libro quinto suorum elementorum; quare illi ipsi qui Euclidea elementa scripserunt, sed libri quinti doctrinam ab Euclide non satis firmatam, aliter quam per multiplices firmiorem reddere conati sunt: prætermittendas putauerunt propositiones Euclideas agentes de multiplicibus, atq; æque multiplicibus: vide si placet P. Taquet lib. 5. suorum Euclideorum elementorum. Quandoquidem igitur Euclideæ propositiones de multiplicibus agentes, tantum afferantur in ordine ad reliquam doctrinam, veram quidem, sed hoc modo non satis stabilitam siue demonstratam: has propositiones prætermittimus, & à septima enumerandarum propositionum exordium sumimus.

Propositio 7. *Æquales ad eamdem, eamdem habent rationem: & eadem ad æquales*. Patet ex theoremate 1. cap. 2. si fortè ab illo differt.

Propositio 8. *Inæqualium magnitudinum maior ad eamdem, maiorem rationem habet*

bet quam minor: & eadem ad minorem, maiorem rationem habet, quam ad maiorem: Neglecta est: veram esse immediatè manifestum est ex nostræ Logisticæ definitione rationis, aut rationis quæ altera dicitur maior vel minor.

Propositio 9. *Quæ ad eamdem eamdem habent rationem, æquales sunt inter se: & ad quas eadem, eamdem habet rationem, eæ quoque sunt inter se æquales*. Patet ex theoremate 1. cap. 2. si fortè ab illo differt.

Propositio 10. *Ad eamdem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet, illa maior est: ad quam autem eadem maiorem rationem habet, illa minor est*. Neglecta est. Patet ex Logisticæ definitione rationis: aut rationis quæ altera dicitur maior, vel minor.

Propositio 11. *Quæ eidem sunt eædem rationes, & inter se sunt eædem*. Neglecta, quia continetur primo axiomate capitis primi: in quo de omnibus omnino quantitatibus verum esse asseritur, quod hic ab Euclide affirmatur de rationibus, quæ iuxta Logisticam sunt quantitates; esse verò duas rationes æquales eidem tertiæ, vel easdem eidem tertiæ, apud Euclidem idem prorsus significat.

Propositio 12. *Si sint magnitudines quotcunque proportionales: quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad suum consequens, ità se habebunt omnes antecedentes simul ad omnes consequentes*. Continetur in theoremate 2. cap. 2. lib. 2.

Propositio 13. *Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit quam quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit quam quinta ad sextam*. Neglecta est. Cæterum veram esse non minus immediatè patet ex terminorum intelligentia quam ipsa axiomata. Etenim vniuersaliter verum esse patet quod si ex duobus quãtitatibus inter se æqualibus A & B, vna B sit maior aliqua tertia quantitate C: etiam hac maiorem esse alteram quantitatem A; hoc quod vniuersaliter, atque ex terminis constat de quibuslibet quantitatibus, tantum asseritur in hac propositione de rationibus, quas esse aliquas quantitates constat ex nostra Logistica.

Propositio 14. *Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; prima verò quam tertia maior fuerit: erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit æqualis tertiæ, erit & secunda æqualis quartæ: si verò minor & minor erit*. Neglecta est. Veram esse non tantum de rationibus, sed de quibuscunque quantitatibus, patet immediatè ex terminorum intelligentia, vt notauimus ad propositionem pręcedentem, saltem iuxta Logisticam, quę rationes quantitatibus annumerat.

Propositio 15. *Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, si prout sibi mutuo respondent, ità sumantur*. Neglecta est, agit de multiplicibus, adeòque prætermittenda propter rationes hic initio allatas: quibus adde quod Euclides nusquam satis declaret quid velit intelligi per vocem *pars*, vt videri potest in loco citato ab indice ad vocem *totum*, vel *pars*: agit tamen in hac propositione de partibus.

Propositio 16. *Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt*. Est vna ex assertionibus theorematis 2. cap. 2. Nimirum permutando.

Propositio 17. *Si compositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoque diuisæ proportionales erunt*. Est vna ex assertionibus theorematis 2. cap. 2. Nimirum diuidendo.

Propositio 18. *Si diuisæ magnitudines sint proportionales, hæ quoque compositæ proportionales erunt*. Est vna ex assertionibus theorematis 2. cap. 2. Nimirum componendo.

Propositio 19. *Si quemadmodum totum ad totum, ità ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit*. Est vna ex assertionibus

nibus theorematis 2. cap. 2. Nimirum diuidendo, saltem iuxta Logisticam.

Propositio 20. *Si sint tres magnitudines & alia ipsis aquales numero, qua bina & in eadem ratione sumantur; ex aquo autem prima, quam tertia maior fuerit, erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertia fuerit aqualis, erit & quarta aqualis sexta: sin illa minor, hac quoque minor erit.* Theorema 3. capitis 2. vel idem, vel amplius aliquid docet, quam hac Euclidea propositione asseratur.

Propositio 21. *Si sint tres magnitudines, & alia ipsis aquales numero, qua bina, & in eadem ratione sumantur, fueritque perturbata earum proportio; ex æquo autem prima quam tertia maior fuerit: erit & quarta, quam sexta, maior. Quod si prima tertiæ fuerit æqualis, erit & quarta æqualis sexta: sin illa minor, hac quoque minor erit.* Neglecta. Sensus est, si A *ad* B = E *ad* F, atque præterea B *ad* C = D *ad* E: etiam A *ad* C = D *ad* F. Nam quia per hypothesim, A *ad* B = E *ad* F, per axioma 10. constat, A *in* F = B *in* E: sed per idem axioma, etiam D *in* C = B *in* E, quia per hypothesim, B *ad* C = D *ad* E: igitur A *in* F = D *in* C: ergo per 10. axioma, A *ad* C = D *ad* F: ex quo patet quod asserebatur, & fortè amplius aliquid: similique prorsus argumento etiam constat quod in præcedenti propositione asseritur, & paulò aliter ostensum est in theoremate 3. cap. 2.

Propositio 22. *Si sint quotcunque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, qua bina in eadem ratione sumantur: & ex æqualitate in eadem ratione erunt.* Neglecta. Patet veram esse, bis vel sæpius successiuè adhibendo argumentum ex æquo, propositum in theoremate 3. cap. 2; nam exempli gratia in hypothesi quod A *ad* B = E *ad* F, & etiam B *ad* C = F *ad* G, atque præterea C *ad* D = G *ad* H: asseritur A *ad* D = E *ad* H. Etenim quia per hypothesim A *ad* B = E *ad* F, & præterea B *ad* C = F *ad* G: per theor. 3. cap. 2. constat, A *ad* C = E *ad* G: sed per hypothesim, etiam C *ad* D = G *ad* H: ergo per theor. 3. cap. 2, etiam A *ad* D = E *ad* H. Vt asserebatur.

Propositio 23. *Si sint tres magnitudines aliaque ipsis aquales numero, qua bina in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio; etiam ex aqualitate in eadem ratione erunt.* Neglecta est. Veram esse patet, bis vel sæpius adhibendo argumentum in præcedenti propositione 21. allatum, quemadmodum bis vel sæpius adhibendo propositionem 20. constat, quod dicitur in propositione 22.

Propositio 24. *Si prima ad secundam eamdem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eamdem rationem quam sexta ad quartam; etiam composita prima cum quinta, ad secundam eamdem habebit rationem, quam tertia cum sexta ad quartam.* Neglecta est. Cæterum axioma 5. cap. 1. lib. 2. Logisticæ, docet fieri additionem rationum habentium eumdem consequentem terminum: quando manente eodem termino consequente, adduntur termini antecedentes: atque hoc est quod in hac propositione asseritur ab Euclide.

Propositio 25. *Si quatuor magnitudines inaquales proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt.* Neglecta est. Asseritur quod si ex quatuor inæqualibus magnitudinibus A, B, C, D, maxima sit A, & præterea A *ad* B = C *ad* D, necessariò A † D excedere B † C. Quandoquidem enim A *ad* B = C *ad* D, per theor. 2. cap. 2. etiam A — B *ad* C — D = A *ad* B: sed per hypothesim, A excedit B: ergo A — B excedit C — D: ergo vtrinque addendo eamdem magnitudinem B † D, etiam A — B † B † D, hoc est A † D, excedit C — D † B † D, hoc est C † B. Vt asserebatur.

Propositio 26. *Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam tertia ad quartam: habebit conuertendo secunda ad primam minorem proportionem quam quarta ad tertiam.* Neglecta est. Supposita terminorum intelligentia vt in Logistica de-ca declarantur. Sensus est, si prima magis excedit secundam quam tertia excedat quartam: etiam secunda magis exceditur à prima, quam quarta excedatur à tertia, de qua veritate ne quidem à Grammatico dubitari potest.

Propositio 27. *Si prima ad secundam habuerit maiorem rationem quam tertia ad quartam: habebit quoque vicissim prima ad tertiam maiorem rationem quam secunda ad quartam.* Neglecta est. Satis patet ex theor.2. cap.2. nam quia ratio A *ad* B est maior quam C *ad* D, aliqua ratio A — X *ad* B = C *ad* D: ergo per theor.2. cap.2, etiam A — X *ad* C = B *ad* D: sed patet quod ratio A *ad* C sit maior ratione A — X *ad* C: ergo etiam ratio A *ad* C est maior ratione B *ad* D. Vt asserebatur.

Propositio 28. *Si prima ad secundam habuerit maiorem proportionem quam tertia ad quartam: habebit quoque composita prima cum secunda, ad secundam maiorem rationem, quam composita tertia cum quarta ad quartam.* Neglecta est. Vt præcedens satis manifesta est ex theor.2. cap.2.

Propositio 29. *Si composita prima cum secunda ad secundam maiorem habuerit proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit quoque diuidendo prima ad secundam maiorem rationem quam tertia ad quartam.* Neglecta est. Vt præcedentes satis patet ex theor.2. cap 2.

Propositio 30. *Si composita prima cum secunda ad secundam habuerit maiorem proportionem, quam composita tertia cum quarta ad quartam: habebit per conuersionem rationis, prima cum secunda ad primam, minorem proportionem, quam tertia cum quarta ad tertiam.* Neglecta est. Satis patet ex theor.2.cap.2. vt de præcedentibus diximus.

Propositio 31. *Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad secundam, quam prima posteriorum ad secundam; item secunda priorum ad tertiã maior quam secunda posteriorũ ad tertiã: erit quoque ex æqualitate maior proportio primæ priorum ad tertiam, quam primæ posteriorum ad tertiam.* Neglecta est. Cæterum conformiter ad propositionem, supposito quod tres priores magnitudines sint A, B, C, posteriores verò D, E, F, quodque ratio A *ad* B sit maior quam D *ad* E, atque præterea ratio B *ad* C sit maior quam E *ad* F, asseritur rationem A *ad* C esse maiorem ratione D *ad* F. Etenim per hypothesim, singulæ rationes A *ad* B & B *ad* C sunt maiores singulis rationibus D *ad* E & E *ad* F: ergo per axioma secundum capitis primi, productum ex A *ad* B *in* B *ad* C, est maius producto ex D *ad* E & E *ad* F: sed per theor.7. cap.2, productum ex A *ad* B *in* B *ad* C = A *ad* C, productum verò ex D *ad* E *in* E *ad* F = D *ad* F: igitur ratio A *ad* C est maior ratione D *ad* F. Vt asserebatur.

Propositio 32. *Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, sitque maior proportio primę priorum ad secundam, quam secunda posteriorum ad tertiam, item secunda priorum ad tertiam, maior quam prima posteriorũ ad secundã: erit quoq; ex æqualitate: maior proportio prima priorum ad tertiam, quam prima posteriorum ad tertiam.* Neglecta est. Veram esse euincit idem prorsus argumentum quo veram esse ostendimus antecedentem propositionem, à qua non differt, nisi quod illic A *ad* B sit maior quam D *ad* E, & B *ad* C sit maior quam E *ad* F: hic verò A *ad* B ponatur maior quam E *ad* F, & B *ad* C ponatur maior quam D *ad* E; vtroque tamen casu singulæ duæ rationes producentes A *ad* C sunt maiores singulis duabus rationibus producentibus rationem D *ad* F.

Propositio 33. *Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum; erit & reliqui ad reliquum maior proportio quam totius ad totum.* Neglecta est. Veram esse satis manifestum est ex theor.2. cap.2. in quo demonstratur quod asseritur in præcedenti Euclidea 19. huius libri.

Pro-

Propositio 34. *Si sint quotcunque magnitudines, & alia ipsis æquales numero, sitque maior proportio prima priorum ad primam posteriorum, quam secunda ad secundam; & hæc maior quam tertia ad tertiam; & sic deinceps; habebunt omnes priores simul ad omnes posteriores simul maiorem proportionem, quam omnes priores, relicta prima, ad omnes posteriores, relicta quoque prima: minorem autem quam prima priorum ad primam posteriorum: maiorem denique etiam quam vltima priorum ad vltimam posteriorum.* Neglecta est. Facta hypothesi, quod magnitudines priores, sint A, B, C, D; posteriores verò, prioribus numero æquales, sint E, F, G, H: quodque ratio A *ad* E sit maior quam B *ad* F, & hæc maior quam C *ad* G, atque hæc etiam maior quam D *ad* H. Afferitur de ratione A + B + C + D *ad* E + F + G + H: primò, quod sit maior ratione B + C + D *ad* F + G + H. Secundò, quod sit minor ratione A *ad* E. Tertiò, quod sit maior ratione D *ad* H. Ex hypothesi manifestum est, magnitudines X, Z, Y, tales esse posse, vt D *ad* H = A — X *ad* E ll B — Z *ad* F ll C — Y *ad* G: quo supposito, ex hypothesi & theor. 2. cap. 2. satis patet, quod ratio D *ad* H = A — X + B — Z + C — Y + D *ad* E + F + G + H: sed quia hæc ratio habet idem consequens cum ratione A + B + C + D *ad* E + F + G + H; per axioma 11. cap. 1. hæc vltima ratio præcedentem rationem superat, quantum vltimum antecedens A + B + C + D superat antecedens A — X + B — Z + C — Y + D, nimirum magnitudinibus X + Z + Y; igitur etiam ratio A + B + C + D *ad* E + F + G + H, superat rationem D *ad* H magnitudinibus X + Z + Y. Similiter ex hypothesi & theor. 2. cap. 2. manifestum est, quod ratio D *ad* H = B — Z + C — Y + D *ad* F + G + H: sed quia hæc ratio habet idem consequens cum ratione B + C + D *ad* F + G + H, per axioma 11. cap. 1. vltima ratio antecedentem superat quantitatibus X + Y: igitur etiam ratio B + C + D *ad* F + G + H superat rationem D *ad* H quantitatibus X + Y. Quoniam igitur ratio A + B + C + D *ad* E + F + G + H superat rationem D *ad* H quantitatibus X + Z + Y: & ratio B + C + D superat eamdem illam rationem D *ad* H quantitatibus Z + Y, atque manifestum sit, ex duabus rationibus illam maiorem esse, quæ eamdem tertiam magis superat: patet quod ratio A + B + C + D *ad* E + F + G + H sit maior ratione B + C + D *ad* F + G + H. Vt primo loco asserebatur. Pro secunda assertione, suppono quantitates K, L, M, esse tales, vt A *ad* E = B + K *ad* F ll C + L *ad* G ll D + M *ad* H: quod possibile esse, iterum patet ex hypothesi; facta verò hac suppositione, per theor. 2. cap. 2. constat, A *ad* E = A + B + K + C + L + D + M *ad* E + F + G + H: sed quia hæc ratio habet cõsequẽs cõmune cũ ratione A + B + C + D *ad* E + F + G + H, per axioma 11. cap. 1. postrema ratio à præcedente superatur quantitatibus K + L + M, adeòq; illa minor est: igitur hæc postrema ratio, nimirum A + B + C + D *ad* E + F + G + H, minor est ratione A *ad* E. Vt secundo loco asserebatur. Pro tertia assertione, suppositis quæ pro prima assertione supponuntur, per theor. 2. cap. 2. patet, D *ad* H = A — X + B — Z + C — Y + D *ad* E + F + G + H: sed quia hæc ratio habet commune consequens cum ratione A + B + C + D *ad* E + F + G + H, per axioma 11. cap. 1. constat, quod vltima ratio antecedentem rationem superet quantitatibus X + Z + Y, quodque ideò hæc vltima maior sit: igitur etiam hæc vltima ratio, nimirum A + B + C + D *ad* E + F + G + H maior est ratione D *ad* H. Vt tertio loco asserebatur.

Elementorum Euclidis liber sextus.

Propositio 1. Est theorema 4. partis 1. cap. 12. lib. 1.

Propositio 2. *Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera; & si trianguli latera pro-*

proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones adiuncta fuerit recta linea, erit ad reliquũ ipsius trianguli latus parallela. Neglecta est. Cæterũ sit quoduis triangulum A B C in quo ducta sit recta trianguli lateribus occurrens in punctis D & E. Fig. 40.
Supposito quod B C & D E sint parallelæ, per theor. 3. cap. 3, angulus B C A = angulo D E A; angulus verò A est communis: ergo per theor. 4. cap. 3, triangula A B C & A D E sunt similia, adeòque latera proportionalia. Supposito verò quod A B *ad* A D = A C *ad* A E, quia etiam Angulus A est cõmunis, per theor. 4. cap. 3, triangula A B C & A D E sunt similia, adeòq; angulus A C B = angulo A E D: ergo per theorema 3. cap. 3. lineæ B C & D E sunt parallelæ. Vt asserebatur.

Propositio 3. *Si trianguli angulus bifariam sectus sit, secans autem angulum recta linea secuerit & basim: basis segmenta eamdem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera. Et si basis segmenta eamdem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera: recta linea, quę à vertice ad sectionem producitur, bifariam secat trianguli ipsius angulum.* Est theorema 6. cap. 3.

Propositio 4. *Æquiangulorum triangulorum proportionalia sunt latera quæ circum æquales angulos: & homologa sunt latera quæ æqualibus angulis subtenduntur.* Cõtinetur theor. 4. cap. 3. Vbi ostensum est quomodo ex eo quod vnius trianguli duo anguli sint æquales singulis duobus angulis alterius trianguli, necessariò sequatur illa triangula esse inter se similia: à qua similitudine inseparabiles esse reliquas proprietates quæ in proposita propositione vlterius asseruntur, patet ex terminis.

Propositio 5. *Si duo triangula latera proportionalia habeant; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, sub quibus & homologa latera subtenduntur;* hoc est duo triangula quæ habent latera proportionalia, sunt inter se similia. Est tertia pars theorematis 4. cap. 2.

Propositio 6. *Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint: æquiangula erunt triangula, æqualesque habebunt angulos, sub quibus homologa latera subtenduntur;* hoc est si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales istos angulos latera proportionalia habuerint: erunt inter se similia. Est secunda pars theorematis 4. cap. 3.

Propositio 7. *Si duo triangula vnũ angulum vni angulo æqualem, circum autem alios angulos latera proportionalia habeãt, reliquorum verò simul vtrumq; aut minorem, aut non minorem recto: ęquiangula erunt triangula, & æquales habebunt eos angulos, circum quos proportionalia sunt latera.* Neglecta est. Propositionis sensus est quod triangula A B C & D E F erunt inter se similia, si habeant has conditiones, primò, quod angulus A = angulo D, secundò, quod B A *ad* E D = C B *ad* F E Fig. 41.
tertiò, quod vel in vtroque vel in nullo ex his duobus triangulis inueniatur angulus acuto maior. Etenim centro E, radio E F descripto arcu qui occurrat in puncto G rectæ D F productæ si opus fuerit: quoniam arcus, centro E, radio E F descriptus non amplius quam in duobus punctis F & G occurrere potest rectæ D F vtcunque productæ, patet supra rectam D E describi non posse nisi duo diuersa triangula D E F & D E G habentia enumeratas duas priores conditiones: atqui, non tantum possibile esse, verum etiam quomodo supra rectam D E describatur triangulum simile triangulo A B C, constat ex prob. 14. cap. 6. lib. 1. ergo ex duobus triangulis D E F & D E G alterutrum est simile triangulo A B C. Iam verò quia E G = E F, per theor. 6. cap. 3. satis constat, angulum E F D = angulo E G F, & consequenter quia per theor. 1. cap. 3. angulus E G F + E G D = duobus rectis angulis, etiam angulus E G D + E F D = duobus rectis; igitur angulorum E F D & E G D vterque non est aut minor aut non minor recto: sed

iuxta

iuxta tertiam conditionem angulorum E F D & B C A, vterque est minor vel non minor recto angulo; ergo etiam angulorum B C A & E G D, vterque non est minor vel non minor recto angulo: sed patet hoc requiri vt triangula A B C & D E G dici possint similia: igitur hæc duo triangula A B C & D E G non sunt inter se similia: atqui prius ostensum est vnum ex triangulis D E G vel D E F esse simile triangulo A B C: ergo triangula A B C & D E F sunt inter se similia. Vt asserebatur.

Propositio 8. Est prima assertio theorematis 8. cap. 3.

Propositio 9. *A data recta linea imperatam partem auferre*. Non docet diuersum aliquid ab eo quod docet prob. 8. cap. 6. lib. 1, vel ab eo quod constat ex subsequente propositione.

Propositio 10. *Datam rectam lineam insectam similiter secare, vt data altera recta secta fuerit*. Est problema 8. cap. 6. lib. 1.

Propositio 11. *Duabus datis rectis lineis, tertiam proportionalem adinuenire*. Secundæ lineæ, tertia æqualis assumatur: per 9. regulæ aureæ solutionem propositam in parte 1. cap. 3. lib. 1; ad has tres lineas inuenta quarta proportionalis, erit ad datas duas rectas tertia proportionalis: vt patet ex intelligentia terminorum.

Propositio 12. *Tribus datis rectis lineis, quartam proportionalem inuenire*. Vide solutionem 9. regulæ aureæ in parte 1. capitis 3. libri 1.

Propositio 13. *Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem adinuenire*. Vide problema 1. partis 2. cap. 3. lib. 1.

Propositio 14. *Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum, parallelogrammorum, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos. Et quorum parallelogrammorũ vnum angulum vni angulo æqualem habentiũ reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos: illa sunt æqualia*. Vide theorema 2. partis 2. cap. 12. lib. 1.

Propositio 15. Est theorema 3. partis 2. cap. 12. lib. 1.

Propositio 16. *Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint: quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei quod sub medijs comprehenditur rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub medijs continetur, rectangulo: illæ quatuor rectæ lineæ proportionales erunt*. Vide theorema 5. partis 1. cap. 12. Logisticæ, & illi additam notam.

Propositio 17. *Si tres rectæ lineæ sint proportionales, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, æquale est ei, quod à media describitur quadrato. Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei, quod à media describitur, quadrato: illæ tres rectæ lineæ proportionales erunt*. De tribus lineis asserit illud quod præcedens propositio dicit de quatuor rectis lineis. Vide theorema 5. partis 1. cap. 12. lib. 1.

Propositio 18. *A data recta linea, dato rectilineo, simile similiterque positum rectilineum describere*. Vide problema 17. cap. 6. lib. 1.

Propositio 19. *Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum*. Est theorema 4. partis 2. cap. 12. lib. 1. Vide etiam propositionem scholij post theorema 14. partis 2. cap. 12. lib. 1, in cuius propositionis vniuersalioris coroll. 4. aliter demonstratur hæc 19. propositio Euclidea.

Propositio 20. *Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia & homologa totis. Et polygona duplicatã habent eam inter se rationẽ, quam latus homologum ad homologum latus*. Quid sint quantitates similes, & polygona similia, docet consideratio 9. cap. 5. lib. 3. Supposita hac Logisticæ doctrina, prior pars propositionis 20. patet ex terminorum intelligentia; altera pars constituit theorema 5. partis 2. cap. 12. lib. 1.

Propositio 21. *Quæ eidem rectilineo sunt similia, & inter se sunt similia*. Intellectis terminis vt declarantur in consideratione 9. cap. 5. lib. 3. manifestum est vniuersaliſaliter inter ſe ſimiles eſſe illas duas quantitates, quæ ſingulæ alicui eidem tertię ſunt ſimiles.

Propoſitio 22. *Si quatuor recta lineæ proportionales fuerint: & ab eis rectilinea ſimilia, ſimiliterque deſcripta proportionalia erunt. Et ſi à rectis lineis ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea, proportionalia fuerint: ipſa etiam recta lineę proportionales erunt*. Neglecta eſt. Cæterum quod aſſerit hæc propoſitio, & amplius aliquid docet vniuerſalior propoſitio propoſita in ſcholio quod ſequitur theorema 14. partis 2. cap. 12. lib. 1.

Propoſitio 23. Eſt theorema 6. partis 2. cap. 12. lib. 1.

Propoſitio 24. *In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum ſunt, parallelogramma & toti & inter ſe ſunt ſimilia*. Neglecta eſt. Cæterum vt parallelogrammum quodcunq; A E F G, ſit circa diametrum totius A B C D: iuxta definitionem 36. lib. 1. Euclidis, requiruntur hæ conditiones: primò, vt punctum F ſit in recta A C: ſecundò, vt rectæ B C & E F ſint inter ſe parallelæ: & etiam inter ſe parallelæ ſint G F & D C: vnde de quibuſcunque parallelogrammis habentibus has conditiones, aſſeritur quod partiale toti, adeòque omnia ſint inter ſe ſimilia. Per ſecundam conditionem & theor. 3. cap. 3. patet, angulum internum A C B = externo A F E, item angulum internum A C D = externo A F G: adeòque angulus A C B + A C D, hoc eſt B C D = A F E + A F G, hoc eſt E F G: ſed etiam manifeſtū eſt patet quod angulus internus A B C = externo A E F, atque præterea internus A D C = externo A G F, anguluſque B A D eſt communis: igitur parallelogramma A B C D & A E F G ſunt æquiangula. Rurſus quia oſtenſum eſt, angulum A B C = angulo A E F, anguluſque B A C eſt communis, per theor. 4. cap. 3. triangula A C B & A F E ſunt inter ſe ſimilia: eodemque modo conſtat inter ſe ſimilia eſſe triangula A C D & A F G: ergo A C *ad* A F = B C *ad* E F ∥ A B *ad* A E, & etiam A C *ad* A F = D C *ad* G F ∥ A D *ad* A G. Quoniam igitur prius oſtenſum eſt, parallelogramma A B C D & A E F G eſſe æquiangula, atque etiam ſecundo loco oſtenſum eſt, latera circa æquales angulos eſſe proportionalia: per definitionem primam lib. 6. Euclidis, & Logiſticæ noſtrę conſideratione 9. cap. 5. lib. 3. patet, iſta duo parallelogramma, hoc eſt ex hypotheſi in ſenſu Euclideo, circa diametrum totius deſcriptorum parallelogrammorum, quodlibet partiale parallelogrammum toti, adeòque omnia inter ſe ſimilia eſſe. Vt aſſerebatur. Fig. 42.

Nota P. Chriſtophorus Clauius in ſcholio poſt hanc Euclidis propoſitionem dicit, *intelligenda autem ſunt parallelogramma circa diametrum totius, eſſe talia, quæ habeant vnum angulum cum toto parallelogrammo communem, vt manifeſtum eſt ex forma demonſtrationis*. Profectò talem reſtrictionem intelligi poſſe ex forma demonſtrationis, non ſufficit ad ſubſiſtentiam propoſitionis, quæ caret hac reſtrictione: neque vlla reſtrictione indiget hæc Euclidea propoſitio, cum tantum agat de parallelogrammis deſcriptis circa diametrum totius: & quid intelligat per hæc parallelogramma, conſtat ex definitione 36. lib. 1. Euclideorum elementorum, vt hic notauimus, terminique intelligendi ſunt vt exponuntur ab ijs qui terminos adhibent; quod idem etiam requirimus in noſtra Logiſtica, vbi non ſemper termini intelliguntur vt exponuntur ab alijs authoribus: & niſi Euclides in commemorata & à Clauio annotata definitione dixiſſet quod per parallelogramma circa diametrum totius deſcripta velit intelligi ſola illa quæ habent duas conditiones hic à nobis indicatas, vera admitti non poſſet hæc propoſitio Euclidea.

Propoſitio 25. *Dato rectilineo, ſimile ſimiliterque poſitum & dato alteri æquale, idem conſtituere*. Quomodo huic problemati poſſit ſatisfieri, ſatis docent poſteriora problemata cap. 6. lib. 1. agentia de tranſmutatione figurarum.

Propositio 26. *Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit, & simile toti, & similiter positum, communem cum eo angulum habens; hoc circa eamdem cum toto diametrum consistit.* Neglecta est. Cæterum, verum est quod asserit, propositio. Etenim posito quod totum parallelogrammum sit A B C D, quodque illi simile aliud, habens angulum B A D communem, sit A E F G: ducta sit recta A F, quæ producta occurrat lateri D C, producto si opus fuerit, in puncto X. Ex eo quod parallelogramma A E F G & A B C D sunt similia, patet, angulum A G F = angulo A D X: angulus verò G A X est communis, quia communis supponitur G A E: igitur per theor. 4. cap. 2, triangula A G F & A D X sunt similia: adeòque A G *ad* A D = G F *ad* D X: sed quia per hypothesim etiam similia sunt parallelogramma A E F G & A B C D, patet etiam, A G *ad* A D = G F *ad* D C: igitur G F *ad* D X = G F *ad* D C, adeòque per theor. 1. cap. 2. patet, D X = D C: quoniam igitur per constructionem, puncta X & C sunt in eadem recta ad eamdem partem puncti D, patet, puncta X & C non esse diuersa: igitur diameter A F producta transit per punctum C: adeòque parallelogramma A B C D & A E F G circa eamdem diametrum consistunt. Vt asserebatur.

Fig. 42.

Propositio 27. *Omnium parallelogrammorum secundum eamdem rectam lineam applicatorum, deficientiumque figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis ei, quod à dimidia describitur; maximum id est, quod ad dimidiam applicatur, parallelogrammum simile existens defectui.* Neglecta est, & similiter neglectæ sunt duæ proximè subsequentes propositiones, quæ etiam negliguntur in Euclideis elementis scriptis à P. Taquet: causam affert, quod nullius ferè sint vsus: vnde parum probabile, quod citatæ inueniri possint, & consequenter hic eas prætermisimus tanquam inutiles ad finem propter quem has propositiones Euclideas proponimus: quibus adde quod agant de proportione superficierum: pro quibus propositionibus cōmodissima est, facillima Logisticæ nostræ secunda regula.

Propositio 30. *Propositam lineam rectam terminatam, extrema ac media ratione secare.* Quod petit hoc problema, diuersum non est ab eo quod petitur in problemate 11. lib. 2. Euclidis: vel in problemate 9. cap. 6. libri 1. Logisticæ.

Propositio 31. *In rectangulis triangulis figura quauis à latere rectū angulum subtendente descripta, æqualis est figuris, quæ priori illi similes, & similiter posita à lateribus rectum angulum continentibus describuntur.* Neglecta est. Cæterum quod in theoremate 8. cap. 3, siue in propositione 47. lib. 1. Euclidis docetur de aliquibus figuris similibus, nimirum de quadratis, hic asseritur de quibuscunque alijs figuris similibus: quod verum esse, satis constat ex eo quod figuræ similes habeant eamdem rationem quam habent quadrata laterum homologorum: qua de re videri potest scholium hic citatum ad propositionem 19: vel etiam consideratio 9. cap 5. lib. 3. vbi agitur de quantitatibus quæ dicuntur similes inter se; quare cum inter quadratum descriptum supra latus rectum angulum subtendens, & inter simul sumpta duo quadrata descripta supra latera rectum angulum continentia, inueniri rationem æqualitatis constet ex theor. 8. cap. 3: manifestum est etiam, rationem æqualitatis inueniri inter quamlibet figuram descriptam supra latus rectum angulum subtendens, & duas similes figuras similiter descriptas supra latera rectum angulum continentia. Vt asseritur.

Propositio 32. *Si duo triangula, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, secundum vnum angulum composita fuerint, ità vt homologa eorum latera sint etiam parallela: tum reliqua illorum triangulorum latera in rectam lineam collocata reperientur.* Neglecta est. Triangula A B C & C D E, composita, hoc est simul posita sint, vt habeant commune punctum C: præterea A B & C D, item A C & D E sint parallelæ: atque A B *ad* D C = A C *ad* D E. Quoniam A B & D C sunt parallelæ, per theor. 3. cap. 3, angulus B A C = alterno angulo

Fig. 43.

A C D

A C D ‖ angulo C D E, quia lineæ A C & D E sunt parallelæ: igitur angulus B A C = angulo C D E: sed per hypothesim, etiam A B *ad* D C = A C *ad* D E: ergo per theor. 4. cap. 3. triangula B A C & C D E sunt similia, adeòque angulus C B A = angulo E C D: sed etiam ostensum est, angulum B A C = angulo A C D: ergo angulus C B A + B A C = angulo E C D + D C A ‖ angulo A C E: sed per theorema 9. cap. 3, angulus A C B + C B A + B A C = duobus rectis: ergo angulus A C B + A C E = duobus rectis: ergo per theor. 1. cap. 3. puncta B, C, E, sunt in directum, adeòque triangulorum A B C & D C E, latera B C & C E in rectam lineam collocata reperiuntur. Vt asserebatur.

Propositio 33. *In æqualibus circulis, anguli eamdem habent rationē cum peripherijs quibus insistunt siue ad centra siue ad peripherias constituti insistant: insuper verò & sectores, quippe qui ad centra consistunt*. Neglecta est. Cæterum admitti non potest ab ijs qui negant angulos quantitatibus annumerandos, inter quas tantum admittitur proportio à Mathesi. Supposita Logisticæ doctrina, quod asseritur de angulis ad centrum, patet ex terminis: quia arcus quibus hi anguli insistunt sunt angulorum mensuræ. Quod dicitur de angulis ad circumferentiam, constat ex theor. 7. cap. 3. iuxta quod, medietates arcuum quibus hi anguli insistunt, sunt angulorum mensuræ. Denique quod de sectoribus dicitur, quia singuli habent æquales vel altitudines, vel bases, nimirum æqualium circulorum radios, habent inter se rationem quam habent arcus quibus insistunt: quare demonstratio qua in theoremate 4. partis primæ cap. 12. Logisticæ ostenditur, parallelogramma, & triangula æqualem altitudinem habentia, habere eam proportionem quæ inter bases inuenitur: etiam euincit, sectores, æquales radios habentes, eam habere proportionem quæ inuenitur inter arcus quibus insistunt, dummodò pro ductibus illic citatis, citetur ductus tertius, si placet pro basi arcum accipere, atque radium pro altitudine: vel certè ductus quartus, si placet per basim, radium, & per altitudinem, arcum intelligere, quod planè arbitrarium est.

PRimum Caput. Proponit omni & soli Algebræ conuenientem definitionem, scitu dignissimam, & fortè melius explicantem quid antiquæ Mathesi addiderit Algebra, quam altera eius definitio quæ affertur in fine numeri 16. pagina 16. lib. 3.

Secundum Caput. Affert aliqua speculatiuę Algebrę axiomata; & notat illorum dissonantiam cum antiqua Mathesi: cuius doctrinas supponi & promoueri ab Algebra, asserunt eius doctores: eas euerti ab Algebra, colligi potest ex his notis.

Tertium Caput. Continet aliquas satis mirabiles propositiones, siue aliqua paradoxa, quę sequuntur ad Algebræ fundamenta: sed à Mathesi antiqua admitti non possunt: ex his constat quomodo ex Algebræ fundamentis legitimè inferantur, vera, falsa, contraria, & contradictoria.

Quartum Caput. Septem diuersis reflexionibus considerat aliqua non approbanda in Euclideis elementis. In prima, agitur de primis horum elementorum fundamentis, vt sunt definitiones & axiomata. In secunda, considerantur theoremata & problemata. In tertia, notatur defectus regularum inuentionem dirigentium. In quarta, notatur defectus considerationis valorum in numeris, quos considerare necesse est, etiam pro vsitata vulgari practica Arithmetica. In quinta, notatur, quod non considerentur rationes maximè vtiles quas nostra Logistica appellat indifferentes. In sexta, notatur prætermissam commodissimam vtilissimamque considerationem ductuum Geometricorum nostræ Logisticæ. In septima notatur neglectam esse declarationem magnitudinis siue quantitatis constituentis Matheseos obiectum.

Quintum Caput. Nouem diuersis considerationibus proponit nonnulla vtilissima pro debita terminorum intelligentia requisita pro nostra Logistica. Prima agit de Matheseos obiecto. Secunda declarat diuersos numerorum valores. Tertia proponit differentiam inter ductus Geometricos reales, per quos quælibet quantitas in quamlibet quantitatē duci non potest: & ductus æquiualentes, per quos quælibet quantitas duci potest in quamlibet quantitatem. Quarta docet quomodo ductus Arithmeticus siue multiplicatio intelligi possit, vt sit ductus æquiualens ductui primo Geometrico. Quinta agit de mensuris & origine radicalium numerorum, atque quantitatum incommensurabilium. Sexta proponit aliqua circa Logisticæ nostræ definitiones rationum, necnon rationū ęqualium, atq; rationum indifferētium. Septima declarat regulam auream prout requiritur pro nostra Logistica. Octaua agit de significatione vocis *parallela*, quando duæ lineæ, vel duæ superficies dicuntur parallelæ inter se. Nona exponit quid requiratur aut sufficiat, vt duæ quantitates dicantur inter se similes, vel dissimiles: aut inter se genere vel specie conuenire aut differre.

LIBER TERTIVS LOGISTICÆ VNIVERSALIS

CONSIDERANS

CONVENIENTIAS, ATQVE DIFFERENTIAS

INTER

Antiquam Mathesim ab Euclide traditam.
Algebram à Vieta, Cartesio, alijsque promotam.
Logisticam prioribus libris expositam.

QVoniam prioribus libris declarata, atque stabilita Logisticæ nostræ elementa, hoc libro conferenda sunt cum antiquæ Matheseos & Algebræ elementis: nonnulla videntur prænotanda, tum circa illa elementa, quæ appellamus antiqua, tum circa Algebram, & eius elementa.

Per antiquæ Matheseos elementa, illa intelligimus, quæ aliter vsitata passim appellatione dicuntur Euclidea: prius enim scripta fuerunt ab Euclide, antiquo & celeberrimo Mathematico, qui trecentis circiter annis ante Christum floruisse legitur; & iure merito de Mathesi optimè meritus dici debet, quia in vnum volumen colligendo, ab antiquioribus Mathematicis inuentas fundamentales veritates, scripsit, ordinauitque Matheseos elementa, vsque in hodiernum diem vsitata in scholis Mathematicis: quæque à suo authore appellantur Euclidea. De his elementis videtur certum, quod ex innumeris propemodum expositoribus, atq; interpretibus, quos habuerũt, plerique fuerint satis scrupulosi vt obseruarent & ordinẽ, & numerũ veritatũ propositarum ab Euclide: nullum tamen scio, qui eumdẽ habuerit scrupulũ, circa demonstrationes veritatũ ab Euclide propositarum. Hinc successu temporis euenit, quod ex demonstrationibus Euclideis nihil sciatur ad nos peruenisse; neque mirũ videri debet maiori cura conseruatas [illegible] fuisse ipsas etiam demonstrationes propositas ab Euclide: siquidem Mathema[illegible] in demonstrationibus: sed tantũ subsistentiã, atq; nitorẽ suspiciant, [illegible] quoties Euclidis interpretes ex hoc capite melius aliquid substituere se posse arbitrati sunt, negligenda putarunt antiquiora: vnde factum est, quod in elementis, quæ appellantur Euclidea, nihil huic authori proprium inueniatur, quod diuersum sit à veritatibus elementaribus ab ipso collectis, & ordine quem in his veritatibus proponendis obseruasse creditur. Quam ob rem vbi deinceps nominamus antiqua, siue Euclidea elementa, intelligenda sunt illa Matheseos elementa, in quibus continentur veritates, quas Euclides proposuit inter elementares, & aliquo modo inuariatus perseuerat istarum veritatum ordo, quomodocunque tandem variatæ sint veritatum demonstrationes, aut inter se differant, quæ inueniũtur apud diuersos interpretes.

Algebra recentior est: distinguitur in numerosam, & speciosam; prior tantum vtilis pro Arithmetica, creditur inuenta aliquot centenis annis post Christum: siue à voce Arabica, siue aliunde nomen acceperit. Posterior, quę loco numerorum adhibet species literarum ex alphabeto desumptarum, inde dicitur speciosa; eius inuentor dicitur Franciscus Vieta, qui floruit sub finem seculi proximè elapsi; hæc speciosa Algebra nō minus seruit pro rebus Geometricis, quam pro Arithmeticis. A Renato Cartesio melius vt creditur ordinata, quam prius fuerat proposita, appellatur Geometria Cartesiana: habeturque maximè celebre, & præstantissimum huius authoris opus: quod à pluribus doctissimis viris, commentarijs illustratum, nouisque inuentionibus, & annotationibus decoratum est. Fateor quidem quod Algebra propemodum ab omnibus huius sæculi præstantioribus Mathematicis numeretur inter maximè vtilia Matheseos inuenta: quorum beneplacito subscribo, si agatur de practicis Matheseos inuentis. Cæterum approbare non possum singula Algebræ encomia, quæ inueniuntur apud Cartesianæ Geometriæ commentatores: dum Algebram diuinum inuentum appellant: ingenij humani limites determinare asserunt: aliaque huiusmodi pronunciant: quasi verò ignorassent Algebram non scientiam, sed tantum artem esse, & qualiacunque sint artis merita, necessariò esse inferioris ordinis, quam sint merita scientiæ: vel certè ad ignorantes scribendo, putassent huius artis æstimationem incrementum sumere posse à laudibus, quod sperare non potest ex merito: inanes laudes non requirit Algebra: ars est præstantissima, & approbata communi suffragio præcipuorum huius seculi Mathematicorum, iure merito dolentium quod ars, sit, atque inter scientias nullum hactenus optinuerit locum, non ex suo aliquo demerito, sed ex iniuria eorum, ad quos pertinebat excolere Algebram; eius praxes bonę sunt, & veræ, atque vtiles pro scientijs Mathematicis: sed vsque in hodiernum diem destitutæ sunt demonstrationibus: indigent tamen demonstrationibus, vt quæ ipsis mediantibus inferuntur, annumerari possint demonstratis Matheseos veritatibus: & associari reliquis cognitionibus scientificis, quæ solæ magni fiunt in Mathesi. Hoc verissimum esse omnes sciunt: præterea quamplurimi, vt diximus, atque pręstantes viri culturæ Algebræ allaborarunt: sed nescio, quo Algebræ fato de omnibus propemodum dici potest, quod de aliquibus affirmatur in epistola ad lectorem initio secundi libri Algebræ Cartesianæ, dum dicitur quod, *nec Methodi author, id est* Cartesius, *nec doctissimi eius commentatores, à seipsis impetrare potuerunt: vt bonas horas, quas subtilioribus inuentis dicauerunt, in edendo, quæ viam ad hanc Methodum sternerent, impenderent*; nimirum scribendo propria Algebræ fundamenta: hi tamen reipublicæ Mathematicę amplius profuissent, quam illis, quę appellant [illegible].

[illegible] ipsius Algebræ vtilitate, & ornamento expe- [illegible] in Gallia præstare conati sunt, eo tempore, quo ego Romæ scribebam meam Logisticam. Opus Gallicè scriptum prodijt, sine authoris nomine. Inscribitur Elementa Matheseos, siue principia generalia omnium scientiarum quæ pro obiecto habent magnitudinem. Promittit Algebram magis fundatam, quam in illa vsque tempora lucem viderit: atque non tantum dilucidatam, sed benè fundatam, & multum promotam Algebram à Cartesio scriptam, totque doctissimorum virorum notis, & commentarijs locupletatam, & illustratam. Huius operis authorem, siue authores, si fortè à pluribus collato studio compositum est, postremos Algebræ promotores appello; quo nomine sæpius citandi sunt, quia apud alios non inuenta, ex ipsis desumenda sunt Algebræ principia, conferenda cum principijs, aut nostræ Logisticæ, aut Matheseos antiquæ, siue Euclideæ, qui huius libri scopus est. Ex qua collatione liquido constabit, scientificam Mathesim ab Euclide traditam, parum vtilem esse pro ijs, quæ Algebræ propria sunt, propter dissonantiam inter antiquæ Matheseos, &

Alge-

Algebræ principia speculatiua: adeòque Algebrã aduersari ijs quæ supponit, vt sunt Euclidis elementa, & ab antiquioribus Mathematicis inuentæ, atque ad nos deriuatę doctrinæ. Nullã dissonantiam, aut cõtrarietatem inueniri inter principia Antiquæ Matheseos, & nostræ Logisticæ. Logisticam nostram non malè dici posse, antiquam Mathesim à defectibus expurgatam, breuius propositam, melius ordinatam, solidius fundatam, altius promotam: aliaque huius generis scitu dignissima, pro ijs qui delectantur cognitione eius; quod scitu necessarium est, vt intelligatur quid sit, vel in quo consistat vnaquæque ex triplici Methodo nominata in fronte huius operis: & quomodo inter se conueniant, vel ab inuicem differant diuersæ illæ viæ, à diuersis propositæ, vt perueniatur ad Matheseos intelligentiã.

C A P V T I.

Algebra benè definiretur, dicendo quod sit ars subtractionem vniuersalisans, siue ars additioni æquè vniuersalem reddens subtractionem.

VT celebratissimum illud inuentum, quod diximus Algebram appellari, melius conferri possit cum antiqua Mathesi & nostra Logistica: vtilissimum reputo cognoscere, quæ huic Algebræ ità propria sunt, vt neque antiquæ Mathesi, neque nostræ Logisticæ conueniant; nihil enim magis conducit ad cognitionem differentiæ, quæ intercedit inter Algebram, & antiquam Mathesim, vel Logisticam, quam proprietates conuenientes omni, & solæ Algebræ. Quod talis Algebræ proprietas sit, quæ in titulo huius capitis commemoratur, & consequenter legitimè assumitur ad statuendam Algebræ definitionem, quam apud Algebræ scriptores inuenire nunquam potui, colligo ex Peletario, qui in præfatione ad suam Algebram, *hac inquit inter monumenta ingeniorum præcipuum quendam obtinet locum dignitatis: quippe quæ omnes calculos subducere doceat: quibus prima illa numerorum tractatio non sufficit: vt si quid effugeat, non artis, sed artificis culpa sit.* Hæc Peletarius, qui nihil aliud commemorat tanquam proprium soli Algebrę. Idem confirmare ex singulis qui Algebrã scripserunt, difficile non est, si reflectatur ad causã propter quã ab Algebra admittãtur numeri minores nihilo. Causam indicat Clauius cap. 6. suæ Algebræ: vbi agit de Algebræ numeris fictitijs, & nihilo minoribus: nimirum vt subtractionem reddat vniuersalem, & modum habeat etiam maiores numeros ex minoribus subtrahendi, quod antiqua Mathesis, & Logistica nostra pronunciat impossibile. Clarissimè hoc in exemplo declarant postremi promotores Algebræ pag. 18. numero 81. vbi hæc leguntur, *prima fronte videri posset difficulter intelligibile, quod differentia inter* $+ 4$ *et* $- 3$, *sit* $4 + 3$, *hoc est* 7. *sed facilè erit intelligere hanc veritatem, si aduertatur, quod vt à quantitate* 4 *vsque ad* 0, *siue nihil perueniatur, oportet descendere per* 4 *vnitates, & rursus vt ex* 0, *siue nihil, perueniatur ad* $- 3$, *oportet vlterius descendere per tres vnitates: adeòque vt à quantitate* 4 *perueniatur ad* $- 3$, *oportet descendere per* 7 *vnitates.* En clarissimè, atque breuissimè declaratum quomodo numeri falsi, fictitij, siue nihilo minores, quos sola Algebra admittit, vtiles sint vt ex minori numero 4 subtrahere possit maiorem numerum 7, atque assignare residuum quod remanet ex hac subtractione: quodque hoc residuum constituatur à numero $-$ 3, hoc est à tribus vnitatibus falsis, fictitijs, siue nihilo minoribus. Quemadmodum tamen huiusmodi vnitates, vel quantitates nihilo minores, soli Algebræ conueniunt: ità etiam soli Algebræ propria est illa subtractio, in qua ex minori quantitate maior quantitas subtrahitur: & quia in hoc casu impossibilem esse subtractionem pronunciat omnis Mathesis diuersa ab Algebra: illi soli propria est vniuersalis hæc subtractio, quæ non minus possibilis est quando ex minori numero, vel quantitate maior subtrahenda proponitur, quam quando ex vna quantitate, altera, vel minor, vel æqualis subtrahenda est, quod tantum scit, & docet Mathesis diuersa ab Algebra. Quoniam verò hæc subtractionis vniuersalitas in Algebra resultat ex numeris falsis, fictitijs, & nihilo minoribus, qui in ordine ad istam subtractionis vniuersalitatem assumuntur, atque admittuntur ab Algebra: satis patet quomodo præcipua, & propria Algebræ laus, quæ à Peletario consideratur in vniuersalitate subtractionis, diuersa non sit ab eius laude desumpta à quantitatibus falsis, fictitijs, & nihilò minoribus. Quod Peletarius Algebræ proprium agnouit, idem in Algebra singulare docet Clauius cap. 6. suæ Algebræ, vbi tractationem de numeris nihilo minoribus concludit dicens, *vides igitur quam pulchrè hac ars pro immensa copia sua vtatur, & ijs qua sunt, & ijs qua non sunt, sed tantum esse finguntur.* His Clauij dictis, consonat quod legitur in epistola, quæ subsequitur paginam 48. partis secundæ Geometriæ Cartesianæ, vbi in Algebræ laudem exclamans commentator: *in Algebra* inquit *hoc eximium est, quod abundantias defectusque pari momento æstimet, neque illi qua plus habent, magis necessaria sunt, quam qua minus.* Exclamationis sensus hic est: in Algebra hoc eximium est, quod abundantias supra nihil, defectusque à nihilo pari momento æstimet: Neque illi numeri qui habent signum plus, & aliter dicuntur nihilo maiores, magis necessarij sunt, quam qui habent signum minus, atque aliter vocantur nihilo minores. Hunc sensum ignorare non potest, qui aut Clauij, aut ipsius Cartesij Algebram delibauit. Etenim Cartesius libro 1. suæ Geometriæ pag. 5. expresè monet, se pro suis supponere sufficientem, & Geometriæ antiquæ, & communis Algebræ notitiam; post breuem enim descriptionem ordinis obseruandi in problematum solutionibus, quare hunc tanti momenti ordinem pluribus non declaret, causam affert, *quod nihil hic adeò difficile deprahendam, vt ab illis, qui vtcunque in Geometria communi, atque Algebra versati sunt, & obseruaturi porro sunt qua tractatu hoc continentur, inueniri non possit, &c.* Adeòque tantopere à communi Algebra deprædicatos admittit, & supponit, excessus supra nihil, & defectus à nihilo: hoc est quantitates maiores, & minores nihilo: quod declarare planè inutile est apud eos, qui delibarunt communem Algebram. Quoniam tamen hoc tanti momenti mysterium est in Algebra, vbi Cartesius suæ Geometriæ libro 3. agit de radicibus, quas falsas appellat (quo nomine apud Clauium, & alios Algebristas etiam vsitatum est indicare quantitates nihilo minores) expresè declarat, quod per has falsas radices intelligat, celeberrimas Algebræ quantitates nihilo minores: etenim pag. 69. hæc habet, *sæpe accidit quod quadam harum radicum falsa sint, hoc est nihilo minores, &c.*

Superfluum videtur hic pluribus probare, quod ab Algebra admittantur quantitates nihilo minores, & consequenter illi conueniat illa subtractionis vniuersalitas, quæ resultat ex his quantitatibus nihilo minoribus: quæque sufficit vt etiam ex minoribus quantitatibus auferri, & subtrahi possint quantitates maiores. Quoniam verò tam antiqua Mathesis, quàm nostra Logistica, pronunciat impossibilem esse hanc subtractionis vniuersalitatem: in illa habetur proprietas omni, & soli Algebræ conueniens: quæque meretur assumi pro legitima Algebræ definitione: præsertim cum hæc subtractionis vniuersalitas tam celebris sit apud Algebræ scriptores, vt ex allatis superius authoritatibus colligitur.

Vtrum inueniatur alia proprietas alicuius momenti, quæ omni, & soli Algebræ propria sit, non inquiro: diffido enim me talem aliquam inuenire posse, & existimo, quod

quod quidquid omni, & soli Algebræ proprium inuenitur, vel dependeat, vel connexum sit cum pulcherrima, atque celebratissima hac proprietate ipsius Algebræ. Nimia profectò Mathematicarum rerum ignorantia laboraret, qui suspicaretur talē aliquā proprietatē inueniri in ea, quæ appellatur Algebræ regula, de qua agit Clauius cap. 8. suæ Algebræ, vbi notat quod à diuersis authoribus diuersimodè aliquantulum proponatur: etenim quomodocunque proposita consideretur hæc Algebræ regula, negari non potest verissimum esse, quod de illa scribit doctissimus Marinus Ghetaldus initio libri de resolutione & compositione Mathematica: nimirum in antiqua Mathesi passim vsitatam fuisse resolutionem, siue analysim, atque hanc paulò magis restrictam, & commodam, constituere Algebræ regulam. Idem ferè alijs verbis asseritur in epistola dedicatoria partis secundæ Geometriæ Cartesianæ, vbi pagina 5. & 6. agendo de inuentis antiquorum Mathematicorum hæc leguntur. *Ad qua inuenienda, cum non alia via (quantum constat) quam qua per compositionem, & resolutionem procedit, vterentur, quaque naturalis potius ingenij facultas, aut industria, vsu, & exercitatione petita, quam ars certis legibus, & præceptis contenta dici meretur. Recentiores artem quandam excogitarunt, quam vocant Analyticam, &c.* Hæc analytica alio nomine Algebra appellatur. Analytica verò dicitur, quia deriuatur à celeberrima apud antiquos analysi, siue resolutione: quare si in hac Algebræ regula proprium aliquid habeat Algebra, hoc aliud esse non potest quam aliquid restringens, & commodiorem reddens resolutionem, siue Analysim passim cognitam, atque à Mathematicis adhibitam antequam lucem viderit Algebra. Iam verò in istis restrictionibus vniuersalioris resolutionis cognitæ in antiqua Mathesi, nihil magni momenti inueniri existimo, quod soli Algebræ proprium sit, quia apud Algebræ scriptores nihil vt tale annotatum, & deprædicatum inueni, licet abundent in suis extollendis: maior verò facilitas, atque commoditas, quam Ghetaldus concedit regulæ Algebræ, & soli Algebræ propria est, resultat ex subtractionis vniuersalitate superius commemorata. Quod verò ad hanc commoditatem conducunt compendiatæ scriptiones ipsius Algebræ, illi non videtur proprium: quandoquidem compendiatæ scriptiones apud diuersos Algebræ scriptores maximè diuersæ sint: adeòque determinatè nulla Algebræ propria est. Deinde etiam pro antiqua Mathesi adhibitas, & passim vsitatas fuisse compendiatas scriptiones, antequam extaret Algebra, ignorare non potest qui legit Euclidis elementa. Numerorum additionem, & subtractionem docet antiquissima Arithmetica practica: hæ tamen atque huiusmodi operationes nullatenus vsuales sunt circa numeros in charta repræsentatos vocibus quibus enunciantur: & antè originem Algebræ adhibitæ fuerunt scriptiones compendiatæ, vocesque longiores breuiter indicatæ characteribus, siue notis arithmeticis, vt fit initio libri 1. Logisticæ. Deinde in Euclideis elementis nihil magis obuium, quam per Alphabeti literas compendiatè indicare lineas, superficies, corpora, angulos, numeros, &c.

Quandoquidem igitur nihil inueniam soli Algebræ proprium, magisq; ab Algebræ scriptoribus deprædicatum, quam sit illa subtractionis vniuersalitas, quæ resultat ex numeris falsis, & nihilo minoribus: non melius quam ab hac subtractionis vniuersalitate desumi posse existimo Algebræ definitionem; vel saltem ab hac eius proprietate eam desumendo, afferri omni, & soli Algebræ conuenientem definitionem, vt in titulo huius capitis asseruimus.

CAPVT II.

Algebræ nonnulla speculatiua fundamenta desumpta ex postremis Algebræ promotoribus.

PRæcedenti capite proposuimus breuissimam Algebræ definitionem, maximè vtilem vt intelligatur aliqua magni mométi differentia, inter laudatissimam illam artem, quæ appellatur Algebra, & reliquas, aut artes, aut scientias Mathematicas. Hanc, vel illi similem definitionem, ad Algebræ cognitionem æqualiter conducentem, & vtilem ad finem quem intendimus, nusquam inuenire potui explicitè propositam apud Algebræ doctores: tametsi implicitè omnes videantur affirmare, quod dicitur in hac nostra definitione Algebræ. Afferunt quidem exempli gratia, quod Algebra sit inuentum, quod Diophantus descripsit, & transmisit ad posteros: vel ars, quę à quodã Mathematico Arabo, vel ab aliqua voce arabica appellationem deriuauit: vel quod sit antiqua Analysis magis restricta, & commodior reddita: vel alia huius generis pronunciant de Algebra, quæ magis iuuant inquirentes eius originem, vel nominis deriuationem, quam notitiam differentiæ, quæ intercedit, inter Algebram, & Mathesim antiquam, aut nostram Logisticam. Ad huius differentiæ profundiorem intelligentiam, non parum conducerent fundamenta aliqua Algebræ propria: verum hæc nusquam annotata inuenio apud Algebræ scriptores, ex quibus propemodum singuli in Algebræ laudibus maximè diffusi sunt, sed adeò parci in assignandis ijs, quæ soli Algebræ cõueniunt, atque diuersa sunt à quantitatibus deficientibus à nihilo, vt nõ immeritò dubitari possit, vtrũ sibi propriũ aliquid habeat, præter quantitates à nihilo deficiẽtes. Reliquis Algebræ scriptoribus, postremi eius promotores liberaliores sunt in afferẽdis Algebræ fundamẽtis: nulla quidem afferunt principia de quibus affirment quod soli Algebræ propria sint: tamen ex fundamentis quæ proponunt vt omnibus rebus Mathematicis cõmunia, satis facilè colligi possunt nonnulla soli Algebræ propria, quomodocunque illa differant ab Algebræ proprietate adhibita in eius definitione. Quandoquidem enim ista fundamenta, quæ afferuntur communia omnibus rebus Mathematicis, afferantur ab ijs, qui prę cęteris aliquid assecuti sunt in Algebra, negari non potest singula admittenda esse ab Algebra: quare singula de quibus vlterius constabit quod admitti non possint, aut pro antiqua Mathesi, aut Logistica nostra, iure merito dici poterunt pertinere ad thesauros Algebrę proprios, quibus in immensum locupletatam esse antiquam Mathesim credendum est, si Algebrę scriptores merentur fidem.

Ad eum quem nobis in hoc tertio libro proposuimus finem, sufficit ab Algebra admittenda esse singula fundamenta quæ annotantur à postremis Algebrę promotoribus; de illis verò dubitare non permittit authoritas scriptorum, à quibus proponuntur hęc elementa, quę proinde fideliter ex ipsis transcripta, hic propono eo ordine quo Gallicè scripta inueniuntur apud eos, quos appellamus postremos Algebræ promotores, vt monuimus initio huius libri. Quod vlterius à nobis notatur ad singula hęc elementa, nimirum, an, vel quomodo admittenda sint pro antiqua Mathesi, vel nostra Logistica: nostrum, adeòque paruę authoritatis iudicium est, quod libenter subijcimus lectoris correctioni; pluribus verò hac in parte confirmare nostram opinionem, magnam prolixitatem, sed paruam vtilitatem afferret pro argumento huius scriptionis, pro quo, vt diximus, sufficit singula fundamenta, quæ hic descripta exhibemus ex postremis Algebrę promotoribus, admit-

admittenda eſſe ab Algebra: & conſequenter ab Algebra negari non poſſe, quę ex his principijs legitimè inferuntur.

Algebræ axiomata deſumpta ex poſtremis Algebræ promotoribus.

Omnis magnitudo ſibi ipſi æqualis eſt. I.

QVod in hoc primo Algebrę axiomate aſſeritur nuſquā inter axiomata notatur: ſed tamen verum habetur, & tanquam ex terminis notum aſſumitur, tum in antiqua Matheſi, tum in noſtra Logiſtica. An fortè Algebra magis accurata eſt, vt expreſsè annotatas pręmittat ſingulas veritates quas aſſumit tanquam notas ex terminis? Id ſuſpicari poſſet aliquis planè ignarus Algebræ, ſed non aliquis, qui vel extremis labris delibauit Algebram. Aliam profectò huius rei cauſam ſuſpicor: etenim niſi fallor in hac aſſertione, quæ, & veriſſima, & maximè manifeſta eſt, dummodò termini intelligantur, vt exponuntur in antiqua Matheſi, & noſtra Logiſtica: retia præparantur, vt decipiantur parum oculati, & in errorem inducantur. An mea ſuſpicio fundata ſit, iudicet Lector. Suſpicionis cauſa hæc eſt; agendo capite primo de Algebræ definitione, diximus quantitates nihilo minores admitti ab Algebra, eaſque quantitates falſas appellari, & planè incognitas eſſe antiquæ Matheſi, ac Logiſticæ noſtræ; de his igitur Algebræ falſis quantitatibus quæro, vtrum ſint, vel non ſint magnitudines, ſiue quantitates; homo pictus, eſt quidem homo pictus, ſed non eſt homo, quia particula *pictus*, eſt particula diſtrahens, ſiue alienans; verum homo albus, non tantum eſt homo albus, ſed etiam eſt homo: quia particula *albus*, eſt particula contrahens, ſiue reſtringens; quod igitur quærebam, & hic ſciendum, atque attentè conſiderandum eſt vt intelligatur meæ ſuſpicionis fundamentum: in hoc potiſſimum conſiſtit, vt cognoſcatur vtrum agendo de falſis quantitatibus Algebræ, particula *falſa*, ſit particula diſtrahens, ſiue alienans, vel certè ſit particula reſtringens, ſiue contrahens. Si ſupponatur primum, verum erit, quod quantitas falſa, non ſit quantitas ſiue magnitudo, adeòque quod in præmiſſo axiomate aſſeritur de omnibus & ſolis magnitudinibus, intelligi non poteſt de magnitudinibus falſis, quæ non ſunt magnitudines; atque in hac ſuppoſitione ab antiqua Matheſi, & noſtra Logiſtica tam manifeſtè verū eſt quod aſſeritur in hoc primo axiomate, vt non mereatur expreſsè notari inter axiomata: ſed cum alijs ſimilibus veritatibus maximè manifeſtis poſſit liberè aſſumi, & adhiberi. Si ſupponatur ſecundum, quod nimirum particula *falſa* ſit particula contrahens, ſiue reſtringens, quando falſæ quantitates appellantur defectus à nihilo: verum erit quod quantitas falſa, ſit quantitas ſiue magnitudo, adeòque quod in præmiſſo axiomate de omnibus & ſolis magnitudinibus aſſeritur, etiam intelligi debet de falſis magnitudinibus: hoc eſt de nihilo, & integra nihili progenie, ſiue defectibus à nihilo: quas falſas quantitates non admitti, neque cognoſci, aut ab antiqua Matheſi, aut à noſtra Logiſtica, iam ſæpius monuimus; & conſequenter præmiſſum axioma in hoc ſecundo ſenſu, tantum intelligi poteſt à ſola Algebra. Iam verò quod me ſuſpicari ſuperius dixi, aliud non eſt, quam pro Algebra intelligendum eſſe præmiſſum axioma in ſecundo ſenſu, vt per vocem magnitudo, non tantum intelligatur illud quod in antiqua Matheſi, & noſtra Logiſtica per hanc vocem intelligendum eſt, & ab Algebra vocatur vera magnitudo: ſed pro Algebra intelligendum eſſe primum hoc axioma, vt in illo vox magnitudo amplectatur, tam veras, quàm falſas Algebræ magni-

magnitudines: adeòque supponat, magnitudines siue quantitates rectè diuidi in veras, & falsas: hoc est in quantitates, quæ sunt aliquid, & quantitates quæ non sunt aliquid, sed nihil sunt, singulasque sine addito appellari posse magnitudines siue quantitates. Certè hæc Algebræ suppositio talis non est, vt propter sui euidentiam, non mereatur expressè prænotari: illa verò eius declaratio, quæ habetur ex vocibus adhibitis in axiomate, non videtur vtilis nisi cupientibus decipere Mathematicos Algebræ ignaros, quibus incidere non potest, quod nihil siue nulla quantitas, ab Algebra vocetur quantitas. Vtrum verò quod hic monui me suspicari, verum sit: & an iuxtà Algebram quantitates dicendæ sint, & nihil, & defectus à nihilo, & illa quæ ab ipsis appellantur falsæ quantitates: clarius constabit ex dicendis ad subsequentia Algebræ fundamenta. Incredibile quidem videri posset, quod hic diximus nos suspicari verum esse; nimirum in Algebra, non minus magnitudines appellandas esse, quæ tantum sunt fictæ, falsæ, siue imaginariæ magnitudines: quam quæ sunt verè magnitudines; existimando hanc suppositionem non minus absurdam, & noxiam esse, quam illa in qua statueretur, quod per vocem *homo*, non minus intelligi debeat homo pictus, fictus, imaginarius, quam verus homo; immo potius audiendo nominari veras, & fictas, siue falsas quantitates: inferendum foret, quod sicut homo imaginarius, siue fictus non est homo, ità quantitas imaginaria siue ficta, non sit quantitas; tamen manifestum videtur per vocem *magnitudo*, siue *quantitas*, non minus veram quam falsam, siue fictam, aut imaginariam quantitatem intelligendam esse apud eos, qui docent, vel potius supponunt, his omnibus easdem proprietates conuenire. An hoc fiat ab Algebra, colligendum est ex sequentibus eius fundamentis, illorumque vsu: & dicendis in fine quarti paradoxi capitis sequentis.

II. *Omnis magnitudo, minus seipsa, æquatur nihilo.*

Hoc secundum axioma magis sapit Algebram quam præcedens: explicitè enim agit de nihilo: quoniam verò nihili nulla cura est aut antiquæ Mathesi, aut nostræ Logisticæ, reponendum videtur inter illa quæ soli Algebræ propria sunt. Cæterum cum ab antiqua Mathesi, aut Logistica verũ negari nõ possit, si eius sensus est, quod à magnitudine A, auferẽdo eamdem magnitudinem A, vel aliam ipsi æqualem, nihil, siue nulla quantitas, aut residuum remaneat: ita verum admitti non potest, si in illo vox *æquatur* significet habere proportionem æqualitatis: quem huius vocis sensum admittit, & antiqua Mathesis, & nostra Logistica, & etiam Algebra, vt constat ex subsequente numero XIIII. Nullam verò proportionem admittit, vel antiqua Mathesis, vel nostra Logistica, nisi inter duas eiusdem generis quantitates, quæ veræ quantitates sint: adeòque non admittit proportionem vllam, neque inæqualitatis, neque æqualitatis, inter nihil, & nihil, aut his similes quantitates soli Algebræ cognitas, quæ veræ quantitates non sunt.

III. *Omnis magnitudo, siue omne totum æquatur aggregato omnium suarum partium.*

Pro antiqua Mathesi, & Logistica nostra, saltem claritatis gratia, addendum videtur, *in quas diuisa est talis magnitudo, vel diuisa intelligitur*. Nisi enim in partes diuisa sit, vel diuisa intelligatur magnitudo: neque intelligi potest esse aggregatum partium. Fateor pro Algebra non requiri hanc restrictionem, quandoquidem postremi Algebræ fundatores expressè doceant (vt hic dicemus numero XII.) non dari vllam magnitudinem, quæ non sit aggregatum partium, quod admittere non potest, aut antiqua Mathesis, aut nostra Logistica; immo idipsum fortassis

neque

neque Algebra admittere poteſt. An vnitas numerorum omnium principium, quantitas non eſt? Certè promotores Algebræ de hac vnitate pag. 4. numero XXVI. expreſsè aſſerũt, *vnitas eſt ſimplex, indiuiſibilis, & non compoſita ex vllis partibus*. Verum quia eadem pagina 4, numero XXII. pronunciant, *eſſentiam omnium magnitudinum in eo conſiſtere quod diuiſibiles ſint, & partes habeant.* Quid de illorum doctrina dicam, ignoro; eam ſuſpicere poſſum, aſſequi non magis poſſum, quam intelligere veritatem vtriuſque partis alicuius contradictionis.

Omnis magnitudo, vel omne totum eſt maius ſua parte. IV.

Si per vocem magnitudo intelligenda eſt, tam vera quam falſa Algebrę magnitudo: admitti non poteſt hoc axioma ab antiqua Matheſi, aut noſtra Logiſtica; ſola enim Algebra admittit vnũ nihil maius altero: & vt ſæpe diximus, Algebræ magnitudines falſæ, aliud non ſunt quam nihil. In ſenſu in quo ab Euclide proponitur, atque deinde adhibetur, admittendum eſt pro antiqua Matheſi; ſuppoſito hoc ſenſu, pro noſtra Logiſtica, addenda eſt exceptio illius totius quod eſt productum ex additione quæ ſubtractioni æquiualet: de qua conſuli poteſt Logiſticæ locus citatus in indice ad vocem additio æquiualens ſubtractioni: neque enim paucis indicari poteſt hæc Logiſticæ additio, ex qua deriuat eam vtilitatem, quam Algebræ cultores fruſtra deriuare conati ſunt, ex quantitatibus deficientibus à nihilo, Algebræ adeò proprijs, vt à nulla alia Matheſi admittantur. Dixi hoc quartum axioma ſine vlla vlteriori exceptione, aut reſtrictione admittendum pro antiqua Matheſi, dummodò intelligatur in ſenſu, in quo ab Euclide proponitur, & adhibetur; hic ſenſus paſſim obuius & cognitus non eſt ex cognitione terminorum, prout adhibentur à Grammaticis, & exponuntur à Grammaticorum Calepino; apud hos benè dicitur, quod aliquod totum ſit homo, atque huius totius vnam partem eſſe corpus, alteram partem eſſe animam: tamen iuxtà Euclidem, ex vi axiomatis propoſiti, non infertur legitimè, quod homo ſuo corpore maior ſit. Similiter negari non poteſt, complexum ex corpore & ſuperficie eſſe aliquod totum, cuius totius vna pars eſt corpus, altera eſt ſuperficies: ſi ſubſumas, atqui omne totum eſt maius ſua parte: & hinc inferas, ergo complexum ex corpore, & ſuperficie, eſt maius corpore: ſequelam non admitteret Euclides, aut Matheſis antiqua. Sexcenta huiuſmodi inueniuntur, quæ per voces *totum*, vel *pars*, intelligi debent iuxtà Grammaticos, & tamen non pertinent ad iſtarum vocum ſignificationem, quam iuxtà Euclidem habent in præmiſſo axiomate. Iuxtà hunc authorem duæ rectæ lineę ſeſe interſecantes, habent punctum commune: negat tamen habere partem communem, adeòque iuxtà ipſum nefas eſt punctum appellare lineæ partem: ſimiliter linea ſuperficiei, aut corporis pars dici non poteſt: multo minus, inclinatio, rectitudo, curuitas, &c. dici poteſt pars lineæ, aut ſuperficiei, inclinatæ, rectæ, curuæ, &c. tamen qui à linea inclinata, recta vel curua, &c. tollit inclinationem, rectitudinem, vel curuitatem: etiam tollit aliquam partem conſtitutiuam illius totius, quod dicitur linea inclinata, linea recta, linea curua, &c: quemadmodum ille qui ſtatuam pulchram vitiando, deſtruit eius pulchritudinem, tollit partem conſtitutiuam illius totius quod appellatur ſtatua pulchra. Vt in Logiſtica declinarem omne periculum æquiuocationis, quod naſci poſſet ex diuerſa ſignificatione quam voces *totum* & *pars* habent in vſu communi, & in præmiſſo axiomate, quod etiam numeratur inter axiomata antiquæ Matheſeos: non loquor de toto, & parte, ſed de producto per additionem, & eius genitoribus; & niſi fallor in præmiſſo axiomate, Euclides idem tantum ſignificat per vocem *totum*, quod alibi nobiſcum appellat productum ex additione; atque ſimi-

similiter in eodem isto axiomate per vocē *pars*, nihil aliud significatur, nisi quod alibi nobiscum appellatur, pars producens per additionem, siue additionis genitor.

V. *Plura nihil æquantur nihilo.*

Hoc Algebræ axioma agens de nihilo, inutile est pro antiqua Mathesi, & nostra Logistica. Præterea falsum est si vox *æquatur* intelligatur vt significet proportionem æqualitatis, vt constat ex causa, propter quam hoc casu diximus falsum esse secundum axioma, quod etiam agit de nihilo: ex quo obiter colligi potest quanta nihili cura sit Algebræ, cuius nusquam in vllo axiomate meminit antiqua Mathesis; fortassis causa est, quia Algebræ nihil magis proprium, quam nihil, & ex nihilo progenitæ quantitates nihilo minores, quas aliter falsas, vel fictitias appellant, atque adeò propriæ sunt Algebræ, vt non admittantur ab vlla Mathesi diuersa ab Algebra: immo præbent materiam nitidissimæ definitionis Algebræ: vt constat ex dictis capite præcedenti. An constituant integrum patrimonium tantis laudibus celebratæ Algebræ, hactenus non constat. Axiomata tamen singula, aut quæ præcedunt, aut quæ subsequuntur, omni ex parte inutilia non sunt pro antiqua Mathesi vel Logistica nostra, si illa excipiantur in quibus agitur de nihilo.

Quando in antiqua Mathesi aut Logistica nostra dicitur $2 + 0 = 2$: vel 2 *in* $0 = 0$: sensus non est, quod numero 2 addendo nihil, producatur 2: sed sensus est, quod 2, remaneat 2, quando non additur aliquid. Supposito priori sensu, adeòque quod 2 sit productum ex additione in qua numero 2 additur 0; quoniam productum ex additione est illud quod ab Euclide appellatur totum, in axiomate in quo totum sua parte maius esse asserit: atque in eodem illo axiomate, per partes intelligit genitores singulos illius producti: igitur dicendum foret, 2 esse aliquod totum, cuius vna pars est 2, altera pars est 0: & haberetur totum æquale vni eius parti, maius verò altera eius parte: quod tamen impossibile esse affirmat, & Euclides & nostra Logistica. Similiter quando ab antiqua Mathesi, vel nostra Logistica asseritur, 2 *in* $0 = 0$: sensus non est, 2 ductum in 0 producere 0: sed sensus est, 2 non ductum in aliquid, non producere aliquid. Etenim nihil, & non aliquid, idem significant in antiqua Mathesi, & nostra Logistica: vnde nihil addere, nihil subtrahere, in nihil ducere, per nihil diuidere, idem significant ac non addere aliquid, siue non facere additionem: non subtrahere aliquid, siue non facere subtractionem: non ducere in aliquid, siue non facere multiplicationem: non diuidere per aliquid, siue non facere diuisionem. Hæc solicitè retinenda, vt euitentur æquiuocationes inter nihil antiquæ Matheseos vel nostræ Logisticæ, & præciosas Algebræ quantitates falsas, quas fatentur quidem nihil esse: sed tamen eas non tractant ac si forent nihil, adeòque nulla quantitas; immo de illis agunt ac si forent quantitates, eas addendo, subtrahendo, multiplicando, diuidendo, vnius ad alteram proportionem admittendo, &c. licet horum aliquid circa nihil fieri posse, neget antiqua Mathesis, & nostra Logistica. Id non ità facilè apparet legentibus Algebræ scriptores, propter mutatum ab ipsis nihili nomen, dum quæ verè nihil sunt, quantitates falsas appellando, ignorātibus apparere faciant quod non malè quantitates dicendæ sint, licet non sint quantitates, sed nihil, adeòque non quantitas.

VI. *Magnitudines æquales eidem tertiæ, sunt æquales inter se.*

Hoc axioma admittitur ab antiqua Mathesi, & nostra Logistica: sed non in sensu in quo

quo admittitur ab Algebra; nimirum quod de magnitudinibus ſiue quantitatibus aſſerit, intelligendo tam de veris, quam de falſis Algebræ quantitatibus.

Si magnitudinibus æqualibus, æquales magnitudines addantur, tota erunt æqualia. VII.

Hoc axioma admittitur ab antiqua Matheſi, & noſtra Logiſtica; ſed tantum agendo de Algebræ veris magnitudinibus; falſæ enim Algebræ magnitudines, in antiqua Matheſi, & Logiſtica noſtra non cognoſcuntur.

Si à magnitudinibus æqualibus, æquales magnitudines ſubtrahantur, reſidua erunt æqualia. VIII.

Suppoſito quod ex ſubtractionibus de quibus agit axioma, remaneant reſidua, hæc reſidua inter ſe æqualia eſſe, admittit & docet antiqua Matheſis & noſtra Logiſtica: non admittit tamen, ex his ſubtractionibus aliqua reſidua remanere, quando ex ipſis nihil remanet: etenim nihil ſiue non aliquid, appellare aliquid, inauditum eſt in antiqua Matheſi & noſtra Logiſtica. Algebra ſola has locutiones adhibet pro qua per reſidua quæ remanent ex ſubtractionibus de quibus agit axioma, etiam intelligi debent & nihil, & integra nihili progenies à nihilo deſcendens, quæ conſtituit ſoli Algebræ proprias quantitates nihilo minores, quas aliter appellat falſas, ſiue imaginarias. Hinc quia numerus 4 æquatur numero 4, ex ſingulis eumdem, ſiue æqualem numerum 7 auferendo, ex vi præmiſſi axiomatis legitimè ſequitur in Algebra, remanere reſidua, & iſta reſidua eſſe inter ſe æqualia: atque hæc reſidua conſtitui à tribus falſis vnitatibus; quæ quidem reſidua non ſunt aliquid, adeòque nihil: ſed tamen inter ſe æqualia, & habent inter ſe proportionem æqualitatis, vt in vſu iſtorum reſiduorum æqualium paſſim aſſumunt, dum aſſerunt exempli gratia $-3 = -3$: vel -3 *ad* $-2 = 3$ *ad* 2: quãtitates enim iſtæ affectæ ſigno $-$ apud ipſos falſæ ſunt, & nihilo minores. Oppoſitũ docet antiqua Matheſis, & noſtra Logiſtica: & primo aſſerit ſibi incognitas ac prorſus impoſſibiles eſſe prædictas ſubtractiones, & conſequenter ex illis non manere reſidua, adeòque non remanere reſidua inter ſe æqualia, aut habentia vllam proportionem. Hic obiter notandum quanta diuerſitas oriatur inter documenta Algebræ & illa quæ antiquæ Matheſi atquæ noſtræ Logiſticæ communia ſunt in vno eodemque axiomate: per hoc ſolum quod vox *reſiduum* ab omnibus non intelligatur in eadem ſignificatione. Hæc tamen differentia reſultat ex prop[illegible]mni & ſoli Algebræ propria, quam ſuperius capite 1. adhibuimus pro Algebræ definitione: nimirum quod Algebra, præter quantitates cognitas Matheſi diuerſæ ab Algebra, aſſumat ~~atque admittat~~ quantitates quas falſas ſiue nihilo minores appellat, quæ ſingulæ aliud non ſunt quam nihil, ſiue non aliquid, adeòque non quantitates: ſingulas tamen conſideret ac ſi forent quantitates: & non minus inter illas admittat æqualitatem, & alias proportiones, quam inter illas, quę reuera ſunt quantitates, inter quas ſolas aut æqualitatẽ aut aliam proportionem agnoſcit antiqua Matheſis, aut noſtra Logiſtica. In hac etiam inueniuntur quantitates affectæ ſigno $-$, ſed hæ quantitates, neque falſæ ſunt, neque nihilo minores: ſed omnes ſunt veræ & nihilo maiores quantitates, vt conſtat ex declaratione ſignificationis quam in Logiſtica habet ſignum $-$: de quo conſuli poteſt index, ſiue locus indicatus in indice ad vocem minus vel ſignum $-$.

IX: *Si magnitudinibus inæqualibus, addantur æquales, tota erunt inæqualia.*

Pro antiqua Mathesi, & nostra Logistica, admittendum est axioma de magnitudinibus quæ reuera sunt magnitudines. Pro Algebra adhibetur, tam pro magnitudinibus quæ veræ dicuntur in Algebra, quam pro illis quæ appellantur falsæ.

X. *Si à magnitudinibus inæqualibus, subtrahuntur æquales, residua sunt inæqualia.*

Pro antiqua Mathesi & nostra Logistica, est admittendum axioma, dummodo maneant residua quæ reuera sint magnitudines. Pro Algebra vniuersalius adhibetur, neque enim requiritur vt residua quæ remanent, sint reuera magnitudines: sed sufficit vt residua non sint residua, siue nihil, aut ex illis Algebræ quantitatibus quas falsas appellant, quæque à nihilo nihil differunt, in Mathesi diuersa ab Algebra.

Plura hoc loco axiomata non proponuntur ab Algebræ promotoribus. Numero vndecimo, qui hic immediatè subsequitur, vtilissimum notant monitum obseruandum in Mathesi, sed non obseruatum ab Algebræ scriptoribus.

XI. *Quando veritas propositionis est euidens, satis est illam enunciare per claros terminos. Si propositio indiget probatione, hæc inferenda est: non aliter tamen quam assumendo definitiones, vel axiomata, vel suppositiones prius concessas, vel denique demonstratas propositiones, vt sunt theoremata, problemata, lemmata, corollaria.*

Hoc monitum pro qualibet Mathesi, vel eius methodo, non tantum admittendum est, sed diligentissimè notandum, & exactissimè obseruandum. Dolendum, quod licet cognoscatur & annotetur, tamen non obseruetur ab Algebræ promotoribus. Vt enim nihil dicā de reliquis illorū propositionibus: vbinam afferunt expositiones terminorum, ex quibus immediatè manifesta sunt præcedentia axiomata, in sensu in quo ab Algebra intelliguntur & adhibentur, adeò diuerso à sensu in quo admittuntur vel adhibentur ab antiqua Mathesi vel Logistica? fateor quidem quod satis clarè moneant, ab Algebra considerari, & veras siue nihilo maiores quantitates: & falsas siue nihilo minores, atque imaginarias quantitates; quod non magis damnandum est, quam considerare & entia realia & entia rationis siue fictitia: vel considerare & homines veros & homines pictos, aut fictos. Ex tali licita consideratione, ad aliquid manifestè illicitum fieret transitus, ab eo qui vellet hominibus conuenientes proprietates, intelligi etiam pictis vel fictis hominibus conuenire. Verum est hominem viuere, alimentis indigere, respirare: falsum tamen est, fictum vel pictum hominem viuere, alimentis indigere, respirare, &c. neque id falsum esse desinit, quia verum est licitam esse tam veri quam picti aut ficti hominis considerationem; aut propter vllam legem statuentem id deinceps vt verum admittendum esse. Simili planè modo, licitum quidem est, veras, & falsas quantitates considerare, & quantitatis vel omnis entis realis negationem, hoc est nihil, appellare falsam quantitatem; tamen ab hoc, quod licitum est, ad aliquid planè illicitū fieret progressus, ab eo qui vellet ferre legem

præ-

præſcribentem, vt omnes proprietates veris quantitatibus communes, etiam concedantur atque conueniant falſis & fictis quantitatibus. Quantitates poſſe addi, ſubtrahi, multiplicari, diuidi: vnam ad eiuſdem generis alteram proportionem habere; proprietates ſunt quæ Mathematicorum omnium iudicio conueniunt veris quantitatibus: vnde autem conſtat, has proprietates falſis quantitatibus conuenire? Certè hoc ſequi non videtur ex eo quod licitum ſit, & veras, & falſas ſiue fictitias quantitates conſiderare: immo ſi ſequeretur, vlterius benè inferri poſſet, falſas quantitates, eſſe quantitates veras. Quoniam verò ex arbitraria & licita conſideratione verarum & falſarum quantitatum ſatis clarè non patet, aut ſequitur verum eſſe, quod in omni Matheſi, diuerſa ab Algebra habetur falſum: nimirum proprietates quæ veris quantitatibus communes ſunt, etiam falſis quantitatibus cõuenire, vt in præcedentium axiomatum intelligentia ſupponi diximus ab Algebra; quo iure, qua authoritate hoc ſupponũt? An fortè exiſtimãt beneplacitum Algebræ ſufficere, vt verum euadat, quod per ſecula quæ numerantur à Matheſi, ante exordium Algebræ, & falſum eſſe conſtitit, & antiquę Matheſi contrarium? prius ſaltem ſententiam ferre debebant hac in parte damnantem antiquam Matheſim: talem ſententiã nuſquam annotatam inuenio apud Algebræ ſcriptores; immo illi oppoſitum Algebræ decretum facile eſt colligere, ex eo, quod retinendas atque adhibendas ſtatuant, ab antiqua Matheſi ſtabilitas veritates. Si verò exiſtiment, ſolum Algebræ beneplacitum non ſufficere vt verum habeatur, quod verum ſupponi debet, vt præcedentia axiomata habeant ſenſum in quo pro Algebra debent intelligi: quare nuſquam probant eam ſuppoſitionem? Si vſquam afferrent hanc probationem, profectò ſingulas prius annotatas aſſertiones, non appellarent axiomata: non enim axiomata, ſed dicenda forent theoremata, vt patet ex præmiſſo monito, quod numero XI. annotatur à promotoribus Algebræ. Doctoribus Algebræ, vt ego opinor, nimium iniurius foret, qui diceret, quod hic reliquum video: nimirum apud ipſos tam euidens eſſe, omnes proprietates veris quantitatibus conuenientes, etiam falſis quantitatibus conuenire, vt ſuperfluum exiſtiment, hanc aſſertionem inter Algebræ principia annotare; etenim non aſſequor huius euidentiæ aliud fundamentum poſſibile: niſi tantam mentis cæcitatem, vt capax non ſit cognoſcere differentiam inter illa quæ quomodocunque appellantur ens, aut homo, aut quantitas; hoc eſt inter ens verum ſiue reale, & ens fictum ſiue chimęram: aut inter hominem verum, & hominem pictum vel imaginarium: aut inter quantitatem veram, quæ ſola à reliquis Mathematicis conſideratur & quantitas appellatur, & quantitatem falſam, fictam, imaginariam, quæ à nihilo diuerſa non eſt, & à ſola Algebra excolitur: quæque ſine addita particula alienante ſiue diſtrahente, dici non poteſt quantitas; eodem prorſus modo, quemadmodum homo pictus, vel fictus, vel imaginarius, dici non poteſt homo.

Generaliter, magnitudo dicitur, omne illud quod habet partes, & quod poteſt augeri & imminui. XII.

Clarius fortaſſis idem aſſeritur numero XXII. vbi dicitur quod *eſſentia magnitudinis in eo conſiſtat, quod diuiſibilis ſit, & partes habeat.* Quid Euclides vel antiqua Matheſis opinetur de magnitudine ſiue quantitate, non ſatis certò ſtatuere poſſum: quia licet quantitas ſiue magnitudo conſtituat Matheſeos obiectum, opinamur tamen illud potius aliunde cognitum ſupponi, quam exponi vel declarari ab Euclide: atq; hanc cauſam eſſe, quod ab aliquibus ex diuerſis interpretibus, non planè inter ſe conuenientibus, inter quantitates admittatur, quod alij negant quantitatem dici poſſe; exempli gratia, angulum quantitatem eſſe, alij affirmant, alij

alij negant. Vox *magnitudo*, ab Euclide passim adhibetur elementorum suorum libro quinto; per hanc vocem ab ipso intelligi existimo, quod nos aliter appellamus quantitatem vniuersalem: etenim quod de magnitudinibus vt demonstratum annotauit prædicto libro quinto, deinde vt demonstratum assumit agendo de lineis, superficiebus, corporibus, &c. hoc non faceret nisi existimaret, quantitatem quam magnitudinem appellat esse adeò vniuersalem, vt sua vniuersalitate amplectatur lineas, superficies, corpora, &c. atque supponeret, hæc quantitatum genera magis restricta contineri illo genere quantitatum ad quod pertinent quantitates minus restrictæ quas appellat magnitudines. Quamobrem existimamus antiquæ Matheseos doctrinæ consona esse, quæ Logistica breuiter docet de quantitatibus & diuersis quantitatum generibus cap. 3. lib. 1. Logisticæ, & pluribus declarat in locis citatis ab indice ad vocem quantitas. Hæc eadem Logisticæ doctrina nullatenus videtur conuenire cum ijs quæ de magnitudinibus siue quantitatibus docent Algebræ promotores: ex quibus gratum mihi foret intelligere, an vnitas dicenda sit quantitas; dubitandi causa est, quia hic, & numero XXII, asserunt quod magnitudo dicatur omne id quod partes habet: & numero XXVI. negant vnitatem diuisibilem esse, aut partes habere. Pari modo optarem edoceri, an pulchritudo quantitas sit: potest enim augeri & imminui. Eodemque modo augeri & imminui possunt, error, curuitas, albedo, lumen, falsitas, precium, honor, meritum, demeritum, &c; an de singulis dicendum quod referri debeant inter Algebræ quantitates? Si ità est: mirandum non est, quod post tantopere ampliatam ab Algebra quantitatis significationem, vt nullis amplius limitibus includeretur: ad ipsum nihil extendatur: immo non tantum supra, sed etiã infra nihil excurrat, per spatia inaccessa Mathesi omni diuersæ ab Algebra.

XIII. *Differentia quoad plus vel minus, facit magnitudines inter se differre.*

Pro Mathesi antiqua ac nostra Logistica putarem addendum, *minima differentia quæ à Mathesi consideratur*. Passim eadem appellantur in antiqua Mathesi, quæ solo numero inter se differunt: & secundum antiquam doctrinam, plus vel minus non variant speciem; quare ad eamdem speciem pertinent, quæ non aliter differunt quam quoad plus vel minus; hac differentia, nulla minor inuenitur nisi quæ appellatur numerica: quoniam verò hanc non considerat Mathesis antiqua aut nostra Logistica, minima differentia quæ ab ipsis consideratur, est differentia quoad plus, vel minus, constituens diuersa illa quæ continentur eadem atque infima quantitatum specie quæ consideratur; de indiuiduis siue solo numero differentibus, nulla datur certa scientia, ideòque non considerantur à scientifica Mathesi certissima omnium scientiarum.

XIV. *Si magnitudines sint æquales, habent proportionem æqualitatis.*

In antiqua Mathesi, ac nostra Logistica idem nisi fallor significat duas quantitates esse inter se æquales, vel habere proportionem æqualitatis; quod tamen intelligendum de ijs quantitatibus quas Algebra veras appellat. Pro Algebra intelligendum est axioma, tam de veris quam de falsis Algebræ quantitatibus: etenim promiscuè omnes in Algebra, quantitates siue magnitudines appellantur, vt iam sæpius diximus ad præcedentia axiomata.

Si magnitudines ſint inæquales habent proportionem inæqualitatis. XV.

Hic ſuſpicor typographi errorem, & ab ipſo neglectas atque prætermiſſas voces *eiuſdem generis*: & dicere debuiſſe ſi eiuſdem generis magnitudines ſint inæquales, habent proportionem inæqualitatis; nunquam enim in mentem venire potuit Algebræ promotoribus affirmare proportionem inæqualitatis inter lineam & corpus: ſiue alias duas diuerſi generis quantitates; de his tamen manifeſtè verum eſt, quod ſint magnitudines non habentes proportionem æqualitatis, adeòq; non æquales, ſiue inæquales. Si hic non irrepſit typographi error, dicendum eſt, pro Algebra non minus admitti debere proportiones inter quantitates eiuſdẽ generis, quam inter quantitates diuerſi generis. Hoc certum, à Matheſi antiqua & noſtra Logiſtica non admitti vllam proportionem alicuius quantitatis ad aliam diuerſi generis quantitatem.

Non examinamus quid ſint magnitudines abſolutæ & in ſe conſideratæ: ſed conſideramus tantum has magnitudines, in quantum habent proportionem æqualitatis vel inæqualitatis. XVI.

Hic aliqua occurrunt notanda quæ videntur quidem magni momenti, ſed tamen non niſi breuiſſimè indicanda.

Primò. Algebræ promotores hic benè notant, & admittunt diuerſitatem inter magnitudines abſolutas, & magnitudines relatas. Magnitudo ſiue quantitas abſoluta, & tantum ſecundum ſe conſiderata; hoc eſt ſecundum ſua intrinſeca: exempli gratia linea, poteſt dici recta, curua, diuiſibilis &c: tamen non poteſt dici magna vel parua: quia nihil poteſt dici magnum vel paruum, niſi relatione magnitudinis referatur ad aliud, reſpectu cuius dicatur magnum vel paruum; hinc fit, quod licet quantitas abſoluta ſemper eadem, atque prorſus immutata perſeueret, non ideò tamen perſeuerat æqualiter magna aut parua; ſed ſemper eſt, & perſeuerat indifferens vt dicatur magna vel parua: ſicut perſeuerat indifferens vt cum maiori vel minori quantitate comparetur. Solum dici vel intelligi poteſt magna, relata ad aliam eiuſdem generis minorem quantitatem relatione magnitudinis. Et ſi eodem tempore eadem quantitas A, relatione magnitudinis referatur ad duas alias quantitates B & C, quarum vna B maior, altera C minor ſit quantitate A: eodem tempore intelligi & dici poterit maior, & minor: magna & parua. Quantitas relata (ſubaudi relatione magnitudinis) eſt illud idem quod aliter dicitur ratio ſiue proportio: etenim iuxta noſtram Logiſticam, & niſi fallor etiam iuxta antiquam Matheſim: voces *ratio* & *proportio*, nihil aliud ſignificant, niſi quantitatem relatam relatione magnitudinis, ad aliam eiuſdem generis quantitatem: vt diximus cap. 3. lib. 1. noſtræ Logiſticæ. Quod nos ſentimus de magnitudine abſoluta & magnitudine relata, etiam Algebræ promotores aliquo modo inſinuare videntur in hoc numero XVI. diſtinguendo quantitates abſolutas, à quantitatibus relatis, ſiue rationibus & proportionibus.

Secundò. Algebræ promotores hic aſſerere videntur quod parũ ſoliciti ſint de conſideratione quantitatum abſolutarum, ſed multum ſoliciti ſint de magnitudinibus relatis, hoc eſt de rationibus ſiue proportionibus. Deinde ex his tantum nominando proportionem æqualitatis & inæqualitatis, videntur approbare vt adæquatam, rationum diuiſionem in rationes æqualitatis & inæqualitatis: hanc

eam-

eamdem rationum diuisionem, vt legitimam & adæquatam, admittit antiqua Mathesis, & nostra Logistica; hæc quidẽ, etiã admittit aliquas rationes nusquã nominatas in antiqua Mathesi vel Algebra, easque appellat rationes indifferentes: omnes tamen sunt rationes inæqualitatis, & tantum habent indifferentiam vt dicantur rationes vel maioris vel minoris inæqualitatis. De his rationibus indifferentibus consuli potest index, si illarum vlterior cognitio desideretur. Quod Algebræ promotores multum soliciti sint de proportionibus, mirandum non est, quandoquidem Cartesius in sua methodo rectè regendæ rationis moneat, *se circa Mathematicas scientias hoc aduertisse, nimirum etiamsi illa omnes circa diuersa obiecta versentur, in hoc tamen conuenire omnes, quod nihil aliud examinent, quam rationes, siue proportiones quasdam quæ in illis continentur*. Quod Cartesij monitum apud eius interpretes celeberrimum, in ipso initio tomi secundi Algebræ Cartesianæ, tum alibi sæpius repetitum, etiam annotatum inuenitur apud postremos Algebræ promotores, & hoc loco iterum insinuatum.

Tertiò. Quandoquidem Algebræ scriptoribus & promotoribus cognita sit maxima vtilitas quam habet proportionum doctrina: & tamen ignorare non possint hanc doctrinam, prout proponitur vel ab Euclide vel ab antiquioribus eius commentatoribus, ità claudicare, vt vix vllus Matheseos scriptor inueniatur qui non indicet ac notet aliquos eius defectus: ex quo factum est quod propemodum innumeri ex posterioribus Euclidis commentatoribus & scriptoribus elementorum Matheseos, conati sint hos defectus emendare, & tradere subsistentem proportionum doctrinam elementarem: maximè mirandum, nihil simile conatos esse postremos Algebræ promotores: præsertim quia proportiones de quibus agunt alij Mathematici, tantum inueniuntur inter quantitates quas Algebra veras appellat: & ne quidem inueniuntur inter omnes istas veras quantitates, sed tantum inter veras atque eiusdem generis quantitates. Algebra requirit longè ampliorem proportionum doctrinam, vltra veras quantitates, etiam amplectentem reliquas quas Algebra falsas appellat, quæque in Mathesi diuersa ab Algebra, proprijssimè appellãtur nihil siue quãtitatis negationes. Profectò si à promotoribus Algebræ qui gloriantur se afferre magis fundatam Algebram quam prioribus temporibus lucem viderit, tam negligenter tractentur illa de quibus expresse asserunt se maximè solicitos esse, quid solidè stabilitum ab ipsis sperari potest? Ego certè, tale aliquid neque spero, neque expecto, diuersum ab eo quod paulo ante diximus à reliquis Mathematicis proprijssimè appellari nihil: de quo nihilò tam multa dicta sunt in præcedentibus: & tamen non pauca supersunt dicenda in sequentibus, vt incipiam dubitare, an non melius quam capite primo factum sit, definiri possit Algebra, dicendo Algebram esse magnam nihili promotricem.

XVII. *Nihil siue zero, seruit pro medio ad comparandas magnitudines: & iudicandum de illarum proportione.*

En iterum redit amabilissimum Algebræ nihil, eiusque vtilitas indicatur magni momenti pro Algebra: nimirum quod sit medium inter veras & falsas Algebræ quantitates; ex his priores supra nihil ascendunt & superant nihil: posteriores infra nihil descendunt, & deficiunt, ac superantur à nihilo: adeòque inter illas nihil siue zero mediũ est. Talis mihi videtur, saltẽ aliqua ex parte, sensus assertionis numero XV. propositæ, quæ pro antiqua Mathesi & nostra Logistica inutilis est, quia tantum agit de nihili vtilitate. Singula assertionis mysteria ego non assequor: ac præsertim quomodo nihil dicatur vtile ad iudicandum de magnitudinum proportione. Ex Algebræ promotoribus intelligere cuperem iudicium de proportione quam habet -5 *ad* -10, supposita ipsorum [illegible] quod signum $-$ in-

— indicet falſas eſſe quantitates quas immediatè præcedit: nimirum vtrum hæc falſarum quantitatum proportio, dicenda ſit proportio maioris inæqualitatis, vel certè dici debeat proportio minoris inæqualitatis: hoc eſt vtrum quinque vnitates falſæ conſtituant maiorem vel minorem numerum, quam ſit numerus decem falſarum vnitatum. Si ſupponatur, quod proportio — 5 *ad* — 10, ſit proportio maioris inæqualitatis, verum quidem erit quod ſicut ex veris, ità etiam ex falſis Algebræ magnitudinibus illa maior ſit, quæ minus deficit ab eadem maiori magnitudine, & habet plus realitatis, vt loquuntur proximè ſubſequenti numero; tamen ſi hoc ſupponatur, quomodo verum erit quod in praxi paſſim docent, & vt indubitatum aſſumunt omnes Algebræ Doctores: nimirum — 5 *ad* — 10 = † 5 *ad* † 10? Hinc enim manifeſtè patet, ſingulas ex iſtis duabus rationibus quas inter ſe æquales aſſerunt, dicendas eſſe, vel rationes maioris inæqualitatis, vel rationes minoris inæqualitatis; & quoniam euidens eſt, ex his rationibus alteram, nimirum † 5 *ad* † 10, eſſe minoris inæqualitatis: reliqua ratio — 5 *ad* — 10, dici non poteſt ratio maioris inæqualitatis; adeòque probabile non videtur quod promotores Algebræ iudicarent numerum falſum 5, eſſe maiorem numero falſo 10, vt hic ſuppoſuimus. Supponatur igitur oppoſitum reſponſum, affirmans rationem — 5 *ad* — 10, eſſe rationem minoris inæqualitatis, adeòque quinque falſas vnitates conſtituere numerum minorem quam ſit numerus decem falſarum vnitatum. Hoc ſuppoſito, quoniam — 5, deficit, & minus deficit, non ſolum à nihilo, ſed etiam à vero numero 20: quam ab eodem zero, aut vero numero 20 deficiat — 10: igitur dicendum eſt, quod ex duabus magnitudinibus falſis quæ ſingulæ deficiunt ab eadem magnitudine 20, illa maior ſit, quæ magis deficit: quod manifeſtè falſum eſt de duabus veris magnitudinibus ab eadem maiori magnitudine deficientibus; igitur habetur aliqua proprietas falſis magnitudinibus conueniens, quæ non conuenit veris magnitudinibus: nimirum duarum verarum magnitudinum illam maiorem eſſe, quæ ab eadem maiori magnitudine minus deficit: duarum verò falſarum magnitudinum illam maiorem non eſſe, quæ ab eadem maiori magnitudine minus deficit. An igitur, vt hinc ſequitur, manifeſtè falſum dicendũ eſt, etiam iuxtà Algebram, quod nobis videtur verum ſupponere, etiam in aſſertionibus quas appellant axiomata? In his, vt nos ſuſpicari diximus ad primum axioma, ſuppoñut proprietates omnes magnitudinibus conuenientes iuxta Euclidem vel antiquam Matheſim, etiam falſis Algebræ magnitudinibus conuenire: & conſequenter dicendum foret, ab Algebra aſſumi & verum ſupponi in euidentiſſimis ſuis aſſertionibus quas appellat axiomata, adeòque exiſtimare his ipſis aſſertionibus magis euidens & certum, quod hic conſtat falſum eſſe: ſuppoſito quod hic ſupponebamus, nimirum quinque falſarum vnitatum magnitudinem, eſſe minorem magnitudine decem falſarum vnitatum: ſiue rationem — 5 *ad* — 10, eſſe rationem minoris inæqualitatis.

Magnitudines habent plus realitatis, quando illarum eſſe facit vt magis diſtent à nihilo: & habent minus realitatis quando illarum non eſſe facit vt magis diſtent à nihilo. XVIII.

Hæc doctrina reponi poteſt inter Algebræ arcana. Vt inutilis negligenda eſt pro antiqua Matheſi & noſtra Logiſtica. Cæterum niſi fallor, hoc numero paulò diſtinctius declaratur, quod numero præcedenti dictum fuit, nimirum quomodo zero ſit medium comparationis: monetur enim, aliquas Algebræ magnitudines à zero diſtare per ſuum eſſe, alias diſtare per ſuum non eſſe; de prioribus magnitudinibus quæ veræ magnitudines appellantur, dicitur quod habeant plus realitatis, quæ magis distant à zero: ex quo sequitur quod habeant minus realitatis, quæ minus distant à zero. De posterioribus quæ falsæ magnitudines appellantur, docetur quod habeant minus realitatis quo magis distant à zero: & consequenter quod habeant plus realitatis quo minus distant à zero. Hæc si ità sunt, manifestum est, quinque falsas vnitates minus distare à zero adeòque habere plus realitatis, quam habeant decem falsæ vnitates quæ magis distant à zero; quare igitur quinque falsarum vnitatum magnitudo, dici non debet maior magnitudine decem falsarum vnitatum, quemadmodum decem verarum vnitatum magnitudo, habens plus realitatis, dici debet maior magnitudine quinque verarum vnitatum quæ habet minus realitatis? hoc ad numerum præcedentem primo loco supponebatur, sed quam infelici successu, illic videri potest: supposito verò quod admitti non possit hæc suppositio: igitur veris & falsis magnitudinibus, communis non est proprietas, quod ex talibus duabus magnitudinibus maior dici debeat quæ habet plus realitatis; quod si verum admittatur, enodanda remanet difficultas indicata ad præcedentem numerum, supponendo quod illic secundo loco supponebatur. His addo, intellectu difficilem, immo impossibilem mihi videri veritatem assertionis, affirmantis ex duabus magnitudinibus nullam omnino realitatem habentibus, alteram altera plus vel minus realitatis habere: quandoquidem de duobus, nullam omnino pecuniam habentibus, dici non possit, alterum altero plus vel minus pecuniæ habere: tamen hæc assertio conformis est doctrinæ hic traditæ. Verum sufficit Algebræ mysteria intelligi ab Algebræ doctoribus; dolendum foret si ad hoc ipsis magis seruiret, non intelligentiæ excessus quam non intelligentiæ defectus.

XIX. *Vsus voluit, vt dicantur positiuæ siue veræ magnitudines, omnes illæ, quæ aliquid addunt nihilo; & negatiuæ, siue falsæ, quæ aliquid subtrahunt à nihilo.*

Ad verba *vsus voluit*, addendum est, *apud omnes & solos Algebræ doctores*: hic vsus communis non est, neque antiquæ Mathesi neque nostræ Logisticæ; in hac etiam aliquæ quantitates dicuntur positiuæ, aliæ verò negatiuæ appellantur: sed nullæ considerantur vel admittuntur minores nihilo, vel aliquid subtrahentes à nihilo; immo tam positiuæ quam negatiuæ quantitates nostræ Logisticæ, singulæ sunt maiores nihilo, & cognitæ antiquæ Mathesi. An fortè ignorauit antiqua Mathesis, quod non ignorat vllus Grammaticus? nimirum quid significent decem gradus meriti, & decem gradus demeriti. An æquè veri, & propriè dicti, & nihilo maiores numeri non sunt, qui numerant decem gradus meriti: quam qui numerant decem gradus demeriti? vel qui in Cæli aut Terræ superficie numerant viginti milliaria versus Occidentem aut Septentrionem, quam qui numerant viginti milliaria versus oppositam partem, orientem scilicet aut meridiem? Quidcunque tandem sit, quod numeratur à numero, vitiare aut mutare non potest essentiam numeri, aut facere quod desinat esse verus ac propriè dictus numerus; immo tam verus & propriè dictus numerus est, qui numerat decem mendacia, falsitates, homines pictos, chimæras, &c. quam qui numerat decem veritates, homines veros, entia realia, &c. etenim quod numeratur non ipsius numeri naturam aut proprietates aut magnitudinem immutare potest: sed tantum potest causare diuersitates in valore numeri; sic numerus decem aureorum planè æqualis est numero decem obulorum; vtriusque tamen huius numeri valor, æqualis non est. De valoribus numerorum, aliarumque quantitatum, consuli potest index ad vocem *valor*. Similiter ad vocem *quantitas*, notatur in indice quid sint quanti-

tita-

titates quæ in Logiſtica appellantur poſitiuæ vel negatiuæ: de quibus pauca hic præmiſſa indicare neceſſarium duxi, ne eamdem ſignificationem habere exiſtimentur quantitates quæ in Algebra iiſdem vocibus indicantur; atque non ſatis intellecta hæc ſignificationis diuerſitas, cauſam præbeat exiſtimandi, etiam contra Logiſticam militare, quæ aduerſantur Algebræ, & ſequuntur ad aliqua Algebræ quidem propria, ſed ſignificata per voces, etiam in Logiſtica paſſim adhibitas, ſed in diuerſa ſignificatione.

Additio verarum magnitudinum notatur ſigno †, quod ſignificat plus; ſubtractio earumdem magnitudinum notatur ſigno —, quod ſignificat minus. XX.

Hic promotores Algebræ, quodammodo ſui immemores, nihil dicendo de additione vel ſubtractione falſarum ſuarum magnitudinum, de ſolis veris magnitudinibus agendo, docent quomodo illarum additio vel ſubtractio indicari poſſit breui ſcriptione: nimirum mediantibus ſignis repræſentantibus voces *plus* vel *minus*: in quibus neque antiqua Matheſis neque Logiſtica difficultatem habere poteſt; etenim tametſi non admittant ſubtractionem in qua maior numerus ex minori auferatur, ſed pronuncient hanc ſubtractionem eſſe impoſſibilem: tamen indicare ſiue ſignificare hanc impoſſibilem ſubtractionem, poſſibile reputant. Immo illam expreſſè indicant, vbi pronunciant, duo minus decem, ſiue duo, ſublatis decem, hoc eſt productum ex ſubtractione in qua ex minori numero duo, aufertur maior numerus decem, eſſe aliquid impoſſible. Hoc impoſſibile, per aliud impoſſibile, poſſibile aut intelligibile reddi ab Algebra, ſibi perſuadent Algebræ ſcriptores: ſed de hoc Algebræ myſterio, nihil dicitur hoc numero XX. Omnes Algebræ ſcriptores non adhibent eadem ſigna † & —, vt ſignificent voces *plus* & *minus*: Logiſtica tamen noſtra eadem illa ſigna adhibet, vt compendiatè repræſentet voces *plus* & *minus*: ſed tamen neque iſtæ voces, neque ſigna has voces repræſentantia, conueniunt quoad ſignificationem vel vſum, in Algebra & noſtra Logiſtica: in vtraque adhibetur ſcriptio, † 10 — 4 & hęc ſcriptio iiſdem vocibus exprimitur, dicendo plus decem minus quatuor; in Algebra ſignificat productum ex ſubtractione in qua ex decem vnitatibus poſitiuis, ſubtrahuntur quatuor vnitates poſitiuæ, hoc eſt decem, ſublatis quatuor. In Logiſtica ſignificat productum ex additione in qua decem poſitiuis vnitatibus, adduntur quatuor negatiuæ vnitates. Hinc ſignum —, ſiue vox *minus* per hoc ſignum repræſentata in Algebra, æquiualet voci *ſublatum*, vt pluribus docetur initio tomi ſecundi Geometriæ Renati Carteſij in introductione ad hanc Geometriam: idemque notant poſtremi Algebræ promotores. In noſtra Logiſtica, ſignum —, vel vox *minus*, non indicat [illegible] æquiualet voci *ſublatum*, ſed denotat quantitatem immediatè ſubſequentem, eſſe negatiuam: vt facilè colligitur ex declaratione ſenſus quem in Logiſtica habet ſcriptio paulò ante propoſita. Hęc breuiter dicta, ſufficere videntur ad declinandum periculum æquiuocationis quod naſci poſſet ex vſu ſignorum † & —, vel vocem *plus* & *minus*, qui vſus Algebræ & noſtræ Logiſticæ communis eſt: ità tamen vt iſtorum ſignorum aut vocum ſignificatio, maximè diuerſa ſit in Algebra & Logiſtica. Cæterum voces & ſigna ad placitum ſignificant: pluribus verò Logiſticæ placita conferre cum Algebræ placitis, non eſt huius loci. Logiſticæ placita circa ſigna † & — declarantur in loco indicato ab indice ad vocem *plus* vel *minus*.

XXI. *Si plus alicuius magnitudinis est tam magnum vt illi nihil addi possit, quod ante non habebat: hac magnitudo infinitè vera est. Et si minus alicuius magnitudinis foret tam magnum, vt ex illa nihil subtrahi posset, quo actu non carebat: hac magnitudo foret infinitè falsa. Sed quia intellectus noster clauditur valde angustis limitibus, & nullis limitibus clauderetur magnitudo qua foret infinitè vera vel falsa: non conabimur comprehendere, immo ne quidem discurrere de infinito; sed tantum discurremus de magnitudinibus finitis, qua admittunt plus vel minus.*

Hoc loco rursus agitur de veris & falsis magnitudinibus Algebræ. Quod asserunt se tantum velle discurrere de finitis suis quantitatibus, liberum est Algebræ Doctoribus; hinc tamen constat pro ipsa Algebra parum vtilem doctrinam allatam de infinitis magnitudinibus. Quod docent de finitis Algebræ magnitudinibus, nouum non est, sed superius sæpius dictum, vbi notauimus hanc doctrinam negligendam pro antiqua Mathesi & Logistica nostra.

XXII. *Essentia istarum magnitudinum est, quod sint diuisibiles & habeant partes. Et quod essentialiter conuenit his magnitudinibus, conuenit essentialiter illarum partibus: quandoquidem singula partes etiam sint magnitudines. Quare omnes ista partes, etiam erunt diuisibiles, & habebunt nouas partes; quod idem verum est de alijs partibus minoribus & minoribus in infinitum.*

Algebræ promotores numero XVI. dixerant, se non considerare quid sint magnitudines absolutæ & secundum se consideratæ; hic tamen docent opinionem suam de essentia absolutarum magnitudinum. Nos existimamus, indicatam opinionem, omnibus Algebræ Doctoribus communem non esse, sicut admittenda non est pro antiqua Mathesi vel nostra Logistica: non solum quia exempli gratia binarius magnitudo est, tantum diuisibilis in duas vnitates quæ singulæ vlterius diuisibiles non sunt, neque habent alias partes, vt expresse docent etiam ipsi promotores Algebræ numero XXVI. atque eadem pagina in qua proponunt præcedentem doctrinam de magnitudinum essentia, vt iterum insinuauimus ad numerum XII; verum etiam propter alias diuersas causas quas vlterius considerare huius loci nō est, quia hoc nō conducit ad finem quē nobis hic proposuimus, hoc est ad intelligentiam differentiæ quę inuenitur inter fundamenta Algebrę, antiquæ Matheseos, & nostræ Logisticæ; etenim ad huius differentiæ cognitionem vtilis quidem est intelligentia fundamentorum quæ vnicuique ex his tribus Methodis propria sunt, vel omnibus aut pluribus communia: sed parum iuuat cognoscere differentiam opinionum quæ inueniuntur apud diuersos qui sequuntur eamdem Methodum.

Hactenus propositis, similes aliæ doctrinæ subsequuntur apud Algebræ postremos promotores: in his tamen videntur ad priuatas, & satis singulares opiniones decl-

clina-

clinare: atque in illis nihil inuenio magnopere vtile ad cognitionem fundamentorum, quæ dici poſſint omni & ſoli Algebræ conuenire, quapropter ex his doctrinis, plures non commemoro: præſertim quia hactenus propoſitæ videntur ſufficere, vt ſatis clarè inferatur & conſtet.

Primò. Algebræ fundamenta ſpeculatiua parum conſona eſſe ſpeculatiuis fundamentis quæ antiquæ Matheſi & noſtræ Logiſticæ ſunt communia.

Secundò. Algebræ fundamenta ſpeculatiua vix aliquid continere diuerſum ab ijs quæ continentur antiquæ Matheſeos fundamentis, niſi quantitates falſas ſiue nihilo minores, vel quæ neceſſariò connexa ſunt cum his falſis quantitatibus, atque ex illis ſequuntur.

Tertiò. Cauſam propter quam ab Algebra aſſumantur atque conſiderentur falſæ ſiue nihilo minores quantitates, vel vnicam, vel præcipuam eſſe, quæ capite primo indicatur: nimirum vt ſaltem practicè poſſibilem atque vtilem reddat ſubtractionem, in caſu in quo maior quantitas ex minori quantitate ſubtrahenda proponitur.

Quartò. Falſas quantitates Algebræ proprias, pro praxi planè inutiles aut noxias non eſſe. Pro ſpeculatiuis fundamentis & demonſtrationibus praxium in quibus hæ falſæ quantitates adhibentur, non tantum inutiles eſſe, ſed maximè noxias: atque cauſare, vel omnem, vel præcipuam diſſonantiam, quæ inuenitur inter fundamenta ſpeculatiua Algebræ & antiquæ Matheſeos. Vt hoc vltimum atque maximi momenti punctum melius & clarius intelligatur veriſſimum eſſe, non parum iuuabit ſequens caput. Suppoſito autem quod conſtet hic vltimo loco indicata inconuenientia, reſultans ex conſideratione falſarum Algebræ quantitatum: atque vlterius reflectendo quod omnes illæ praxes, ex quibus reſultat Algebrę practica vtilitas, in Logiſtica noſtra habeantur independenter ab Algebræ quantitatibus falſis, & nihilo minoribus; nemo non intelliget, quomodo in Logiſtica noſtra habeatur, & tantopere deprędicata Algebrę practicę vtilitas, ſine inconuenientia quam in ſpeculatiua Algebra cauſant eius falſæ quantitates: immo in noſtra Logiſtica haberi defecatam vt ita dicam Algebram, & practicè & ſpeculatiuè ſubſiſtentem. Hoc an verum ſit, conſtabit ex reliquis à nobis dicendis hoc libro: ſuppoſito quod verum ſit, certè non habent quod nobis indignentur Algebræ doctores, quod defectus atque vulnera Algebræ aperiamus, vt apud eius doctores ſatis cognitam & deploratam Algebræ claudicationem ſanando, ſolidè ſubſiſtentem reddamus. eius doctrinam practicam.

Para-

CAPVT III.

Algebræ nonnulla Paradoxa siue Propositiones aliquæ satis mirabiles, illatæ ex speculatiuis Algebræ fundamentis, quas antiqua Mathesis aut nostra Logistica vt veras admittere non potest.

Paradoxum I.

Possunt dari duo numeri inter se inæquales: ita tamen vt inter se æqualia sint producta ex singulis istis numeris in se ductis.

AB Algebra negari non potest, tales numeros esse illos, quorum vnus numerat quatuor veras vnitates, alter verò numerat quatuor falsas vnitates: quandoquidem enim iuxtà Algebræ documenta, numerus quatuor verarum vnitatum in se ductus, producat numerum sexdecim verarum vnitatum: & præterea etiam numerus quatuor falsarum vnitatum in se ductus, producat sexdecim veras vnitates; quam certum est & clarè patet, numerum sexdecim verarum vnitatum, æqualem esse numero sexdecim verarum vnitatum: & præterea iuxtà Algebram, numerum quatuor verarum vnitatum atque maiorē nihilo, non esse æqualem numero quatuor falsarum vnitatum, qui minor est nihilo: tam certum est & clarè patet, pro Algebra admittendum esse quod asseritur in proposito paradoxo.

P. Christophorus Clauius capite 6. suæ Algebræ, expressè notat hoc paradoxum: & asserit de veritate eius quod in paradoxo dicitur dubitari non posse, quia apud Algebræ scriptores innumeris exemplis comprobatur verum esse: fatetur tamen se ignorare cur verum sit, neque intelligere quomodo verum esse possit: ac tandem concludit, quod suo iudicio *debilitas ingenij humani accusanda sit, quod capere non possit quo pacto id verum esse possit*. Hæc à Clauio expressè annotata, ignorare non potuit qui multis post Clauium annis suam Algebram scripsit Cartesius: cur igitur conatus non est hunc à Clauio indicatum & insuperabilem nodum soluendo, atque antiquioris Algebræ claudicationem sanando, exhibere suam Algebram saltem hoc ex capite non vitiosam? ingratus profectò Algebræ cultor dicendus est: quippe qui post excultum Algebræ beneficio ingenium, post acceptam ab Algebra nulli ante ipsum concessam clauem, qua mysteria totius vniuersi reseranda sunt: neque excultum suum ingenium, neque acceptam adeò preciosam clauem adhibere voluit, vt succurreret laboranti Algebræ: & scribendo Algebram, eam proponeret liberatam à cognita & deplorata hac eius antiqua claudicatione. Hoc certum est quod author præfationis, quæ inuenitur in principio tomi secundi Algebrę siue Geometriæ Cartesianæ, testetur quod *hæc*, nimirum Algebra, *illa est cuius exercitio Cartesius mentem suam excolendo, non modo in Mathematicis scientijs summas difficultates adolescens adhuc superauit: alijsque in inueniendo palmam præripuit; sed tantam ingenij promptitudinem facili-*

cilitatemque sibi deinceps conciliauit: vt primus clauem qua mysteria vniuersi reseranda sunt, & cuius ope natura naturæ, ac lux orbi magis magisque redditur, inuenerit: adeò vt eorum quæ lumine naturæ cognosci queunt, nihil tam abditum densisque immersum tenebris putandum sit, quod ingenij sui felicitate eruere ipse desperasset. Quidquid sit, an consequenter ad hæc admittendum foret quod ego admittere non auderem: nimirum Cartesium non edoctum fuisse in scientiarum Lyceo aliquo: sed in aliqua non ignobilis artis palæstra vel schola fuisse exercitatum: cũ certum sit bonã Algebram tantum artem esse; mihi certè, vt cõcedere non cogar Cartesium fuisse Algebræ nimium ingratum, vel saltem suæ Geometriæ iniurium: potius admittendum videtur, quod tam ipse, quam alij promotores Algebræ, cognoscendo sibi impossibile enodare difficultatem à Clauio indicatam, maluerint eam silentio inuoluendo pro viribus eripere aliorum oculis: quam illam non solutam proponendo, notam facere deficientiam aut Algebræ, aut intelligentiæ in eius doctoribus. Si tamen insinuata ex Clauio Algebræ claudicatio attentius consideretur: hæc æstimanda non est vitium illius Algebræ quam scribit Clauius, aut alij apud quos nulla nisi practica Algebra inuenitur; speculatiuæ Algebræ defectus dicendus est, indicans tantum ignorantiam eorum qui scripserunt Algebram speculatiuam. Vt Algebra practica, & eius praxes bonæ dicantur: sufficit, vt præscriptæ in Algebra practica regulæ & praxes non decipiant vel abberrent. Ad speculatiuam Algebram pertinet intelligere quare vel quomodo praxes veræ sint, & demonstrare quod sint veræ; atque in hoc consistit defectus à Clauio indicatus, siue hic defectus adscribendus sit imbecillitati ingenij humani: siue adscribendus sit imbecillitati atque insubsistentiæ principiorum Algebræ, ex quibus talis causa atque intelligentia eruenda est. Ex his, primum sibi videri scribit Clauius: cui non assentimur, sed secundum putamus verissimum atque certissimum. Qui huius opinionis nostræ causam & fundamentum desiderat intelligere: obijciat nostræ Logisticæ illud idem quod in proposito paradoxo affertur contrarium Algebræ; vtrique communis est praxis quæ docet $+ 4$ *in* $+ 4 = - 4$ *in* $- 4$, ex qua praxi resultat tota difficultas de qua agitur in paradoxo: deinde vt habeat adæquatum responsum ad obiectam nostræ Logisticæ difficultatem, consulat huius praxeos demonstrationem allatam libro secundo nostræ Logisticę; ex hac intelliget quomodo ex nostræ Logisticæ speculatiuis principijs legitimè atque demonstratiuè inferatur praxeos veritas: & quare necessariò vera sit. Quoniam verò illud idem inferre ex Algebræ principijs speculatiuis, prorsus impossibile est: vlterius intelliget hæc Algebræ principia accusanda esse, non verò humanum ingenium; immo humani ingenij debilitas foret accusanda, si ex falsis Algebræ principijs inferre non posset aliquid falsum atque intellectu impossibile.

Para-

Paradoxum II.

Differentia duorum numerorum potest esse maior quolibet ex istis duobus numeris; & consequenter iuxta vsum antiquæ Matheseos, nostræ Logisticæ, & ipsius Algebræ, per vocem *totum* intelligendo numerum ex quo fit subtractio & per vocem *pars* intelligendo & numerum qui subtrahitur, & numerum qui ex subtractione producitur: non semper verum est, totum sua parte maius esse.

HOC paradoxum immediatè sequitur ex doctrina quæ expressè annotatur pag. 18. num. 81. apud postremos Algebræ promotores; vbi docetur, quod ex numero 4 verarum vnitatum subtrahendo numerum 7 verarum vnitatum, producatur numerus 3 falsarum vnitatum: & consequenter, quod si numerus ex quo fit subtractio numeret quatuor veras vnitates, numerus verò qui subtrahitur numeret tres falsas vnitates: producatur numerus qui numerat septem veras vnitates. Quo casu manifestum est quod totum siue numerus ex quo fit subtractio, sit 4: numerus autem ex subtractione productus, adeòque illius totius pars vna, sit 7: quoniam igitur etiam manifestum est numerum 4 esse minorem numero 7, patet totum sua parte minus esse: adeòque non semper verum esse, quod totum sit maius sua parte.

Nullus omnino ex versatis in aliqua scientia, ignorat quales sint illæ duæ propositiones, quarum vna de omni toto, asserit necessariò maius esse sua parte: altera affirmat, non necessariò maius esse sua parte; præterea scit, quam execrabile crimen foret singulas istas duas assertiones veras admittere; vtramque tamen veram admittere tenetur Algebra speculatiua, hoc est Algebra quæ vltra praxium vsum conformem præscriptis sibi regulis: istarum praxium causas inquirere præsumit. Quippe ex primis Algebræ fundamentis vtraque hæc assertio legitimè, atque satis immediatè infertur, & probatur vera: immo prior constituit vnam ex propositionibus quę inter Algebrę axiomata numerantur: altera constat, non quomodocunque, sed illam paulò ante intulimus ex ea Algebræ doctrina, qua nihil habet præstantius & sibi magis proprium: quæque constituit glorię eius solidissimum fundamentum, vt facilè colligitur ex dictis cap. 1; nimirum ex subtractione in qua maior numerus subtrahitur à minori, & quantitatibus falsis in quibus fundatur talis subtractio. Quoniam verò hæc Algebræ fundamenta communia non sunt antiquæ Mathesi & nostrę Logisticę, communis non est obligatio admittendi quod Algebra tenetur admittere: quodque ad eius propria principia legitimè sequitur. Hinc soli Algebræ propria est in paradoxo contenta doctrina, quę intra scientię limites nunquam fuit admissa, adeòque dici debet constituta extra limites omnium scientiarum, vbi nunquam inuenta fuisset ab Algebra, si foret scientia: vel non admitteret, siue supponeret, inter se pugnantia fundamenta; vt manifestum est apud omnes qui aliquam habent alicuius scientiæ cognitionem.

Paradoxum IIII.

Ex duobus eiuſdem ſpeciei numeris eumdem altero maiorem, & non maiorem eſſe, poſſibile eſt.

HOc paradoxum admittere tenetur Algebra ſpeculatiua: quandoquidem ex eius principijs ſpeculatiuis ſequatur tales numeros eſſe illos duos, quorum alter ſeptem falſas vnitates numerat, alter verò numerat quinque falſas vnitates. De his vel ſimilibus duobus numeris dubitauimus in notis ad præcedentis capitis numerum XVII. quis reliquo maior dicendus ſit ab Algebra: quia ab eius ſcriptoribus id ſatis expreſsè determinatum non inuenimus: ſed ſubinde vnum, ſubinde alterum conſiderare videntur vt maiorem reliquo: fortaſſis quia hæc libertas placet Algebræ Doctoribus, prætermittunt pronunciare, quis ex illis reliquo maior dicendus ſit. Videamus pro vtraque parte militantia aliqua argumenta, atque fundata in Algebræ principijs.

Priorem paradoxi partem, aſſerentem numerum ſeptem verarum vnitatum eſſe maiorem reliquo qui numerat pauciores, nimirum quinque falſas vnitates, videtur legitimè inferri poſſe ex Algebræ fundamentis. Primò: quia iuxta Euclidis elementa quæ ab Algebra admittuntur & ſupponuntur, maius vnitatum aggregatum, eſt maior numerus: ſed ſeptem vnitatum aggregatum, maius eſt, aggregato quinque falſarum vnitatum: igitur ſeptem falſarum vnitatum numerus, eſt maior numero quinque falſarum vnitatum. Secundò. Iuxta Algebræ & antiquæ Matheſi commune principium in præcedenti capite propoſitum numero IIII. totum ſua parte maius eſt: ſed numerus ſeptem falſarum vnitatum eſt aliquod totum, ſiue productum ex additione, in qua ſimul adduntur numeri quinque & duarum falſarum vnitatum, qui duo numeri ſunt partes producentes totum numerum ſeptem falſarum vnitatum: igitur numerus ſeptem falſarum vnitatum, eſt maior numero quinque falſarum vnitatum. Tertiò. Iuxta Algebræ documenta, tum apud Carteſium, tum apud poſtremos Algebræ promotores ſæpius annotata: numeri veri, ſunt vt credita, numeri falſi, ſunt vt debita: atqui ſeptem vnitatum debitum, eſt maius debito quinque vnitatum: igitur numerus ſeptem falſarum vnitatum, eſt maior numero quinque falſarum vnitatum. Quartò. Iuxta Algebram $+ 7$ *ad* $+ 5 = - 7$ *ad* $- 5$: ſed etiam conſtat in ratione $+ 7$ *ad* $+ 5$, antecedentem terminum $+ 7$ maiorem eſſe conſequente termino $+ 5$; ergo etiam in ratione $- 7$ *ad* $- 5$, antecedens terminus $- 7$, maior eſt conſequente termino $- 5$; hoc eſt numerus ſeptem falſarum vnitatum, maior eſt numero quinque falſarum vnitatum.

Poſteriorem partē propoſiti paradoxi, aſſerentem numerum quinque falſarum vnitatum eſſe maiorem numero ſeptem falſarum vnitatum: ex Algebræ fundamentis legitimè inferri videtur his argumētis. Primò. Productum ex ſubtractione maius eſt quo ab eodem vero numero decem, ſubtrahūtur pauciores veræ vnitates: ſed ex numero decem verarum vnitatum pauciores, hoc eſt quindecim veræ vnitates ſubtrahendæ ſunt, vt producatur numerus quinque falſarum vnitatū: plures verò, nimirum ſeptemdecim veræ vnitates ſubtrahendæ ſunt, vt producatur numerus ſeptem falſarum vnitatum, vt manifeſtè conſtat ex ſubtractione quam docent Algebræ doctores: ergo numerus quinque falſarum vnitatum, eſt maior numero ſeptem falſarum vnitatum. Secundò. Iuxta ſubſequens paradoxum, Algebra ſupponit euidentiſſimum, quod me ſuſpicari monui ad primum axioma capitis præcedentis: nimirum proprietates iuxta antiquam Matheſim conuenientes numeris, etiam conuenire Algebræ numeris falsis: sed in antiqua Mathesi certissimum est, quod ex duobus numeris deficientibus ab eodem maiori numero, ille maior sit, qui minus deficit: ergo hæc proprietas etiam conuenit Algebræ falsis numeris: sed iuxta Algebram, ab eodem duarum verarum vnitatum numero deficit, atque minus deficit numerus quinque falsarum vnitatum, quam numerus septem falsarum vnitatum: ergo numerus quinque falsarum vnitatum maior est numero septem falsarum vnitatum. Tertiò. Quod producitur quando septem falsarum vnitatum numero adduntur duæ veræ vnitates, est maius numero septem falsarum vnitatum: iuxta principium asserens totum siue productum ex additione, maius esse sua parte cui aliquid addendũ est vt habeatur tale totum, siue productum ex additione: quod principium annotatur numero IV. capitis præcedentis: sed iuxta Algebræ documenta spectantia ad additionem, numero septem falsarum vnitatum aliquid addendo, nimirum addendo duas veras vnitates, producitur numerus quinque falsarum vnitatum: ergo numerus quinque falsarum vnitatum, est maior numero septem falsarum vnitatum. Quartò. Quod producitur, quando ex numero quinque falsarum vnitatum, subtrahuntur duæ veræ vnitates, necessariò minus est numero quinque falsarum vnitatum qui per talem subtractionem imminuitur: sed iuxta subtractionem quam expressè docet Algebra, ex numero quinque falsarum vnitatum subtrahendo duas veras vnitates, producitur numerus septem falsarum vnitatum: ergo numerus septem falsarum vnitatum, est minor numero quinque falsarum vnitatum. Verum inutile prorsus est afferre argumenta, aut plura congerere, vt probetur iuxta Algebram verum admitti deberi quod numerus quinque falsarum vnitatum, & similiter quiuis alius numerus pauciores falsas vnitates numerans, maior sit numero septem falsarũ vnitatũ, vel alio quouis numero qui maiorem quam quinque falsarũ vnitatum multitudinem indicat: quandoquidem id immediatè notum sit ex Algebræ terminis: quippe idem significat magis deficere, & minus esse: numeros verò falsos magis deficere quo plures falsas vnitates indicant, illud est, quod docet præcipuum & maximè proprium, magisque celebratum Algebræ fundamentum: de quo egimus capite primo: vbi ex Algebræ doctoribus declaratum proponitur, quomodo Algebra ex numero quatuor verarum vnitatum, non tantum per subtractionem verarum vnitatum descendat ad minores numeros donec perueniat ad zero, (vltra quem terminum huiusmodi subtractiones continuando progredi nesciuit antiqua Mathesis): sed eadem qua prius descenderat facilitate, vlterius continuando subtractionem, progrediatur ad alios minores & minores numeros in infinitum: siue quantum per verarum vnitatum additionem ascendere potest ad maiores & maiores numeros. Constat igitur consequenter ad Algebræ fundamenta admittendum esse, septem falsarum vnitatum numerum esse maiorem (vt primo loco ostensum est) & non esse maiorem (vt secundo loco probauimus) eiusdem speciei numero quinque falsarum vnitatum.

Paradoxum IV.

Dari atque facilè intelligi potest numerus, qui dari vel intelligi non potest.

QVis crederet tam pulchras atque alijs scientijs inauditas propositiones erui ex Algebræ fundamentis? certè vna hæc propositio commemorata in proposito paradoxo sufficit: vt non tantum Mathematicis, sed etiam non Mathematicis con-

constet, quam verum sit quod dicitur paulò post paginam 48. tomi secundi Algebræ Cartesianæ: nimirum *mirandam Algebræ vim multis verbis exponere superuacuum esse*: præsertim supposita veritate eius quod hanc Algebræ laudẽ immediatè subsequitur,& affirmat quod sit *securæ demonstrationis suæ*: huic securitati innixi,secundã partẽ propositi paradoxi nos non probamus,sed tantũ indicamus argumentum quo eam clarissimè demonstrant postremi Algebræ promotores; de bonitate & subsistentia demonstrationis qua euincunt veritatem contentam secunda parte axiomatis, nobis dubitare non licet: quippe Algebra *securæ est demonstrationis suæ*; idque ex Algebræ præcipuis doctoribus intellexisse nobis sufficit, vt Algebræ concedamus huius partis veritatem. Etenim nobis ostendendum non est paradoxum ab vlla scientia diuersa ab Algebra admittendum esse, sed illud asserimus tanquam aliquid proprium Algebræ.

Numerus qui dari & intelligi potest, & tamen dari vel intelligi non potest: exempli gratia est radix nouem falsarum vnitatum. Huius assertionis primam partem probat hoc argumentum. Qualiscunque sit datus numerus A, eius radix erit numerus B, eoipso quod inter numerum A & vnitatem medius proportionalis sit numerus B: vt docet Clauius cap. 2. suæ Algebræ: Cartesius initio libri 1. suæ Geometriæ siue Algebræ. Franciscus à Schooten in notis ad initium libri 1. Geometriæ Cartesij: & passim alij doctores, tum antiquæ Matheseos, tum etiam Algebræ; sed ex primis Algebræ fundamentis manifestum est, -1 *ad* $-3 = -3$ *ad* -9: adeòque inter nouem falsas vnitates & vnam falsam vnitatem, medium proportionalem numerum esse qui numerat tres falsas vnitates: igitur numerus trium falsarum vnitatum, est radix nouem falsarum vnitatum: sed numerus trium falsarum vnitatum datur & facilè intelligibilis est, saltem ab Algebra: ergo radix nouem falsarum vnitatum est numerus qui dari & facilè intelligi potest ab Algebra. Reliquum igitur est vt ostendatur radicem nouem falsarum vnitatum, esse numerum qui dari vel intelligi non possit; hoc demonstratum inuenitur apud postremos Algebræ promotores pag. 355. numero 1. vel 2. Substantia demonstrationis quam afferunt, hæc videtur. Diuersus numerus à ternario, ductus in se, producere non potest numerum nouem: sed Algebra non admittit ternarium diuersum à ternario vero, & ternario falso, qui singuli in se ducti, producunt nouem veras vnitates: ergo nullus Algebræ numerus producit numerum nouem vnitatum, diuersum à numero nouem verarum vnitatum; ergo nullus Algebræ numerus in se ductus producit nouem falsas vnitates: ergo in Algebra impossibile est dari aut intelligi numerum qui in se ductus producat nouem falsas vnitates; sed radix nouem falsarum vnitatum, est numerus qui in se ductus producit nouem falsas vnitates: ergo radix nouem falsarum vnitatum, est numerus qui in Algebra dari vel intelligi non potest. De subsistentia huius demonstrationis breuius tamen propositæ à postremis Algebrę promotoribus, dubitare nobis non licet: est enim vt diximus Algebra *securæ demonstrationis suæ*. Quoniam verò ex hac Algebrę demonstratione cõstat posterior pars propositi paradoxi:& cũ prior eius pars euincatur argumento prius allato, totum paradoxum Algebræ concedendum est. Iuuat tamen hic afferre integram doctrinam continentem prædictam demonstrationem, prout inuenitur apud postremos Algebræ promotores initio libri 3. siue pagina paulò ante citata: continet enim nõnulla alia Algebræ mysteria consideratione digna; verba hæc sunt. *Æquationes simplices sunt partes componentes æquationes compositas. Tres differentes species æquationum simplicium inueniuntur. Ad primam speciem pertinent illæ, in quibus valor cognitæ magnitudinis, qui etiam appellatur radix æquationis, est magnitudo vera siue positiua. Ad secundam speciem spectant illæ, in quibus radices sunt falsæ, hoc est in quibus valor incognitæ magnitudinis est magnitudo falsa, siue negatiua. Deni-*

que tertia ſpecies continet illas, in quibus radices non poſſunt eſſe vera neque falſa : ſed tantum imaginaria, quia inuoluunt aliquam contradictionem. Hac contradictio cognoſcitur, quando pro valore incognita magnitudinis ſupponitur radix negatiua magnitudinis, exempli gratia Rıq — A : quia radix talis magnitudinis non poteſt eſſe niſi imaginaria. Etenim ſi intelligatur vt magnitudo, neceſſariò intelligetur vt poſitiua vel vt negatiua, inter quas aliud medium non eſt quam zero. Iam verò ſiue conſideretur hac radix vt poſitiua, ſiue vt negatiua, eius productum erit poſitiuum. Igitur contradictionem vult intelligere qui vult intelligere hanc ſuppoſitam radicem, vt vnam magnitudinis ſpeciem. Hactenus poſtremi Algebræ promotores.

Ex hac eorum doctrina, luce meridiana clarius apparet, quomodo Algebra admittat, duas diuerſas magnitudinum ſpecies conſtitui à veris & falſis eius magnitudinibus : adeòque particulas, *vera* & *falſa*, eſſe particulas reſtringentes quando Algebra nominat ſuas veras & falſas magnitudines : & conſequenter verum eſſe illud quod nos ſuſpicari diximus in notis ad Algebræ Axioma quod proponitur numero primo capitis præcedētis, & nobis tam abſonum atque abſurdum videbatur, vt abſolutè verum aſſerere non auderemus quod videbamus veriſſimum: ſed non inueniebamus expreſsè aſſertum ab Algebræ doctoribus. Certè nemo ſine tali authoritate præbuiſſet fidem nobis aſſerentibus, ab Algebra non tantum (vt clarè aſſerunt) conſiderari veras & falſas quantitates, quod ad numerum XI. licitum diximus, quidcunque tandem per veras & falſas quantitates velint intelligi: ſed præterea, quod ibidem illicitum eſſe annotauimus, ſupponant quod veræ illæ & falſæ quantitates, conſtituant duas diuerſas magnitudinum ſpecies; ſic vt non tantum veris, ſed etiam falſis magnitudinibus conueniat quælibet proprietas iuxta antiquam Matheſim conueniens magnitudini de qua agit, hoc eſt magnitudini quam Algebra veram appellat : præter quam nullam aliam magnitudinem cognouit vel cognoſcit antiqua Matheſis. Audax profectò, immo potius temeraria Algebræ ſuppoſitio! cum enim illud quod per falſas quantitates intelligi velit, diuerſum non ſit ab eo quod ab antiqua Matheſi vocatur non quantitas, immo non ens, atque aliter etiam appellatur nihil : talis Algebræ ſuppoſitio diuerſa non eſt, ab ea quæ ſupponeret, quantitati conuenientes proprietates, etiam conuenire ijs omnibus quæ non ſunt quantitas. Quo ſuppoſito licet punctum non ſit quantitas, tamen ſequitur puncto conuenire proprietates, quæ iuxtà antiquam Matheſim conueniunt lineis, ſuperficiebus, corporibus, alijſque de quibus verum eſt dicere quod ſint quantitates.

Eodem iure [illegible] ſupponere poterant Mathematicos veros [illegible] eſſe duas Mathematicorum ſpecies. Qui [illegible] præmitteret pro ſua doctrina, deinde ſubſumendo, atqui cer[illegible] eſt & omnes fatentur, Mathematicos vixiſſe, ſtuduiſſe, cognouiſſ[illegible] inueniſſe, ſcripſiſſe demonſtraſſe &c. legitimè inferret, Mathematicos fi[illegible] pictos vixiſſe, ſtuduiſſe, cognouiſſe, multa inueniſſe, ſcripſiſſe, demon[illegible]ſſe &c. pulchrum enimuerò & inauditum conſequens : non minus tamen glorioſum & laude dignum atque admittendum : quam nouæ, ſoli Algebræ propriæ, & alteri Matheſi inauditæ propoſitiones, quæ ex ſpeculatiuis Algebræ fundamentis inferuntur : quandoquidem hæc Algebræ fundamenta, ſimili prorſus ſuppoſitioni innitantur, in qua vt diximus ſupponitur, non minus quantitates eſſe eas quas Algebra appellat falſas, negatiuas, fictas, imaginarias, quaſque fatetur eſſe vel nihil, vel à nihilo deficientes, adeòque non quantitas & non aliquid: quam quantitates quas veras appellat, quales fatetur eſſe omnes & ſolas illas de quibus agit antiqua Matheſis. Ego certè fictis pictiſque Mathematicis annumerandos exiſtimarem Algebriſtas : niſi cognoſcerem eos & laboraſſe & ſuis laboribus

ribus multum profuisse practicæ Mathesi, quod præstare non possunt ficti aut picti Mathematici; aliud tamen est prodesse practicæ Mathesi: aliud Mathesi speculatiuæ afferre vtilitatem. Primum artis opus est, alterum scientiæ; illa Algebra quæ artis terminos non excedit, præclarissima est, maximèque laudanda; speculatiua Algebra illa est, quam probare non possumus: quæque nostro iudicio, non magis dici potest scientia, quam Mathematici ficti aut picti, dici possint Mathematici; aut nihil siue non aliquid, aut Algebræ quantitates falsæ appellari possint quantitates.

Ex commemorata atque superius relata doctrina vltimorum promotorum Algebræ, etiam notatu dignum videtur: vltra veras & falsas Algebræ magnitudines, duas magnitudinum species constituentes: alias magnitudines considerari quæ ab his Algebræ doctoribus appellantur imaginariæ, quas asserunt neque veras neque falsas esse; in his non parum promotam existimarem aliorum Algebram, si satis intelligerem quomodo hæ imaginariæ & neque veræ neque falsæ magnitudines differant à reliquis quas postremi Algebræ promotores cum alijs Algebræ doctoribus appellant falsas magnitudines, quas etiam pleno ore imaginarias ac chimæricas nominant: ideòque ex eo quod istæ neque veræ nequæ falsę magnitudines, dicantur imaginariæ ac chimæricæ, satis intelligi non potest differentia inter ipsas & falsas Algebræ magnitudines; per hoc verò quod dicantur neque veræ neque falsæ magnitudines, tantum itelligi potest quid non sint; quare vt vlterius declarent quid sint, addunt quod contradictionem inuoluunt: puto illos voluisse dicere quod sint magnitudines quas intelligere contradictionem inuoluit: etenim vt opinor his suis magnitudinibus imaginarijs non voluerunt annumerari hircoceruum, viride non coloratum, album non album, dulce amarum, aut his similia: quæ neque veræ neque falsæ quantitates sunt, quæque contradictionem inuoluunt: sed non sunt quantitates, adeòque nec sunt quantitates quas intelligere contradictionem inuoluit; vt tamen verum fatear, neque ex his assequor diuersitatem inter eas quantitates quas falsas appellant, & reliquas quas dicunt neque veras neque falsas esse: etiam supposito vt prius dixi ab Algebra supponi, falsas eius quantitates esse quantitates; etenim si Algebræ quantitates falsas intelligere non inuolueret contradictionem, non incidissemus in tot contradictiones & impossibilia, quot hactenus annotauimus, tantum leuiter inspiciendo, & parum euoluendo pauca ex multis mysterijs falsarum Algebræ magnitudinum siue quantitatum; quare fateri cogor, me commemoratas magnitudines, quæ neque veræ neque falsæ esse asseruntur, non magis intelligere posse, quam assertiones quæ neque veræ sunt nequæ falsæ. Vtrum maiorem intelligentiæ defectum indicet & probet, admittere vel non admittere huiusmodi assertiones vel quantitates à veris & falsis diuersas, iudicium relinquimus illis omnibus qui assecuti sunt aliquam scientiam.

Para-

Paradoxum V.

Licet nulla proportio admitti possit inter diuersi generis quantitates: tamen proportio admittenda est inter quantitates diuersi generis.

PRior pars huius paradoxi manifesta est ex ipso cōceptu proportionis & doctrina maximè familiari antiquæ Mathesi, quæ ignorari non potest ab vllo qui delibauit antiquam Mathesim; ab hac antiquæ Matheseos doctrina diuersam non proponit Algebra, sed pro suis supponit antiquam proportionum doctrinam; hinc prior pars propositi paradoxi tam manifestè constat, vt non indigeat alia probatione.

Posterior pars huius paradoxi indiget probatione: quippe quæ non admittitur ab antiqua Mathesi vel nostra Logistica, ostendendum verò est quod ab Algebra admittatur, vt constet illi conuenire quod asseritur in paradoxo. Ab Algebra admitti proportionem inter duas diuersi generis quantitates probatur. Primò. Quia Algebra non negat, immo admittit antiquæ Matheseos doctrinam docentem ex fluxu siue ductu vnius lineæ in se vel aliam, produci superficiem: adeòque rectam lineam A ductam in se, producere superficiem exempli gratia B: sed postremi Algebræ promotores, agentes de ductibus siue multiplicationibus tam linearum quam numerorum aliarumque quantitatum, expresse docent pag. 19. numero 83. & sequentibus, quod multiplicatio siue ductus nihil aliud sit quam composita siue iterata additio: ergo ex iterata additione lineæ A ad seipsam, producitur superficies B. Quoniam igitur iuxta eosdem aliosque Algebræ doctores, & antiquam Mathesim, in axiomate quod asserit totum sua parte maius esse: vox *totum* significat productum ex additione, & vox *pars* significat singulos genitores additionis, vt constat ex dictis cap 2. ad numerum 4: ex hoc axiomate constat superficiem B esse aliquod totum quod maius est qualibet eius parte, & talem eius partem esse lineam A: sed idem est superficiem B esse maiorem linea A, & superficiem B ad lineam A habere proportionem maioris inæqualitatis: ergo superficies B ad lineam A habet proportionem maioris inæqualitatis: atqui etiam manifestum est superficiem B, & lineam A, esse quantitates diuersi generis: ergo inter quantitates diuersi generis admittenda est proportio: saltē ab Algebra, ex cuius principijs hoc sequitur. Secundò. Supposito vt prius quod A sit linea, B sit quadratum factum super lineam A, C sit cubus cuius latus sit A: vix aliquid magis familiare Algebræ quam asserere exempli gratia C ✝ B ✝ A = 14: vel B ✝ A = 6. & huiusmodi æquationes affirmare, in quibus vel complexum ex diuersi generis quantitatibus, vel vna alicuius generis quantitas asseritur æqualis, vel numero, vel alterius generis quantitati: quoniam igitur complexum ex quantitatibus diuersi generis, vel vnam talem quantitatem æqualem esse alteri alterius generis quantitati, idem est ac inter illos terminos asserere proportionem æqualitatis: manifestum est Algebram admittere proportionem exempli gratia inter numerum, & vnam alterius generis quantitatem, aut complexum ex pluribus etiam diuersorum generum quantitatibus. Tertiò. Quemadmodum in numeris 1, 2, 4, 8, antiqua Mathesis & numerosa Algebra agnoscit continuatam seriem terminorum eamdem rationem habentium: ità speciosa Algebra inter

ter lineam A, quadratum lineæ A hoc est A_2, cubum lineæ A hoc est A_3 &c. agnoſcit atque admittit continuatam ſeriem terminorum eamdem rationem habentium: ergo hæc Algebra admittit proportionem inter lineam, ſuperficiem, corpus &c. adeòque admittit proportionem inter quantitates diuerſi generis. Sed inutile videtur pro hac ſecunda parte cōgerere plura huiuſmodi argumenta pro ijs qui vnquam delibarunt Algebram: pro cæteris, quæ attulimus abundè ſufficiunt vt ſciant Algebram admittere proportionem inter duas diuerſi generis quantitates: vt hic aſſeritur in ſecunda parte propoſiti paradoxi, quam partem non admittit noſtra Logiſtica, neque illam cum Algebra tenetur admittere, licet communes habeat ſcriptiones, & aſſertiones aliquas, ex quibus hoc ſequitur in Algebra; ſed quia cum hac non conuenit noſtra Logiſtica quoad intelligentiam terminorum, nihil contra nos facit ſimilitudo vel identitas, aut ſcriptionum, aut vocum, aut aſſertionum: quippe pro Logiſtica termini & ſcriptiones debent intelligi vt à Logiſtica exponuntur: pro Algebra intelligi debent vt exponuntur ab Algebra, & apud diuerſos eiuſdem ſcientiæ vel artis ſcriptores qui eoſdem terminos diuerſimodè explicant, diuerſimodè intelligi debent ijdem termini.

Paradoxum VI.

Maximè fundamentales ac propriæ Algebræ regulę agentes de multiplicatione; prius veræ, deinde falſæ demonſtrantur ex principijs Algebræ.

IN prima pagina Geometriæ Renati Deſcartes hęc leguntur. *Arithmetica tota ex quatuor aut quinque ſolummodò operationibus conſtat, quæ ſunt, additio, ſubtractio, multiplicatio, diuiſio, & radicum extractio, (quæ pro quadam diuiſionis ſpecie haberi poteſt:) Ita ſimiliter Geometria, quod ſpectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, vt cognita fiant, aliud faciendum non eſt, quam vt vel ipſis addantur, vel ab iiſdem ſubtrahantur alia: vel etiam ſi vna ſit (quæ vocatur vnitas vt commodius ad numeros referatur quamque communiter prolibitu aſſumere licet) atque præter hanc adhuc alia duæ, vt ad ipſas inueniatur quarta, quæ ſit ad alterutram vt eſt altera ad vnitatem, quod idem eſt ac multiplicatio; vel vt per ipſas inueniatur quarta quæ ſit ad vnam ex illis duabus, vt vnitas ad alteram, quod conuenit cum diuiſione; vel denique, vt inter vnitatem & alteram quandam rectam inueniatur, vna, aut duæ pluresue media proportionales, quod idem eſt ac radicis extractio &c.* Hæc Carteſij doctrina paulò pluribus declaratur atque exponitur pag. 147. tomi primi Geometriæ Carteſianæ: qua pagina incipiunt notę Franciſci à Schooten, præcipui interpretis & commentatoris quem habuit Carteſiana Geometria: cui etiam addidit à ſe ſcriptum tractatum quem inſcribit, *Principia Matheſeos vniuerſalis, ſeu introductio ad Geometriæ Methodum Renati Deſcartes:* & primum locum obtinet in ſecundo tomo Geometriæ Carteſianæ: in hoc ſuo tractatu pag. 2. etiam ſcribit *quod in vniuerſa Matheſi operationes omnes ad quinque diuerſas (vulgo ſpecies dictas) reduci poſſint quæ ſunt additio, ſubtractio, multiplicatio, diuiſio, & radicum extractio.*

Hæc doctrina ex citatis Algebræ doctoribus indicata noua non eſt, ſed cōformis antiquæ Matheſi: eam tamen volui hic afferre ex Algebræ ſcriptoribus, vt conſtet hanc antiquæ Matheſeos doctrinam, etiam noſtræ Logiſticæ communem, admitti ab Algebra: neque ſcio vllum Algebræ ſcriptorem à quo reijciatur aut non admittatur; eam tamen ampliorem reddit Algebra vt conſtat ex dictis cap. 1. nam

ſub-

subtractio superius commemorata, & in antiqua Mathesi tantum possibilis, quando quantitas subtrahenda non est maior, quantitate ex qua subtrahenda proponitur: non sufficit pro Algebra: quæ præterea requirit modum faciendi hanc subtractionem, quando maior quantitas ex minori quantitate subtrahenda proponitur: atque ad hunc finem assumit quantitates falsas, nihilo minores, imaginarias &c. vt diximus capite primo. Quoniam verò inutiliter assumerentur, atque admitterentur istę falsæ quantitates, nisi adhiberi possent in fundamentalibus operationibus superius commemoratis, & tamen in Mathesi antiqua nullæ regulæ inueniantur indicantes modum eas adhibendi, & tales operationes instituendi circa quantitates falsas à sola Algebra admissas: ab his eius operationibus exordium sumunt Algebræ scriptores omnes, qui cum Cartesio alijsque perpaucis, non supponunt aliundè cognita magis propria & necessaria Algebræ fundamenta: hæc fundamenta, Cartesianæ Algebræ addidit, vel Erasmius Bartolinus, vel Franciscus à Schooten: & primum locum obtinent in tomo secundo Geometriæ Cartesianæ. Ex Algebræ regulis spectantibus ad enumeratas Matheseos operationes, tantum duæ considerantur in titulo huius paradoxi; prima agit de casu in quo falsa quantitas in veram quantitatem ducenda est: quo casu affirmat, productum quidem inueniri vt in antiqua Mathesi, hoc verò productum semper esse falsam Algebræ quantitatem, adeòque affici debere signo —. Secunda multiplicationis regula agit de casu, in quo quantitas falsa ducenda est in aliam etiam falsam quantitatem: quo casu docet, productum ex ductu siue multiplicatione, semper esse veram Algebræ quantitatem, adeòque affici debere signo †. De his duabus Algebræ regulis maximè fundamentalibus dicitur in proposito paradoxo, ex Algebræ principijs demonstrari, vtramque hanc regulam & veram, & etiam falsam esse.

Huius paradoxi primā partē, asserentē vtramque istam Algebræ regulā veram esse, supponunt quidem omnes Algebræ scriptores: eam tamen veram demonstrare non spectat nisi ad speculatiuam Algebram; practica præscriptas sibi regulas supponere, & conformiter ad illas operari tenetur, non verò illarum causam intelligere, aut illas veras demonstrare, quod munus est Algebræ speculatiuæ: non desunt tamen qui afferunt istarum regularum demonstrationes approbatas ab alijs Algebræ cultoribus. Ex his vnam alteramue hic noto, pro probatione primæ partis propositi paradoxi.

Prima demonstratio primæ multiplicationis regulæ Algebræ, quæ asserit falsam quantitatem ductam in veram quantitatem, semper producere falsam quantitatem: hoc est exempli gratia — 2 *in* † 1 producere — 2; inuenitur pagina vndecima tomi 2. Algebræ siue Geometriæ Cartesianæ, in tractatu qui inscribitur *principia Matheseos vniuersalis seu introductio ad Geometriæ methodum Renati Descartes*: vbi (adhibita compendiata scriptione Algebræ Cartesianæ magis propria, & à nostræ Logisticæ scriptione tam parum diuersa vt hæc differentia in demonstratione nullam causet varietatem) sequentibus verbis proponitur.

Esto A — B multiplicandum per C, & sit A — B ═ E: hinc si vtrobique addatur B, fiet A ═ B † E. Iam quoniā ęquales quantitates per eandem quantitatem multiplicatæ producunt æquales; ideò si vtrinque multiplicetur per C, erit A *in* C ═ B *in* C *et* † E *in* C, hoc est, auferendo vtrinque B *in* C, erit A *in* C *et* — B *in* C ═ E *in* C. Quocirca cum statuatur A — B ═ E, & vtraque parte ducta *in* C, producatur A *in* C *et* — B *in* C ═ E *in* C perspicuum fit — B ductum in † C, producere — B *in* C.

Secunda demonstratio primæ multiplicationis regulæ Algebræ affertur à postremis Algebrę promotoribus pag. 20. vt in hac nihil desideretur, præmitto hic do-

ctri-

ctrinam quam in illa citant, quamque afferunt pag. 10: vbi incipiendo tractationem signorum + & —, prius numero 52. monent, *quod operationes omnes spectantes ad magnitudines, non fiant aliter quam per signa + et —*. Deinde numero 53. dicunt, *quod + et — magnitudinum æqualium fiant per mutuam vnius ab altero subtractionem, + subtractum ex —, & — subtractum à +. Positio siue possessio mille scutorum subtracta à negatione vel priuatione mille scutorum, & negatio siue priuatio mille scutorum subtracta ex positione siue possessione mille scutorum, hoc est + mille scuta sublatis mille scutis, & — mille scuta sublatis + mille scutis: vel quod idem est, + 1000 scuta — 1000 scutis æquantur zero. Hinc*, vt dicitur numero 54, *clarum est primò, quod plus plus, siue + +, sit æquale minus minus, siue — —, & quod — — = + +, hoc est quod additio ipsius plus æquetur subtractioni ipsius minus, quodque subtractio ipsius minus æquetur additioni ipsius plus. Sic + + A = — — A & — — A = + + A. Secundò* vt dicitur numero 55. *quod + — = — + & quod — + = + —, hoc est quod subtractio ipsius +, æquetur additioni ipsius —. Sic + — A = — + A.* Hæc & nihil aliud inuenio pag. 10. allatum pro fundamento demonstrationum, quibus hic indigemus; quibus præmissis, vt demonstrent veritatem prioris regulæ Algebræ asserentis quantitatem positiuam + 2, ductam in quanitatem falsam, siue negatiuam — 4, necessariò producere quantitatem negatiuam — 8: ita discurrunt.

Vt ducatur + 2 *in* — 4, quoniam + 2 est additio siue summa positiua vnitatis bis repetitæ: igitur productum ex + 2 *in* — 4 erit etiam additio siue summa positiua alterius numeri — 4 bis repetiti, hoc est numerus negatiuus, — 8: vt constat ex paulò ante notatis numero 55.

Prima demonstratio secundæ regulæ Algebræ, quæ asserit falsam quantitatem ductam in falsam quantitatem, semper producere veram quantitatem: hoc est exempli gratia — 1 *in* — 2 producere + 2; inuenitur immediatè post præcedentis regulæ prius allatam primam demonstrationem, vbi his verbis proponitur.

Nec aliter ostendetur — *in* — ductum, producere +. Etenim si A — B ducendum sit in C — D: ponendo vt ante, A — B = E, erit productum ex A — B *in* C — D æquale producto ex E *in* C — D, vel C — D *in* E: id est C *in* E *et* — D *in* E: sed C *in* E, vt supra, æquatur A *in* C *et* — B *in* C: vnde A *in* C *et* — B *in* C *et* — D *in* E æquabitur producto ex A — B *in* C — D. Porro cum A — B æqualis sit posita ipsi E, & vtraque parte ducta in D, productum A *in* D *et* — B *in* D æquetur producto D *in* E: hinc si ex A *in* C *et* — B *in* C subtrahatur A *in* D *et* — B *in* D, loco D *in* E ei æquale: erit iuxta regulam subtractionis A *in* C *et* — B *in* [illegible] — A *in* D *et* + B *in* D productum quæsitum. Ex quibus liquet — B ductum [illegible] producere + B *in* D.

Secunda demonstratio [illegible] Algebræ quæ asserit falsam quantitatem ductam in falsam quantitatem [illegible] quantitatem: Posteriori Algebræ promotores hanc regulam demonstrant [illegible].

Si exempli gratia ducatur — 2 *in* — 4, numerus — 2 est additio negatiua siue summa negatiua vnitatis bis repetitæ: quare productum ex — 2 *in* — 4, erit etiam additio negatiua, siue summa negatiua alterius numeri — 4, bis repetiti, hoc est numerus positiuus minus minus 8 = + 8. vt constat ex dictis numero 54. hic prius prænotato.

Nos non examinamus vtrum pro prima parte propositi paradoxi allatæ demonstrationes legitimæ sint vel illegitimæ: certum est fideliter descriptas esse ex authoribus citatis; quos nominasse satis est apud Algebræ studiosos, vt suspiciant illorum oracula, & intelligant esse eos qui præ reliquis haberi possunt benemeriti de Algebra. Verum nostra nihil interest, siue istæ demonstrationes dicantur subsistentes, atque euincere veritatem regularum Algebræ de quibus agitur in titulo paradoxi: siue oppositum asseratur. Si primum dicatur, constat prima pars huius paradoxi. Si secundum asseratur, igitur ex paucis qui conati sunt has demonstrationes afferre, inutiliter laboratum est, & à postremis & à præcipuis Algebræ doctoribus: adeòque Algebra non nisi artibus annumeranda est, quia eius fundamentales regulæ licet pro praxi vtiles, tamen destitutæ sunt demonstrationibus quibus indigent regulæ, praxes, aut problemata, vt admitti possint pro scientifica Mathesi. Reliquum igitur est, vt demonstratam exhibeamus alteram partem propositi paradoxi: in quem finem sufficere existimamus subsequentes duas demonstrationes.

Prima demonstratio ex Algebræ principijs euincens, quantitatem falsam ductam in quantitatem veram, non semper producere quantitatem falsam. Manifestum est in Algebra, & ab omnibus eius doctoribus, nemine penitus discrepãte, admittitur verum esse, quod -1 *ad* $-2 = +2$ *ad* $+4$: ergo ex regula aurea in qua primus terminus est vnitas, secundus terminus est -2; tertius terminus est $+2$, constat productum esse $+4$: atqui vt hic initio ex Cartesio notauimus, multiplicatio in qua -2 ducitur in $+2$; non est aliud quam talis regula aurea compendiata: igitur non possunt habere diuersa producta, sed idem habetur productum ex proposita regula aurea, & multiplicatione: sed productum ex hac regula aurea est $+4$, vt hic ostensum est: ergo etiam ex multiplicatione in qua -2 ducitur in $+2$, productum est $+4$: ergo numerus falsus -2, ductus in numerum verum $+2$, producit numerum verum $+4$: ergo numerus falsus ductus in numerum verum, non semper producit numerum falsum. Quod primo loco erat demonstrandum.

Secunda demonstratio ex Algebræ principijs euincens, falsam quantitatem ductam in falsam quantitatem non semper producere veram quantitatem. Ex Algebræ fundamentis constat, & ab omnibus Algebræ scriptoribus verum admittitur, -1 *ad* $-2 = -2$ *ad* -4: ergo ex regula aurea in qua primus terminus est vnitas, secundus est -2, tertius est -2, productum est -4: sed iuxta Cartesij doctrinam initio hic annotatam, huius regulæ aureæ compendium est multiplicatio in qua -2 ducitur in -2: ergo ex hac multiplicatione & regula aurea cuius compendium est, idem oritur productum, atqui ostensum est ex tali regula aurea productum esse -4: ergo ex multiplicatione in qua -2 ducitur in -2 producitur -4: ergo ex falsa quantitate ducta in falsam quantitatem, non semper producitur vera quantitas. Quod secundo loco erat demonstrandum.

Ex duabus demonstrationibus postremo loco propositis, manifesta est posterior pars propositi paradoxi: prior etiam pars verissima est, supposito quod subsistant demonstrationes pro hac parte prius allatæ ex doctoribus Algebræ, aut vsquam alibi inueniantur demonstrationes regularum de quibus agit paradoxum. Si supponatur quod istarum regularum demonstrationes nullæ admittendæ sint, tamen verum erit paradoxum, non vt propositum est, sed si dicat; maximè fundamentales & propriæ Algebræ regulę agentes de multiplicatione, veræ habentur & maximè vtiles, & tamen ex Algebræ principijs nusquam demonstratum inuenitur veras esse: sed falsas esse inuenitur demonstratum: huius assertionis prior pars negari non potest ab Algebra: posterior eius pars constat ex nostris demonstrationibus allatis pro secunda parte paradoxi quod asseruimus, & probandum assumpsimus, supponendo aut impossibile aut maximè difficile, vt gloriosissimi Algebræ doctores fateantur suarum demonstrationum insubsistentiam.

Para-

Paradoxum VII.

Algebrę regulę maximè fundamentales, agentes de operationibus circa quantitates quę in Algebra negatiuæ appellantur: legitimè demonſtrantur falſæ, ſed tamen ſunt veræ, bonę, vtiles atque retinendæ, non tantum pro Algebra practica, ſed etiam pro ea Matheſi ſpeculatiua quæ non admittit falſas Algebræ quantitates.

NON leue damnum Logiſticæ noſtræ afferret qui abijceret regulas nuſquam inuentas in antiqua Matheſi, ſed ab Algebra propoſitas pro operationibus circa quantitates quas falſas appellat. Fateor quidem mihi perſuaſum eſſe, negari non poſſe, legitimas ac ſolidè ſubſiſtentes demonſtrationes, quibus in præcedenti paradoxo oſtendimus, duas ex iſtis Algebræ regulis falſas eſſe: quodque facilè foret reliquas ſingulas demonſtrare falſas: hoc tamen non aduerſatur aſſertæ in hoc paradoxo commemoratarum regularum veritati, bonitati, vel vtilitati, aut pro Algebra practica, aut pro Matheſi ſiue practica ſiue ſpeculatiua, diuerſa ab Algebra, quæque non admittit alias quam veras Algebræ quantitates. Apparenter quidem aliquam, ſed reuera nullam aut contrarietatem, aut contradictionem inuoluũt paradoxa ſexto & ſeptimo loco propoſita. Ex his præcedens, non abſolutè, non vtcunque: ſed tantum præſuppoſita terminorum intelligentia quæ ab Algebra ſupponitur, demonſtrat, duas ex iſtis regulis falſas eſſe; hoc eſt ſuppoſito quod quantitates affectæ ſigno —, quæque in Algebra appellantur falſæ, diuerſæ ſint à quantitatibus in antiqua Matheſi cognitis, quas Algebra veras aſſerit & nihilo maiores, adeòque falſæ iſtæ quantitates intelligantur eſſe nihilo minores, fictitiæ, chimæricæ &c. cui non aduerſatur quod eædem iſtæ duæ regulæ aſſerantur veræ, ſed præſuppoſita alia terminorum intelligentia: nimirum quod quantitates affectæ ſigno —, ſint quantitates in antiqua Matheſi cognitæ & admiſſæ, atq; ex illis quas Algebra veras appellat & nihilo maiores: quod tam manifeſtum eſt, quam clarè patet propoſitionem aſſerentem hominem alimentis indigere, falſam eſſe poſſe, ſuppoſito quod hoc aſſeratur de picto vel ficto homine: ſed iſtam falſitatem aut eius probationem non aduerſari veritati propoſitionis aſſerentis hominem alimentis indigere, ſuppoſito quod agat de vero homine.

Logiſtica noſtra non conſiderat niſi quantitates veras & cognitas antiquæ Matheſi: adeòque non admittit Algebræ quantitates falſas, & à nihilo deficientes, aut ab his dependentem vniuerſalitatem ſubtractionis de qua egimus cap. 1. quamque cauſam diximus quare antiquæ Matheſi contrarietur, admittendo has ſibi proprias falſas quantitates: tamen admittit prædictas Algebræ regulas, eaſque non pro falſis, ſed pro veris quantitatibus vtiles & commodas, & vt ita dicam neceſſarias exiſtimat, atque veras demonſtrat. Quare qui iſtas regulas abijceret grauiſſimum damnum afferret noſtræ Logiſticæ. Quod commemoratæ regulæ retineantur & doceantur à noſtra Logiſtica, conſtat ex parte 4. cap. 2. libri 1. vbi expreſsè propoſitæ inueniuntur. Quam vtiles & neceſſariæ ſint pro noſtra Logiſtica, manifeſtum eſt ex reliquis primi libri capitibus, ac præſertim ex illis in quibus proponuntur exempla primæ regulæ Logisticæ. Quomodo non adhibeantur nisi pro veris & nihilo maioribus atque ab antiqua Mathesi cognitis quantitatibus, patet ex intelligentia terminorum quam pro his regulis requirit Logistica: de qua terminorum significatione consuli potest index præsertim ad signa † vel —, vel ad voces quantitas positiua vel negatiua: vnde intelligetur quomodo in Logistica conueniant, aut inter se differant quantitates, quarum aliæ signo †, aliæ signo — afficiuntur: omnes tamen istæ quantitates sunt ex illis quas Algebra veras appellat. Et licet in Algebra signum —, vel illi respondens vox *minus*, æquiualeat voci *sublatum*, atque subtractionem indicet: tamen in Logistica nostra signum —, vel illi æquiualens vox *minus*, æquiualeat vocibus *& insuper* atque additionem indicet. Quod prædictæ regulæ pro falsis suis quantitatibus propositæ ab Algebra, non de falsis, sed de veris quãtitatibus intellectæ, legitimæ & veræ sint, ac demonstratæ subsistant: constat ex lib. 2. nostræ Logisticæ, vbi istæ demonstrationes afferuntur ex fundamentis tantum admittentibus quantitates quæ ab Algebra inter veras quantitates admittuntur, & falsis eius quantitatibus annumerari non possunt, quia non sunt nihilo minores, sed sunt maiores nihilo. Etenim ex quantitatibus quas considerat nostra Logistica, aliæ quidem signo †, aliæ signo — afficiuntur, ex his tamen nullæ falsæ sunt, & nihilo minores. Retinuimus in Logistica nostra signa † *et* — atq; illis respõdentes voces *plus* & *minus*: non quia nesciuimus quam significationem hæc signa haberent in Algebra: sed vt consuleremus vtilitati Algebræ practicæ, & efficeremus vt proximè conueniret cum nostra Logistica practica: indeque citra falsitatem possemus asserere, vt sæpius fecimus, bonam, vtilem, laudandam, atque retinendam esse Algebrã practicam, fundatam in vsu regularum præscribentium modum instituendi operationes circa quantitates signo — affectas: & vt minorem in hac bona Algebra varietatẽ causaremus. Propter has aliasq; similes causas voluimus cum Algebra practica, nobis communem esse vocem *minus*, qua signum —, indicatur in Algebra: ipsasque etiam quantitates hoc signo affectas voluimus appellari negatiuas, vt etiam appellantur ab Algebrã. Has quantitates, aut falsas, aut nihilo minores dicere non potuimus, quia neque falsę sunt, neque nihilo minores: sed sunt æquè veræ & nihilo maiores, quam illæ quæ in Algebra veræ dicuntur aut signo † afficiuntur, & aliter tum in Algebra tum in nostra Logistica appellantur positiuę. Ad Algebram practicam quam bonam dicimus, non pertinet vlterius examinare aut inquirere significationem signorum † & —, vel vocum *plus* & *minus* his signis respondentium: vel differentiam inter quantitates, quarum aliæ positiuæ, aliæ [illegible]: hoc enim non practicæ, sed speculatiuæ [illegible] [illegible]mus approbare, immo tenemur eam da[illegible] [illegible] speculatiuam Algebram, esse solidissimorum funda[illegible] antiquę Matheseos peruertricem: falsitatum promotricem: veritatu[illegible]tam: fraudulentam scientiarum Mathematicarum aduersariam. Quo[illegible] peruertat bona antiquę Matheseos axiomata, vidimus in præce[illegible]pite. Quam exosę, & Mathematicis scientijs contrariæ sint falsitates [illegible]s viam sternat, paucis satis considerauimus hoc capite. Quam fraudulenter aduersetur scientijs Mathematicis, satis colligitur ex notis nostris additis primo eius axiomati, quod asserit *omnis magnitudo sibi ipsi æqualis est*: vbi notauimus nos suspicari, quod deinde verum ostendimus, etiam allata minus cautorum Algebrę scriptorum confessione: nimirum, quomodo tantum declaret se considerare veras atque nihilo maiores & falsas siue nihilo minores quantitates, quod fatemur licitum esse: sed deinde nihil vlterius monendo, tacitè supponat illas suas falsas, & nihilo minores, atque chimęricas quantitates reuerà esse quantitates, & quantitatibus ab antiqua Mathesi consideratis communes habere

pro-

proprietates:quam suam silentio inuolutam suppositionẽ,si vnquam clarè proposuisset, nunquam fuisset admissa, nisi ab illo genere Mathematicorum, qui non nisi specificam differentiam agnoscunt inter veras & fictas quantitates: vel inter Mathematicos veros atque intelligentes, & Mathematicos pictos vel fictos, intelligentia destitutos.

Non magis quam speculatiuam Algebram, possemus aut bonã aut veram admittere Algebram practicam: si pro hac requiratur vlterior intelligentia signorum † vel —, aut vocum quas paulò ante diximus nostræ Logisticæ communes esse: hæc intelligẽtia sufficit vt exempli gratia pro praxi sufficienter intelligatur regula asserens — *in* — = †, hoc est quod numerus affectus signo —, ductus in numerũ affectum signo —, producat numerum affectum signo †: adeòque — 2 *in* — 4 = † 8, siue quod quantitas negatiua ducta in quantitatem negatiuam producat quantitatem positiuam. Si Algebra practica (quantum ego arbitror limites suos excedendo) vlteriorem ex Algebra intelligentiam requirat, eius quod per positiuas & negatiuas quantitates intelligit; ex speculatiua Algebra discet, positiuas quantitates esse credita negatiuas quantitates esse debita; hanc terminorũ intelligentiã adhibendo ad regulã asserentẽ negatiuas quantitates multiplicãdo produci quãtitates positiuas, quæ nostræ Logisticæ & Algebræ practicę communis est, poterit subsumere non communem doctrinam: atqui quantitates negatiuæ sunt debita, & quantitates positiuæ sunt credita: ex quibus præmissis legitimè inferet, igitur multiplicando debita producuntur credita. Experiatur in praxi quam vera sit hęc conclusio legitimè illata ex suis pręmissis; alijs hanc doctrinam proponat atque persuadere conetur; pro præmio referet eas irrisiones, ex quibus sufficienter discet in posterum se continere intra terminos quibus circumscriptam supponimus Algebram practicam de qua agimus, vbi Algebram practicam bonam atque vtilem asserimus.

Vt paulò clarius intelligatur quod ad huius libri institutum multum iuuat: nimirum quæ sit vera causa tenerissimi illius affectus Algebræ speculatiuæ erga quantitates falsas & nihilo minores, in quibus consistit præcipuum fundamentum eius gloriæ tantopere amplificatæ ab alijs multis scriptoribus: & eius ignominiæ paucis hactenus indicatæ: eiusque præcipuæ differentiæ à doctrina quæ spectat ad primam Logisticæ nostræ regulam; notandum antiquæ Matheseos placitis conforme atque verissimum esse, quod initio præcedentis paradoxi voluimus ex Cartesio annotatum proponere, vt constet hunc Algebræ scriptorem, silentio inuoluentem, atque ex alijs supponentem, prima omnia speculatiuæ Algebræ fundamenta: tamen exprẽsè proposuisse prima aliqua antiquæ Matheseos fundamenta. An fortè ab his sumendo exordium suæ scriptionis, ac deinde aduertendo quomodo aduersentur proprijs Algebræ quam scribebat fundamentis: consultum putauit silentio tegere quæ suis doctrinis videbat aduersari, & à pluribus alijs scriptoribus vsitata frasi, satis clara aut perspicua asserere, quæ latent in tenebris per quas non prospiciunt? Quidquid verò sit de ijs quæ vidit vel non vidit Cartesius, quoniam ex illo annotatæ doctrinæ de operationibus, addit *ad lineas quod spectat*: satis constat quod non agat nisi de operationibus Geometricis producentibus lineas consideratis in antiqua Mathesi: ideòque à nobis conformis conceditur doctrinæ antiquæ Matheseos, etiam non consideranti Logisticæ nostræ ductus quos appellamus Geometricos vt dicitur reflexione 6. capitis sequentis. Cæterum speculatiua Mathesis antiqua quia non agit de numeris diuersarum specierum & consequenter non considerat valores numerorum: nullatenus sufficit pro antiqua Arithmetica practica: pro qua necessarium est etiam additionem & subtractionem instituere, quando dati pro his operationibus numeri, siue integri, siue fracti, inter se specie differunt

runt: idque non facit antiqua Arithmetica practica, nisi considerando istorum numerorum valores, docetque hos numeros reuocare ad alios prioribus æquiualentes, siue idem nomen habentes, antequam circa illos instituatur additio vel subtractio: vt constat ex additionis & subtractionis regulis vsitatis ab antiqua Arithmetica practica, & à nobis hic propositis in parte 2. & 3. cap. 2. lib. 1. Algebra practica supponit has regulas: præter illas tamen proponit alias sibi proprias & vtiles pro operationibus in quibus vel vnus, vel vterque ex datis numeris afficitur signo —; aduerterat enim in practica Arithmetica antiqua, magnam incommoditatem afferre, quod licet in illa quilibet numerus addi possit cuilibet alteri numero eiusdem speciei, tamen maior numerus, à minori eiusdem speciei numero subtrahi non possit. Iam verò quidquid esset de possibilitate vel impossibilitate talis subtractionis: videbat pro praxi futurum vtilissimum, saltem compendiata & commoda scriptione indicare posse tale productum ex subtractione, quamuis tale productum, vtpote ex impossibili subtractione natum, esset aliquid impossibile atque chimæricum. Hinc Algebra practica legem statuit, vt productum ex subtractione impossibili, indicaretur per numerum affectum signo —: adeòque scribendo — 6, breuiter indicari posset productum ex subtractione impossibili in qua exempli gratia numerus maior 10, proponitur subtrahendus ex minori numero 4. Hæc cogitatio satis feliciter successit, & quantum arbitror, est primum fundamentum omnis vtilitatis quam antiquæ Arithmeticæ practicæ attulit Algebra: neque illicita dici poterat ex eo capite quod producta illa, signo — affecta, atque nata ex impossibili subtractione, essent quantitates imaginariæ, chimæricæ atque impossibiles: siquidem antiquæ Mathematicæ practicæ licitum erat, numerare, & operationes instituere circa chimæras: & exempli gratia dicere, quod tribus chimæris addendo duas alias chimæras, producantur quinque chimæræ. Post hanc Algebræ inuentionem remanebat aliqua difficultas, nimirum circa modum practicè instituendi operationes, in casibus in quibus ex datis pro operatione quātitatibus, vna vel vtraque erat affecta signo —: parum enim proderat breuis commemorata scriptio productorum impossibilium, nisi hæc producta vlterius adhiberi potuissent in operationibus. Hanc difficultatem etiam felicissimè superauit Algebra practica: statuendo leges his operationibus proprias, quæ à nobis proponuntur in parte 4. cap. 2. libri 1. Logisticæ. Quoniam verò obseruatum fuit, planè maximam vtilitatem resultare ex his legibus, ab Algebra practica practicè inuentis, obseruando quid de his quantitatibus statuendo, in praxi succedat: cognita hac vtilitate prædictarum regularum inuentarum ab Algebra practica; iure merito desiderandæ videbantur illarum regularum legitimæ demonstrationes: vt quidquid ex istis regulis verum infertur etiam ex prius demonstratis constaret: adeòque annumerari possit demonstratis Mathematicis veritatibus. Quoniam verò demonstrationes afferre, non ad practicæ, sed ad munus speculatiuæ Matheseos pertinet: à speculatiua Mathesi multum laboratum est, inquirendis prædictarum regularum Algebræ demonstrationibus; quam felicem successum habuerit hic labor speculatiuæ Matheseos, colligi potest ex hactenus dictis de Algebra speculatiua; etenim per hanc intelligimus complexum ex terminorum expositionibus, & ex his vel immediatè vel mediatè deductis assertionibus, excogitatis in ordine ad demonstrationes regularum inuentarum ab Algebra practica.

Ex integro huius speculatiuæ Algebræ apparatu, nihil retinendum existimat nostra Logistica: tamen putat vtilissimas & retinendas regulas, vt supra diximus, inuentas ab Algebra practica, vel saltem his proximè similes, & in praxi prorsus æquiualentes; in his quantum potuit, Logistica nostra, & voces & signa retinuit, quæ in Algebra practica inueniuntur ob reuerentiam erga inuentricem

ista-

istarum regularum; ideòque, retentis signis, & vocibus, quæ ab Algebra adhibentur in exponendis his regulis, mutauit significationem istorum signorum ac vocum; aliter enim non poterat afferre istarum regularum vel praxium demonstrationes, & ostendere quare veræ sint. Hoc quod præstat nostra Logistica, longo quidem tempore ante exordium nostrę Logisticæ, & magna diligentia, multoque labore quæsitum est, sed planè infelici successu: fortassis quia speculatiuæ Matheseos amatores ad quos pertinebant tales demonstrationes, nimium assueti, & quodammodo dementati praxium Algebræ siue regularum vtilitate, in inquisitione istarum demonstrationum sequebantur ductum practicæ, adeòque cæcæ Algebræ: supponendo quantitates, in quas practicè operando, per impossibilem subtractionem, inciderat Algebra practica, esse reuera impossibiles, & falsas, atque imaginarias & nouas quantitates; tametsi essent quantitates possibiles, veræ, reales, & passim cognitæ in antiqua Mathesi.

Ex dictis resultat præcipua, & maximè notabilis differentia inter speculatiuam Algebram, & nostram Logisticam. Illa supponit quantitatem signo — affectam, quæ tam in Algebra quam in Logistica appellatur quantitas negatiua, esse quantitatem falsam, nihilo minorem, chimæricam, atque diuersam à quantitatibus cognitis & consideratis ab antiqua Mathesi: hasque negatiuas quantitates produci ex subtractionibus impossibilibus, in quibus maior quantitas ex minori quantitate subtrahitur. Logistica nostra docet quantitatem signo — affectam, quamque cum Algebra appellat negatiuam: non esse quantitatem falsam, aut nihilo minorem, aut chimæricam, aut diuersam à quantitatibus cognitis & consideratis in antiqua Mathesi, aut productam ex impossibili subtractione: sed esse quantitatem propriè dictam, nihilo maiorem, realem, atque ex illis quæ passim cognitæ & consideratæ sunt in antiqua Mathesi, neque nasci possunt nisi ex possibili siue additione siue subtractione.

Hæc differentia, quæ est fundamentum propemodum omnium Algebræ doctrinarum quæ reijciuntur à nostra Logistica, adeòque dici potest præcipua differentia inter Algebram, & eam partem nostræ Logisticæ, quæ pro malè subsistentibus Algebræ documentis, substituit bona atque firmiter subsistentia, nullatenus aut contrahendo aut vitiando eam quam pro praxi habebant vtilitatem. Hæc inquam differentia, non malè indicari videtur in Algebræ definitione allata cap. 1. dum dicitur, quod vniuersaliset subtractionem: nimirum admittendo & docendo subtractionem in casu in quo maior quantitas ex minori quantitate subtrahenda proponitur: quod non conuenit antiquæ Mathesi aut nostræ Logisticæ, sed est proprietas omni & soli Algebræ conueniens. Ex hac proprietate, facilè est distinguere omne illud quod Algebra dici potest, ab eo quod non potest dici Algebra; clarè autem cognito quid sit Algebra, quoniam hæc adequatè diuiditur in speculatiuam & practicam, & maximè nota sit significatio vocum *speculatiua* & *practica*, etiam passim adhibitarum vt antiqua Mathesis diuidatur in speculatiuam & practicam: ignorari non potest quid à nobis significetur per Algebram speculatiuam: & quid significetur per Algebram practicam; & consequenter quæ sit Algebra practica quam sæpius diximus malam non esse: & quid sit Algebra speculatiua, de qua aliter sentimus, quamque exosam scientijs, falsitatum fæcundam progenitricem ostendimus in propositis paradoxis: similibusque titulis putauimus decorandam: vt etiam practici & minus docti intelligerent, quid solidis argumentis apud doctiores satis probauerimus & euicerimus in ijs quæ hactenus de Algebra proposuimus.

Cæterum Lectori iudicium relinquo, an quæ hic satis vt opinor noua, & ab alijs scriptoribus non passim reuelata mysteria, aduersentur nominatissimæ Geometriæ siue Algebræ Cartesianæ: vel potius sint ex illis quæ post acceptam ab Algebra clauem qua mysteria vniuersi reseranda sunt (vt testatur eius commentator) monet se omisisse, & consultò non reserasse: dum contentissimus conscripta à se Algebra, in fine libri tertij concludens eius tractationem,& quid de suis opinetur breuiter indicans: scribit esse talia, *adeò vt*, inquit, *sperem à posteris mihi gratias habitum iri, non solum pro ijs quæ hic explicui; sed etiam pro ijs, quæ consultò omisi, quo ipsis voluptatem illa inueniendi relinquerem*. Nos certè nullas illi gratias habendas existimamus pro tali silentio: summas illi gratias habendas putaremus, si Algebram scribendo, ex multis paucos hactenus indicatos Algebræ nodos exhibuisset solutos: etenim Algebræ defectus ex quibus pullulant, non sanare, sed cautè tegere & silentio inuoluere, non immeritò videri posset, velle potius suis scriptis illudere quam prodesse posteritati.

CAPVT IV.

Reflexiones ad Euclidea, siue antiquæ Matheseos. elementa.

INitio huius libri annotauimus, Euclidea siue antiquæ Matheseos elementa illa esse, à quibus vsque in hodiernum diem vsitatum est sumere exordium scientiarum Mathematicarum. Hæc elementa in Algebra etiam admittuntur & supponuntur, ideòque in præcedentibus tantum considerauimus quæ Algebræ magis propria videbantur, & antiquæ Matheseos fundamentis siue Euclideis elementis addita, constituunt Algebræ fundamenta. Fateor quidem pauca esse quæ antiquis elementis addidit Algebra: sed tamen paucis sufficienter considerari non poterant, quia in semine siue radice, vt ita dicam, pauca sunt, sed fructu vberrima. Contractiores sumus in considerationibus elementorum Euclideorum, quas distribuimus in paucas reflexiones: sufficit enim, vt ità dicã, tantũ obiter reflectere, non ad singula quæ in elementorum istorum diuersis scriptoribus diuersa atque diuersimodè immutata inueniuntur, sed ad aliqua magis propria methodo contentæ his antiquis elementis: vt intelligatur, vtrum, quæ in hac methodo mutauimus vel illi addidimus, conducant ad Mathematicarum scientiarum vtilitatem: qui finis est propter quem à nobis hoc libro consideratur conuenientia & differentia: non inter diuersas priuatorum doctorum opiniones, sed inter triplicem diuersam methodum discendi scientias Mathematicas, commemoratam in huius libri titulo.

Reflexio I.

Notantur aliqua circa Euclidea elementa, ac præsertim circa definitiones, & axiomata quæ in illis continentur.

EVclidea, siue antiquæ Matheseos elementa, nihil aliud continent nisi duplex genus propositionum: nimirum propositiones non indigentes probatione, & propositiones indigentes probatione; priores subdiuiduntur in definitiones, siue suppositiones, hoc est terminorum expositiones: & Axiomata siue communes notiones in quibus aliquid asseritur quod satis immediatè constat verum esse, ex intelligentia terminorum: atque postulata, in quibus asseritur aliquid fieri posse, quod ex terminorum intelligentia patet esse possibile. Posteriores propositiones indi-

indigentes probatione, vt admitti debeant, diuiduntur in theoremata, in quibus aliquid asseritur verum esse, quod sine probatione verum admitti non debet: & problemata in quibus agitur de modo faciendi aliquid, & petitur modus quomodo faciendum sit. Vt hanc inter theoremata & problemata differentiam indicaret Euclides, theorematum demonstrationes semper concludit dicendo *quod erat demonstrandum*, nimirum verum esse. Problematum verò demonstrationes concludit dicendo *quod erat faciendum*. Ita testatur Proclus cap. 7. lib. 2. in notis ad primum librum elementorum Euclidis. Quomodo vlterius subdiuidantur theoremata, in lemmata, corollaria &c. vel problemata, in Geometrica, Arithmetica, Mechanica &c. parum conducit ad præsens institutum.

De definitionibus Euclideis mihi videtur magis commune iudicium Mathematicorum, quod scrupulosè retinendæ non sint, & deesse plurimas, vt satis constat ex parua istarum definitionum vniformitate quæ inuenitur apud diuersos eius interpretes. Ex his non desunt qui aliquas ab Euclide propositas damnent vel vt obscuras, vel vt parum vtiles, vel vt erroneas: vt satis constat ex scriptis eorum qui exponunt Euclidis elementa. Qui Euclideam definitionem rationum æqualium approbet, vix vllum inuenio inter magis modernos; Quot, vel quas ex Euclidis definitionibus diuersi vel damnandas vel corrigendas putauerint apud eius commentatores videri potest: has tamen definitiones conferendo cum illis quæ afferuntur in nostra Logistica, fortassis melius apparebit quæ desiderentur in Euclideis elementis. Ex definitionibus magis vniformiter admissis apud Euclidis commentatores, considero breuiter vnam alteramue: non tamen ex ijs quæ habentur obscuriores: sed ex illis quibus vtpote præ cæteris clarioribus, pauciores addunt notas. Ex his vna sit prima, in qua definit punctum Mathematicum de quo passim redit sermo apud Euclidem; in hac definitione asserit quod punctum sit illud cuius pars nulla est. Quæro igitur quid in hac definitione intelligendum sit per vocem *pars*? sufficiens ratio dubitandi colligi potest ex dictis ad axioma 4. capitis secundi huius libri. Deinde de qua parte agitur, actuali vel potentiali? actualem partem nisi fallor nullam habet linea, quæ neque diuisa est neque diuisa intelligitur; Certè neque actualem neque potentialem partem habet vnitas, quæ iuxta Euclidis doctrinam neque diuisa est neque diuisibilis: an igitur punctum dici potest vnitas? igitur quoniam vnitas est discreta quantitas, punctum debebit annumerari quantitatibus: nescio tamen an hoc sit conforme eius doctrinæ. Præterea si consideretur Deus, Angelus, anima rationalis, veritas, instans, nihil &c. an de his singulis dicendum quod sint punctum, quia de singulis verum est quod nullam habeant partem? vbi definit lineam asserit quod sit longitudo latitudinis expers. Quæro de qua longitudine hic agitur, nimirum de longitudine abstracta, à qua subiectum dicitur longum: vel de longitudine concreta, quæ aliter dicitur subiectum habens longitudinem? certè paulò post definiens superficiem, asserit esse illud quod habet longitudinem & latitudinem tantum: vbi manifestè declarat se per superficiem intelligere concretum longitudinis & latitudinis: quare si prius per lineam intelligi voluit abstractam longitudinem: superficies quæ est subiectum habens abstractam longitudinem & latitudinem, etiam dici poterit subiectum habens lineam & latitudinem. Facta eadem suppositione quod per vocem *linea* intelligi debeat abstracta longitudo: quoniam longitudo & latitudo non differunt inter se, nisi quod versus diuersas partes excurrant: etiam abstracta latitudo dicenda erit linea; consideretur itaque crux linearis constans ex duabus lineis sese perpendiculariter intersecantibus: in præmissa suppositione negari non potest hanc crucem linearem, habere abstractam longitudinem & latitudinem: etenim ex duabus lineis ex quibus constat, vna est eius longitudo, altera est eius latitudo: an igi-

igitur talis crux linearis dicenda est superficies? an non conuenit illi Euclidea definitio superficiei quæ asserit superficiem esse quod habet longitudinem & latitudinem, siue per vocem linea intelligatur abstracta siue concreta longitudo? certè illi non conuenit superficiei definitio nostræ Logisticæ, quæ asserit superficiem esse terminum corporis. Propter hæc & similia, de quibus dubitari posset post lectas definitiones lineæ & superficiei: videntur istæ definitiones, saltem non habere eam claritatem, quæ meritò desiderari posset ab accedentibus ad studia Matheseos.

Antequam meum aliquid proponam quod non facit in fauorem axiomatum quæ ab Euclide proponuntur: velim considerari, quod post decimum Euclidis axioma notat Pater Andreas Taquet: vbi prius asserit, vndecimum Euclidis axioma minus ex terminis notum esse, quam quod ab eodem Euclide demonstrandum iudicatur, & proponitur in prop. 29. lib. 1. Vndè concludit *quare hoc vndecimum Euclidis axioma, ex principiorum numero reÿcimus cum Geminiano & Proclo*. Igitur in nostra Logistica, vt inauditum atque inusitatum dici non debet, si singula Euclidis axiomata nostris non annumeremus. Licet verò passim ab alijs admittatur, nos admittere non possumus septimum Euclidis axioma, quod asserit æqualia esse quæ sibi mutuo congruunt; hoc tamen axioma non planè falsum atque inutile iudicamus: immo vtile concedimus, sed pro practica Geometria, rebusque Mechanicis: non tamen pro speculatiua Mathesi. In ordine ad eius veritatem vel falsitatem: consideretur cubus solidus totaliter immersus liquido, exempli gratia aquæ; quæro quid maius est, extima cubi superficies, quæ immediatè ambitur ab aqua: vel intima aquæ superficies, immediatè ambiens cubum? Pro responsione duplex fieri potest suppositio; prima sit, quæ supponit has duas, siue duplici diuerso modo indicatas superficies, à parte rei diuersas aut distinctas non esse, sed esse eamdem à parte rei superficiem duobus diuersis modis consideratam siue indicatam: quemadmodum vsitatum est in Mathesi asserere vel supponere, quantitatem A sibi ipsi æqualem esse: vel non aliam quam eamdem à parte rei quantitatem considerando dicere, quod quantitas A ad quantitatem A habeat rationem æqualitatis: quæ ratio non potest quidem intelligi nisi inter duas quantitates aliquo modo diuersas, non requiritur tamen vt à parte rei diuersæ aut distinctæ sint: sed sufficit quod diuersimodè considerentur & prius quantitas A consideretur vt antecedens terminus proportionis, deinde consideretur eadem quantitas A vt consequens terminus proportionis. Ex simili diuersa consideratione eiusdem à parte rei quantitatis fit in Mathesi, quod eadem quantitas A possit dici & maior & minor, nimirum relatè ad diuersos terminos. Hæc prima suppositio, nobis quidem videtur magis conformis modo loquendi vsitato in Mathesi speculatiua: sed facta hac suppositione, Euclidis axioma agens de congruentia, diuersum nihil asserit ab eo quod asseritur dicendo eamdem quantitatem sibi ipsi æqualem esse, quam assertionem inter axiomata nusquam notat Euclides, sed tamen non raro illam supponit & assumit vt veram, & notam ex terminis: quoniam autem hæc assertio tam manifestè vera est, vt supponi & assumi possit absque eo quod expresse prænotetur inter axiomata: cui bono inter axiomata expressè annotare quod Euclides asserit de congruentia, si in hoc Euclideo axiomate tantum asseritur de ijs quæ congruere possunt, illud idem quod vniuersalius & non minus manifestè constat verum esse, ex propositione asserente idem sibi ipsi æquale esse, quodque de omni omnino quantitate manifestè verum est?

Secunda suppositio sit quod in casu quem considerandum suscepimus, superficies extima cubi, & superficies intima aquæ cubum immediatè ambientis, sint duæ superficies à parte rei distinctæ atque diuersæ; quo supposito, negari non potest

quod

quod vna alteri congruat: ſed etiam negari non poteſt, quod vna alteram ambiat atque contineat: & conſequenter iuxta aliud principium aſſerens omne continens eſſe maius ſuo contento, dicendum foret quod intima aquæ ſuperficies immediatè cubum ambiens, & eius extimam ſuperficiem continens: ſit maior hac extima cubi ſuperficie: & tamen etiam admittendum has duas ſuperficies congrúere; quare non intelligo quomodo verum, & multo minus ex terminis notū dici poſsit Euclideū axioma, agens de congruentia: ſuppoſito quod agat de duobus quæ à parte rei diuerſa ſunt atque inter ſe diſtincta. In qua ſuppoſitione ſiue in quo ſenſu ab Euclide adhibeatur eius ſeptimum axioma, alijs conſiderandū relinquo: nobis ſatis eſt cauſam indicaſſe quare hoc Euclideum axioma non admittatur à noſtra Logiſtica. Cæterum an principium aſserens omne continens eſse maius ſuo contento, admittatur, aſsumatur, & euidenter verum ſupponatur, etiam ab ipſo Euclide, licet inter eius axiomata non annotetur: colligi poteſt ex eius doctrina vbi conſiderat inſcriptas & circumſcriptas quantitates.

Quod Euclides docet in 14. axiomate, duas rectas lineas non habere partem communem, ſed punctualiter ſiue in vnico puncto ſeſe interſecare, non ſufficit noſtræ Logiſticæ, quæ idem etiam ex terminis notum aſserit de duobus circuli arcubus tantum ſemel ſeſe interſecantibus: quare verò Euclides prętermiſerit de duobus iſtis arcubus aſserere, quod annotatum præmittit de duabus rectis lineis, non ſatis aſsequor: præſertim quia in prima propoſitione libri primi conſiderat duos circuli arcus ſeſe interſecantes, & in huius propoſitionis demonſtratione, & ipſe & omnes quos ego legi eius commentatores, ſupponunt vnicum atque idem punctum eſse in quo tales duo arcus ſeſe interſecant: ſic vt non ſubſiſtat, aut in hac prima propoſitione problematis ſolutio, aut eius demonſtratio, ſi oppoſitum ſupponatur, nimirum duos arcus ſeſe interſecantes, non in vnico puncto ſeſe interſecare, ſed habere partem communem. Qui non intelligit hoc verum eſse, nobis monentibus intelligat, ſe non intelligere quid requiratur in Matheſi, pro ſubſiſtentia vel non ſubſiſtentia aut ſolutionis aut demonſtrationis alicuius problematis. Quare igitur in Euclideo axiomate agente de interſectione duarum linearum, tantum proponitur prior & clarior pars, agens de rectis lineis ſeſe interſecantibus, & altera eius pars minus clara prætermittitur, quandoquidem vtraque adhibeatur, & ex terminis nota ſupponatur ab Euclide? aliquam ſed non ſatis adæquatam cauſam notat Campanus, celebris Euclideorum elementorum commentator: hic immediatè poſt propoſita & expoſita Euclidea axiomata ita ſcribit. *Sciendum eſt autem, quod præter has communes animi conceptiones ſiue communes ſententias, multas alias, quæ numero ſunt incomprehenſibiles prætermiſit Euclides*. Ita ille: quod quam verum ſit ignorare non poteſt qui vnquam legit & intellexit Euclidea Matheſeos elementa. Vtinam inter prætermiſsa axiomata non numerarentur, quæ magis indigebant aliqua declaratione, & conſequenter vtilius fuiſsent expreſsè prænotata & declarata, quam quæ proponuntur terminis nulla ſpeciali declaratione indigentibus pro rebus Mathematicis.

Reflexio II.

Breuiter considerans aliqua circa Euclidea Theoremata & problemata.

Singula theoremata in Euclideis Matheseos elementis proposita vera esse, sed tamen singula legitimè demonstrata non subsistere: videtur magis communis opinio præstantissimorum Mathematicorum. Ab Euclideorum elementorum commentatoribus, vt initio huius libri monuimus, immutatæ sunt demonstrationes ab ipso Euclide propositæ, sic vt ignoretur quas suis propositionibus apposuerit demonstrationes: quare generaliter de demonstrationibus quæ inueniuntur apud Euclidis interpretes intelligendum est, quod asseruimus magis commune iudicium de insubsistentia aliquarum demonstrationum quibus probantur theoremata Euclidea. Ex eius elementorum scriptoribus alij Euclideis propositionibus alias putarunt addendas: alij non paucas ex Euclideis propositionibus existimant inutiles pro Matheseos elementis adeòque reijciendas. Vt ex propositionibus Euclideis quæ iudicantur minus vtiles, aliquę inueniantur: sufficit percurrere propositionum titulos in elementis Euclideis scriptis à P. Andrea Taquet, paucorum annorum spatio aliquoties impressis, vnde constat non esse ex illis quæ parũ vel paucis alijs Mathematicis placuerũt. Vt in his, vel ab alijs scriptis Euclideis elementis inueniantur propositiones Euclideis additæ, præstaret amplius aliquid legere quam titulos propositionum, vt sic melius intelligatur quid asserant de vtilitate vel necessitate propositionum quas Euclideis addendas arbitrantur. Hactenus dictis adde quod omnes propemodum magis restrictæ Euclideorum librorum propositiones, quæ in subsequentibus libris inueniuntur minus restrictæ: vix aliam habeant vtilitatem, quam quod in Euclidea methodo viam sternant ad demonstrandas subsequentes, atque vniuersaliores propositiones: quæ si absque præcedentibus demonstratæ subsisterent, etiam cessante præcedentium istarum atque magis restrictarum propositionum vtilitate, annumerari possent inutilibus atque superfluis Euclideis propositionibus; hęc causa est, non quidem vnica, sed ex diuersis vna, quod ex multis elementaribus Euclideis propositionibus, paucę inueniãtur in nostra Logistica, licet nihil ad Mathesim spectans aliunde cognitum supponat. Etenim ex Euclideis propositionibus paucas aliquas vtiliores atque vniuersaliores, satis immediatè ex primis principijs demonstratas exhibet, ideòque prætermittit, apud Euclidem præuiam propositionum multitudinem in Euclidea methodo requisitam, ad earumdem propositionum demonstrationes. Præterea si verum foret, quod principium Euclideum agens de congruentia & septimum est inter Euclidis axiomata, adhiberetur in Euclidearum propositionum demonstrationibus in sensu in quo falsum esse ostendimus in præcedenti reflexione: illegitimè demonstrata deberet dici magna multitudo propositionum Euclidearum, quandoquidem immediatè vel mediatè huic principio innitantur quamplurimæ ex Euclideis demonstrationibus. Hoc certum, iudicio omnium propemodum Mathematicorum, doctrinam Euclideam de proportionibus, non satis legitimè demonstratam subsistere: hinc factum est, quod apud diuersos Euclideorum elementorum scriptores, tam multis diuersis modis proposita inueniatur: quodque quamplurimi huius seculi Mathematici, pro prius adhibita, meliorem firmioremque afferre conati sint; ex his omnibus plurimi vt opinor sibi satisfecerunt: sed nullus attulit quod à sapientioribus desiderabatur

pro

pro subsistenti proportionum doctrina elementari; quæ si firma atque legitimè demonstrata non subsistit, parum admodum dici poterit legitimè demonstratum, nō tantum in Euclideis elementis, sed in Mathesi vniuersa quæ supponit & adhibet hæc elementa: præsertim si admittatur verum esse, celeberrimum & superius ad numerū XVI. cap. 2. iterū à nobis commemoratū Cartesij monitū in quo asserit *se circa Mathematicas scientias hoc aduertisse, nimirum etiamsi illa omnes circa diuersa obiecta versentur, in hoc tamen conuenire omnes, quod nihil aliud examinent, quam rationes, siue proportiones quasdam qua in illis inueniuntur.*

Quid tamen certò atque fundatè dici possit de subsistentia vel non subsistentia Euclidearum demonstrationum, non videtur nobis facilè statuere: quia nusquam apud Euclidem vel eius interpretes satis declaratum inuenimus, quid requiratur & sufficiat iuxta antiquam Mathesim ad legitimam demonstrationem. Exempli gratia digito ostendere vel indicare apud vulgus atque rudiores dicitur demonstrare. Apud practicos, practicè ostendere quod aliquid semper succedat, etiam dicitur demonstrare praxeos bonitatem vel veritatem. Etiam in diuersis scientijs non semper eodem in sensu adhibetur vox demonstratio; quomodo igitur intelligenda est pro scientijs Mathematicis. Qui pro scientijs magis restrictam volunt huius vocis significationem, nisi fallor duplex saltem genus admittunt demonstrationum, quod à Mathematicis negari non potest: nimirum demonstrationes à priori siue per causam, & demonstrationes à posteriori siue per effectum aut consequens: & fortassis vtrumque hoc demonstrationis genus vlterius subdiuidendum est in diuersa demonstrationum genera, quorum alterum rigorosas, alterum hypotheticas demonstrationes amplectatur.

Demonstrationem à priori atque rigorosam appello, legitimum argumentum nihil aliud assumens nisi præmissas definitiones aut terminorum expositiones, vel ex definitionibus immediatè manifesta axiomata, vel certè veritates prius legitimè illatas ex solis definitionibus & veritatibus ex ipsis terminis manifestis.

Demonstratio à posteriori & rigorosa multiplex inuenitur: dicitur enim demonstratio, in quantum non admittit nisi legitimum discursum: dicitur à posteriori, in quantum in tali discursu vel assumit vel infert aliquid quod non est natura prius, siue non spectat ad causam quare verum sit quod huiusmodi demonstratione verum euincitur: exempli gratia inter demonstrationes à posteriori numeramus argumentum quod aliter in fine cap. X. lib. 1. appellatur reductio ad impossibile, vsitatissimum vt ibi notauimus in antiqua Mathesi & elementis Euclideis; similiter reliqua argumenta legitima quidem, sed fundata in principio quod docet ex vero nil nisi verum, ex falso sequi quidlibet, nimirum verum & falsum; tale argumentum à reductione ad impossibile diuersum, est illud quod insinuat Clauius cap. 6. suæ Algebræ, vt diximus ad primum paradoxum capitis præcedentis, dum dicit Algebræ praxim de qua ibi agitur certissimam esse, vtpote probatam innumeris exemplis, adeòque veram constare quia ex illa nihil falsum sequitur: quippe certum est ex falsis falsa inferri posse.

Demonstratio à priori vel posteriori quæ dicitur hypothetica, non differt à rigorosa, nisi penes aliquam hypothesim quam assumit siue supponit: hoc est penes aliquam assertionem neque ex terminis notam, neque rigorosè demonstratam, à qua vel immediatè vel mediatè dependet. Ita legitimè ex Euclide, ex Aristotile, ex Platone &c. demonstrari dicitur, quod legitimo discursu infertur ex doctrina vel Euclidis, vel Aristotilis, vel Platonis &c. hæ tamen demonstrationes appellantur hypotheticæ in quantum dependent ex doctrina Euclidis, Aristotilis, vel Platonis &c. quam supponunt quidquid sit de subsistentia, vel insubsistentia: vel etiam de veritate aut falsitate doctrinæ ab illis traditæ.

Quas ex his enumeratis alijsque enumerabilibus demonstrationibus admittat antiqua

tiqua Mathesis, illud est, quod diximus nobis non satis constare, & tamen sciendum foret, vt certò statui possit de demonstrationibus Euclideis, vtrum dicendæ sint legitimæ vel illegitimæ. Dubium quidem nullum est, ab Euclide admitti illas quas diximus demonstrationes à priori atque rigorosas, & quasi has solas admitteret, nonnulli scribunt. Quis alias admitti crederet pro Mathesi legendo quod diximus numero XI. cap. 2? Idem pluribus asserere videtur Andreas Taquet initio Euclideorum elementorum, quæ scripsit, & ita incipit. *Scientiæ proprium munus est, ex notionibus quibusdam simplicissimis, rationali naturæ à conditore Deo impressis, elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inde rursum aliud ex alio; vt prior cognitio semper ad vlteriorem sit gradus. Quæ ratio si accuratè teneatur, ex minimis, & per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem pertingimus. Hanc methodum, rationemque scientiæ, præ omnibus amplexæ sunt eæ disciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione versantur. Quo fructu id factum sit, sciunt omnes, qui hisce studijs imbuti sunt. Et sanè Geometria (vt de alijs Matheseos partibus iam nihil dicam) mirum est, quam breui ex apertissimis ad obscurissima trahat, & ex humillimis ad altissima statim assurgat. Statuuntur primò simplicissima quædam facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus dissentire possit. Deinde nihil asseritur, vel admittitur, quod ex his infallibili ratiocinio non sit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano sensu & cognitione remota, incredibili certitudine & euidentia innotescunt.* Hæc ille: & non absimili modo alij diuersi discurrunt de scientijs Mathematicis. Ex his satis manifestum videri posset antiquam Mathesim non admittere vt legitimas alias demonstrationes, nisi quæ à nobis appellantur demonstrationes à priori atque rigorosæ, quæ reliquis præstantiores negari non possunt. Verum si hoc supponatur, vix aliquid legitimè demonstratum admitti poterit in antiquæ Matheseos elementis; etenim his demonstrationibus non annumerantur reductiones ad impossibile spectantes ad demonstrationes à posteriori, & tamen quam frequenter in Euclideis elementis recurrant reductiones ad impossibile, tantum ignorare possunt, qui vix vllam legerunt ex demonstrationibus Euclideis. Supponere aut credere non possum, à P. Taquet vt illegitimas damnari demonstrationes omnes Archimedis, Apollonij Pergei, Pappi, Alexandrini, aliorumque laudatissimorum Mathematicorum, qui supponendo Euclidea elementa, altius assurgunt in scientijs Mathematicis; quoniam tamen & verè & disertè fatetur & docet, non legitimè demonstratam subsistere elementorum Euclidis doctrinam de proportionibus, adeòque hanc doctrinam neque esse per se notam neque ex per se notis legitimè deductam: igitur singula quæ his Euclideis doctrinis innituntur, nullo modo, siue à priori siue à posteriori, dici possunt rigorosè demonstrata, sed tantum demonstrata hypotheticè; ex quibus præmissis euidentissimè sequitur, vel in rebus Mathematicis legitimas dicendas esse aliquas demonstrationes hypotheticas: vel superius commemoratorum Matheseos principum demonstrationes, legitimas non esse; immo primum necessariò dicendum est quandoquidem non admittat neque vllus Mathematicus admittere possit secundum. Quod hic diximus & sufficit vt cõstet pro Mathematicis admittendas esse vt legitimas, demonstrationes aliquas hypotheticas: tantum supponit non legitimè demonstratam Euclideam doctrinam de proportionibus, quod agnoscunt & fatentur verum esse, propemodum omnes præcipui huius temporis Mathematici: & tamen ab hac insubsistentia demonstrationum Euclidearum agentium de proportionibus, aliam non admittere, videtur nobis impossibile si considerentur quæ in his reflexionibus notantur circa antiquæ Matheseos elementa. Certè si nullæ demonstrationes vt legitimę admitti debeant, nisi quæ sunt rigorosæ, siue a priori siue à posteriori inferant veritatem, affirmare non dubitarem, vix vllam inueniri

niri

inueniri alicuius momenti legitimam demonstrationem, apud vllos antiquæ Matheſeos ſcriptores. Qua de cauſa nimium iniurios Mathematicarum ſcientiarum principibus, atque ſibimetipſis aduerſarios exiſtimo illos, qui requirunt pro legitimis rerum Mathematicarum demonſtrationibus commemoratum rigorem, cui in ſcribendo ſeſe accommodare non potuerunt neque ipſi, neque vlli qui ante ipſos ſcripſerunt Mathematicas demonſtrationes. Maximè optandus foret talis rigor in demonſtrationibus, ſed neceſſarius affirmari non poteſt: neque præſcribendæ aut admittendæ ſunt leges requirentes & exigentes talem rigorem, & nuſquam obſeruatæ aut præſcriptæ ab ipſis Mathematicarum ſcientiarum præcipuis & præ cæteris laudatis ſcriptoribus. Pro noſtra Logiſtica libenter admittimus etiam leges magis rigoroſas, quam obſeruentur ab alijs qui ſcripſerunt Matheſeos elementa: ab his tamen præſcriptas, ſiue indicatas, ſed non obſeruatas leges, non admittimus, neque pro noſtris neque pro aliorum ſcriptis. Immo noſtram Logiſticam damnanti ſententiæ libenter ſubſcribimus, ſi euincatur in Logiſtica noſtra maiorem in demonſtrationibus non eſſe obſeruatum rigorem, quam obſeruetur ab vllo alio ſcriptore elementorum Matheſeos: etenim ex hoc capite aſſerimus in noſtra Logiſtica firmius ſtabilita antiquæ Matheſeos elementa.

Ex dictis conſtat illud vnde digreſſi ſumus, nimirum quare, vel quo fundamento ſuperius dixerimus, nobis non ſatis facilè videri certò ſtatuere de aliqua antiquæ Matheſeos demonſtratione, vtrum ſit legitima vel illegitima, niſi in illa aliquid falſum aſſumatur, vel ſimili ſatis patenti defectu aut vitio laboret. Sed hęc ſatis de demonſtrationibus propoſitionum Euclidearum, non ab ipſo vt diximus Euclide propoſitis, ſed eius veritatibus appoſitis à diuerſis commentatoribus.

In ſuis elementis Euclides permiſcet propoſitiones quæ ſunt problemata reliquis quæ ſunt theoremata: non enim conſueuit aſſumere aliquid factum eſſe, de quo prius agendo non oſtendit quomodo faciendum ſit. Hic vſus non retinetur in noſtra Logiſtica: à quo tamen ſine exemplo non recedit: etenim neque retinetur ab ijs antiquæ Matheſeos ſcriptoribus, qui ſuppoſita Euclidea doctrina elementari, altius aſſurgunt in rebus Mathematicis; immo videtur aliquo modo aduerſari, etiam celebratiſſimæ antiquæ Matheſeos reſolutioni: Hæc præſcribit factum ſupponere, etiam illud de quo quærit quomodo faciendum ſit, iuxta dicta in tertia Logiſticæ noſtræ regula propoſita cap. 10. lib. 1. Præterea Archimedes ſupponendo Euclidea elementa, legitimè demonſtraſſe cenſetur circulum eſſe æqualem triangulo, cuius baſis ſit æqualis circumferentiæ talis circuli, altitudo verò ſit æqualis radio eiuſdē circuli; nuſquā tamen neq; apud ipſum, neque apud Euclidem, neque vllum alium Mathematicum, ſcitur ſolutum problema, in quo quæritur quomodo poni poſſit recta linea ſiue baſis trianguli quæ ſit æqualis circumferentiæ propoſiti circuli: ſiue quomodo fieri poſſit triangulum æquale dato circulo. Quandoquidem theorema nihil aliud aſſerat quam veritatem aliquam ſpeculatiuam, & theorematis demonſtratio nihil concludat aut euincat, niſi verum eſſe quod in theoremate aſſeritur: ex ipſa theorematis natura ſatis conſtare videtur, haberi omnia requiſita pro legitimè demonſtrato theoremate, quando ex veris legitimè illata proponitur veritas aſſerta in theoremate: vt autem conſtet theorema ex veris illatum eſſe, conſtare debet vera, adeòque poſſibilia eſſe, quæ ſupponit facta; ideòque ſufficere videtur quod conſtet eſſe poſſibile, quod in illo factum ſupponitur: ſiue vlterius conſtet ſiue non conſtet quomodo faciendum ſit: quod propriè ſpectat ad problematis ſolutionem; hæc verò in ſcientijs, & ordine & natura, potius ſequi videtur theorematum cognitionem: quam præcedere & requiri pro theoremate quod etiam videtur colligi poſſe ex ſcientifica Matheſi Euclidea, in qua ex theorematum cognitionibus inferuntur ſolutiones

pro-

problematum; eoipso autem quod theorema aut eius demonstratio non supponit aliquid, de quo non constet certò verum esse atque possibile: constat etiam suppositionem eius vitiare non posse certitudinem atque euidentiam theorematis aut eius demonstrationis.

Reflexio III.

Euclides nullas proponit regulas dirigentes inuentionem.

FVndamenta dici non possunt illa, quibus nihil insistit, vel innititur. Euclidea elementa esse antiquæ Matheseos fundamenta fatentur omnes; his elementis atque fundamentis innituntur, quæ ingeniosissimè scripserunt Archimedes, Apollonius Pergeus, Pappus Alexandrinus, aliique permulti: qui antiqua methodo, supra elementa altius assurgunt in rebus Geometricis atque Arithmeticis. Quoniam igitur ex Euclideis elementis alia erant inferenda, pro elementorum studiosis requirebantur aliquæ notæ vel regulæ, eos dirigentes in inuentione, aut propositionum aut demonstrationum quæ fundantur in elementis: atque præscribentes, quomodo cognosci possit ex quibus veritatibus elementaribus saltem probabiliter dependeant aut quomodo ex illis inferri possint. Tale nihil affertur in Matheseos elementis quæ dicuntur Euclidea; quippe quæ aliud non continent, nisi immensam propositionum multitudinem: hanc quia proponunt tanquam Matheseos elementa, satis quidem insinuant, ex hac veritatum multitudine reliqua esse deducenda: nihil tamen vlterius addendo de modo quo id fieri aut commodius fieri possit: hoc silentio significari videtur, vt qui in Mathematicis aliud desiderat, quærat in his elementis donec inueniat, quod ipsi prodesse potest ad intentum finem. Molesta profectò & vaga regula; ideòque, præsertim Algebræ doctores, non malè, irregulatam siue regulis destitutam & vagam appellant methodum antiquam, propositam in elementis Euclideis. Proclus scribens in aliquam partem Euclideorum elementorum, notat quidem breuiter, ab antiquæ Matheseos cultoribus pro inuentione adhibitam fuisse analysim, siue eam quam cap. 10. libri primi appellauimus tertiam Logisticæ regulam: hanc tamen apud ipsum vlterius declaratam non inuenio, & vix nominatam reperio apud modernos Euclideorum elementorum expositores. Dictis adde, quod in ipsis demonstrationibus quas proponunt, veluti in exemplis, aliquo modo prælucendo, non satis doceant aut ostendant, quomodo aut ex prioribus veritatibus elementaribus subsequentes inferendæ sint, aut ex his aliæ deducendæ: quia in demonstrationibus quas afferunt nullam obseruant vniformitatem: ex qua non quidem certis præscriptis declarata, sed tamen practicè exhibita in demonstrationibus, & ordine propositionum, colligi possit aliqua inuentionis regula, quam noluerunt afferre ad discentium commoditatem. Hæc nisi fallor carentia siue priuatio omnis regulæ inuentioni seruientis, discentibus molesta atque tædiosa reddidit antiqua elementa: magis enim discentem recreat, & ad studendum animat, quælibet parui momenti, propria tamen inuentio: quam cognitio veritatis ab alio propositæ, licet magni momenti sit: præsertim si eius præstantia atque vtilitas, non satis cognoscatur, vt in discentibus accidit. Algebra vnicam inuentionis regulam præscribit, communiter appellatam Algebræ regulam: nobiliorem tamen quam sint Geometriæ aut Arithmeticæ practicæ regulæ: atque non aliter vt opinor differentem à prima Logisticæ regula inuentionis: nisi quod hæc

hæc ſpeculatiuè & practicè, illa practicè tantum ſubſiſtat: vtraquè diſcurſus dirigit, & docet nouas veritates inuenire; quoniam tamen ad Logiſticæ primam regulam requiſitæ praxes demonſtratæ ſubſiſtunt: quidquid iuxta hanc Logiſticæ regulam infertur, non aliter quam ex demonſtratis illatum eſt: adeòque legitimè demonſtratum. Quod verò iuxta Algebræ regulam infertur, ex demonſtratis illatum non eſt: adeòque neque legitimè demonſtratum, ſed remanet demonſtrandum. Licet verò hoc tam notabili defectu laboret Algebræ regula, tamen quia eius directione facile eſt, ſaltem minoris momenti nouas aliquas veritates inuenire: hac veritatum inuentione ita recreauit, & ad ſe allicuit magis modernos Matheſeos amatores, vt eorum maior pars abrepta, vel vt verius dicam, dementata hac amænitate, videatur nuntium remiſiſſe ſolidiori atque præſtantiori Matheſi antiquæ.

Quod ſuperius diximus meritò deſiderari poſſe pro antiquæ Matheſeos elementis: non ſolum ſufficienter, ſed abundantiſſimè illis addidiſſe videtur noſtra Logiſtica. Primò enim hæc elementa contrahendo ad ſolas veritates magis neceſsarias, ſed tamen pro elementis ſufficientes: effecit, vt amplius neceſsarium non ſit, inter immenſam parumque ordinatam elementarium veritatum multitudinem vagando, maximè tædioſo & moleſto labore inquirere, quod ad intentum finem iuuat: has etiam elementares veritates diſtribuendo in pauca atque diuerſa capita, facilem reddidit inuentionem eius quod quæritur, ex cognitione finis pro quo ſeruire debet: neque enim vaga dici poteſt inquiſitio eius quod inter paucas, nimirum decem aut duodecim diuerſas propoſitiones tantum, eſt quærendum. Secundò, hac diſcentium commoditate minimè cõtenta noſtra Logiſtica, afferendo inuentionis regulam non minus facilem & vtilem quam ſit Algebræ regula, ſuorum Matheſeos elementorum ſtudioſis communem reddit eam voluptatem quam paulò ante diximus reſultare ex Algebræ regula: immo non eamdem, ſed longè maiorem illis communicat voluptatem: quandoquidem vltra inuentionem reſultantem ex Algebræ regula, atque ad ſummum docentem quod vera ſit aut theorematis aſsertio aut problematis ſolutio, docet prima Logiſticæ noſtræ regula inuenire cauſam quare neceſsariò vera ſit talis aſsertio aut ſolutio, hoc eſt demonſtrationem propoſitæ atque inuentæ veritatis: quo nihil præſtantius magiſque iucundum inuenitur in Matheſi ſpeculatiua. Tertiò indicatam prius inuentionem, non vnica tantum via ſiue regula docet noſtra Logiſtica, ſed proponit tres diuerſas vias ſiue regulas pro hac inuentione, ex quibus ſingulæ, præ reliquis ſpecialem aliquam habent prærogatiuam, quia non eadem ſemper via commodior eſt, pro qualibet inuentione: & fortaſsis plurima quæ facilè inueniuntur iuxta ſecundam, atque ſoli Logiſticæ propriam inuentionis regulam, talia dici poſsunt, vt pro illorum inuentione non ſufficiant reliquæ duæ eiuſdem noſtræ Logiſticæ regulæ inuentionis.

Reflexio IV.

Euclidea elementa tantum considerant numerum, magnitudinem dependentem à pluralitate vel paucitate vnitatum; nusquam verò considerant magnitudinem dependentem à valore: siue pro discretis, siue pro continuis quantitatibus.

QVanti momenti sint in Mathesi operationes ex Cartesio commemoratæ initio paradoxi 6. capitis præcedentis, nemo ignorat: vtque hic nihil dicam de rebus Geometricis, corruit integra antiqua Arithmetica practica, si tollantur hæc eius fundamenta: tamen pro Arithmeticæ practicæ atque antiquæ requisitis operationibus, non sufficit integra numerorum doctrina contenta Euclideis elementis, ex eo capite, quia non considerat nisi numerorum magnitudinem dependentem à pluralitate vel paucitate vnitatum quæ à numero numerantur. De numeris hoc modo tantum consideratis verū est, quod vnitas sit indiuisibilis numerorum omnium principium atque mensura, & dari non posse numerum vnitate minorem: aliaque huiusmodi vera sunt, quæ simpliciter & absolutè de numeris affirmantur: sed tamen vera admitti non possunt agendo de magnitudine numerorum, diuersa ab illa quæ desumitur à pluralitate vel paucitate vnitatum; in hac numerorum consideratione, vnitatem definit Euclides, dicendo, *vnitas est secundum quam vnumquodque eorum quæ sunt vnum dicitur*; numerum verò definit dicendo *numerus est composita ex vnitatibus multitudo*. In qua vnitatis definitione, abstractam vnitatem definire videtur, non verò concretam vnitatem: tamen ex subsequētibus eius documētis, nisi fallor, satis clarè colligitur, quod per vocem *vnitas* velit intelligi, non abstractam, sed concretam vnitatem: siue illud quod magis propriè dicitur vnum, aut indiuiduum, aut subiectum habens vnicam indiuidualitatem. In hoc sensu, tam euidens est, magnitudine desumpta à pluralitate vel paucitate indiuiduorum, nihil posse dari minus vnitate, quam clarè patet impossibile esse dari indiuidua pauciora quam vnum: siue subiectum habere indiuidualitatem, pauciores tamen quam vnam, siue ne quidem vnam. Quod verò per vocem *vnitas*, intelligat, non vnitatem abstractam, sed concretam vnitatem, videtur satis manifestum ex dictis in prima reflexione: vbi etiam vidimus in lineæ definitione quodammodo significare, quod per lineam intelligenda sit abstracta longitudo: sed tamen iuxta Procli mentem diximus, Matheseos obiectum non constitui ab abstractis, sed à concretis magnitudinibus. Quod verò in numeri definitione asserit, intelligendum est de numero à prius definita vnitate diuerso, quem nos aliter pluralitatem dicimus; nobis enim persuasum est, quod nobiscum admittat diuisionem numeri, in singularem, & pluralem: hoc est in numerum qui vnicam tantum vnitatem numerat, & numerum qui numerat plures vnitates quam vnam. Si verum est quod diximus, nimirum Euclidea elementa agentia de numeris, tantum considerare numerorum magnitudinem dependentem à pluralitate vel paucitate indiuiduorum: fateri cogor me non intelligere, quomodo elementaris doctrina Euclidea dici possit sufficiens, aut pro antiqua Arithmetica practica, aut reliqua antiqua Arithmetica. Operationes

Arith-

Arithmeticę circa integros numeros, constituunt prima fundamenta Arithmeticę practicæ: atque ex his operationibus duæ, nimirum multiplicatio & diuisio, aliud non sunt quam compendiata regula aurea, vt notauimus initio paradoxi 6. cap. 3. quare corruente aut deficiente aurea regula, corruit practica Arithmetica; quid igitur de illa dicendum erit, si non possit instituere regulam auream exempli gratia circa datos tres numeros quorum primus est 20, secundus 2, tertius 4? Hanc tamen regulam auream absoluere, & ad datos istos tres numeros quartum proportionalem inuenire, impossibile est, sine alia consideratione magnitudinis numerorum, quam quæ dependet à pluralitate vel paucitate vnitatum quæ numerantur à numero; in hac consideratione impossibilis est numerus qui sit minor vnitate, adeòque impossibilis est proposita regula aurea ex qua alius quam vnitate minor, hoc est alius quam impossibilis numerus produci non potest. Rursus exempli gratia pulcherrima atque vtilissima est consideratio Arithmetica progressionum Geometricarum siue numerorum eamdem atque continuatam rationem habentium: ex quibus aliæ appellantur progressiones ascendentes, quia à minoribus numeris assurgunt ad maiores: aliæ appellantur descendentes, quia à maioribus numeris descendunt ad minores. Has descendentes progressionum, siue continuè proportionalium numerorum series, impossibile est infra vnitatem continuare, supposita impossibilitate numeri qui vnitate minor sit: qui, quia impossibilis est in illa numerorum consideratione, in qua tantum expenditur ea magnitudo quam numeri desumunt ex pluralitate vel paucitate indiuiduorum (quam solam in numeris considerant Euclidea elementa) in his non habentur fundamenta, atque requisita, pro considerationibus pulcherrimarum proprietatum, quæ conueniunt progressionibus sursum & deorsum vlterius pro libitu continuatis: in quibus consistit satis notabilis atque vtilis pars speculatiuæ Arithmeticæ assurgentis supra elementa.

Logistica nostra considerat quidem eam numerorum magnitudinem, quam habent à pluralitate vel paucitate vnitatum, siue indiuiduorum quæ per ipsos indicantur siue numerantur: sed præterea etiam considerat numerorum magnitudinem dependentem ab ipsorum valore: vt loquuntur scriptores antiquæ Matheseos practicæ. Agendo de sola magnitudine numerorum, quæ dependet à pluralitate vel paucitate indiuiduorum quæ numerantur, quæque propriè dicitur discreta magnitudo: non inueniuntur numeri diuersæ speciei: sed omnes inter se tantum differunt quo ad plus vel minus; & numerus 15 obulorum, arenularum, falsitatum, chimærarum &c. æqualis est numero 15 aureorum, globorum terrestrium, veritatum, entium realium &c. atque generaliter, numerus maior est, qui plures numerat vnitates; minor est, qui pauciores numerat vnitates: qualescunque tandem sint illæ vnitates quæ numerantur; omniumque possibilium numerorum minimus est vnitas, quia numerari, siue indicari non possunt pauciores vnitates quam vna. Agendo de magnitudine numerorum quæ dependet à valore, inueniuntur numeri inter se specie, & etiam genere differentes: & numerus 15 obulorum, est minor numero 15 aureorum: deinde numerus 15 arenularum, est minor numero 15 globorum terrestrium constantium ex arenulis. Præterea numerus 15 falsitatum, neque maior, neque minor, neque æqualis dici potest numero 15 veritatum: quia neque vnica falsitas, neque vllum falsitatum aggregatum: æquiualet veritati, vel vllo veritatum aggregato. Idemque dicendum est de numeris, quorum alter 15 chimæras, alter 15 entia realia numerat: atque etiam de his numeris verificatur quod genere inter se differant. Rursus antiquæ Matheseos practicę fractiones, si habeant idem nomen, ad eamdem speciem pertinent: si habeant diuersum nomen siue denominatorem, etiam pertinent ad diuersam speciem, & addi non possunt nisi prius ad idem nomen, siue communem denominatorem reducantur: sine tali reductione ad idem nomen, addi, siue in vnam summam colligi non possunt: vt constat ex parte 3. cap. 2. lib. 1. vbi docentur antiquæ Matheseos practicæ operationes circa fractiones. Quod nostra Logistica docet de magnitudine numerorum dependente à pluralitate vel paucitate indiuiduorum quæ numerantur: vel de magnitudine valorum à qua duæ diuersæ speciei quantitates possunt dici quoad valorem æquales inter se, aut vna maior vel minor altera, spectat ad subsequens caput; quæ verò illic dicuntur de diuersa consideratione magnitudinum numerorum, & pro Matheseos elementis iudicantur vtilia: melius indicant, quid pro Arithmeticæ elementis vtile omissum sit ab Euclide, eo ipso quod in his elementis non inueniatur.

Reflexio V.

Euclides nusquam declarat quantitates, aut rationes indifferentes, pro Mathesi maximè vtiles & consideratione dignissimas.

NON negamus ab Euclide admitti aliquam indifferentiam in quantitatibus, aut rationibus: immo verò ex eius doctrina deriuantur, quæ de quantitatibus & rationibus indifferentibus docet nostra Logistica: ex qua consideratione vlterius deducit, & regulas pro praxi, æquiualentes regulis ab Algebra practica additis antiquæ Arithmeticæ practicæ, & istarum regularum demonstrationes, multum quæsitas, sed non inuentas ab Algebra speculatiua. Quandoquidem enim Euclides admittat eamdem omnino quantitatem, & maiorem, & minorem, & æqualem dici posse, respectu facto ad diuersas alias quantitates: manifestum est, quod in quantitate agnoscat indifferentiam, ad hoc vt dicatur magna, vel parua, vel æqualis, respectu facto ad alias aliquas quantitates. Exempli gratia numerus 50 secundum se consideratus, neque magnus dici potest, neque paruus, neque æqualis: sed bene dicitur indifferens vt dicatur magnus, nimirum comparatus ad minorem numerum 10; vel paruus, nimirum comparatus ad maiorem numerum 100. vel æqualis, nimirum comparatus ad alium numerum 50. Similiter ratio, siue proportio numeri 50, ad alium numerum ad quem referri potest: dicenda est ratio indifferens, vt dicatur ratio vel maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis, vel æqualitatis: etenim ratio 50 ad 10, est ratio maioris inæqualitatis: & ratio 50 ad 100, est ratio minoris inæqualitatis: ac denique ratio 50 ad 50, est ratio æqualitatis. Quoniã igitur numerus 50 cõparari potest ad quemlibet ex tribus numeris 100, 10, 50; patet quod ratio numeri 50, ad numerum ad quem cõparari potest, sit ratio indifferens ad hoc vt dicatur ratio maioris inæqualitatis, minoris inæqualitatis, vel æqualitatis; atq; hanc indifferentiam non amittat, nisi per hoc quod determinetur huius rationis cõseques terminus, à quo depẽdet vt talis ratio amissa sua indifferentia, fiat determinatè vna ex illis rationibus ad quas habebat indifferentiam. Ab hac quantitatum, vel rationum indifferentia, multum diuersa est illa indifferentia quantitatum aut rationum, quam negamus considerari ab Euclide. Hæc indifferentia quantitatum absolutarum in eo consistit, quod qualiscunque quantitas (non præcedente contraria hypothesi) pro libitu appellari possit positiua vel negatiua, siue affici signo + vel —: postquam verò pro libitu stabilitum est, quam quantitatem oporteat intelligi per + A, & consequenter quam quantitatem significet — A: vnaqueque ex istis duabus quantitatibus,

adhuc

adhuc retinet indifferentiam, vt respectu ad alteram, dicatur maior, vel minor: atque ratio + A ad — A, appelletur ratio maioris inæqualitatis, vel ratio minoris inæqualitatis. Hanc quantitatum absolutarum, aut rationum indifferentiam: negamus nos vsquam inuenisse aut declaratam aut nominatam in Euclideis elementis: ex illa tamen deriuat Logistica nostra totam illam practicam vtilitatem, quæ resultat ex regulis quas superius in paradoxo 7. capitis præcedentis, concessimus antiquæ Arithmeticæ practicæ addidisse Algebram; illarumque regularum faciles demonstrationes deducendo, facit vt non tantum practicè, sed speculatiuè atque legitimè demonstratę subsistant: quod præstare non potuit Algebra speculatiua, aut ab Algebra admissa antiqua Mathesis speculatiua: vt constat ex dictis in capitibus præcedentibus; nō video tamen quomodo hoc præstare non potuisset, si cum nostra Logistica communem habuisset considerationem commeratæ indifferentiæ, aut quantitatum absolutarum aut rationum.

Considerentur atque attentè expendantur duæ quæstiones, quæ prima fronte videri possunt pueris proportionatæ, quia agunt de notis, siue punctis bonis & malis, diligentiæ, & negligentiæ: passim vsitatis in scholis, in quibus à pueris discuntur latinę linguæ rudimenta. Prima quæstio sit, vna nota bona delet vnam notam malam: duæ notæ bonę quid delebunt? Secunda quæstio sit, vna nota bona delet vnam notam malam: duæ notæ malæ quid delebunt? fateor quidem propositas duas quæstiones tales esse, vt ex pueris, commemoratis scholis aliquantulum assuetis, difficile foret aliquem inuenire, qui non posset afferre vtriusque huius quæstionis solutionem. Quæro igitur vlterius (quod quærere propemodum erubesco) an antiqua Arithmetica practica aut speculatiua, habeat aut practicas regulas, aut speculatiuas considerationes, sufficientes ad soluendas prædictas duas quæstiones? hæc profectò puerilis quæstio non est: eam tamen proponere vix audebam, quia erubesco dicere quid ad illam respondendum sit, vt hoc clarè non dicam, quoniam ex duobus alterum necessariò respondendum est, nimirum antiquæ Arithmeticæ practicæ vel speculatiuæ, deesse, vel non deesse quę sufficiunt ad soluendas prius propositas duas quæstiones; supponamus prius priorem partem, asserentem antiquam Arithmeticam practicam non habere regulas sufficiẽtes ad soluẽdas prædictas duas quæstiones, aut fundamẽta sufficientia ad tales regulas non inueniri in antiqua Arithmetica speculatiua; hoc supposito, nemo non videt qua commiseratione digna sit paupertas antiquæ Arithmeticæ, tum practicæ tum speculatiuæ: hanc tamen non describo pluribus, quandoquidem illi nō exprobrare, sed huic paupertati remedium afferre, pertinet ad Mathematicum. Si secundum supponatur, nimirum vel antiquam Arithmeticam practicam habere regulas sufficientes ad soluendas duas quæstiones superius commemoratas: vel saltem antiquam Arithmeticam speculatiuam, habere sufficientia fundamenta ad tales regulas: vtile videtur considerare, vbi istæ regulæ practicæ, vel illarum speculatiua fundamenta inueniantur, vel proponantur; in quem finem prius resumenda est vtraque quæstio prius proposita. Prima talis est, vna nota bona delet vnam notam malam: duæ notæ bonæ, quid delebunt? nemo vt opinor ignorat, ad quæstionem respondendum esse, quod duæ notæ bonę delebunt duas notas malas. Secunda quæstio hæc erat, vna nota bona, delet vnam notam malam: duæ notæ malæ, quid delebunt? hic iterum patet, ad quæstionem respondendum esse, quod delebunt duas notas bonas. Iam verò vt quęstiones commodius considerari possint, eas exprimamus compendiata scriptione, vt facere consueuit Arithmetica antiqua, vsitatis ab illa praxibus hoc vnum addendo (si fortè nouum dicendum est) vt ad distinctionem numerorum, diuersam significationem habentium, illi qui significant notas bonas, afficiantur signo +: reliqui qui significant notas malas, afficiantur signo —, hac scriptione expressa, prima ma quæſtio erit, + 1 dat − 1, quid + 2? Secunda quæſtio erit, + 1 dat − 1, quid − 2?

Pro ſolutione primæ quæſtionis dicendum erit, ſi + 1 dat − 1 etiam + 2 dabit − 2.

Pro ſolutione ſecundæ quæſtionis dicendum erit, ſi + 1 dat − 1: etiam − 2 dabit + 2.

Sed quo mei immemor diſceſſi? pueriles, & etiam Arithmeticæ ignaris, facilè ſolubiles quæſtiones duas propoſueram: eaſdem quæſtiones aut illarum obuias ſolutiones nullatenus immutando, ſed tantum compendiata minimèque myſterioſa Logiſticæ noſtræ ſcriptione illas repræſentando: pueriles quæſtiones deſierunt eſſe pueriles: immo factæ ſunt arduæ illæ, maximèque myſterioſæ quæſtiones, glorioſiſſimæ Algebræ inſuperabiles, vt vidimus in paradoxo 6. capitis præcedentis. Vtque intelligatur id veriſſimum eſſe: ſatis eſt, cum quæſtionibus illarumque ſolutionibus compendiata ſcriptione hic propoſitis, conferre quæſita de quibus agitur in citato paradoxo, & eadem compendiata ſcriptione exhibentur. An igitur regulæ Algebræ à quibus practicam Arithmeticam antiquam notabile incrementum ſumpſiſſe conceſſimus, tantum ſeruiunt ad ſolutiones quæſtionum quæ intellectis terminis manifeſtæ ſunt, etiam Arithmeticæ ignaris pueris? An ſpeculatiua Algebra tantopere, ſed tamen inutiliter laborauit, vt iſtarum regularum deſideratiſſimas demonſtrationes afferret; eaſque inuenire non potuit in vniuerſis Matheſeos antiquæ theſauris, auctis tot nouis Algebræ ſpeculationibus, atque adhibitis celebratiſſimis inuentionis regulis, Algebræ proprijs: tametſi regulæ iſtæ tam faciles ſint, vt intellectis terminis, pueriles diſcurſus ſufficiant ad cognoſcendũ, quid, & quare hoc reſpondendum ſit ad quæſtiones, de quibus prædictæ Algebræ regulæ tantum docent, quid reſpondendum ſit, Algebra verò inuenire non potuit, aut intelligere, quare hoc reſpondendum ſit: quod aliud non erat quam regularum demonſtrationes afferre? quid mihi ad propoſitas interrogationes reſpondendum ſit, non ſatis ſcio: ſæpenumero veritas odium parit. Ne nobis inimicam haberemus integram multitudinem eorum qui tantopere gloriantur de Algebra practica quam didicerunt, ſuperius non ſemel conceſſimus, practicam Algebram bonam eſſe, atque pro rebus Mathematicis commodas maximèque vtiles regulas addidiſſe antiquæ Arithmeticæ practicæ: quare conſultum non arbitror, hic aſſerere, dictas regulas eſſe tales, pro quarum inuentione ſufficit capacitas puerorum, qui non didicerunt neque Arithmeticam, neque Algebram. Deinde, talibus, atque tam facilè cognoſcibilibus regulis ditatam fateri antiquam Arithmeticam, nimis magnam argueret eius paupertatem. Propter hæc & ſimilia, non affero [redacted]dum ad propoſita [redacted] foret reſpondendum, conſulat [redacted] propoſitas demonſtrationes regularum, æquiualentium Algebræ regulis de quibus hic ſermo eſt, & diligentius expendat Logiſticæ fundamenta ex quibus deducuntur illæ demonſtrationes: ſic enim intelliget reſponſum ad ſingula quæſita in hac reflexione propoſita: & etiam ſciet, quam verum ſit, quod aſſeritur in propoſitæ reflexionis titulo: atque cognoſcet vtilitatem rationum indifferentium noſtræ Logiſticæ.

Re-

Reflexio VI.

Euclides nusquam considerat, pro Mathesi vtilissimam Logisticæ nostræ doctrinam de ductibus Geometricis atque nominatis.

RVrsus hoc loco non negamus ab Euclide nusquam indicari aliquid, requisitum pro nostræ Logisticæ doctrina de ductibus Geometricis, cui innititur commodissima vtilissimaque inuentionis secunda regula, superius proposita cap. 10. lib. 1. Immo verò hanc doctrinam (vt putamus Logisticæ nostræ propriam) deriuauimus ex aliquibus, quæ parum exculta atque neglecta inuenimus apud Euclidem. Docet enim ex fluxu siue ductu puncti oriri lineam: ex fluxu siue ductu lineæ produci superficiem: atque ex fluxu siue ductu superficiei oriri corpus, siue solidum; hinc Proclus in Euclidem scribens, de aliquorum Mathematicorum definitione lineæ, pro qua considerabant eius originem ex fluxu siue ductu, *definitio*, inquit, *quæ lineam signi fluxum dixit, à causa producente ipsam manifestare videtur*; præstantior verò rei cognitiò haberi non potest quam per causam. Hinc colligi potest quid dici debeat de definitionibus diuersarum quantitatum, atque præsertim superficierum & corporum, quæ afferuntur superius in parte 5. cap. 1. lib. 1. & adhibentur à nostra Logistica, & requiruntur pro eius doctrina de ductibus Geometricis: vtrum scilicet præferendæ vel postponendæ sint alijs earumdem superficierum aut corporum definitionibus, quæ inueniuntur in elementis quæ appellantur Euclidea: singulæ enim à causa producente manifestant definitum, quod non faciunt definitiones Euclideæ: ex quibus quæ nobis videntur meliores, tantum proponunt aliquam proprietatem omni & soli definito conuenientem. Dictis adde, quod nostris definitionibus similes, fortassis etiam ab ipso Euclide fuerint vsitatæ: tales enim aliquæ inueniuntur apud antiquiores eius interpretes, de quibus probabilius suspicari potest quod afferant definitiones ab ipso Euclide propositas. Inspice si placet Euclidea elementa authore Campano, satis cognita vsque in hodiernum diem, & Basileæ impressa prius anno 1537. ac denuo anno 1546. & anno 1558. toties iterata istorum elementorum Euclideorum impressio, indicat maximopere placuisse: antiquiora ego non legi, quæ contineant omnes libros Euclideorum elementorum. In his libri secundi prima propositio talis est: *Si fuerint duæ lineæ quarum vna in quotlibet partes diuidatur, illud quod ex ductu alterius in alteram fiet, æquum erit ijs quæ ex ductu lineæ indiuisæ, in vnāquamq; partē lineæ particulatim diuisæ, rectangula producuntur*. Similiter in pluribus alijs propositionibus subsequentibus, in quibus agitur de rectangulis: non dicit exempli gratia rectangulum lineis A & B terminatum, vel contentum, vel comprehensum &c. vt apud magis modernos vsitatum est: sed dicit, rectangulum ortum ex ductu lineæ A in lineam B: qui modus loquendi obseruatur in nostra Logistica, vbi agimus de productis ex nostris ductibus Geometricis. Vtrum commoditatem vtilitatemque afferat siue in definitionibus superficierum & corporum, siue in demonstrationibus proprietatum quæ conueniunt productis ex nostris ductibus Geometricis: quamque necessarius sit pro doctrina nostra de his ductibus: quantisque titulis hæc doctrina præferenda sit methodo, qua Euclides vtitur ad demonstrandum aliquas ex illis quantitatum proprietatibus quas superius lib. 1. cap. 12. demonstratas exhibemus,

mus, vel conformiter ad secundam Logisticæ regulam, vel aliter vt fit ibidem in scholio proposito in fine partis 2. hæc inquam & similia, intelligenda sunt ex vsu doctrinæ nostræ de ductibus Geometricis.

Quare commemoratus loquendi modus, tantam vtilitatem afferens nostræ Logisticæ, atque adhibitus, si non ab ipso Euclide, saltem ab aliquo ex eius commentatoribus neque parui nominis neque maximè moderno, retentus non fuerit ab ijs qui post ipsum scripserunt Euclidea elementa, causam indicatam non inuenio; fortassis causa fuit, quia cognoscebant vera esse & admissa ab antiqua Mathesi quæ initio paradoxi 6. capitis præcedentis notauimus ex Cartesio, sed hæc pro Geometria tantum vera esse in casu quando productum ex operatione est linea: hoc est in casu, *qui spectat ad lineas quæ quæruntur*, vt ibidem notat Cartesius: hoc enim casu, ductus quo linea in lineam ducitur, est regula aurea, siue inuentio lineæ quæ sit quarta proportionalis ad tres alias datas lineas, quarum prima assumitur pro vnitate; falsa autem esse pro casu in quo productum ex linea ducta in lineam, producitur superficies, exempli gratia rectangulum: etenim admittere, regulam auream esse eum ductū in quo linea A ducta in lineam A producit quadratum lineæ A siue A2, idem foret ac admittere, quod linea aliqua assumpta pro vnitate, ad lineam A, haberet eamdem proportionem, quam linea A habet ad quadratum lineæ A siue A2, hoc est ad superficiem: & consequenter admittere lineam ad superficiem habere proportionem: quod repugnat documentis antiquæ Matheseos, non admittentis proportionem inter quantitates diuersi generis, vt sunt linea & superficies. Si fortè magis moderni Euclideorum elementorum scriptores, mutarunt superius commemoratum loquendi modum, vt declinarent hanc similesque difficultates, quarum solutiones non satis intelligebant: nobis videntur neque imprudentiæ damnandi, neque indigni commiseratione: siquidem pro soluendis huiusmodi nodis non sufficiebat Euclidea doctrina, non considerans numerorum & multo minus aliarum quantitatum valores: ex qua consideratione fit in nostra Logistica, quod huiusmodi difficultates insuperabiles in antiqua Mathesi, desinant habere vllam difficultatem.

Reflexio VII.

Euclides vix declarat quid sit quantitas constituens obiectum scientiæ cuius elementa proponit.

Scientiam aliquam bene contemplari posse suum obiectum, sine præuia aliqua cognitione talis obiecti: videtur nobis difficulter intelligibile, & parum conforme aliarum scientiarum ordinatis tractationibus. Quoniam igitur scientiarum Mathematicarum obiectum illud est, quod significatur per voces *quantitas* siue *magnitudo*: nisi istarum vocum significatio intelligatur, haberi non potest ea cognitio obiecti Matheseos quæ requiritur ad scientificam Mathesim. Hæc tota consistit in contemplatione proprietatum conuenientium magnitudini siue quantitati; quæ voces, *magnitudo* & *quantitas*, in Euclideis elementis, passim quidem adhibitæ inueniuntur; sed nusquam inuenimus declaratam significationem quam habent in Mathesi, aut indicatum vnde sumenda sit, atque supponatur hæc intelligentia atque cognitio obiecti Matheseos. Ex duobus autem alterum verum videtur atque supponendum: nimirum hanc significationem vocum *magnitudo* & *quantitas* esse sufficienter & passim cognitam: vel non esse sufficienter & passim cognitam apud eos qui accedunt ad studium scientiarum

Ma-

Mathematicarum. Si primum supponatur, planè quidem necessarium dici non poterat, sed tamen non dedecebat (saltem ad maiorem cautelam atque claritatem) breuiter indicare, quid per voces *magnitudo* vel *quantitas* intelligendum sit in Mathesi: ne incipientibus eius studium, relinqueretur aliqua causa dubitandi de hac vocum significatione: præsertim reflectendo quod voces omnes non semper intelliguntur in Mathesi, vt exponuntur & intelliguntur, apud vulgus vel Grammaticos. Si secundum supponatur, saltem nobis videtur manifestum, hanc vocum declarationem non potuisse prætermitti sine aliquo detrimento ordinatæ completæque tractationis elementorum Matheseos. Cum verò ex his duabus suppositionibus, altera necessariò vera sit: & negari non possit quod ad secundam sequitur, eo ipso quod constet primam falsam esse: vtile videtur paucis considerare vtrum verum haberi possit, quod primo loco supposuimus: nimirum passim ac satis cognitam esse significationem vocum *magnitudo* & *quantitas*, sic vt eam ignorare non possint accedentes ad studium scientiarum Mathematicarum, pro quibus scribuntur elementa: & illa quæ vocantur Euclidea à pluribus habentur talia, sic vt de illis verè affirmari possit quod scribit P. Taquet, & à nobis eius verbis indicatum est ad reflexionem secundam.

Quæro igitur primò, & ab ipso P. Taquet post 16. lib. 3. propositionem in scholio annotatum quæsitum propono; vtrum angulus sit, vel non sit quantitas? cur tam prolixum scholium pro responsione ad hanc quæstionem? facilis deberet esse responsio, si adeò manifesta est significatio vocis *quantitas*, vt nulla indigeat declaratione, sed supponi possit cognita omnibus accedentibus ad Matheseos studium. Hoc quam à veritate alienum sit, intelligetur in ipso huius scholij initio: narrat enim quomodo diuersi Matheseos magistri diuersimodè respondendum putent ad propositum quæsitum: & tamen improbabile videtur à Matheseos candidatis clarissimè intelligi, quod controuertitur inter Matheseos doctores, vt sunt Peletarius & Clauius: quorum de hoc paradoxo scriptas controuersias commemorat, ac tandem Clauium damnat asserentem quantitatibus annumerandum esse angulum: ex hac enim sententia talia quæ notat, sequuntur paradoxa, quæ, vt asserit in scholij initio, *omnem captum humanæ mentis excedũt*. Quomodo euanuit prius asserta claritas Euclideorum elementorum? prius clara asseruerat, quia nihil illis oppositum viderat: lectis verò prædictis controuersijs audi quid de se scribat. *Quare suspicari aliquando capi, latere hic aliquid, cuius ignoratio subtilibus etiam ingenijs illuderet, & paradoxis illis immanibus asserendis ansam præberet*. Peletario etiam non planè assentitur, qui inquit, *vt his paradoxis se expediat, negat angulum contactus esse quantum*. Deinde suam sententiam proferens, *Rem*, inquit, *confecerat, si dixisset nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert, omnes semicirculi angulos esse æquales, quod planè non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo asseruerat, omnibus angulis conuenire. Neque tamen Clauio nostro, in sua illa aduersus Peletarium apologetica disputatione assentior. Mea quidem sententia vterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem; ille dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alij se existimant hac vna responsione difficultates omnes soluere, si dicant, curuilineos angulos & rectilineos esse incomparabiles. Rogati verò, cur sint incomparabiles, respondent, quia angulus contactus quantumcunque multiplicatus nunquam potest æquare rectum vel acutum*. Hæc noster Taquet: qui satis bene ostendit, aliorum ad propositum dubium responsa satis adæquata non esse; supposito verò eius responso, quo acquiescere non possum: peto si anguli rectilinei non sint quanti atque annumerandi quantitatibus, quomodo Euclides & omnes eius commentatores in propositione 20. lib. 3. docent angulum ad centrum duplum esse anguli ad circumferentiam, quod idem asseritur in nostra Logistica in theoremate septimo partis 3. capitis 8. lib. 1? certè neque iuxta illorum, neque nostram doctrinam de proportionibus, admitti potest proportio nisi inter quantitates, atque eiusdem generis quantitates; asserere verò angulum ad centrum duplum esse anguli ad circumferentiam, idem est ac dicere priorem angulum ad posteriorem habere eamdem proportionem quam numerus 2, habet ad vnitatem; quoniam igitur ex his constat, angulum ad centrum habere proportionem ad angulum qui est ad circumferentiam: & nulla proportio inuenitur, nisi inter quantitates eiusdem generis: concedendum est, angulos, quorum vnus est ad centrum, alter ad circumferentiam, esse quantitates, atque quantitates eiusdem generis. Idem inferri poterat ex Euclidea doctrina asserente angulum rectum maiorem esse angulo acuto, adeòque ad illum habere proportionem maioris inæqualitatis. Vel ex eo quod docet, externum trianguli angulum æquari duobus internis & oppositis angulis, aut angulos ad verticem oppositos inter se æquales esse: in quibus inter angulos asseritur proportio æqualitatis. Vel ex alijs huiusmodi propemodum innumeris Euclideis assertionibus, quæ communes sunt omnibus qui scripserunt Euclidea elementa: in quibus inter diuersos angulos rectilineos asseritur maioritas, minoritas, vel æqualitas & consequenter proportio; sed inutile foret pluribus probare quod ex dictis abundè constat, nimirum ipsos etiam Euclideorum elementorum scriptores atque doctores, non satis intellexisse quid respondendum sit ad propositum, atque inter illos controuersum quæsitum, vtrum angulus sit vel non sit quantitas.

Vt ex responsionibus ad hoc quæsitum breuiter indicatis non inferam, totum quod legitimè sequi videtur: & ne benemeritis de antiqua Mathesi scriptoribus aliquid obijciam ipsis parum decorum, & tamen nobis parum vtile: tantum subsumo, atqui supposita nostræ Logisticæ declaratione obiecti Matheseos, cessant omnes istæ controuersiæ & paradoxa, quæ originem habent ex quæstione prius proposita, querente vtrum angulus sit quantitas: ex quibus præmissis infero, igitur Matheseos obiectum siue intelligentia vocum *magnitudo* & *quantitas*, non potest dici eam facilitatem siue claritatem habere, vt ignorari non possit ab ijs qui accedunt ad studium Matheseos: quodque propterea nullam requirat expositionem; quod hic probasse nobis sufficit: & legitimè ostensum esse negari non potest si constet subsumpta prius propositio. Vt eius veritatem breuius sed sufficienter euincam, suppono hoc loco quæ in prima consideratione capitis subsequentis dicimus de Matheseos obiecto; his præmissis atque suppositis, quoniam iuxta nostræ Logisticæ definitionem, angulus est apertura: & de apertura constat quod quantitas non sit, sed sit taleitas, siue modus quantitatis: patet angulum non esse quantitatem: sed modum, siue taleitatem: quemadmodum curuitas, non quantitas, sed modus siue taleitas est. Quoniam tamen magnitudo siue quantitas vlterius non restricta, potest restringi ad magnitudinem aperturæ, sicut potest restringi ad magnitudinem extensionis: quantitas verò siue magnitudo restricta ad magnitudinem aperturæ, non desinit esse quantitas: patet magnitudinem aperturæ, quæ aliter appellatur magnitudo anguli, esse quantitatem. Præterea magnitudo aperturæ, quæ quantitas est, vlterius potest restringi ad magnitudinem aperturæ rectarum linearũ, siue anguli rectilinei: & ad magnitudinem aperturæ curuarum linearum, siue anguli curuilinei; vtraque magnitudo sic diuersimodè restricta, manet magnitudo siue quantitas: sed duæ istæ quantitates non spectant ad idem genus, propter restrictionum diuersitatem: quemadmodum magnitudo extensionis vlterius restricta ad vnicam extensionem, quæ aliter linea dicitur, genere differt à magnitudine extensionis vlterius restricta ad duas extensiones, quæ aliter appellatur superficies.

Ex his resultat triplex anguli vel aperturæ consideratio. Prima est, quando considerandum ſideratur angulus ſiue apertura præciſè vt angulus ſiue apertura eſt : ſiſtendo in hac prima conſideratione, verum eſt, quod angulus ſiue apertura non ſit quantitas : quodque vnus angulus non poſſit dici altero maior, vel minor, vel illi æqualis, aut ad illum habere proportionem. Secunda conſideratio eſt, quando conſideratur magnitudo eodem modo reſtricta, ad magnitudinem aperturæ rectarum linearum : quæ aliter dicitur magnitudo anguli rectilinei, vel etiam vocatur angulus rectilineus : ſiſtendo in hac conſideratione, angulus rectilineus quantitas eſt: & vnus poteſt dici maior vel minor altero, vel illi æqualis, atque ad illum habere proportionem : vterque enim ſpectat ad idem genus quantitatis. Tertia conſideratio eſt, quando conſideratur magnitudo reſtricta diuerſo modo ſiue ad diuerſas aperturas : ſemel ad aperturam rectarum linearum, deinde ad aperturam linearũ quæ ſingulæ rectę non ſunt, ſed vna recta eſt, altera circularis; quemadmodũ in ſecundo caſu magnitudo aperturæ rectarũ linearũ, aliter dicitur magnitudo anguli rectilinei, vel etiam appellatur angulus rectilineus; ita in hoc tertio caſu, magnitudo aperturæ rectę & circularis lineę, aliter dicitur magnitudo anguli mixtilinei, vel etiam angulus cõtactus; ſiſtendo in hac conſideratione, atq; conſiderando angulum rectilineum, & angulum contactus, vterque iſte angulus eſt quantitas: ſed duæ iſtæ quantitates, non ſunt quantitates eiuſdem generis, adeòque dici non poteſt quod vnus altero maior ſit, aut minor, vel illi æqualis vel ad illum habeat proportionem. Iam verò ex commemoratis tribus angulorum diuerſis conſiderationibus, quæ ſingulæ admittuntur à noſtra Logiſtica, atque conformes ſunt primis eius elementis, ſiue declarationi obiecti Matheſeos; pro antiqua Matheſi ſiue Euclidea doctrina, vel prima tantum conſideratio eſt admittenda, conformiter ad doctrinam P. Taquet, aſſerentem nullum angulum eſſe quantum ſiue quantitatem: vel ſingulæ ſunt admittendæ, quod videtur magis conforme doctrinæ P. Clauij & aliorum, aſſerenti admitti debere quod angulus dici poſſit quantus ſiue quantitas. Primum nobis videtur ſupponi non poſſe, ne conſequenter concedendum ſit, quod antiqua Matheſis ſibi ipſi aduerſetur, atque contraria ſit : quando ex vna parte tantum admittendo hanc primam angulorum conſiderationem, ſtatuit, quod in hac conſideratione manifeſtum eſt, nullum ſcilicet angulum eſſe quantum ſiue quantitatem : cui aduerſatur eius de angulis doctrina, in qua (vt P. Taquet obiecimus) paſſim adhibentur locutiones ſupponentes angulos eſſe quantos ſiue quantitates: adeòque ſupponentes angulorum conſiderationem in qua angulus poteſt dici quantus ſiue quantitas, quales ſunt duæ poſteriores ex prænotatis tribus anguli conſiderationibus admiſſis atque neceſſarijs pro noſtra Logiſtica. Ex his ſatis manifeſtè colligi videtur, etiam pro antiqua Matheſi admitti debere reliquas à prima diuerſas Logiſticæ noſtræ conſiderationes angulorum : & reijciendam illam doctrinam quæ ſtatuit, nullum angulum eſſe quantum, ſed angulum tantum eſſe modum quantitatis : hoc eſt, in nulla ab antiqua Matheſi adhibita angulorum conſideratione aſſeri poſſe de vllo angulo, quod ſit quantus ſiue quantitas : oppoſitum enim conſtat ex ſecunda & tertia angulorum conſideratione, quas oſtendimus pro antiqua Matheſi admittendas eſſe. Pariter tamen conſtat ex tertia conſideratione, quod angulus rectilineus ad angulum contactus nullam habeat proportionem, adeòque vnum altero dici non poſſe maiorem, vel minorem, aut illi æqualem. Hæc veritas, non differt quidem ab illa quam infert P. Taquet ex ſua falſa doctrina, non admittente conſiderationem angulorum in qua angulus dici poteſt quantus, ſiue quantitas : ex qua etiam ſequitur angulum rectilineum dici non poſſe angulo contactus maiorem, vel minorem, vel illi æqualem : adeòque quo ad hanc veritatem conuenimus cum P. Taquet; ab illo tamen diſcrepamus quo ad fundamentum huius veritatis, quam ille ex falſo, & vt vidimus pro antiqua etiam Mathesi non admittendo fundamento infert: apud nos verò immediatè sequitur ex consideratione angulorum, necessaria pro nostra Logistica, & manifesta ex declaratione terminorum, qui in illa adhibentur: quæque vt antè ostendimus etiam ab antiqua Mathesi admitti debet. Quidquid verò sit, de origine veritatis docentis angulum rectilineum, angulo contactus, dici non posse maiorem, vel minorem, vel illi æqualem, aut ad illum habere proportionem: certum est, (vt vlterius constat ex P. Taquet) quod ad lumen huius veritatis, euanescant tenebræ commemoratæ in paradoxis agentibus de his angulis. Reliquæ tenebræ ad quas conducit huius eiusdem veritatis fundamentum, allatum vt diximus à P. Taquet (quæ tenebræ, prioribus non minus noxiæ sunt pro antiqua Mathesi) dissipantur, non ad lumen huius veritatis, sed ad lumen alterius veritatis ex qua iuxta Logisticam, prior ducit originem, quæque statuit pro antiqua Mathesi admittendas esse diuersas atque superius enumeratas angulorum considerationes pro Logistica nostra necessarias. Etenim secunda ex his tribus diuersis angulorum considerationibus, clarissimè docet, quod, & quomodo vnus angulus rectilineus dici possit altero angulo rectilineo maior, minor, vel illi æqualis, aut ad illum habere proportionem: quod diximus vsitatum esse in antiqua Mathesi, sed repugnat eorum doctrinæ, qui negant admitti posse anguli considerationem in qua verum sit quòd angulus sit quantus siue quantitas. Ex hactenus dictis satis constat, veram esse propositionem à nobis paulò superius assumptam, quæ remanebat probanda: nimirum supposita nostræ Logisticæ declaratione obiecti Matheseos, cessare omnes istas controuersias, & omnia paradoxa, quæ originem habent ex quæstione in qua petitur vtrum angulus quantitas sit. Quandoquidem verò tam vtile lumen, & nostræ Logisticæ, & etiam antiquæ Mathesi afferat declaratio obiecti Matheseos: nemo non videt, an in hac reflexione malè notetur vt defectuosum, quod Euclidea elementa nusquam declarent Matheseos obiectum, exponendo quid in illa intelligendum sit per voces *magnitudo* & *quantitas*.

Hoc, quod satis vt opinor euicimus, considerando quæstionem in qua petitur vtrum angulus quantitas sit: vlterius confirmandum non videretur, nisi me ad sui considerationem alliceret vtilitas alterius quæstionis de quantitate: ex qua, in ordine ad titulum huius reflexionis, non malè idem infertur, quod intulimus ex priori quæstione: sed tamen eius consideratio, alias nonnullas, atque non parui momenti vtilitates annexas habere mihi persuasum est. In hac quæstione peto, vtrum Matheseos obiectum constituatur ab abstracta vel concreta magnitudine siue quantitate? vt status quæstionis ab omnibus melius intelligatur: sciendum, quod sicut aliud est albedo vel curuitas, aliud verò album vel curuum: ita aliud est magnitudo vel quantitas, aliud verò magnum vel quantum. Subiectum habens albedinem vel curuitatem, est illud quod magis propriè dicitur album vel curuum, vel aliter etiam appellatur concretum albedinis, vel curuitatis, aut certè concreta albedo vel curuitas. Similiter, aliud quam subiectum habens magnitudinem vel quantitatem, propriè dici non potest magnum vel quantum, siue concretum magnitudinis, vel quantitatis, aut certè concreta magnitudo vel quantitas. Quod in concreto albedinis siue curuitatis habetur à subiecto, atque vltra subiectum requiritur ad constituendum tale concretum, illud est, quod magis propriè appellatur abstracta albedo vel curuitas; pari modo, quod in concreto magnitudinis vel quantitatis, habetur à subiecto, & vltra subiectum requiritur ad constituendum tale concretum: magis propriè nominatur abstracta magnitudo vel quantitas. Hæc terminorum intelligentia, supponitur in proposita quæstione, in qua petitur, quænam ex his duabus, atque inter se diuersis magnitudinibus vel quantitatibus, quarum aliæ abstractæ, aliæ concretæ appellantur, constitu-

stitu-

ſtituant Matheſeos obiectum. Ex Euclideis elementis ad ſummum conſtat, quod Matheſeos obiectum conſtituatur à magnitudine vel quantitate: & tamen vtile atque deſiderabile videtur accedentibus ad Matheſeos ſtudium, intelligere quid ad propoſitam quæſtionem reſpondendum ſit. Si diligentius reflectatur ad Euclideam definitionem lineæ, vel vnitatis, vt diximus ad reflexionem 4. iſtæ definitiones potius conuenientes abſtractæ longitudini, vel vnitati: tales ſunt, vt ex illis non malè ſuſpicari poſſet aut inferri, quod Matheſis conſideret longitudines abſtractas, vnitates abſtractas, & conſequenter abſtractas magnitudines ſiue quantitates; ſi tamen conſideretur ſuperficiei definitio, vt dictum eſt ad eamdem reflexionem: quoniam in illa agitur, non de abſtracta, ſed de concreta magnitudine vel quantitate: præbet fundamentum ſuſpicandi quod Matheſis conſideret concretas magnitudines ſiue quantitates. His adde, quod voces *magnitudo, quantitas, magnum, quantum* ſatis promiſcuè, & quodammodo ſine diſtinctione adhibeantur in elementis Euclideis & antiqua Matheſi: ita in paucis quæ in hac reflexione propoſuimus ex P. Taquet de angulo: ſubinde affirmatur vel negatur, quod angulus ſit quantus, ſubinde quod ſit quantitas, quaſi nulla intercederet differentiá inter ſignificationem vocum quantitas & quantum.

Docet quidem noſtra Logiſtica, & accedentes ad eius ſtudium diligenter monendos putat: Matheſeos obiectum conſtitui non ab abſtractis, ſed à concretis magnitudinibus ſiue quantitatibus: ideòque voces *magnitudo* & *quantitas* intelligendas eſſe in ſenſu concreto, ſiue vt idem ſignificent quod magis propriè ſignificatur per voces *magnum* & *quantum*; idque ſemper verum eſt, quando ex circumſtantijs non ſatis indicatur, quod ſermo ſit de abſtracta magnitudine vel quantitate. Exempli gratia quando nominatur longitudo lineæ, vel magnitudo lineæ, ſatis patet quod agatur de longitudine vel magnitudine abſtracta, linea enim non habet niſi longitudinem aut magnitudinem abſtractam. Similiter, quando Euclides definit ſuperficiem, dicens eſſe illud quod habet longitudinem & latitudinem tantum: patet ſuperficiem dici, concretum conſtans ex ſubiecto & illi inhærente abſtracta longitudine & latitudine: non verò aliquem qui in manu vel aliter habet concretum longitudinis & latitudinis. Quoniam verò ex his conſtat, quod in antiqua Matheſi voces *magnitudo* & *quantitas*, aliquando intelligi debeant in ſenſu concreto: aliquando autem intelligi debeant in ſenſu abſtracto; quare moderni Euclideorum elementorum ſcriptores nuſquam declarant, hanc diuerſam ſignificationem admitti ab his vocibus? quare nuſquam indicant in quo ſenſu intelligendæ ſint, quando dicitur quod Matheſeos obiectum ſit quantitas: præſertim cum id expreſsè & multis declaratum inueniatur apud antiquos expoſitores Euclideorum elementorum? nos enim cum P. Taquet in hiſtorica narratione quam præmittit ante ſua elementa Euclidea: non modernis ſed antiquis ſcriptoribus annumeramus Proclum qui vt ibidem ſcribitur *quantus in Mathematicis fuerit, ex doctiſſimis eius in Euclidem commentarijs alijſque ſcriptis manifeſtum eſt*. In his commentarijs lib. 2. multis agit de quæſito hic à nobis propoſito: vtrum ſcilicet Matheſeos obiectum conſtituatur ab abſtractis, vel à concretis magnitudinibus aut quantitatibus; & inter varias, optimas, & noſtræ Logiſticæ elementis maximè conformes doctrinas: prius monet pro Mathematicis incipiendum ab ijs quæ externo ſenſu percipiuntur, indeque progrediendum ad ea quæ ſub ſenſum non cadunt, ſed ſolo intellectu percipiuntur. Exempli gratia externo ſenſu corpora percipiuntur, vt tamen tactu percipiantur requiritur in illis aliqua durities; vt viſu percipiantur, debent habere colorem &c. hæc tamen non pertinent ad eſſentiam corporis, ſiue vt poſſit intelligi corpus: ad quod ſufficere docet materiam ſiue ſubiectum habens longitudinem, latitudinem, & altitudinem. Vbi non docet quod ſubiectum ſiue materia habens

hanc

hanc triplicem extenſionem atq; deſtitutam duritie, colore, alijſque omnibus quæ à tali materia & triplici eius extenſione diuerſa ſunt, aut à parte rei inueniri, aut exiſtere his omnibus ſpoliatam: ſed aſſerit quod intellectus præſcindendo vel abſtrahendo ab his reliquiſque omnibus, poſſit intelligere materiam ſiue ſubiectum, habens triplicem extenſionem, nimirum longitudinem, latitudinem, & altitudinem, & nihil ab his diuerſum: illudque quod hoc caſu intelligitur, eſſe corpus, quod poſtea intellectile appellat, vt melius diſtinguatur à corpore quod dicit ſenſile, ſiue ſenſu externo perceptibile. A cognitione corporis ſenſilis, externo ſenſu acquiſita, incipiendum affirmat: ac deinde progrediendum, intellectu præſcindendo ſiue abſtrahendo, vt perueniatur ad cognitionem corporis intellectilis ſiue ſolo intellectu perceptibilis; hunc procedendi modum appellat *exurgere à ſenſu ad mentem*: eum pronunciat pro ſpeculatiua Matheſi maximè neceſſarium, atque conformem doctrinæ Ariſtotelis & Platonis. Quoniam verò huiuſmodi corpus intellectile, cõſtat ex materia ſiue ſubiecto quod habet triplicem extenſionem, & triplici extenſione quæ habetur à tali materia; vt hæc inter ſe diſtincta atque diuerſa, ſine confuſione indicare poſſit; materiam ſiue ſubiectum habens ſiue ſuſtentans extenſionem, appellat materiam intellectilem: quod ab hac materia habetur vel ſuſtentatur generali nomine appellat formas: qua voce complecti videtur, quidquid præter materiam ſiue ſubiectum, requiritur ad conſtituenda concreta longitudinis, magnitudinis, curuitatis, albedinis, aut quibuſcunque ſimilibus vocibus indicabile eſt, vel ſine vlteriori reſtrictione, vel cum vlteriori reſtrictione.

In hunc modum ſufficienter indicata, tum ſenſili, tum intellectili materia & forma: quæ ſunt duæ partes neceſſariò requiſitæ vt habeatur illud quod ſignificatur per vocem concretum: quæ vox ſignificat compoſitum ex materia ſuſtentante formam, & forma ſuſtentata à materia: pergit ad conſiderationem potentiarum quę in homine inueniuntur & aliquid agunt circa talia concreta. Intellectum appellat illam potentiam quæ dicitur intelligere, diſcurrere, ratiocinari. Phantaſiam nominat illam potæntiam quæ intellectui exhibet ſiue repræſentat intellectilia obiecta, quæ intelligit de quibus diſcurrit vel ratiocinatur. Senſum dicit potentiam quę intellectui repræſentat & exhibet obiecta quę appellauit ſenſilia: à quibus præſcindendo peruenitur ad obiecta intellectilia. Poſt hæc de ſolo circulo aſſerens, quod de quolibet Matheſeos obiecto intelligendum eſt, *diſtinguendus*, inquit, *circulus in cognitione, circulus in phantaſia, circulus in ſenſibilibus. Geometria quæ de circulo docet, aſſerit de circulo in phantaſia*. Etenim iuxta hanc doctrinam Geometria aliud non docet de circulo, quam quod intellectus cognouit conuenire circulo ſibi repræſentato: quoniam tamen intellectui repræſentari poteſt circulus, tum à ſenſu, tum à phantaſia: negat Geometriam docere aliquid de circulo repræſentato à ſenſu, qui circulum repræſentare non poteſt aliter, quam vt durum, vt coloratum, & habentem illa ſine quibus ſenſu percipi non poteſt, quæ non attenduntur à Geometria in ijs quæ docet de circulo. Hoc idem vlterius cõfirmans, & deſcribens circulum prout cognoſcitur ab intellectu: *circulum*, inquit, *vna cum ſuo cognoſcit interuallo, ab externa, hoc eſt ſenſili materia quidem immunem, intellectilem verò quæ in ipſo eſt materiam habentem*. Huc ſpectat quod alij paſſim docent, Geometriam abſtrahere à materia: nimirum à materia ſenſili, hoc eſt quæ externo ſenſu percipitur. Quod de circulo hic affirmauimus, ſimiliter intelligendum eſt de triangulo, quadrato, linea, ſuperficie, corpore, cubo, aut quolibet alio obiecto Geometriæ, aut ſpeculatiuæ Matheſeos: à qua quidquid docetur, tantum affirmatur de tali obiecto vt repræſentatur à phantaſia, & eſt concretum conſtans ex materia intellectili & forma intellectili. Vt clarius exponat huiuſmodi Geometriæ, ſiue Matheſeos obiecta, neceſſariò

eſſe

esse concreta: neque constitui posse à sola, siue pura forma: addit, *si extra materiam sint obiecta Geometriæ formaque pura, procul dubio impartibiles erunt*. Vbi supponit euidenter veram antiquiorum doctrinam docentem abstractas, intellectiles, siue puras formas esse indiuisibiles, insecabiles, impartibiles: quo supposito subsumit, atqui Geometriæ obiecta sunt diuisibilia, secabilia, partibilia; ex quibus manifestè sequitur probanda conclusio, nimirum quod Geometriæ obiecta non sint formæ puræ, abstractæ, intellectiles.

Hæc si vera sunt, quæ meo quidem iudicio verissima negari non possunt; vel à minus doctis propter maximam doctissimi Procli authoritatem, vel à doctioribus propter huius doctrinæ conformitatem cum vniuersa antiquæ Matheseos doctrina: profectò constat quod hic nobis probandum erat, nimirum Matheseos obiectum, siue significationem vocum *magnitudo* & *quantitas*, expositione indigere, adeòque illam malè prætermitti à modernis scriptoribus Euclideorum elementorum. Vlterius etiam constat, quantum hallucinentur circa speculatiuæ Matheseos obiectum, & ab eius necessaria cognitione aberrent qui non agnoscunt intellectu factas (de quibus hic egimus) præcisiones siue abstractiones: & consequenter non intelligunt, abstractas purasque formas, aut intellectilem materiam à sensili diuersam, eamque de qua aliud affirmari non possit nisi quod sit materia, siue pura materia; quod tamen argumentum prosequi non audeo, ne mihi tandem concludendum sit, non paruam partem eorum qui hisce temporibus habentur Mathematicarum scientiarum cultores & promotores, potiori iure dici posse, nunquam peruenisse ad limina scientificæ Matheseos: sed tantum occupari in practica Mathesi, & vsu regularum eius: vel certè versari in pharmacopeorum officinis, alijsue huiusmodi locis, aut congressibus, quocunque tandem nomine appellandis: in quibus benè discuntur aliquæ proprietates sensilium obiectorum, quæ ab externis sensibus haberi debent, & vtiles sunt, vt ab his sumendo exordium ac deinde præscindendo perueniatur ad intellectilia obiecta à sensilibus diuersa, quæ in scientiarum Mathematicarum primo limine discenda sunt: sine his, Mathematicæ doctrinæ credi, & veræ haberi possunt: sed scientificæ cognitiones acquiri non possunt.

CAPVT V.

Considerationes Logisticæ siue Aliquorum Logisticæ nostræ fundamentorum magis exacta declaratio.

AD finem nobis propositum in hoc libro, satis non est obiter reflectere ad illa quæ hoc capite exponuntur: pertinent enim ad prima Logisticæ nostræ fundamenta, & pro illis maximè necessariam intelligentiam terminorum. Quanta differentia oriatur inter Algebram & nostram Logisticam, ex sola diuersa intelligentia signorũ + & −, satis constat ex dictis in prioribus tribus huius libri capitibus, supposita istorum signorum significatione quam habent in nostra Logistica. Rursus illud ex quo originem habet, non omnis quidem, sed maximè notabilis differentia inter elementa antiquæ Matheseos & nostræ Logisticæ: consistit in terminorum intelligentia vel declaratione. Ego certè assequi non possum quomodo verum sit, aliquid ex terminis notum, aut ex his deductum inueniri in illis

illis Matheseos elementis, in quibus desideratur sufficiens declaratio terminorum: adeòque supponi non potest terminorum intelligentia. Non disputo tamen an pauci termini qui in Euclideis elementis inueniuntur expositi, sufficiant pro his elementis: aut ita exponantur, vt præter allatas expositiones siue definitiones nihil vlterius requiratur ad illorũ intelligentiam necessariam in ordine ad axiomata vel demonstrationes quæ subsequuntur. Multi ex scriptoribus antiquæ Matheseos indicant satis notabiles tenebras in definitionibus aliquibus quæ ab alijs admittuntur: mihi verò videor etiam prospicere tenebras in aliquibus quę passim habentur clarissimæ & nulla expositione indigere apud eos qui obscurioribus lucem afferre conati sunt suis in Euclidea elementa commentarijs. Vtrum mihi apparentes istæ tenebræ causentur ex defectu luminis in istis definitionibus, vel certè ex defectu meæ potentiæ visiuæ, siue intelligentiæ: à perspicatioribus colligi poterit, tum ex præcedenti, tum etiam ex præsenti capite. In hoc capite, ante omnia consideratione digna videtur, differentia inter primum exordium elementorum nostræ Logisticæ, & antiquæ Matheseos quoad intelligibilitatem. A puncti definitione exordium sumunt antiqua elementa, inde progrediuntur ad definitiones linearum, superficierum, corporum &c. & nostro iudicio, ab obscurioribus procedunt ad minus obscura. Contrario ordine procedit nostra Logistica, & incipiendo à corpore, etiam externis sensibus cognoscibili, gradum facit ad ea quæ difficilius cognoscibilia sunt, nimirum superficies lineas, puncta: & quantitates constituentes Matheseos obiectum quod hic primo loco consideratur, deinde proceditur ad alia, quæ paucis verbis, ea claritate exponi non poterant, quæ vtilis videbatur pro nostra Logistica.

Consideratio I.

Declaratur obiectum speculatiuæ Matheseos.

Speculatiuæ Matheseos obiectum constituunt concreta magnitudinum constantia ex intellectili materia (de qua, quod ad eius intelligentiam sufficit, notauimus ex doctissimo Proclo ad reflexionem 7. capitis præcedentis) & abstracta magnitudine, per quam intelligimus omne & solum illud à quo aliquid dici potest magnum vel paruum; hæc abstracta magnitudo est vna ex illis entibus, quæ à Proclo, cum Platone, & Aristotele, appellantur formæ: hæ diuersimodè restrictæ, cum intellectili materia cui inhærent, constituunt magnitudinis concreta, specie, genere aut aliter inter se conuenientia aut diuersa, constituentia Matheseos obiectum. Abstractas magnitudines, vel non restrictas, vel diuersimodè restrictas, admittendas esse pro Mathesi, satis constat, quia necessariæ sunt pro consideratione concretorum constituentium eius obiectum: eas tamen vlterius non inuestigat, inquirendo quid sit abstracta magnitudo non restricta, vel abstracta magnitudo extensionis, discretionis, inclinationis &c. Immo neque vtcunque considerat magnitudinis concreta constituentia eius obiectum: sed potissimum illa considerat, in quantum vnum relatè ad alterum dici potest maius, minus, æquale, vel illi simile aut dissimile, vel alias proprietates habere conducentes ad tales principaliores eius considerationes: vt sunt exempli gratia quomodo crescere siue augeri possint per additionem: decrescere vel imminui possint per subtractionem quomodo seruata eadem magnitudine, mutari possint reliqua, quæ in his concretis inueniuntur, vt requiritur, quando circuli circumferentiæ, æqualis recta linea petitur, vel quadratum aut triangulum dato circulo ęquale &c.

De

De hoc speculatiuæ Matheseos obiecto quæri posset, vtrum à parte rei existat atque inueniatur in rerum natura: adeòque sit ens reale, vel imaginarium. Respondeo, inueniri in rerum natura atque à parte rei: non aliter tamen, sed eodem prorsus modo, sicut à parte rei inueniuntur obiecta reliquarum scientiarum; ex his nulla considerat entia particularia, atque habentia proprietatum aggregatum quod pluribus commune non sit: sed singulæ considerant entia vniuersalia: hæc eadem in pluribus inueniuntur, & constituunt entium species, aut genera, maiorem aut minorem habentia vniuersalitatem: huiusmodi entia vniuersalia significantur per voces passim cognitas, ens, corpus, animal &c. immo nullæ voces inueniuntur, quibus alia quam specifica aut generica entia significantur; fateor quidem in rerum natura non existere ens spoliatum omnibus omnino proprietatibus non necessariò requisitis vt dici possit ens, vel corpus, vel animal &c. non ideò tamen dicendum arbitror de ente, corpore, animali &c. quod tantum sint mentis conceptus, & nusquam à parte rei existant, quia non existunt spoliata omnibus illis quæ necessariò non requiruntur vt dici possint, ens, corpus, animal &c. homo à parte rei existens, neque desinit esse homo, neque desinit à parte rei existere: siue retineat, vel acquirat, vel amittat vestem, pellem, valetudinem, albedinem &c. Vt enim homo à parte rei existere dicatur, requiritur & sufficit, quod sit homo & habeat existētiam; tamen homo vestitus, desinit à parte rei existere, eo ipso quod veste spoliatus, desinit vestitus esse. Similiter animal à parte rei existens, neque desinit esse animal, neque desinit à parte rei existere: quidcunque tandem amittat diuersum ab existentia, & requisitis vt dicatur animal: si amittat formam requisitam vt dicatur animal, adhuc poterit dici ens existens, sed desinet esse animal; si verò amittat existentiam, desinet existere & esse animal actu existens siue actuale, sed non desinet esse animal possibile aut potentiale.

Loquendo de existentia à parte rei siue actuali, quæ iuxta hic dicta concedi potest & debet scientiarum obiectis, siue entibus specificis aut genericis (præter quæ nulla admittuntur inter illa quæ constituunt Matheseos obiectum) vlterius quæri posset: vtrum existant in rerum natura? Specialis ratio dubitandi resultat ex multorum Mathematicorum authoritate, negantium à parte rei existere puncta, lineas, superficies. Quoniam verò similiter non negant à parte rei corpus existere, concedunt corpori, quod inter Matheseos obiecta numeratur, existentiam paulò ante concessam generibus & speciebus: eamdem tamen existentiam negant superficiebus & lineis: etiam annumeratis Matheseos obiectis. Hæc doctrina non admittitur à nostra Logistica, eamdem existentiam concedente, & punctis, & lineis, & corporibus, & singulis quantitatibus quæ numerantur inter Matheseos obiecta. Cum hac non conueniens doctrina diuersorum Mathematicorum, fortassis originem habet ex methodo Euclidea, obseruata in proponendis definitionibus obiectorum Matheseos: iuxta quam, principium sumitur à puncto, hinc proceditur ad lineam, superficiem, corpus &c. vbi ab obscurioribus sumendo exordium, proceditur ad minus obscura: contra ordinem ex Proclo indicatum, ex Platone, & Aristotele, ad reflexionem 7. Logistica nostra alio ordine procedendo, docet, & nisi fallor clarè euincit, Mathematicum negare non posse se intelligere, vel à parte rei dari atque existere lineas, superficies, & singulas quantitates quæ Matheseos obiecto annumerantur, atque etiam puncta Mathematica, eo modo quo hæc verificantur de corpore, quod annumeratur Matheseos obiectis.

An aliquis oculis & sensu præditus, & intellectu non destitutus, negare potest à parte rei existere corpus terminatum, atque externo sensu perceptibile? quo concesso negari non potest, quod intelligatur & à parte rei existat corpus intellectile, quod annumeratur Matheseos obiectis: supposito, vt hic diximus, quod sermo sit de existentia quam prius diximus concedi debere speciebus atque generibus, aut vllis alicuius scientiæ obiectis, de qua tantum hic agimus; ad hanc præmissam subsumo, atqui intelligi & à parte rei existere non potest corpus terminatum: nisi detur à parte rei, atque intelligatur terminus talis corporis terminati, hoc est superficies terminata: igitur à parte rei datur superficies terminata, & quid illa sit intelligitur. Vbi rursus subsumo, atqui impossibile est à parte rei dari atque intelligi superficiem terminatam, nisi à parte rei detur atque intelligatur superficiei terminus, hoc est linea terminata: ergo intelligitur & à parte rei datur linea terminata. Hic iterum subsumo, atqui impossibile est intelligi & à parte rei dari lineam terminatam, nisi intelligatur & à parte rei existat lineæ terminus hoc est punctum: ergo intelligitur & à parte rei datur punctum. Quoniam verò iam constat, quod intelligatur & à parte rei detur, corpus terminatum, superficies terminata, linea terminata: hoc est quantitas continua diuersimodè restricta, nimirum ad tres inter se genere differentes continuas quantitates: subsumo, atqui intelligi aut à parte rei dari non potest quantitas continua diuersimodè restricta, nisi intelligatur & à parte rei detur quantitas continua, hoc modo diuersimodè restringibilis (quæ habetur præscindendo à restrictionibus) ergo intelligitur, & à parte rei datur, quantitas continua diuersimodè restringibilis ad quantitatem habentem vel tres extensiones, hoc est corpus: vel duas solas extensiones, hoc est superficiem: vel vnicam extensionem, hoc est lineam; quæ diuersimodè restringibilis quantitas continua, constituit quantitatum continuarum genus quod continet omnes & solas quantitates continuas vlterius non restrictas. Hæc quantitas continua vlterius non restricta, negari non potest quantitas restricta ad continuam: præter quam, etiam admittendam esse quantitatem restrictam ad discretam quantitatem, docent Mathematici omnes: sed iam constat, quod intelligatur & à parte rei existat quantitas restricta ad continuam (quod verum esse non potest nisi intelligatur, & à parte rei existat, quantitas restringibilis ad continuam) igitur intelligitur & à parte rei datur quantitas restringibilis ad continuam quantitatem; sed quantitas restringibilis ad continuam quantitatem, omnium Mathematicorum communi consensu, etiam restringibilis est ad discretam quantitatem: ergo intelligitur, & à parte rei datur quantitas restringibilis ad continuam & discretam quantitatem: quam aliter appellauimus quantitatem vel magnitudinem maximè vniuersalem, siue quantitatem aut magnitudinem non restrictam. Vltra hanc intelligendum est quid vox *discreta* siue *discretio* significet, vt vlterius constet, quod intelligatur, & à parte rei existat, quantitas discreta. Iuxta nostrã Logisticã vox *discretio*, venit à voce *discernere*: & discretio dici potest illud quod requiritur ad numerationem: quæ enim non discernuntur, numerari non possunt, aut constituunt plura vel pauciora indiuidua; hinc quantitas discreta, est quantitas cuius magnitudo desumitur à pluralitate vel paucitate indiuiduorum: sicut quantitas continua, est quantitas cuius magnitudo desumitur ab extensione.

Ex his vt opinor satis manifestum est quod nobis erat ostendendum: nimirum Mathematicum negare non posse, se intelligere, vel à parte rei dari atque existere ea de qua loquimur existentia, aut lineas, aut superficies, aut aliquam ex quantitatibus quæ à nobis annumerantur obiecto Matheseos, iuxta enumerationem quantitatum diuersorum generum breuiter propositam superius in parte 3. cap. 1. lib. 1. Hic tamen aduertendum, quod asserendo prædicta diuersa quantitatum genera, citato loco enumerata, nullatenus negemus ab his quantitatum generibus, diuersa quantitatum genera admitti aut considerari posse à Mathesi: adeòque non asseramus, quantitates constituentes Matheseos obiectum nullas inueniri

niri

niri, quæ non pertineant ad aliquod ex enumeratis quantitatum generibus; immo verò oppositum supponit nostra Logistica: queadmodum enim quantitatem siue magnitudinem restrictam præcisè ad magnitudinem extensionis, appellat continuam quantitatem: & magnitudinem restrictam ad magnitudinem discretionis, appellat discretam quantitatem: atque affirmat, continuas & discretas quantitates inter se genere differre, propter diuersitatem restrictionum per quas ad istas quantitates contrahitur maximè vniuersalis magnitudo: ita similiter, eamdem maximè vniuersalem magnitudinem contrahendo, per restrictiones à duabus enumeratis diuersas, habentur etiam genera quantitatum diuersa ab enumeratis duobus quantitatum generibus, amplectentibus continuas & discretas quantitates. Exempli gratia magnitudo vniuersalis restricta ad magnitudinem aperturæ, curuitatis, albedinis, soni &c. iuxta Logisticam sunt magnitudines tales, vt de singulis verificetur quod sint magnitudines vniuersales restrictæ, adeòque quantitates: sed tamen non sunt eo modo restrictæ, sicut restricta est magnitudo extensionis vel discretionis: quare etiam fit, quod prædictæ magnitudines restrictæ diuersimodè, quam restrictæ sint magnitudines extensionis vel discretionis, constituant quantitatum genera diuersa ab ijs quæ amplectuntur omnes & solas continuas quantitates.

Quoniam & in nostra Logistica, & in antiqua Mathesi, sæpius agitur de quantitatibus aut specie aut genere differentibus: atque docetur quod inter quantitates eiusdem generis proportio inueniatur: negetur verò inueniri aut admitti posse proportionem inter quantitates diuersi generis: vlterius quæri posset, quomodo inter se differant in Mathesi, diuersitas specifica, & diuersitas generica: siue quantitates specie tantum differentes, & quantitates genere differentes? Respondeo, iuxta Logisticam, & nisi fallor, etiam iuxta antiquam Mathesim dicendum esse: quod ad eamdem speciem pertineant quæ eodem nomine indicata ita considerantur, vt non habeant differentiam nisi quo ad plus vel minus, siue quod vnum dici possit altero maius, minus, vel illi æquale; iuxta antiquum effatum asserens, quod plus vel minus nō variet speciem. Deinde quod ad diuersas eiusdem generis species pertineant, quæ diuersis quidem nominibus indicantur, sed tamen ita considerantur, vt pro tali consideratione sufficienter exprimi possint eodem nomine. Denique quod ad diuersa genera pertineant, quæ diuersis nominibu indicantur, & præterea ita considerantur, vt pro tali consideratione sufficienter exprimi non possint eodem nomine. Exempli gratia omnes magnitudines quæ tantum appellantur corpora, superficies, lineæ, circuli, specie inter se conueniunt, quia eodem magnitudinis nomine indicantur, & ita considerantur, vt inter se non differant, nisi quod aliæ alijs maiores sint vel minores. Rursus omnes magnitudines, genere quidem conueniunt, sed specie differunt quæ diuersis quidem nominibus exprimuntur, & alia dicitur circulus, alia quadratum, alia triangulum &c. sed ita considerantur, vt pro tali consideratione sufficienter indicentur per eādem vocem magnitudo, vel superficies, vel quantitas &c. Denique omnes magnitudines, genere inter se differunt, quæ diuersis, hoc est diuersam significationem habentibus, vocibus indicantur: vt sunt, corpus, superficies, linea: vel etiam circulus, quadratum, triangulum: si ita considerantur, vt pro tali consideratione sufficienter indicari non possint per idem nomen; ita corpus consideratum non tantum vt est quantitas siue magnitudo, sed consideratum vt est magnitudo siue quantitas restricta ad triplicem extensionem, genere differt à superficie considerata vt est quantitas restricta ad duplicem tantum extensionem. Similiter circulus consideratus vt circulus est, genere differt à quadrato considerato vt quadratum est.

Ex his facilè colligitur, quomodo, & quare, eiusdem generis duas quantitates, licet specie inter se differant, tamen vna ad alteram dicatur habere proportionem, & dici possit quod circulus ad quadratum habet proportionem, atque illo asseri maior, minor vel æqualis; huiusmodi enim assertionis sensus est, quod circulus consideratus vt superficies, vel quantitas: sit superficies, vel quantitas maior, quantitate vel superficie quæ appellatur quadratum. Similiter constat quare ex duabus diuersi generis quantitatibus, vna non possit dici maior vel minor altera, vel illi æqualis, aut ad illam habere proportionem: etenim asserendo quod corpus consideratum vt corpus est, sit maius superficie considerata vt est superficies: sensus foret quod corpus consideratū vt corpus, sit maius corpus quam significetur per vocē superficies, si hæc consideretur vt superficies: in qua consideratione non significat corpus, vt supponit hæc assertio, quæ proinde vera esse non potest. Pari modo manifestum est, quod circulus consideratus vt circulus est: non possit dici maior quadrato considerato vt quadratum est; talis enim assertionis sensus foret, quod circulus consideratus vt circulus, maior circulus sit, quam significetur per vocem quadratum, si consideretur vt quadratum est; in qua consideratione vox quadratum non significat circulum, vt supponit hæc assertio: quæ proinde vera esse non potest.

Si fortè alicui noua videtur hæc doctrina, aut non satis intelligibilis: consideret obuiam locutionem, asserentem quod equus sit maius animal quam canis; si huius assertionis veritatem intelligit, percipiet sensum esse, quod equus consideratus vt animal, sit maius animal quam significetur per vocem canis; intellecta verò hac veritate, facilè assequetur, quod propositio affirmans quod equus consideratus vt equus est, sit maior cane considerato vt canis est: non foret diuersa ab ea, quæ assereret, quod equus consideratus vt equus est, sit maior equus, quam significetur per vocem canis, quæ non significat equum; videat igitur an in hac obuia locutione, & etiam plebi passim nota, aliquid nouum & sibi non intelligibile inueniat; deinde has plebi etiam passim notas, & vbique vsitatas locutiones conferendo, cum illis, quas prius attulimus de quantitatibus, habentibus, vel non habentibus proportionem: facilè aduertet, quid de illis dicendum sit: & vtrum debeant vel non debeant annumerari, declarationibus terminorum non bene prætermissis in antiqua Mathesi.

Non possum hoc loco prætermittere, breuem enarrationem, eius quod mihi contigit cum aliquo ex meis auditoribus, fortassis enim prodesse poterit pluribus ex lectoribus fundamentorum nostræ Logisticæ; is Mathematicarum rerum non planè ignarus accesserat, vel vt disceret, vel vt carperet nostra, quæ audierat non planè conformia magis vsitatis doctrinis Mathematicis: prius ad hilaritatem modestè composito vultu, atque arrectis auribus excipiebat, quæ sub initium hic diximus de Matheseos obiecto, & magnitudinum concretis, constituentibus tale obiectum: atque constantibus ex materia intellectili & forma. Deinde de repente vultu in contrarium mutato, reliquam dictionis meæ partem exceperat quidem, sed non absque externo aliquo gestu indignationis; à me causam interrogatus, non sapiunt inquit tuæ illæ formæ, tua illa concreta, tua illa intellectilis materia. Qua inquiebam voce appellari vis figuram circularem, triangularem, pyramidalem, sphæricam &c. si fortè magis placet vox figura quam vox forma, quoniam paulò amplior significatio quam habet vox *forma*, præ voce *figura*, nihil facit ad præsens institutum: deinceps prætermissa voce *forma*, adhibebo tibi gratiorem vocem *figura*, vt in hunc modum nostra doctrina minus displiceat; at, replicabat, præ reliquis displicet intellectilis illa materia quam nominasti, & sapere videtur materiam primam Aristotelicam, in vicinis scholis ad nauseam decantatam: cuius vel sola memoria mihi stomachum mouet, quamque in ipso melioris philosophiæ limine, iussus detestari atque eiurare, libenter obtempera-

ui

ui. Hæc mihi sufficiebant, vt veluti ex arteriæ motu, cognoscerem quo morbo laboraret: & intelligerem causam auersionis à bona doctrina. Vt huic morbo, quem potius aurium, quam mentis cognoscebam, nòn ingratum afferrem remedium (post aliquas laudes illius philosophię quam appellauerat meliorem, quamque aliter experimentalem appellant; quæ pro rebus Mathematicis, videtur potius appellanda gradus ad scientiam, quam scientia) afferenda videbam aliqua non ingrata nomina Mathematicorum, Euclidis, Archimedis, Apollonij Pergei, quibus addebam modernos aliquos quos existimabam magni nominis atque authoritatis apud meum auditorem, apud quem videbam potius perorandum authoritate, quam firmiori ratiocinio, in quo non voces (quarum aliæ alijs auribus gratiores sunt) sed vocum significatio expenditur, quæ mentem afficit: cumque obseruassem non displicere à me nominatos Mathematicos, petebam vtrum placeret tantorum virorum doctrina. Concessit sibi placere doctrinas à tantis viris traditas. Concessa hac præmissa, petebam, de quibus circulis agerent isti omnes, hoc est an de circulis, calidis, frigidis, albis, rubris, rigidis, mollibus &c. ad quæ subridendo, Mathematici, inquiebat, abstrahunt à materia: instabam tamen id Euclidi conforme non esse, supposito, vt fit in nostra Logistica, quod voces *materia* & *subiectum* eamdem habeant significationem: quandoquidem Euclides dicat superficiem esse illud quod habet longitudinem & latitudinem tantum: & habere duplicem istam extensionem, vel esse materiam aut subiectum istius duplicis extensionis, idem sit. Ad hæc prius hærebat, videbat enim quo vergeret talis discursus, quodque pro circulis admissa materia vel subiecto, quod dici non posset esse calidum, frigidum, album, rubrum, rigidum, aut habere huiusmodi aliquid, necessarium vt externo sensu percipiatur: pro Mathesi admittendam materiam sensu externo non perceptibilem; immo concedendam materiam de qua aliud dici non possit quam quod sit subiectum, adeòque purum subiectum; vt igitur argumenti vim declinaret: in Mathematicis, inquit, consideratur superficies, siue id quod habet duplicem tantum extensionem: vel id quod habet figuram triangularem, pyramidalem, sphæricam: sed non consideratur separatim, vel materia illa habens talem figuram, vel figura quæ habetur à materia: tum denique adhibendo Procli authoritatem allatam in septima reflexione, facile mihi fuit reliqua euincere, & efficere, vt non tantum concederet admittendam pro Mathematicis intellectilem materiam, à sensili diuersam: sed pronunciaret, ab homine sanæ mentis negari non posse talem materiam intellectilem. Hæc verissima est historia, vide ne de te fiat fabula.

Consideratio II.

Declarantur diuersæ aliquæ considerationes numerorum.

IN præcedenti consideratione egimus de obiecto Matheseos, & conclusimus illud constitui à solis concretis magnitudinis: ideòque voces *magnitudo*, *quantitas*, *vnitas* aliasque similes in Mathesi vsitatas, quæ tam in sensu concreto, quam in sensu abstracto intelligi possunt: debere intelligi in sensu concreto, quando oppositum ex circumstantijs non satis insinuatur; & consequenter eamdem significationem habere cum vocibus *magnum*, *quantum*, *vnum* &c. quæ voces concreta significant, non verò concretorum abstractas formas. Consequenter ad hæc fundamenta, quoniam apud nos numerus dicitur illud quod numeratur, & numeri pertinent ad Matheseos obiectum: dicendum est, solas formas abstractas non constituentes Matheseos obiecta, numerari non posse: sed tantum numerari

posse

posse concreta. Hoc videri posset nouum alicui qui non satis assecutus est, aut quod superius diximus de concretis constituentibus Matheseos obiectum, aut Euclideam doctrinā de numeris. Numeret qui potest formas abstractas, ita tamen vt ne quidem vnam numeret; hoc fieri non posse, nemo non videt: non tamen omnes vidēt hoc idē esse cum eo quod ante diximus doceri à nostra Logistica, & fortassis alicui nouum videri posse; idem esse, facilè intelligitur, reflectendo quod vox *vna* significet concretum, nullatenus verò significet aliquam formam abstractam: quare eo ipso quod numeratur vna forma abstracta, numeratur concretum, siue aliquid quod bene dici potest vnum; de vna forma abstracta, bene dicitur quod sit vnum concretum, constans ex materia siue subiecto, & abstracta forma: siue tale concretum placeat intelligere, vt in illo materia siue subiectum constituatur ab abstracta forma, quæ sustentando abstractam indiuidualitatem siue vnitatem, constituat concretum, quod aliter dicitur vna abstracta forma: siue hoc concretum aliter placeat intelligere: quod vlterius considerare, parum videtur conducere ad præsens institutum: pro quo sufficit constare quod numerari possint, sola concreta, siue indiuidua, non verò abstractæ formæ.

Iam verò numerus, in Logistica nostra, significat id quod numeratur: & adæquatè diuiditur, in singularem qui vnicam vnitatem numerat, & pluralem qui numerat plures vnitates. Numerus autem non semper eodem modo consideratur in Mathesi: subinde enim in numero consideratur magis propria eius magnitudo, quæ adæquatè dependet à pluralitate vel paucitate indiuiduorum, siue vnitatum quæ numerantur; subinde in numero consideratur alia magnitudo magis propria indiuiduis, siue vnitatibus quæ numerantur: talis est numeri magnitudo quæ in practica Arithmetica dicitur valor numeri, à quo duo numeri dicuntur æquiualentes inter se, siue quoad valorem æquales, aut inæquales.

In illa numerorum consideratione, in qua tantum attenditur numeri magnitudo quæ dependet à pluralitate vel paucitate vnitatum quæ numerantur, illud quod consideratur, est idem cum eo quod aliter appellatur discreta quantitas: vox enim *discretio*, significās abstractam formam à qua quantitas siue magnitudo dicitur discreta, deriuatur à verbo discernere: ab inuicem verò discerni nō possunt, nisi diuersæ vnitates siue indiuidua: ideòque quod numerat vnum vel plura quantitatis vel magnitudinis indiuidua, appellatur in Mathesi quantitas siue magnitudo discreta. In hac numerorum consideratione ex duobus numeris maior est, ille qui plures vnitates numerat: minor est, qui numerat pauciores vnitates: nullus verò altero maior vel minor dici poterit, sed erunt inter se æquales, si æquè multas vnitates numerent: atque hæc semper vera sunt, qualescunque tandem sint vnitates quæ numerantur. Exempli gratia, fractio numerans quinque vigesimas, maior est fractione quæ numerat quatuor sextas: & generaliter illa fractio maior est quæ habet numeratorem maiorem: illa fractio minor est, quæ habet numeratorem minorem: eruntque duæ fractiones inter se æquales, eoipso quod habeant numeratores æquales: qualescunque tandem sint istarum fractionum denominatores. Deinde tres arenulæ, tribus montibus æquantur; quatuor decades, vno millione maiores sunt: atque inter se æquales sunt binarij omnes, & omnes ternarij, omnes decades &c. etiamsi diuersa, & quomodocunque inter se differentia indiuidua numerent. Præterea, verum est, omnium possibilium numerorum minimum esse vnitatem; omnes omnino numeros inter se proportionem habere; nullos numeros inueniri, aut possibiles esse, qui inter se sint incommensurabiles, sed omnium communem mensuram esse vnitatem; nullum numerum extrema & media ratione secari posse, licet quælibet recta linea hoc modo secari possit, & modum doceat Euclides in suis elementis &c.

In illa numerorum consideratione, in qua attenduntur valores numerorum, falsa sunt

sunt singula, quæ asseruntur vera in priori cõsideratione numerorũ(qua Euclides videtur acquiescere in suis Matheseos elementis,vt diximus ad reflexionẽ 4. capitis præcedentis) etenim considerando numerorum valores, potest numerus esse maior qui numerat pauciores vnitates: & fractio numerans quatuor sextas, maior est fractione quæ numerat quinq;vigesimas;& licet quinq;decimas & quinque vigesimas numerantes fractiones habeant numeratores æquales, tamen æquales non sunt, sed prior altera maior est. Deinde potest vnus binarius, ternarius &c. altero maior esse vel minor; neque dabilis est numerus, quo alter minor dari non potest; possunt etiam dari duo numeri qui inter se nullam habeant proportionem, vel qui sint incommensurabiles, nullamque habeant communem mensuram; & propositus quilibet numerus secari potest extrema & media ratione &c.

Ab enumeratis numerorum considerationibus, altera etiam inuenitur necessaria pro nostra Logistica,& nisi fallor,etiam requisita pro antiqua Mathesi:sed nusquã declarata in Euclideis elementis; hæc præter numeros qui sine addito numeri vocantur in Mathesi, & ad maiorem inter se distinctionem atque claritatem à nobis appellantur numeri actuales: considerat etiam numeros quos appellamus potentiales, quia numerant vnam vel plures vnitates potentiales: hoc est quæ possunt quidem fieri vel esse vnitates actuales, siue indiuidua actu existentia,sed tamen actualiter non sunt talia indiuidua. Vt hæc numerorum consideratio melius intelligatur, reuocandum in memoriam, quod dictum est in precedenti consideratione, & etiam in initio huius considerationis, de significatione vocis *vnitas*: eam scilicet sine vlteriori restrictione prolatam,intelligendam in cõcreto,vt idem significet cum voce *vnum* vel *indiuiduum*, hoc est materiam habentem vnicam indiuidualitatẽ.Vt habeatur huiusmodi vnitas, manifestũ est tria esse necessaria:nimirũ materia siue subiectũ, abstracta indiuidualitas,& sustẽtatio, siue vt materia sustentet abstractam indiuidualitatem.Si vnum ex his tribus desit, haberi non potest indiuiduum siue vnitas: & consequenter, si vnum ex his tribus actu non existit, non existit actu vnitas; quoniam verò actualis vnitas,& actu existens vnitas idem sunt: patet ad vnitatem actualem, requiri actualem existentiam trium diuersorum, quorum vnum est materia, alterum abstracta indiuidualitas, tertium sustentatio. Si singula hæc tria requisita ad actualem vnitatem actu non existant: sed vel ex illis vnum, vel singula tantum possint existere; etiam indiuiduum actuale, quod ex illis fieret si singula actu existerent, non erit indiuiduum actuale siue actu existens: sed erit indiuiduum potentiale, quia potest existere, siue habet potentiam vt existat. Ex his patet quid intelligendum sit per vnitates actuales,& vnitates potentiales: & consequenter quid sint numeri actuales, & quid sint numeri potentiales.

Quod noluerimus distinguere numeros,in actuales & potẽtiales:sed tamen actuales & potẽtiales numeros cõsiderãdos asseruerimus:ideò à nobis factũ est,quia potẽtialis numerus absolutè siue sine addito numerus dici non potest, quandoquidem illi non conueniant proprietates quæ in Mathesi absolutè affirmantur de numeris.Hinc ex vera præmissa,falsum consequens inferret:qui ex eo quod dentur duæ vnitates potentiales, inferret, ergo dantur duæ vnitates: etenim in Mathesi idem indicatur nominando duas vnitates sine vlteriori restrictione,& nominando duas vnitates actuales. Consideretur exempli gratia globus cretaceus aut argillaceus, hoc est massa cretæ aut argillæ,habens formam siue figuram sphæricam. Vt actu existat globi argillacei indiuiduum, tria debent actu existere: nimirum argilla, forma globosa siue sphærica, & sustentatio huius formæ ab argilla; si ex his tribus vnum desit: non existit actu globus argillaceus. Quæro modo, an actu existente

stente tali globo, actu existat argillaceus cubus, argillacea pyramis, argillaceus conus &c. Ratio dubitandi esse potest, quia ex argilla constituente globum actu existentem, fieri potest cubus, pyramis, conus &c. sed quis admittet hanc dubitandi rationem? nemo enim non intelligit, aliud esse affirmare quod actu existat cubus argillaceus, aliud esse quod actu existat materia argillacea siue argilla ex qua fieri potest cubus: & antequam argilla recepit cubi formam, atque hæc forma actu existat & actu sustentetur ab argilla, etiam dici non potest actu existere cubum argillaceum; quoniam tamen ex argilla fieri potest cubus, mutando formam sphæricam, in formam cubi: in actuali indiuiduo globi argillacei, habetur potentiale indiuiduum cubi argillacei, quod actu habet potentiam vt existat: adeòque bene dicitur quod actu existat illud potentiale indiuiduum cubi argillacei; atque similiter actu existēte indiuiduo globi argillacei, actu existit potentiale indiuiduum argillaceum pyramidis, coni, prismatis, aliorumque quorumlibet corporum, quæ fieri possunt ex globo argillaceo actu existente; & præterea actu existit quælibet potentialis pluralitas corporum quæ fieri possunt ex globi argillacei indiuiduo actu existente.

Vt melius, atque vlterius intelligatur, cōuenientia atque differentia inter indiuidua actualia & indiuidua potentialia; considerentur tres globi actuales argentei, & tres coni potentiales argentei: sic vt singulorum diuersorum globorum argentea materia, etiam sit argentea materia diuersorum conorum potentialium. In hoc casu eadem materia argentea actu existens, est materia tam globorum actualium, quam conorum potentialium: hinc quidquid asseri potest de materia globorum actualium, etiam asseri potest de materia conorum potentialium; quapropter eoipso quod diuidatur, frangatur, vitietur, calefiat, materia globorum actualium: etiam diuiditur, frangitur, vitiatur, calefit, materia conorum potentialium. Vltra materiam argenteam in globis actualibus nihil inuenitur nisi forma sphærica siue globosa, actu existens atque inhærens materiæ argenteæ; in conis potentialibus, vltra materiam actu existentem & globis communem, non inuenitur forma conica actu existens atque inhærens argenteæ materiæ, sed tantum inuenitur huius formæ, actu existens capacitas, siue possibilitas, siue potentia ad recipiendam formā conicam, quæ forma actu non existit. Quare indiuiduum actuale globi argentei, ab indiuiduo potentiali coni argentei, differt, non penes materiam, sed tantum penes formam; dupliciter tamen considerari potest hęc differentia, nimirum quoad ipsam formā, eiusque proprietates; & quoad formæ existentiam actualem; etenim forma sphærica, diuersa est à forma conica: & forma sphærica actu existit, forma conica actu non existit, sed tantum potest existere. Hinc quidquid asserit vel supponit, aliquid contrarium huic differentiæ inter globum actualem & conum potentialem: non potest affirmari, tam de cono potentiali quam de globo actuali; reliqua omnia affirmari possunt, & de globo actuali & de cono potentiali. Exempli gratia de cono potentiali affirmari potest quod requirat basim planam, & desinat in acumen &c. hæc dici non possunt de globo, quippe eius forma, non admittit aut basim planam aut desinentiam in acumen. Rursus de globo actuali dici potest, quod possit frangi, secari, vitiari, calefieri &c. quæ dici non possunt de cono potentiali: quia conus potentialis actu non existit: frangi autem, secari, vitiari, calefieri, supponunt existentiam eius quod dicitur frangi, secari, vitiari, calefieri; ideòque hæc dici possunt de actualiter existente materia argentea potentialis coni, non verò de potentiali cono, qui non existit quam diu non existit eius forma conica. Præterea tam de actualibus globis argenteis, quam de potentialibus conis argenteis, dici potest, quod possint emi, vendi, perdi: vel quod sint diuersi, plures, distincti &c. istæ enim assertiones nihil inuoluunt aut supponunt

nunt

nũt, quod aduersetur differẽtiæ quæ inuenitur inter actuales globos, & potẽtia les conos. Emi, vendi, perdi possunt: arbores, plantæ, semina &c. & huius emptionis, venditionis, perditionis precium siue æstimatio, crescit ex æstimatione fructuum potentialium, qui producti non sunt, neque existunt: sed produci possunt ex tali arbore, planta, semine &c. immo in huiusmodi emptione, venditione, perditione: passim dicuntur emi, vendi, perdi fructus: non actuales, siue actu existentes: sed fructus non existentes, tantum sperabiles, atque potentiales; qui fructus potentiales etiam dicuntur plures, pauciores, diuersi, distincti &c. Hæ aliæque similes locutiones innumeræ, & passim in ciuili republica admissæ atque vsitatæ inueniuntur: in quibus non tantum de actualibus, sed etiam de potentialibus indiuiduis asseritur emptio, venditio, perditio, pluralitas, diuersitas, distinctio &c. sic vt qui cum Logistica nostra non admitteret hos loquendi modos: deberet prius formare nouam rempublicam, nouũ mundum: vt inueniret suarum doctrinarum auditores, à quibus sine præuio nouo Calepino intelligeretur.

Quæ hactenus diximus de globorum actualibus indiuiduis, siue argillaceis, siue argenteis, aut ex alia materia constantibus: atque de indiuiduis potentialibus, habentibus eamdem vel diuersam materiam: similiter intelligenda sunt de alijs indiuiduis actualibus atque potentialibus, quæ considerantur à Mathesi: non tantum in methodo nostræ Logisticæ, sed etiam in antiqua methodo: ita vt sine consideratione actualium & potentialium vnitatum, intelligi non possint Euclidea elementa. Exempli gratia, non tantum nostra Logistica, sed etiam Euclides in suis elementis, considerat lineam indiuidualem A, siue vnitatem linearem A: de hac docet, quod, & quomodo secari aut diuidi possit in duas aut plures partes inter se æquales, quæ singulæ lineæ sint, adeòque vlterius secari possint in alias plures partes lineares, sic vt hæc partium linearium sectio continuari possit semper vlterius atque vlterius: ita vt nunquam desinat vlterioris sectionis possibilitas, neque desinant esse lineæ ex tali sectione productæ partes. Hinc patet, ex totali vnitate lineari A, sectione auferibiles esse lineares vnitates partiales, semper plures & plures in infinitum, siue ita, vt nullus numerus finitus indicare possit tot vnitates partiales, quot auferibiles sunt ex linea totali A, per continuatam sectionem.

Quæro igitur, an partes, siue vnitates lineares, continuata sectione auferibiles ex proposita lineari vnitate A, constituant numerum finitum vel infinitum? responderi non potest quod constituant numerum finitum: sic enim numerus finitus indicare posset quot partes siue vnitates lineares sint auferibiles; responderi etiam non potest quod constituant numerum infinitum, repugnantem doctrinæ Euclideæ, & nostræ Logisticæ: Mathematico iuxta præcedentem doctrinam, responderem simpliciter negando suppositum: quæsitum enim supponit, quod partes siue vnitates auferibiles constituant numerum, adeòque numerum actualem, licet tantum constituant numerum potentialem, qui non est discreta quantitas, & consequenter neque numerus, sed tantum actu habet potentiam vt fiat numerus, & discreta quantitas. Non Mathematico responderem, quod illæ partes siue vnitates auferibiles, sed non ablatæ: non sint partes siue vnitates actuales, sed tantum potentiales: adeòque tantum constituant potentialem partium siue vnitatum numerum; hunc verò potentialem numerum esse infinitum, hoc est actualem eius potentiam ad hoc vt fiat numerus nõ esse limitatam, sed istam eius potentiam esse talem, vt nulla finita actualium partium siue vnitatum ablatione exhauriri possit, hoc verò non aduersatur Euclideæ prius propositæ doctrinæ de linea, sed est illud ipsum quod docet illa eius doctrina.

Ex his facilè inferri potest, ab Euclide agi, tum de actualibus, tum de potentialibus vnitatibus: & tamen apud eius interpretes declaratum non inuenio, quomodo vnitates potentiales differant ab actualibus. Si dicatur id ſatis notum: quæro vlterius, an partes ſiue vnitates potentiales, quæ in actu exiſtente linea inueniuntur, ſint partes ſiue vnitates potentiales actu exiſtentes in linea, atque actu inter ſe diſtinctæ? quod actu inueniantur in tali linea, negari non poteſt: quia patet ex illa auferri non poſſe quod non habet; ſi iſtæ partes ſiue vnitates potentiales negentur inter ſe diſtinctæ, conſequenter erit negandum, quod in bipedali vnitate lineari, indiſtinctæ ſint duæ partes pedales, quæ in illa actu inueniuntur, & actu conſtituunt duas lineares partes ſiue vnitates potentiales atque pedales, quæ aliter dici poſſunt duæ medietates illius totalis atque indiuiſæ lineæ, hoc eſt actu exiſtentes medietates potentiales: ex quibus ſequitur dicendum eſſe, quod indiuiſæ ſiue integræ bipedalis lineæ, duæ medietates potentiales atque pedales actu exiſtentes, diſtinctæ non ſint, licet linea illa bipedalis ita poſſit incuruari, ſecari imminui, fieri trianguli baſis, radius circuli, aliaſque admittere mutationes: abſque eo quod ſimilis vlla mutatio conueniat vtrique eius medietati potentiali, aut ſingulis eius partibus potentialibus: quare ſi duæ eius medietates potentiales aut reliquæ eius partes potentiales, vel vnitates potentiales, non poſſint dici diſtinctæ inter ſe: mutanda foret ſignificatio vocis *diſtinctum*, paſſim vſitata apud Mathematicos & nõ Mathematicos. Si verò iſtæ partes ſiue vnitates potentiales actu exiſtentes, dici debeant actu diſtinctæ inter ſe: patet dicendum eſſe, quod duæ vnitates diſtinctæ tantum, non ſint duæ vnitates, neque conſtituant binarium: ſicut duæ vnitates potentiales non ſunt duæ vnitates, neque conſtituunt binarium, aut vllum numerum. Hoc dicendum atque veriſſimum eſſe, conſtat ex prius dictis de intelligentia vnitatis & numeri, requiſita pro noſtra Logiſtica: idem dicendum arbitror pro antiqua Matheſi: non ſcio tamen vbi in eius elementis inueniatur, quod neceſſarium eſt vt Matheſeos candidati intelligant, id dicendum eſſe: eamque inter actuales & potentiales numeros differentiam inueniri, quam hic pro Logiſtica noſtra declarandam putauimus, & etiam pro antiqua Matheſi neceſſariam vel vtilem oſtendimus, ſi non placeat concedere, pro vſu ciuili maiorem requiri intelligentiam totalium atque partialium corporum ſenſilium, quam intellectilium corporum requiratur pro Matheſi antiqua.

Hactenus egimus de numerorum conſiderationibus diuerſis, quas putamus communes antiquæ Matheſi & noſtræ Logiſticę: à quibus ſi diuerſæ dici non debent quæ ſubſequuntur: tamen ſingulæ tales ſunt, vt ſpecialem declarationem, & diligentem attentionem videantur requirere pro noſtra Logiſtica. Ex his numerorum conſiderationibus, primam appellamus, quæ facit, vt Arithmeticæ conſiderationes, quodammodo extendantur, ad alias quantitates à diſcretis diuerſas. Secundam dicimus, quæ reſultat ex diuerſis quantitatum generibus, enumeratis ſuperius in parte 3. cap. 1. lib. 1. ex qua habetur modus inter ſe comparandi diuerſi generis quantitates, eadem fere commoditate atque vtilitate, ac ſi inter ſe haberent proportionem, quæ illis non conceditur aut concedi poteſt à Matheſi. Tertiam nominamus, in qua numeri diſtinguuntur in poſitiuos & negatiuos; ex qua reſultat additio in omni caſu poſſibilis, ſed æquiualens ſubtractioni quæ in multis caſibus impoſſibilis eſt.

Ex his tribus diuerſis numerorum conſiderationibus: prima, quæ facit vt numeri (inter cæteras quantitates magis commodi atque intelligibiles) vtiles euadant, non tantum pro diſcretarum quantitatum conſideratione: ſed eamdem propemodum vtilitatem habeant, quando quantitates de quibus agitur, ſiue indiuidua quæ numerantur inter ſe genere differunt; pro hac numerorum conſideratione, notandum eſt, conſiderari atque inueniri poſſe indiuidua ſpectantia ad quælibet ex aſſignabilibus entium generibus; quandoquidem enim voces *vnitas* & *vnum* ſiue *indiuiduum*, in Matheſi habeant eamdem ſignificationem: ſicut certum eſt,

con-

conſiderari atque inueniri poſſe cuiuslibet generis indiuidua: ita patet inueniri poſſe vnitates ſpectantes ad quodlibet ex aſſignabilibus entium generibus: & conſequenter iuxta numerorum conſiderationem de qua agimus, etiam numeri numerantes talia indiuidua ſpectare poterunt ad dabile quoduis entium genus; cum numeri aliud non ſint, quam vnitas vel vnitatum pluralitas aut aggregatum. Quoniam verò prædicti numeri, ſpectantes ad datum quodlibet entium genus diuerſum ab eo quod diſcretas quantitates omnes amplectitur, nihil aliud ſunt quam Arithmeticæ numeri vlterius reſtricti, atque per has reſtrictiones non amittẽtes magnitudinẽ quam habebant ante reſtrictionẽ: patet quomodo Arithmeticæ conſiderationes aut praxes verſantes circa numeros non reſtrictos, & ſpectantes ad genus diſcretarum quantitatum: extendantur ad numeros reſtrictos, & propter ſolam reſtrictionem ſpectantes ad entium genus diuerſum ab eo quod diſcretas quantitates omnes continet.

In hac numerorum conſideratione, quæ tam latè patet, vt extendatur ad quodlibet entium genus: non tam numeri ipſi, ſed numerorum valores attenduntur: hoc eſt numerus, non præcisè vt vnitates ſiue indiuidua numerat, & numerus dicitur: ſed vt numerat huius vel iſtius ſpeciei vnitates ſiue indiuidua. Exempli gratia vnitas vel binarius linearium vnitatum, in quantũ numerus eſt, pertinet ad diſcretas quantitates: & eius magnitudo dependet à pluralitate vnitatum ſiue indiuiduorum quæ numerantur: verum in quantum hæ vnitates ſunt lineares, pertinet ad quantitatum continuarum genus, quod amplectitur lineas omnes, & eius magnitudo ſiue valor dependet ab extenſione vnitatum ſiue indiuiduorum quæ numerantur. Similiter vnitas metalli, ſiue metalli indiuiduum: vnitas ſoni, ſiue ſoni indiuiduum &c. in quantum præcisè vnitates ſunt, pertinent ad diſcretarum quantitatum genus: verum ratione reſtrictionis pertinent ad aliud entium genus; prior quidem ad illud genus quod metalla omnia continet; poſterior verò ad illud entium genus quod amplectitur ſonos omnes. Iam verò conſiderare vnitates reſtrictas dependenter à reſtrictionibus, eſt illud quod in hac conſideratione dicitur conſiderare valores vnitatum; non enim ex eo quod vnitates ſunt, ſed ex eo quod hoc vel illo modo reſtrictæ vnitates ſunt, oritur, quod vna dicatur maior vel minor altera, aut illi æqualis quoad valorem, ſiue magnitudine deſumpta ab æſtimatione aliqua: quemadmodum fractio numerans tres quartas, eſt maior fractione quæ numerat tres octauas: priorque poſteriore duplo maior eſt, nimirum magnitudine valoris quæ dependet ab æſtimatione. Ex his fundamentis originem ſumit, vtilis vſus menſurarum, ſiue pro vſu ciuili, ſiue pro practica Geometria, ſiue etiam pro, ſpeculatiua Matheſi; ſed de menſuris agitur in conſideratione 5.

Secundus modus conſiderandi numerorum valores ſuperius indicatus, ex quo reſultat commoditas comparandi inter ſe quantitates diuerſi generis quoad valores quos habent: tametſi ad inuicem nullam omnino proportionem habeant, in quantum ſunt tales quantitates ad diuerſum genus ſpectantes: hic inquam modus conſiderandi valores, habetur ex diuerſis quantitatum generibus quæ in Logiſtica admittuntur, & enumerantur parte 3. cap. 1. lib. 1. quorum alia alijs magis reſtricta ſunt. In hac conſideratione, valor quantitatis A, dicitur ipſa illa quantitas A, ſed præſcindendo à reſtrictionibus quas habet, vel aliter reſtricta. Conſidera duas quantitates maximè vniuerſales X & Z, ſed æquales inter ſe: prætérea vniuerſalis quantitas X, reſtricta ad vnicam extenſionem vocetur linea A: & vniuerſalis quantitas Z, reſtricta ad triplicem extenſionem vocetur corpus B: hoc autem modo reſtringibiles eſſe vniuerſales quantitates X & Z, ſatis conſtat ex dictis de quantitatum generibus parte 3. cap. 1. lib. 1. ex quibus etiam conſtat magnitudines vniuerſalium quantitatum X & Z, nullo modo augeri vel imminui per accedentes tales restrictiones: quare in præmissa hypothesi manifestum est, verè dici posse, quod linea A, æquetur corpori B quo ad valorem siue valoris magnitudinem: tametsi impossibile sit æqualitatem, aut vllam proportionem inuenire, inter duas diuersi generis quantitates, vt in hypothesi de qua agimus, sunt linea A & corpus B: immo valores lineæ A & corporis B, in præmissa hypothesi, sunt eiusdem generis quantitates, spectantes ad quantitatis genus maximè vniuersale, vt sunt quantitates X & Z, à quibus non differunt valores quantitatum A & B, licet vna sit linea altera sit corpus. Quemadmodum enim per superuenientes restrictiones, vniuersalis quantitas X, fit linea A: & vniuersalis quantitas Z, fit corpus B; ita præscindendo ab istis restrictionibus quantitatum A & B, perit omnis diuersitas inter quantitatem A & quantitatem X: & etiam perit diuersitas inter quantitatem B & quantitatem Z. Similiter facta hypothesi quod A sit numerus, & B sit superficies; quantitas A ad quantitatem B, nullam habebit proportionem, quia sunt quantitates diuersi generis, quarum vna non potest dici maior vel minor altera, vel illi æqualis: tamen valor quantitatis A ad valorem quantitatis B, potest habere proportionem, & dici maior, vel minor, vel illi æqualis: eruntque isti valores eiusdem generis quantitates: dummodo per valores quantitatum A & B, intelligantur quantitates A & B præscindendo à restrictionibus per quas inter se differunt, & à quibus fit quod spectent ad diuersa quantitatum genera.

Vt hæc valorum consideratio maximè vtilis pro Logistica, commodius & intelligibilius adhiberi possit citra periculum æquiuocationis: valorem de quo hic egimus, distinguimus in tot valores diuersos, quot enumeramus diuersa genera quantitatum: nimirum in valorem vniuersalem, discretum, continuum, corporeum, superficialem, & linearem: valoris denominationem sumendo à genere quantitatis ad quod spectat valor de quo agitur. Quo supposito valor vniuersalis, lineæ A, est quantitas vniuersalis quæ restricta ad lineam, constituit lineam A. Valor discretus lineæ A, est ad discretam quantitatem restricta illa eadem vniuersalis quantitas, quæ ad lineam restricta, constituit lineam A. Valor continuus lineæ A, est ad continuam quantitatem restricta illa eadem vniuersalis quantitas, quæ ad lineam restricta constituit lineam A. Valor superficialis, lineæ A, est ad superficiem restricta illa eadem quantitas vniuersalis, quæ ad lineam restricta constituit lineam A. Valor linearis, numeri, corporis, superficiei A, est ad lineam restricta illa eadem quantitas, quæ aliter restricta, aut non restricta, constituit numerum, corpus, superficiem A.

Ne alicui noua aut inusitata videatur, pro Logistica nostra maximè vtilis hæc valorum consideratio, præscindendo à restrictionibus, aut intelligendo quantitatem aliter aut aliter restrictam: placet afferre pauca exempla ex quibus constet, in illa nihil inueniri non maximè vsitatum. Primò, promisit aliquis argentum quod domi habet, non habeat verò nisi argenteam hominis statuam; certè promissis satisfacit, dando totum argentum constituens hominis statuam, quomodocunque prius in aliam mutet eam figuram hominis quam habebat argentum; neque enim hanc vel illam figuram, sed argentum promiserat, præscindendo à figura quam habebat. Secundò, bene dicitur quod equus sit maius animal quam homo: in qua comparatione consideratur, tam equus, quam homo, vt animalia sunt, præscindendo ab vlteriori animalis restrictione. Quadratum dato triangulo æquale facere, docet Euclides: dato circulo æquale triangulum construere, docet Archimedes: singuli asserendo æqualitatem inter superficies de quibus agunt, tantum asserunt, æquales esse tales superficies, præscindendo ab illarum vlterioribus restrictionibus.

Tertius modus considerandi valores quantitatum, Logisticæ nostræ subministrat addi-

additionem in omni casu possibilem, sed tamen æquiualentem subtractioni, quæ in multis casibus impossibilis est: nimirum quoties maior numerus ex minore subtrahendus proponitur. Hæc vtilissima additio resultat ex eo quod nostra Logistica consideret quantitates inuicē compensantes, vel contrariantes, quas subdiuidimus in positiuas & negatiuas: singulæ magnitudinē habēt nihilo maiorē: immo non differunt nisi in quantum considerantur in ordine ad diuersum finem. Positiuarum quantitatum valor, magnus vel paruus dicitur: in quantum multum vel parum, magis vel minus, conducit aut valet ad aliquem finem, in ordine ad quem considerari possunt quantitates quas placet appellare positiuas. Negatiuarum quantitatum valor, magnus vel paruus dicitur: in quantum multum vel parum, magis vel minus conducit aut valet, ad finem oppositum illi ad quem conducunt quantitates quæ positiuæ appellantur. Vnde quantitates positiuæ & negatiuæ, comparari possunt cum accessu ad terminum, & recessu à termino: accessus valet ad approximationem: recessus ad augendam distantiam. Similiter comparari possent, cum celeritate & tarditate: prior magis conducit vt cito perueniatur: altera conducit vt tarde perueniatur. Vel cum diligentia & negligentia: illa magis conducit vt opus cito absoluatur, hæc magis conducit vt opus tardè absoluatur. Vel cum influentia & effluentia: prior magis iuuat ad impletionem, posterior magis iuuat ad euacuationem. Vel cum creditis & debitis: priora faciunt crescere diuitias, posteriora faciunt crescere paupertatem. Vel cum meritis bonis & meritis malis: merita bona magis conducunt ad premium, merita mala magis conducunt ad pænam. Hæc vltima comparatio præ reliquis nobis arridet & videtur commodior ad intelligentiam valoris, penes quem inter se differunt quantitates nostræ positiuæ & negatiuæ.

Considerentur itaque quantitates positiuæ vt merita bona, & quantitates negatiuæ considerentur vt merita mala, hoc si fiat, quoniam, vt ego arbitror, nulli ignoti sunt meritorum bonorum vel malorum proprietates & valores, in ordine ad præmium vel pænam: ignoti dici non poterunt quantitatum positiuarum & negatiuarum valores, in ordine ad fines contrarios, ad quorum alterum positiuæ, ad alterū verò negatiuæ magis cōducunt aut valent. In ordine ad præmiū aut augmētum boni meriti: additio boni meriti, planè æquiualet subtractioni mali meriti. Similiter in ordine ad augmentum positiuæ quantitatis: additio positiuæ quantitatis planè æquiualet subtractioni negatiuæ quantitatis. In ordine ad pænam siue augmentum mali meriti additio mali meriti æquiualet subtractioni boni meriti. Si quis non habeat vlla bona merita, adeòque ex eius bonis meritis aliquid subtrahere sit impossibile: poterunt tamen illi addi mala merita, & per hanc additionem æquiualenter fieri quod fieret per bonorum meritorum subtractionem, in proposito casu planè impossibilem. Similiter in omni casu in quo malorum meritorum subtractio, aut possibilis est, aut impossibilis; per additionem bonorum meritorum, æquiualenter fieri potest quod haberetur per prædictam subtractionem aut possibilem aut impossibilem. Pari modo in omni casu, siue possibilis sit, siue impossibilis positiuarum quantitatum subtractio: semper per negatiuarum quantitatum additionem, æquiualenter fieri poterit, quod haberetur per dictam subtractionem aut possibilem aut impossibilem; & consequenter manifestum fit, quomodo in nostra Logistica, ex positiuarum & negatiuarum quantitatum consideratione resultet additio in omni quidem casu possibilis, sed tamen planè æquiualens subtractioni quæ in multis casibus impossibilis est.

Ne inter positiuas & negatiuas quantitates æquiuocationis periculum irrepat, illas ab inuicem distinguimus signis + & —: supponendo legem statuentem, omnes & solas illas quantitates censeri debere negatiuas, quæ signo — expressè affectæ sunt: reliquas omnes esse positiuas, siue expressè signo + afficiantur, siue

nullo

nullo signo affectæ sint. De his positiuis, & negatiuis quantitatibus, plura videri possunt in sequenti sexta consideratione.

Hactenus dictis adde, quod si solam Algebram excipias, omni reliquæ tam antiquæ quam modernæ Arithmeticæ conforme existimo, quod hic diximus de numeris positiuis & negatiuis requisitis pro nostra Logistica; nimirum tam positiuas quam negatiuas vnitates, esse veras ac propriè dictas vnitates: singulas esse maiores nihilo: æquè propriam esse additionem, siue positiuæ positiuis, siue negatiuæ negatiuis, siue positiuæ negatiuis addantur. De singulis istis additionibus semper verum est, quod productus ex additione numerus, singulis producentibus maior sit: de duabus prioribus etiam verum est, quod productus ex additione numerus, singulis producentibus maiorem valorem habeat: quod verum non est de tertia additione, in qua positiuæ vnitates negatiuis adduntur; immo valor producti ex hac additione semper minor est valore alicuius numeri ex quo producitur; sicut impossibile est gradibus meriti boni addere gradus meriti mali, nisi per hoc quidem crescat numerus graduum meriti, adeòque in aggregato ex gradibus meriti boni & mali, plures meriti gradus inueniantur, quam in solo merito bono: sed tamen valor illius aggregati in ordine ad præmium, non est maior solo merito bono, quod inuenitur in hoc aggregato.

Hic vlterius non erit inutile considerare, quid respondendum foret petenti, quis valor maior dicendus sit, vel ille quem habent exempli gratia tres vnitates positiuæ, vel ille quem habent tres vnitates negatiuæ, & consequenter vtrum considerando valores, ratio † 3 *ad* — 3 sit ratio maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis, vel certè ratio æqualitatis? Respondeo & dico primò, iuxta intelligentiam numerorum positiuorum & negatiuorum, vsitatam in Algebra, valorem trium vnitatum positiuarum, esse maiorem valore trium vnitatum negatiuarum: prior enim est maior nihilo, posterior verò est minor nihilo: adeòque ratio † 3 *ad* — 3, est ratio maioris inæqualitatis. Dico secundò, iuxta Logisticam absolutè dici non posse, quod ex valoribus trium vnitatum positiuarum, & trium vnitatum negatiuarum, prior posteriore sit aut maior, aut minor, aut illi æqualis: sicut de valore trium graduum meriti boni, & trium graduum meriti mali; absolutè dici non potest, quod prior sit maior, aut minor secundo, aut illi æqualis. Dico tertiò, absolutè dici posse, quod ex valoribus trium vnitatum positiuarum, & trium vnitatum negatiuarum, prior non sit æqualis secundo: sicut de tribus gradibus meriti boni, & tribus gradibus meriti mali, absolutè dici non potest quod prior sit æqualis secundo. Dico quartò, quod ex valoribus trium vnitatum positiuarum & trium vnitatum negatiuarum, quilibet indifferens sit, vt dicatur maior, aut minor altero; quilibet erit maior, in ordine ad proprium suum finem: erit minor, in ordine ad oppositum finem: sicut ex valoribus trium graduum meriti boni, & trium graduum meriti mali, prior est maior in ordine ad præmium, minor tamen in ordine ad pænam; & vicissim posterior est maior in ordine ad pænam, minor tamen in ordine ad præmium. Dico quintò, ex hactenus propositis assertionibus constat, quod ratio † 3 *ad* — 3, nullo modo dici possit ratio æqualitatis, quando considerantur istorum numerorum valores: hoc verò casu rationem † 3 *ad* — 3, esse indifferentem vt dicatur ratio maioris inæqualitatis, vel ratio minoris inæqualitatis. Qui in suis scriptis agat de his rationibus indifferentibus neminem legisse me memini: & tamen connexæ sunt cum ea positiuarum & negatiuarum quantitatum intelligentia quam requirit nostra Logistica: vt iterum monuimus in reflexione 5. capitis præcedentis, adeòque Logisticæ nostræ propriæ dici possunt.

Verum ad præsentem considerationem non pertinet vlterius declarare, quæ spectant ad Logisticæ nostræ rationes indifferentes: de his agitur in 6. consideratione

ne

ne huius capitis, quæ conſulenda eſt, ſi vlterior terminorum declaratio deſideretur pro ijs quæ hic inſinuauimus de rationibus indifferentibus.

Conſideratio III.

Diſtinguuntur Logiſticæ noſtræ ductus Geometrici atque nominati, in reales & æquiualentes: & exponitur quomodo tali quouis ductu æquiualente, quælibet quantitas duci poſſit in quamlibet quantitatem.

EX ijs quæ ſuperius in parte 4. vel 5. cap. 1. lib. 1. paucis diximus de Logiſticæ noſtræ ductibus Geometricis atque nominatis, vel de productis ex iſtis ductibus: ſatis videtur conſtare quid intelligendum ſit per ductus Geometricos illic breuiter declaratos, quoſque hic appellamus ductus Geometricos reales: ſic enim melius hoc loco conſiderari poſſunt, à prioribus diuerſi ductus, quos appellamus ductus æquiualentes. Realibus ductibus Geometricis, tantum baſes quas ductus admittunt, duci poſſunt in altitudinem, quæ ſemper linea eſt: & baſes etiam aliæ eſſe non poſſunt quam lineæ vel ſuperficies; vnde realibus ductibus tantum duci poſſunt, vel lineæ, vel ſuperficies, & hæ baſes duci non poſſunt in altitudinem quæ ſit quantitas diuerſa à linea. Æquiualentibus ductibus Geometricis, quælibet quantitas A, duci poteſt in quamlibet quantitatem B, qualeſcunque quantitates ſignificent literæ A & B. Etenim iuxta dicta in præcedenti conſideratione, qualeſcunque ſint quantitates A & B, atque ſuppoſito quod exempli gratia vtraque ſit corpus (à quo pro ductu Geometrico reali neque baſis, neque altitudo conſtitui poteſt:) tamen verum erit, quod detur, atque aſſumi poſſit quantitas X, æquiualens quantitati ſiue corpori A, ſic vt quantitas X ſit talis, aut linea, aut ſuperficies, quæ poſſit eſſe baſis in ductu reali Geometrico propoſito atque nominato, quem placet indicare per literam G. Similiter verum erit, quod detur atque aſſumi poſſit quantitas Z, æquiualens datæ quantitati B: ita tamen vt quantitas Z ſit linea, & talis linea aut recta aut circularis, quæ poſſit eſſe altitudo in illo eodem ductu G. Iam verò hoc caſu quantitas X ductu reali G duci poteſt in quantitatem Z, atque hoc reali ductu producere quantitatem F: vt manifeſtum eſt ex præmiſſa ſuppoſitione, & dictis de ductibus realibus; hoc verò caſu dicimus quantitatem A, ductu æquiualente G, duci in quantitatem B, atque producere quantitatem F. Hinc ductus realis quantitatis A in quantitatem B, à ductu æquiualente, quantitatis A in quantitatem B, differt penes hoc, quod in ductu reali quantitatis A in quantitatem B: ipſa quantitas ſignificata per literam A, ducatur in quantitatem ſignificatam per literam B; in ductu verò æquiualente, quantitas ſignificata per literam A, non ducitur in quantitatem ſignificatam per literam B: ſed quantitas æquiualens quantitati ſignificatæ per literam A, ducitur in quantitatem æquiualentem quantitati quæ ſignificatur per literam B. Hoc verò poſſibile eſſe, qualeſcunque quantitates ſignificent literæ A & B: tam manifeſtè patet, quam clarè conſtat ex dictis ad præcedentem conſiderationem, nullas quantitates A & B eſſe poſſibiles, quæ tales ſint, vt haberi non poſſint duæ quantitates X & Z: quarum prior X, æquiualeat quantitati A: poſterior Z, æquiualeat quantitati B: ita vt quantitas X poſſit eſſe baſis, & quantitas Z poſſit eſſe altitudo in propoſito atque nominato ductu Geometrico G: qualemcunque ex his nominatis ductibus ſignificet litera G.

Ex dictis satis constat, quomodo ductu æquiualente, quælibet quantitas duci possit in quamlibet quantitatem: & præterea non difficulter colligitur, quomodo quælibet quantitas, æquiualenter ducta in quamlibet quantitatem, possit æquiualenter producere cuiuscunque generis quantitatem; atque, exempli gratia, corpus A, æquiualenter ductum in corpus B, ductu G: possit æquiualenter producere lineam; tametsi impossibile sit, vt productum ex ductu Geometrico reali, sit alia quantitas, quam superficies aut corpus. Etenim, siue superficies, siue corpus sit, quantitas F quæ producitur ex ductu reali, cui æquiualet ductus quantitatis A in quantitatem B: quoniam ex præcedenti consideratione constat dari posse, superficiei siue corpori F æquiualentem quantitatem H, quæ sit linea, vel certè spectet ad propositum quoduis aliud genus quantitatum: manifestum est ex hoc ductu realiter quidem produci quantitatem F, quæ sit superficies vel corpus: æquiualenter tamen produci quantitatem H, quæ sit linea, vel alia quantitas spectans ad propositum quoduis aliud genus quantitatum.

Inter duo producta ex eodem ductu Geometrico G, ita tamen vt alterũ sit productũ reale, alterũ sit productũ çquiualens: nulla diuersitas inuenitur quoad valorẽ: sed habent æqualẽ siue eumdem valorẽ: & sunt duæ quãtitates inter se æquiualẽtes, siue çquales quoad valorẽ. Exempli gratia facta hypothesi quod A sit circulus, & B sit recta linea: quodque A *in* B ductu primo reali producat C: ex intelligentia ductus primi Geometrici constat, productum reale C, necessariò esse cylindrum. Si verò vlterius supponatur, quod D sit recta linea, atque valor linearis circuli A: quodque D *in* B ductu primo reali producat F: hoc productum reale F necessariò erit rectangulum. In hac proposita hypothesi, verum est, quod A *in* B ductu primo reali producat tantum cylindrum C: & similiter, quod D *in* B ductu primo reali tantum producat rectangulum F; præterea etiam verum erit, quod A *in* B ductu primo æquiualenti producat rectangulum F: & quod D *in* B ductu primo æquiualenti, producat cylindrum C: quodque ex A *in* B ductu primo reali, genitum productum reale, sit cylinder C: ex eodem verò ductu illo reali, genitum productum æquiualens sit parallelogrammum F: quo supposito de his duobus productis quorum alterum est reale, alterum æquiualens: asserimus quod productum C, licet sit cylinder, non differat quoad valorem vniuersalem à producto F, licet sit parallelogrammum: sed esse producta eumdem valorem vniuersalem habentia, & inter se æqualia quoad valorem. Hoc verissimum esse, & quomodo intelligendum sit, vt constet verum esse: satis quidem colligi potest ex ijs quæ in præcedenti consideratione diximus de quantitatum valoribus; arbitror tamen vtile, illic traditam vniuersaliorem doctrinam, applicare proposito exemplo: exponendo quomodo intelligendum sit quod in hoc exemplo supponebatur, nimirũ quod D sit recta linea, & valor linearis circuli A; quandoquidem enim iuxta Logisticam circulus A, nihil aliud sit quam aliqua quantitas vniuersalis X, restricta ad superficiem circularem: inter se diuersa non sunt, circulus A, & quantitas vniuersalis X restricta ad superficiem circularem. Sed sunt aliquid idem diuersis modis significatum. Similiter vniuersalis quantitas X, restricta ad rectam lineam, quam claritatis gratia placet appellare lineam D: diuersa non est à recta linea D: quoniam igitur manifestum est ex ipsa suppositione, quod quoad magnitudinem eadem permaneat vniuersalis quantitas X: siue vlterius restricta sit ad superficiem circularem A, siue ad rectam lineam D: quodque valor vniuersalis circuli A, sit quantitas vniuersalis X: & etiam valor vniuersalis lineæ D, sit quantitas vniuersalis X; quam clarè patet, vniuersalem quantitatem X, sibi ipsi æqualem esse: tam manifestè constat, valorem vniuersalem circuli A, esse æqualem valori vniuersali lineæ D: adeòque circulum A, æquari lineç D, quo ad valorem vniuersalem. Quia verò hoc casu, linea D, dicitur valor lineanearis circuli A: patet quid in Logistica sit, & quod semper haberi possit valor linearis, circuli A, aut cuiuscunque alterius propositæ quantitatis; quodque similiter haberi possit, propositi circuli A, aut alterius quantitatis valor corporeus, valor discretus, aut alterius cuiusuis nominis, ad quod restringi potest vniuersalis quantitas X: quæ est valor vniuersalis propositi circuli A; omnes enim & solæ quantitates habentes eumdem siue æqualem valorem vniuersalem, sunt inter se æquales quoad valorem, quomodocunque inter se differant.

Ex hac vera Logisticæ doctrina, planè falsam deduceret: qui exempli gratia in hunc modū discurreret; supposito quod X sit valor vniuersalis decē pedū quadratorū: etiā decē pedes quadrati nihil aliud sunt, quā quantitas vniuersalis X restricta ad decē pedes quadratos: sed quæuis vniuersalis quantitas, adeòq; vniuersalis quātitas X, restringibilis est, tam ad palmos quadratos, quā ad pedes quadratos: ergo quantitas vniuersalis X, restringibilis est ad decem palmos quadratos: adeòque decem palmi quadrati, & decem pedes quadrati, sunt quantitates inter se æquiualentes. Hoc consequens verum quidem est, si intelligatur de valore discreto: sic vt sensus sit, quod pluralitas decem palmorum, æquiualeat pluralitati decem pedum, quoad multitudinem vnitatum, quæ numerantur à diuersis illis pluralitatibus; sed hoc non infert discursus: falsum verò est illud quod infert: nimirum continuam decem palmorum quantitatem siue superficiem, esse continuam quantitatem æquiualentem, quantitati continuæ, siue superficiei decem pedum; argumenti error consistit in eo, quod ex vera propositione quæ asserit quamlibet vniuersalem quantitatem, adeòque vniuersalem quantitatem X, esse restringibilem ad palmos quadratos: inferat vniuersalem quantitatem X, esse restringibilem ad decem palmos quadratos. Profectò hoc nusquam docet nostra Logistica: immo iuxta Logisticam, tam manifestè falsum est, quam asserere lineam quamlibet in palmos diuisibilem, esse diuisibilem in decem palmos: etenim exempli gratia, linea trium palmorum, est linea diuisibilis in palmos: non ideò tamen est linea diuisibilis in decem palmos. Vt verò inter se æquales non sunt omnes lineæ, ita neque omnes quantitates vniuersales inter se æquales sunt. Quis crederet tam manifestè erroneo argumento, non solum bene impugnatam, sed expugnatam Logisticæ nostræ doctrinam de quantitatibus æquiualentibus, credidisse Mathematicum?

Consideratio IV.

Exponitur quid sit ductus Arithmeticus: & quomodo hic ductus Arithmeticus, sit ductus æquiualens ductui primo Geometrico atque nominato.

QVandoquidem ex dictis de ductibus æquiualentibus satis atque abundè constet: quod, & quomodo quælibet quantitas X, æquiualenter duci possit quouis ductu Geometrico atque nominato, in quamlibet quantitatem Z: adeòque quantitatem X, æquiualenter duci posse in quantitatem Z ductu primo Geometrico, etiam supposito quod quantitates X & Z, singulæ sint numeri vulgares: superfluum videri posset quod hic præmissus titulus indicat declarandum; tamen meo iudicio, non solum vtile, sed attenta consideratione maximè dignum videtur, quod hic notamus circa ductum Arithmeticum, ductui primo æquiualenlentē, in casu quod pro hoc ductu datæ quātitates sunt numeri, quæ operatio aliter dicitur multiplicatio; tum quia huius ductus, primo ductui Geometrico æquiualentis intelligentia, necessaria est atque supponitur in nostra æqualium rationū definitione: adeòque prędicti ductus clara intelligentia requiritur, ne aliquid obscuritatis remaneat in re tanti momenti, vt est clara cognitio rationum æqualium; tum quia suspicor hanc numerorum multiplicationē non satis intellectam, saltem à maiori parte Mathematicorum quorum scripta ad manus meas peruenerunt. Causa huius suspicionis, hæc est; vel in huius multiplicationis expositione supponunt, & vt præcognitam assumunt æqualium rationum intelligentiam, vel hanc intelligentiam non assumunt neque præsupponunt. Priorum doctrina vt legitima admitti non potest à nobis, qui existimamus à nemine allatam rationum æqualium definitionem sufficientem pro rebus Mathematicis. Posteriorum doctrinam reijcere tenemur, non tantum vt defectuosam, sed etiam vt noxiam: eo ipso quod multiplicationem consideret ac si nihil aliud foret quam iterata additio: vel vt nonnulli moderni loquuntur, additio composita. Qui numerorum multiplicationem ita exponat vt declinet vtrumque hunc scopulum, & consequenter afferat eius declarationem, ex qua constet, quomodo ab additione discrepet, ego saltem nullum me legisse memini.

Vt clarius exponamus quod hic declarandum assumpsimus, atque supponitur in nostra definitione rationum æqualium.

Nota primò. Omnium denariorum vtcunque restrictorum valor discretus, est vulgaris numerus 10, & quilibet huic æquiualens numerus: vulgares autem numeri 10, diuerso modo restricti, omnes inter se æquiualent, qui habent eumdem valorem vniuersalem. Quodque hic diximus de denario, similiter verum est de vnitate, binario, ternario &c. vt constat ex dictis de valoribus quantitatum, in consideratione secunda.

Nota secundò. Supposito quod lineæ rectæ A, valor sit D: & lineæ rectæ B, valor sit E: quodque ductu primo reali A *in* B producat C: ac denique quod quantitatis C, valor sit F; qualescunque sint istæ quantitates D, E, F, etiam verum erit, quod ductu primo, non quidem reali, sed ductu primo æquiualente, D *in* E producat F: vt constat ex dictis de ductibus æquiualentibus, in consideratione tertia.

Nota tertiò. Proprietas, quæ conuenit quantitati præcisè ex vi restrictionis, vel carentia restrictionis, desinit conuenire tali quantitati, desinente illa restrictione vel carentia restrictionis: reliquæ eius proprietates per hoc non variantur, exempli gratia, quod vniuersalis quantitas A, restricta ad lineam, habeat vnicam extensionem: est proprietas illi conueniens ratione restrictionis ad lineam: hinc desinente hac restrictione, desinit illa proprietas: neque affirmari potest de vniuersali quantitate A non restricta, aut restricta ad quantitatem diuersam à linea. Rursus quod vniuersalis quantitas A, neque habeat magnitudinem extensionis, neque magnitudinem discretionis: illi conuenit præcisè ex carentia vlterioris restrictionis ad aliud genus quantitatis continuæ vel discretæ; quæ restrictio si superueniat, necessariò habebit magnitudinem vel extensionis, vel discretionis. Deniq; quod quantitas vniuersalis A restricta ad lineam, sit maior, vel minor altera quantitate B, aut illi æqualis, vel æquiualens: est proprietas non dependens à restrictione ad vnicam extensionem: quare in quantitate vniuersali A perseuerat hæc proprietas, siue desinat dicta restrictio, siue eius loco quæuis alia succedat quæ admittitur à quantitate vniuersali A: vt fit, exempli gratia, quando quantitas vniuersalis A restringitur ad numerum, sic vt fiat quantitas discreta. Hæc videntur satis manifesta ex ipsa intelligentia quantitatum, & restrictionum quas admittunt.

His

His claritatis gratia prænotatis, fiat hypothesis quod A = 4 palmis linearibus: quod B = 3 palmis linearibus: quod C = 12 palmis superficialibus siue quadratis; ex dictis de ductu primo nominato patet A *in* B ductu 1 = C. Sensus est, quod ductu primo nominato realiter ducendo lineam rectam 4 palmorum, in lineam rectam trium palmorum: producatur superficies 12 palmorum. Hoc idem aliter exprimitur dicendo, quod ductu primo nominato ducendo 4 palmos lineares, in tres palmos lineares, producantur 12 palmi superficiales, siue quadrati. Quoniam verò hæ assertiones verificantur de quantitatibus continuis de quibus agunt: etiam iuxta secundam notam verificantur de istarum continuarum quantitatum valoribus discretis: quare iuxta notam primam verum erit, quod ductu primo nominato, non quidem reali, sed æquiualente, numerus 4 ductus in numerum 3, producat numerum 12: in hac enim assertione affirmatur de valoribus discretis continuarum quantitatum, quod in altera assertione affirmabatur de ipsis illis continuis quantitatibus. Quoniam verò valores discreti, cōtinuarum, vel quarumlibet aliarum quantitatum, numeri sunt: atque de his numeris affirmatur illud quod docet ductus Arithmeticus, qui aliter appellatur multiplicatio: constat, quod, & quomodo, ductus Arithmeticus siue multiplicatio, dici possit ductus æquiualens ductui primo Geometrico atque nominato.

Ostendimus hactenus, quod in titulo huius considerationis exponendum assumpsimus: nimirum quomodo ductus Arithmeticus, siue multiplicatio, dici possit ductus æquiualens ductui primo Geometrico atque nominato: hic modus considerandi multiplicationem, Logisticæ magis proprius, vocetur primus, vt commodius distinguatur ab alio modo considerandi multiplicationem siue ductum Arithmeticum, qui magis vsitatus est apud alios Mathematicos, quem dicimus secundum modum considerandi ductum Arithmeticum siue multiplicationem. Quos duos diuersos modos considerandi multiplicationem, debemus inter se conferre, vt ad finem superius indicatum melius appareat illorum aut conuenientia aut differentia.

Secundus modus considerandi ductum Arithmeticum siue multiplicationem, supponit quod numerum 4 ducere in numerum 3, nihil aliud sit, quam tot numeros 4 simul addere, quot vnitates continentur multiplicatore siue numero 3. Hinc quoniam multiplicatore 3 continentur tres vnitates, & præterea tres numeros 4 simul addendo producitur numerus 12: iuxta hunc secundum modum constat, numerum 4 ductum in numerum 3, producere numerum 12.

Conueniunt hi duo diuersi modi considerandi multiplicationem, in eo, quod singuli declarent multiplicationem siue ductum Arithmeticum, independenter à cognitione æqualitatis [illegible]. Differunt hi duo modi considerandi ductum Arithmeticum siue multiplicationem. Primo, quod productum ex multiplicatione siue ductu Arithmetico, si consideratur primo modo, non dependeat ab additione, neque dici debeat productum ex additione, & consequenter non necessariò habet proprietates resultantes ex additione. Verum productum ex ductu Arithmetico, si consideratur secundo modo, dependet ab additione, & dici debet productum ex additione: atque consequenter illi conueniunt proprietates resultantes ex additione. Proprietates resultantes ex additione sunt exempli gratia. Primò, quod productum necessariò sit maius singulis producentibus. Secundò, quod productum sit quantitas eiusdem generis cum producentibus &c.

Videndum igitur, an hæ proprietates quas requirit productum ex Arithmetico ductu iuxta secundum modū considerandi hunc ductum, conueniant alteri producto ex ductu Arithmetico. Si productū oriatur ex vulgaribus numeris integris maioribus vnitate, prædictæ proprietates conueniunt producto. Exempli gratia productum ex 4 ducto in 3, est 12: quod productum 12 est maius singulis producentibus, qui sunt 4 & 3: deinde productum 12, est quantitas eiusdem generis cum singulis producentibus. Si productum oriatur ex integris vulgaribus, sic tamen vt multiplicator sit vnitas, productum ex multiplicatione non est maius, sed æquale numero multiplicando: hoc est vni ex datis pro multiplicatione. Exempli gratia, productum ex numero 5, ducto in vnitatem, est numerus 5. Rursus productum ex vnitate ducta in vnitatem, est vnitas. Vbi apparet quod productum non sit maius quolibet ex producentibus: sed primum productum vni ex producentibus æquatur; secundum singulis ex producentibus æquale est. Si productum multiplicationis oriatur ex fractionibus, integra vnitate minorem valorem habentibus: hoc productum est minus singulis producentibus. Præterea Arithmetici passim appellant, vel quadratum numerum qui producitur ex aliquo integro numero semel in se ducto: vel cubum dicunt, productum ex aliquo numero bis in se ducto. Sic exempli gratia numerus 2 semel ductus in se, producit 4: & numerus 4 productus ex hac multiplicatione, dicitur numerus quadratus; hunc quadratum producens numerus, dicitur eius radix, vel etiam latus: atque aliter etiam linearis numerus appellatur. Has locutiones passim vsitatas esse ab Arithmeticis, tum modernis, tum antiquis: negari non potest nisi ab ijs qui ignorant Arithmeticam. Quæro igitur quid consequenter ad hæc respondendum sit petenti, vtrum omnis linearis numerus sit quadratus? certè qui hoc assereret, euerteret præcipuam partem doctrinæ ab Euclide propositæ in suæ Arithmeticæ elementis. Si vlterius petatur, an numerus quadratus ad numerum linearem habeat proportionem? ex responsione affirmatiua sequi videtur quod genere inter se non differant, numeri quadrati, & lineares: adeòque tantum specie differant: & consequenter quod eodem nomine sufficienter exprimi possint: ex quo vlterius sequitur, quod lineares numeri omnes, etiam appellari possint quadrati: quod aduersatur priori responsioni, in qua diximus quod omnis linearis numerus quadratus dici non possit. Hoc iuxta Euclidem est manifestum, quia iuxta ipsum, exempli gratia numerus 2 non potest dici quadratus. Ex responsione negatiua, patet, etiam integrum linearem numerum 2, ad integrum quadratum numerum 4, nullam habere proportionem: adeòque integrum quadratum, dici non posse maiorem, aut minorem, lineari numero 2: & consequenter numerum quadratum 4, non produci ex vna vel iterata additione numeri linearis 2.

Tam paruam vniuersalitatem habet secundus modus intelligendi ductum Arithmeticum siue multiplicationem, vt vix vtilis sit pro quantitatibus diuersis ab integris numeris: vt satis constat ex paucis, quæ hic annotauimus; maiorem amplitudinem habet primus modus intelligendi ductum Arithmeticum, sic vt nihil aliud sit quam ductus aliquis æquiualens primo ductui Geometrico atque nominato; extenditur enim ad ductum cuiuslibet quantitatis, in quamlibet aliam datam quantitatem: quandoquidem impossibile sit dari duas quantitates A & B, qualescunque illæ fuerint, sic vt quantitas A, vel realiter vel æquiualenter, ductu primo nominato duci non possit in quantitatem B: idque intelligibile est, planè independenter ab omni cognitione proportionum inter se æqualium: atque à nobis supponitur, & tanquam prius cognitum assumitur in nostra definitione rationum siue proportionum æqualium.

Non egimus hic de consideratione multiplicationis, indicata apud eos, qui asserunt multiplicationem Arithmeticam bene dici regulam auream compendiatam, siue regulam auream in qua primus terminus est vnitas: etenim ad intelligentiam multiplicationis, iuxta hanc eius considerationem, supponi debet cognita regula aurea, cuius compendium est: adeòque hæc multiplicationis consideratio vtilis non est ad regulæ aureæ cognitionem: ad quam, si non vtraque hic præmissa multiplicatio, saltem prior, Logisticæ nostræ magis propria, vtilis est; & quia nul-

late-

latenus dependet à regulæ aureæ cognitione, ſed eius intelligentia habetur independenter à regula aurea, vel æqualium proportionum cognitione; legitimè à Logiſtica noſtra adhibetur, ad expoſitionem regulæ aureæ aut proportionum æqualium: de quibus agimus in ſexta & ſeptima conſideratione.

Conſideratio V.

Declarantur quantitatum menſuræ, & communes menſuræ: & ex his reſultantes quantitates incommenſurabiles, atque numeri qui appellantur radicales, vel ſurdi, vel irrationales.

PER cognitam prius quantitatis A magnitudinem, alterius quantitatis B magnitudinem cognitam reddere, indicando cognitarum quantitatum A aggregatum, ſiue numerum, cuius valor æqualis ſit valori quantitatis B: illud eſt, quod hic ſignificatur per vocem *menſurare* ſiue *metiri*: & quantitas per quam altera menſuratur, dicitur menſura. Huiuſmodi dimenſio ſiue menſuratio paſſim vſitata, vtilis, & neceſſaria eſt: non tantum pro Matheſi tum practica tum etiam ſpeculatiua, verum etiam pro ciuili commercio, atque reipublicæ regimine; tamen non omni ex parte inter ſe conueniunt dimenſiones vtiles pro ciuili regimine, pro Matheſi practica, & Matheſi ſpeculatiua.

Pro vſibus ciuilibus: reipublicæ adminiſtratores, determinant varias menſuras indiuiduales, certamque magnitudinem habentes, rebus menſurandis accommodatas; lineares pro menſurandis lineis; ſuperficiales pro menſurandis ſuperficiebus; corporeas pro menſurandis corporibus; ponderis pro menſurandis ponderibus; temporis pro menſurandis temporibus &c. Omnes ac ſingulas huiuſmodi menſuras, generali nomine appellant menſuras: diuerſis tamen, diuerſum nomen aſſignant; ita exempli gratia pro beneplacito aſſumendo determinatæ longitudinis indiuidualem lineam, illi pedis nomen attribuunt: & ſtatuunt, vt nominando pedem, ſiue pedem linearem, intelligatur ea determinata longitudo quæ conuenit lineæ ab ipſis aſſumptæ pro pede lineari. Quoniam tamen diuerſa regimina, etiam diuerſam habent authoritatem, ad determinandam linearis pedis longitudinem; aut alio nomine appellandam talem longitudinem linearem, atque menſuram: menſura linearis, quæ pes dicitur, vbique eadem non eſt. Menſura linearis quæ Romæ pes dicitur, indeque pes Romanus appellatur: marmoreo in lapide conſpectui publico expoſitus inuenitur in Capitolio Romano, vt nulli ignota ſit eius longitudo. Ab hoc Romano pede, longitudine differt pes Neapolitanus, Mediolanenſis, Matritenſis, Pariſienſis &c. prout placuit pro pede aſſumere diuerſæ longitudinis lineam, diuerſis reipublicæ moderatoribus. In hunc modum determinata Romani pedis certa longitudine, ſiue magnitudine: facilè eſt per huius lineæ ſectionem in partes inter ſe æquales, inuenire longitudinem quam habet pars duodecima vnius pedis linearis: vel certè alia pars cuiuſuis alterius nominis, exprimibilis per integrum vulgarem numerum. Similiter facilè eſt cognoſcere lineam, quæ adæquet pedum multitudinem, integro vulgari numero indicabilem. Quare vt præter linearis pedis menſuram prius cognitam, habeantur aliæ minores vel maiores menſuræ lineares, pedali menſura commodiores, vel pro minoribus vel pro maioribus lineis menſurandis: poſt determinatam vt diximus pedis longitudinem, ſtatuunt exempli gratia per vnciam linearem,

eſſe

esse intelligendam vnam pedis partem duodecimam; passum verò appellandum esse lineam, quæ adæquat quinque pedes; milliare dicendum longitudinem mille passuum; atque ita cognitas reddunt diuersas vno pede minores, aut maiores mensuras, pro linearum dimensionibus in ciuilibus vsibus adhibendas, & proprio nomine exprimibiles. Hæc nomina, aut longitudines his mensuris conuenientes immutare, nefas est, vt violare alia publica decreta, vel à reipublicę moderatoribus statutas leges.

Determinatis in hunc modum linearum mensuris: plerumque pro superficierum vel corporum mensuris, noua determinatione indigentes magnitudines non assumuntur: cognita enim pedis linearis magnitudine, cognoscitur magnitudo pedis quadrati, vel pedis cubici: & pro superficierum dimensionibus adhibentur linearium mensurarum quadrata; similiterque pro corporum dimensionibus adhibentur linearium mensurarum cubi. Non diuerso modo in ciuili regimine statuuntur mensuræ, pro mensurandis ponderibus, temporibus, fluidis &c.

Mathesis practica etiam adhibet prædictas ciuiles mensuras: præter illas tamen assumit aliquas sibi magis proprias, quasque pro sua authoritate potest augere, imminuere, variare: dummodo Mathematicis legibus non aduersetur. Tales mensuræ sunt illæ, quas indicant per voces *scala*, aut *pars scalæ*; vel quas *circuli gradus* appellant. Per scalam intelligunt, quamlibet rectam lineam in partes æquales sectam; totius huius lineæ quam dixerunt scalam, partes inter se æquales, scalæ partes appellant. Hæ scalæ partes, ex se indifferentes sunt, vt pro beneplacito eius qui scalam construit & assumit in ordine ad aliquem finem, significent quascunque ciuiles mensuras lineares. Quas per scalæ partes mensuras ciuiles intelligi velint, adscribunt scalis quas apponunt ædificiorum plantis, siue vestigijs: vel in mappis locorum particularium: vel in alijs quibusuis longitudinum, latitudinum, altitudinum descriptionibus quas repræsentant. Huiusmodi descriptiones, potius pictorum, quam Mathematicorum repræsentationes dicendæ sunt: neque descriptarum rerum magnitudines exhibent sine apposita scala, cui adscriptum sit quas ciuiles mensuras repræsentent eius partes. Partium scalæ quadrata, vel cubos adhibent, pro indicandis magnitudinibus superficierum, vel corporum quæ repræsentantur.

Quoties in descriptionibus repręsentantibus longitudines, latitudines, distantias &c. exhibetur scala cum adscripto nomine illius mensuræ quæ repræsentatur per quamlibet scalæ partem, planè inutilis est talis scala, si cognita non est longitudo mensuræ significatæ per nomen scalæ appositum; vtque hoc modo fiat inutilis, satis est ex vna prouincia in aliam transferre descriptionem: non tantum quia diuersis in locis diuersam longitudinem habēt eodem nomine indicatæ mensuræ: sed præterea quia tales mensuræ plerumque satis cognitæ non sunt, nisi in locis in quibus adhibentur. Vt huiusmodi locorum mutatio inutilem non reddat scalam, descriptioni appositam: prudens consilium videtur illorum, qui pro descriptionibus assumunt integram scalæ longitudinem, æqualem certæ alicui parti mensuræ, quam repræsentari volunt per singulas scalæ partes: deinde scalæ adscribunt nomen ciuilis mensuræ, repræsentatæ per singulas scalæ partes: huic tamen nomini addunt, quam eius partem adæquet integra scalæ longitudo; sic enim fit, vt ex ipsa scala, sufficiēter cognoscatur tota longitudo mensuræ indicatæ per nomen scalæ appositum, etiamsi aliunde præcognita non sit, per tale nomen indicata longitudo: & nullum remanet periculum, ne scala vtilitatem suam perdat, per hoc quod ex vno loco in alium transferatur.

Quod attinet ad circuli gradus, qui à Mathesi practica adhibentur pro indicanda magnitudine angulorum: in Mathesi stabilitis atque approbatis communi consensu legibus se opponeret, qui per circuli gradum vellet aliud intelligi, quam inte-

integræ circuli circumferentiæ, vnam partem trecentesimam sexagesimam. Ex ipsa istorum graduum intelligentia manifestum est, quod circuli gradus, nullam determinatam longitudinem significet: sed tanto maior sit, vel minor, vnus gradus vnius circuli, vno gradu alterius circuli: quanto vnius circuli tota circumferentia, maior est, vel minor, tota circumferentia alterius circuli: hæc tamen diuersa longitudo, in diuersorum circulorum gradibus, non vitiat angulorum rectilineorum dimensionem, pro qua assumuntur gradus. Vt habeantur angulorum mensuræ minores integro gradu: etiam vsu receptũ est, vt vnum gradus minutum primum vocetur, vna pars sexagesima vnius gradus. Rursus vna pars sexagesima vnius primi minuti, dicitur vnum minutum secundum vnius gradus. Similiter vna pars sexagesima vnius minuti secundi, appellatur vnum minutum tertium vnius gradus; atque ita deinceps.

Pro Mathesi speculatiua magis necessariæ atque vsitatæ mensuræ, appellantur partes relatè ad aliquod totum cuius partes sunt. Hæ partes, ab Euclide & nostra Logistica, distinguuntur in partes aliquotas, & partes aliquantas. Alicuius totius, pars aliquota dicitur, quæ aliquoties sumpta adæquat totum cuius pars dicitur. Alicuius totius, pars aliquanta dicitur, quæ aliquoties sumpta non adæquat totum cuius pars dicitur. Hinc pars aliquota aliter dici potest illa, cuius vnitas, siue indiuiduum, vel certè vnitatum aliquod aggregatum, adæquat totum cuius pars dicitur; hoc est pars quæ ad totum habet proportionem, quam habet vnitas vulgaris, ad aliquem maiorem vulgarem numerum. Numerus 3, est pars aliquanta numeri 14: quia quater sumptus, deficit à numero 14: pluries verò sumptus excedit numerum 14: adeòque neque semel, neque sæpius sumptus, potest adæquare numerum 14.

Distinctis in hunc modum partibus in eas quæ dicuntur aliquotæ, & alias quæ dicuntur aliquantæ: priores aliter etiam dicuntur mensuræ illius totius, cuius sunt partes aliquotæ; partes aliquantæ, non appellantur mensuræ illius totius cuius partes sunt; hoc modo intelligendo vocem *mensuræ*, quando mensura eadem diuersis quantitatibus conuenit: dicitur istarum quantitatum *communis mensura*; quare omnis & sola pars aliquota, tam quantitatis A, quam quantitatis B, appellatur communis mensura quantitatum A & B. Quando duæ eiusdem speciei quantitates A & B tales sunt, vt non sit possibilis vnius aliqua pars aliquota, quę etiam sit alterius pars aliquota: adeòque quantitates A & B, nullam habere possint communem mensuram: tunc illæ quantitates A & B dicuntur inter se incommẽsurabiles; nõ dicũtur tamen icõmensurabiles quantitates A & B nisi sint eiusdẽ generis quantitates. Hinc oritur, quod nullæ nisi eiusdẽ generis quantitates dicãtur inter se incõmensurabiles: quẽadmodũ nullæ nisi eiusdẽ generis quantitates, dicuntur inter se habere proportionẽ; quantitates quæ genere differunt, saltẽ propriè loquendo, non dicuntur inter se incommensurabiles: tametsi nullam habeant communem mensuram possibilem. Omnes integri numeri vulgares possibiles, sunt inter se commensurabiles; quidquid enim sit, an alias plures communes mensuras habeant, saltem vnitas singulos metitur, atque omnium communis mensura est; quod etiam verum est de omnibus fractis numeris vulgaribus: id enim satis clarè patet de fractionibus vulgaribus eumdem denominatorem habentibus: ex quo sequitur, etiam de reliquis verum esse, quia hæ fractiones reuocari possunt ad alias æquiualentes, atque habentes eumdem denominatorem.

Supposito quod duæ quantitates A & B sint inter se incommensurabiles, quodque valor discretus quãtitatis A sit 4 (quod semper supponi potest, quando precedens aliqua hypothesis non requirit contrarium) hoc inquam casu per integrum vulgarem numerum indicare valorem quantitatis B, est prorsus impossibile; & etiam erit impossibile, quantitatis B valorem discretum indicare per numerum vulgarem

rem fractum, vt suo loco probamus, & sequitur ex veritate eius quod hic paulò ante diximus, nimirum omnes fractos numeros vulgares inter se esse commensurabiles.

Vt hoc casu indicari possit valor discretus quantitatis B, qui exprimibilis non est, neque per integrum, neque per fractum vulgarem numerum: excogitati sunt numeri qui appellantur radicales. Radices (saltem iuxta Logisticam nostram) distinguuntur in radices primas, secundas, tertias, quartas &c. quarum radicum, & numerorum radicalium compendiata scriptio, & significatio satis declaratur superius lib. 1. vel in parte 2. cap. 1. vel initio cap. 5.

Vt in exemplo clarius intelligatur, quod hic diximus de numeris radicalibus, illorumque radicibus: consideretur eiusdem quadrati latus A & diameter B: has lineas A & B incommensurabiles esse, docet Euclides in suis elementis: quare in lineis A & B, habemus duas quantitates incommensurabiles (vt paulò ante considerauimus ad declarandam significationem quantitatum incommensurabilium, & originem numerorum radicalium) supponendo vlterius, quod valor discretus lineæ A, sit vulgaris numerus 4: manente hac suppositione, impossibile est per aliũ vulgarem numerum indicare valorem discretum lineæ B: tamen hic lineæ B valor discretus, poterit indicari per numerum radicalem: & bene indicatur dicendo quod valor discretus lineæ B, sit radix prima numeri vulgaris 32, hoc est R1q32: eritque verum, quod A = 4: & præterea B = R1q32. Vt clarius, & non difficulter constet hoc verum esse; notandum, quod in casu de quo agimus 2A2 = B2 vt constat, tum ex Euclidis lib. 1. prop. 47. tum etiam ex Logisticæ nostræ theor. 7. cap. 3. lib. 2; supposita hac veritate, quia vlterius supponitur quod A = 4, patet A2 = 16: adeòque 2A2 = 32: sed vt iam diximus 2A2 = B2: ergo B2 = 32; igitur vt constat ex Logisticarum scriptionum intelligentia, B = R1q 32. Hinc tam manifestum est valorem discretum lineæ B, vulgari numero integro indicari non posse, quam clarè patet quod tali vulgari numero exprimi non possit R1q32; vt verò hoc constet, sufficit reflectere quod R1q32 sit maior numero 5, qui est R1q25: & præterea quod sit minor numero 6, qui est R1q36; hinc enim constat quod R1q32, sit numerus maior numero 5, & minor numero 6: talem verò integrum vulgarem numerum non inueniri, atque impossibilem esse, manifestum est: adeòque R1q32, est numerus radicalis, cuius valor exprimi non potest per vllum vulgarem integrum numerum. Huiusmodi radicales numeri singuli quorum valor indicari non potest per integrum vulgarem numerum, aliter appellantur numeri *surdi*, vel etiam *irrationales*: fortassis surdi dicuntur, quia illorum valor discretus, per numerum vulgarem indicari non potest, adeòque hoc modo indicatus illorum valor discretus audiri non potest; ijdem numeri appellantur irrationales, quia ratio quam habent ad aliquem vulgarem numerum, non est exprimibilis per duos vulgares numeros:

Quæri hic posset: an numerus radicalis sit numerus siue discreta quantitas, vel certè ad quod quantitatis genus pertineat. Non desunt Matheseos doctores qui de hoc quæsito dubitant vel diuersimodè sentiunt; quidquid verò sit de illorum controuersijs, aut pro contrarijs opinionibus militantibus argumentis; saltem prima fronte non planè illegitimum contra Logisticam opinandi fundamentum desumi posset, ex ipsis discretarum quantitatum & numerorum definitionibus; etenim iuxta Logisticam numerus dicitur, vel vnitas, vel vnitatum aggregatum: neque admittitur vllus numerus qui non sit vnitas, vel vnitatum aggregatum: ergo quod significari vel indicari non potest per vnitatem vel vnitatum aggregatum, non est numerus: sed vnitas & quodlibet vnitatum aggregatum significari atque indicari potest per vulgares numeros: igitur quod significari non potest per vllum numerum vulgarem, non potest esse numerus: atqui surdi radicalis numeri

radix,

radix, indicari aut significari non potest per numerum vulgarem: ergo radix numeri radicalis surdi, non est numerus: neque numerus radicalis surdus significat numerum. Proposito hic argumento potentiora atque nostræ opinioni aduersantia me inuenisse non memini; sed si aliquid contra nos euincit argumentum, etiam probat fractos numeros in Arithmetica practica vsitatos, non esse numeros, neque discretas quantitates: quod nobiscum admittere non potest antiqua Mathesis; quis enim Arithmeticus admittet, valorem fractionis indicantis tres septimas, non esse numerum, vnitatum aggregatum, atque discretam quantitatem; hic tamen valor indicari non potest, neque per vnitatem quæ æquiualet septem septimis, neque per huiusmodi vnitatum aggregatum vllum, quod necessariò vnitate maiorem valorem habet: adeòque indicare non potest valorem minorem valore talis vnitatis, qui numerat septem septimas, & consequenter habet discretam magnitudinem maiorem proposita fractione quæ tantum numerat tres septimas. Rursus aliud est exactè atque adæquatè indicare: aliud est non exactè vel inadæquatè indicare; sola pars aliquota potest exactè atque adæquatè indicare magnitudinem illius totius cuius est pars aliquota: pars verò aliquanta, non potest exactè indicare magnitudinem illius totius cuius est pars aliquanta; non ideò tamen falsum est partem aliquantam, indicare posse magnitudinem illius totius, cuius est pars aliquanta: aliòquin dicendum foret idem esse, indicare, & exactè siue adæquatè indicare: certè hæc significatio vocis *indicare* admissa non est à Mathesi. Vt verò pro speculatiua Mathesi, per vocem *mensurare*, quando quantitas dicitur mensurari, non intelligatur nisi exacta atque adæquata mensuratio, siue significatio vnius magnitudinis per aliam: expresè notandum fuit, in hac significatione à Mathesi speculatiua adhiberi vocem *mensurare*. Hæc eadem significatio vocis *mensurare*, non admittitur, neque in Mathesi practica, neque pro vsu ciuili: vbi etiam bene mensuratum dicitur, illud, cuius magnitudo sufficienter indicatur, licet non exactè & adæquatè indicetur. Fractio $\frac{7}{8}$, non potest exactè indicari per decimas, centesimas, millesimas, aut vllos numeros inuenibiles in tota illa Arithmetica practica, quæ appellatur decimalis (& à multis non immeritò laudatur & numeratur inter bonas practicæ Arithmeticæ inuentiones) igitur in fractione vulgari quæ numerat septem octauas, habetur fractio vulgaris, cuius valor indicari non potest per vllum ex numeris adhibitis vel admissis, ab Arithmetica decimali: licet hæc vltra integros numeros, admittat non solum fractiones integra vnitate minorem valorem habentes: sed etiam ab integræ vnitatis valore ita deficientes, vt dari non possit vlla fractio vulgaris non spectans ad Arithmeticam decimalem, quæ talis sit, atque tam paruum valorem habeat: vt ex fractionibus pertinentibus ad Arithmeticam decimalem, assignari non possit fractio habens minorem valorem. Quodque hic diximus de vna vulgari fractione quæ numerat septem octauas, verum est de innumeris alijs fractionibus non spectantibus ad Arithmeticam decimalem: nemo tamen, vt opinor, negare potest, fractiones vulgares non spectantes ad Arithmeticam decimalem esse numeros, atque discretas quantitates. Ad propositum prius argumentum respondeo, verum esse quod non detur numerus diuersus ab vnitate vel vnitatum aggregato: distinguo tamen subsumptam propositionem in qua dicitur, sed vnitas & quodlibet vnitatum aggregatum indicari potest per vulgares numeros: hanc inquam subsumptam propositionem distinguo, & concedo veram esse de eiusdem speciei vnitatibus, quarum aggregata tantum indicantur ab integris numeris vulgaribus: nego veram esse de vnitatibus diuersæ speciei, quarum aggregata indicantur à numeris spectantibus ad Arithmeticam decimalem, & aliam Arithmeticam, quæ præter integros numeros vulgares, etiam fractiones vulgares admittit; asserendo malè negatum, quod hic negauimus, consequenter dicendum foret, nullos inueniri numeros nisi vulgares integros; misera profectò, & pauper Arithmetica, si præter vulgares integros numeros, nullos alios numeros, aut discretas quantitates posset admittere! Hactenus dicta sufficere videntur ad solutionem argumenti prius adducti: & cognoscendas fallacias argumentorum, quæ prius adducto addi possent, vtilia quidem ad decipiendum parum versatos in terminorum intelligentia: sed nihil solidè euincentia contrarium Logisticæ nostræ, asserenti numeros radicales omnes & singulos, esse verós ac propriè dictos numeros, & quantitates discretas.

Numeros radicales à surdis diuersos, esse veros numeros atque quantitates discretas, facilè patet: eo ipso enim quod surdi non sunt, indicant aliquid exprimibile atque indicabile vulgari numero; ita R.q25, per numerum radicalem idem indicat, quod aliter indicatur per numerum quinque: quoniam igitur numerus vulgaris quinque, & similiter reliqui vulgares numeri omnes, sunt numeri & quantitates discretæ: manifestum est per numeros radicales à surdis diuersos, indicari veros numeros atque discretas quantitates: adeòque hos radicales numeros pertinere ad genus quantitatum discretarum; quod enim quantitas aliqua diuerso modo indicetur aut significetur, nullam generis mutationem causare potest in tali quantitate.

Numeros radicales surdos, esse veros numeros, atque discretas quantitates: constat primò, quia non minus in surdis, quam in non surdis numeris radicalibus, magnitudo istorum numerorum desumitur à pluralitate vnitatum quæ per ipsos indicantur: sed magnitudo desumpta à pluralitate indiuiduorum, est magnitudo discreta: ergo non minus surdi, quam non surdi radicales numeri, habent magnitudinem discretam: adeòque sunt quantitates discretæ, quæ aliter numeri dicuntur. Dictis non aduersatur differentia quæ intercedit inter surdos & non surdos radicales numeros: hæc enim differentia in eo consistit, quod multitudo vnitatum quæ indicatur à radicali numero qui surdus est, exactè indicari non possit per numeros vulgares integros vel fractos: hoc est per partes aliquotas numeri radicalis surdi; multitudo autem vnitatum, quæ indicatur à numero radicali qui surdus non est, exactè indicari possit per numeros vulgares integros vel fractos: hoc est per partes aliquotas talis numeri radicalis non surdi; iam verò in definitione numeri, non dicitur quod sit vnitas vel vnitatum aggregatum per partes aliquotas indicabile, (quæ solæ partes aliquotæ exactè indicare atque adeò mensurare possunt totum cuius sunt partes aliquotæ: & nullas nisi partes aliquotas indicant vulgares fracti numeri) sed dicitur quod numerus sit vnitas, vel vnitatum aggregatum: quæ definitio non minus conuenit significato surdi, quam non surdi numeri radicalis. Similiterque significato tam surdi quam non surdi numeri radicalis, conuenit discretæ quantitatis definitio; hæc enim dicit, discretam magnitudinem siue quantitatem, esse illam, quæ habet magnitudinem discretionis, hoc est magnitudinem desumptam à pluralitate vel paucitate vnitatum siue indiuiduorum. Quoniam igitur & numeri & discretæ quantitatis definitio, conuenit tam surdis quam non surdis numeris radicalibus: patet tam surdos quam non surdos numeros radicales esse numeros, & discretas quantitates. Quia tamen ex numeris radicalibus aliqui habent hanc proprietatem, quod per partes aliquotas totius radicalis numeri eorum magnitudo indicari possit; alij verò non habent hanc proprietatem: sed sunt tales, vt per totius radicalis numeri partes aliquotas, indicari non possit magnitudo totius radicalis numeri, atq; hæc magnitudo tantũ indicari possit per partes aliquãtas totius radicalis numeri: hinc fit, quod numeri radicales bene diuidantur in radicales surdos, & non surdos.

Secundò ex ipsa etiam antiqua Mathesi satis constat, numeros radicales surdos, esse dicendos numeros; etenim hæc Mathesis exempli gratia docet in casu superius com-

commemorato, in quo A significat latus, & B significat diametrum eiusdem quadrati: quod A *ad* B = 4 *ad* R 1 q 32: adeòque admittit proportionem, atque eamdem proportionem inter vulgarem numerum 4, & radicalem numerum qui est radix prima vulgaris numeri 32: sed non admittit proportionem nisi inter duas quantitates eiusdem generis: ergo admittit, eiusdem generis quantitates esse, numerum vulgarem 4, & numerum radicalem qui est radix prima numeri vulgaris 32: sed etiam docet hunc numerum radicalem, esse numerum radicalem surdum: ergo admittit, eiusdem generis quantitates esse, tum numerum vulgarem 4, tum numerum radicalem surdum, qui indicat radicem primam vulgaris numeri 32; quoniam igitur iuxta antiquam Mathesim manifestum est, numerum vulgarem 4, pertinere ad genus discretarum quantitatum siue numerorum: etiam admittit, ad hoc idem genus pertinere aliquem numerum radicalem surdum; quodque hic de aliquo numero radicali surdo in exemplo ostendimus, similiter verum esse de omnibus surdis radicalibus numeris satis manifestè patet ex consideratione allati argumenti.

Consideratio VI.

Declarantur definitiones rationum, necnon æqualium rationum, atque rationum indifferentium.

QVanti momenti in Geometria sit scientia proportionum, nemo est Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto & sexto libro. Sed quamuis illi cæterisque elementorum conditoribus plurimum debeamus; in ijs tamen, quæ de proportione tradiderunt, desiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione quinta libri quinti vertitur: vbi tradit Euclides, quid sit quatuor magnitudines esse proportionales, siue duas rationes, easdem, similes, æquales esse. Definit igitur duas rationes tum æquales dici seu similes, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, consequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, semper vel simul æqualia sunt, vel simul maiora, vel simul minora. Atque ex ea definitione omnes deinde quinti & sexti libri demonstrationes mediatè vel immediatè deducit. Hæc doctrina Euclidea summa: quæ multiplicem vt dixi difficultatem habet &c. Hæc P. Andreas Taquet initio libri quinti suorum Euclideorum elementorum: cum quo alij innumeri Mathematici conueniunt quoad insubsistentiam doctrinæ elementaris de proportionibus, quæ pro rebus Mathematicis maximè necessaria est. Plurimi etiam inueniuntur qui ingeniosè conati sunt emendare Euclideos huius doctrinę defectus: & proponere, pro speculatiua Mathesi hactenus desideratam, proportionum elementarem doctrinam firmam, atque subsistentem. Si meo iudicio talem apud alios inuenissem, alijs impendissem bonas horas quas cōsumpsi cōdendo (vt opinor noua) elementari doctrina de proportionibus, quæ speculatiuè & firmiter subsistat: non tantum pro ijs quæ ex Euclideis elementis deducit antiqua Mathesis, verum etiam pro alijs nonnullis quibus indiget nostra Logistica. Pro hac nō sufficeret integra antiqua proportionum elementaris doctrina, etiamsi foret firma, & careret defectibus quos notant & emendare conati sunt magis moderni Mathematici. Ex his quidem vt opinor, nullus sufficientem reddidit æqualium rationum definitionem: sed tamen admittere non possum, quod in reliquis ab hac definitione diuersis, nihil requiratur, vt solida & firma haberi possit doctrina Euclidea de proportionibus. Ex hac definitione non dependet scriptis voluminibus inter Mathematicos agitata controuersia: vtrum compositio rationum de qua agit Euclides, fiat per additionem vel multiplicationem: & cum hac connexa disputatio, vtrum duæ rationes multiplicari possint, sicut multiplicari possunt duæ quantitates: aliæque non satis iudicatæ lites, de quibus consuli potest P. Franciscus Xauerius Aynscom S. I. in libro de natura & affectionibus rationum & proportionum Geometricarum, vel authores qui in hoc libro citati inueniuntur. Quicunque nobiscum admittit, quod proportio quantitas sit: & præterea cum antiqua Mathesi concedit, duas quantitates simul multiplicari posse: certè negare non potest possibilem multiplicationem inter duas proportiones; quoniam verò inter Mathematicos controuertitur possibilitas multiplicationis duarum proportionum: ex Euclidea, vel ab ipsis admissa proportionis definitione, non satis constat vtrum proportio, sit, vel non sit quantitas: & consequenter non satis constat, vtrum proportio pertineat vel non pertineat ad Matheseos obiectum, quod fatentur constitui à quantitatibus. Euclidea rationis siue proportionis definitio, affirmat quod sit *duarum eiusdem generis magnitudinum mutua quædam secundum quantitatem habitudo*: saltem ita testatur P. Taquet in tertia definitione lib. 5. elementorum. Quoniam igitur ratio dicitur quædam secundum quantitatem habitudo, diuersæ huiusmodi habitudines videntur admittendæ: quæ ex his pluribus per vocem *ratio* intelligenda est? Relatio abstracta fortassis non male dicitur *mutua relatio siue habitudo*: an fortè etiam *mutua* dici potest relatio concreta, quæ iuxta Logisticam intelligenda est per vocem *ratio*, quoties in circumstantijs non satis declaratur quod sermo sit de abstracta relatione? Si verò in Euclideis elementis ne quidem satis declaratum inuenitur, quid per vocem *ratio* vel *proportio* intelligendum sit, ac præterea illa asseratur de quantitate (cuius vocis significatio etiam non satis declarata inuenitur, vt constat ex prima consideratione) hanc proportionis definitionem sufficientem asserere, nihil aliud nobis videtur, quam affirmare, quod definitio de incognito asserens aliquid incognitum, possit cognitum reddere definitum. Hæc obiter notasse circa aliorum doctrinam elementarem, sufficit ad præsens institutum: neque enim alia de causa à me annotantur, nisi vt lectori satis constet, me non nouitatis studio, sed necessitate compulsum proponere eam elementarem doctrinam de proportionibus, qua vtor in Logistica; hæc tantum mihi videtur ab antiqua differre, vt negare non possim quod sit noua; displicet tamen planè nouam fateri, quodque (vt feci in alijs nonnullis) assignare non possim aliquod ex antiquioribus desumptũ fundamentum, ex quo nõ improbabiliter appareat deriuata: verum de eius origine aliud dicere non possum, nisi quod considerando aliorum doctrinas dependentes ab elementari doctrina proportionum, atque adhibendo resolutionis regulam (de qua egimus cap. 10. lib. 1. & illa est qua antiqui Mathematici, dicuntur sua omnia inuenisse) inciderim in illas proportionum notitias, quæ in Logistica nostra constituunt elementa doctrinæ de proportionibus. Ordinem huius inuentionis enarrare, nihil conducit ad subsistentiam huius doctrinæ: ad quam non parum videtur conducere ordo quo proponitur à nostra Logistica; quandoquidem pro speculatiua Mathesi, firma atque legitima dici tantum possit doctrina, in qua ex clarioribus & satis cognitis, proceditur ad minus cognita, & hæc ex illis innotescunt.

Pro elementari Logisticæ nostræ doctrina proportionum, hunc ordinem seruamus. Primò, exponimus significationem vocum *magnitudo* & *quantitas*: notando quomodo intelligi possint in sensu abstracto, & in sensu concreto: quodque in Mathesi semper intelligi debeant in sensu concreto, quoties contrarium non satis expressè constat ex circumstantijs in quibus adhibentur; in quo sensu concreto idem significant cum vocibus *magnum* & *quantum*, quæ aliud significare non possunt quam concreta; ab his magnitudinis concretis, dicimus constitui Matheseos

seos

ſeos obiectum; quæ ſingula fuſius expoſuimus in prima conſideratione.

Secundò, exponimus duplicem diuerſum modum conſiderandi quantitates: nimirum relatè ad alias relatione magnitudinis, & non relatè ad alias hac relatione: & ſtatuimus poſteriores, quas aliter quantitates abſolutas appellamus, intelligendas eſſe per vocem *qantitas* ſiue *magnitudo*; reliquas, ſiue relationis magnitudine relatas quantitates, intelligẽdas eſſe per voces *ratio* vel *proportio*, quibus vocibus eamdem ſignificationem concedimus. Rationes ſubdiuidimus, in rationes æqualitatis, & inæqualitatis: vbi ad præſens inſtitutum notamus, paſſim ab omnibus Mathematicis & non Mathematicis haberi ſatis cognitum, & ex terminis notum, quid ſit vnam abſolutam quantitatem, alteri abſolutæ quantitati æqualem eſſe, ſiue neque maiorem neque minorem dici poſſe, tametſi ad illam referatur relatione magnitudinis: quod idem ſignificatur, dicendo quod vna quantitas ad alteram habeat rationem æqualitatis. De his ſi plura placent conſule indicem.

Tertiò declaratos exhibemus ductus Geometricos quos reales dicimus, & alios quos appellamus æquiualentes ductibus realibus: notando, & explicando, quomodo, non quidem ductu reali, ſed tamen ductu æquiualente, quælibet quantitas duci poſſit in quamlibet quantitatem: & quomodo ex cognitione quantitatum quæ ducuntur, cognita fiat quantitas quæ ex ductu producitur; quæ ſingula independenter ab omni æqualium rationum cognitione, declarata proponuntur in conſideratione tertia, & quarta.

Quartò, ex prius enarratis ac clarè cognitis, gradum facimus ad definitionem rationum æqualium: ſtatuendo, quod omnes & ſolæ iſtæ rationes dicendæ ſint inter ſe æquales, quæ habent hanc proprietatem: nimirum, vt quantitas abſoluta quæ eſt productum reale vel æquiualens, quod ductu primo oritur ex primo iſtarum rationum termino ducto in vltimum: ſit æqualis quantitati abſolutæ quæ eſt productum reale vel æquiualens, quod ductu primo oritur ex iſtarum rationum medijs terminis; hoc idem à nobis ſignificatur, dicendo omnes & ſolas illas rationes dici æquales, quæ habent hanc proprietatem, vt quantitas producta ex illarum rationum primo termino ducto in vltimum, æquetur producto ex earumdem rationum ſecundo termino ducto in tertium. Hæc rationum æqualium definitio, ſuperius annotata inuenitur in initio cap. 3. lib. 1. vbi etiam ſatis declarantur nonnullę voces quæ ad definitionis intelligentiam requiruntur, & aliqua expoſitione indigent, atque diuerſæ ſunt à vocibus *ratio* vel *productum*, quarum ſignificatio manifeſta eſt, ex ijs quæ hic primò, ſecundò, & tertiò loco, enumerata ſunt, ac prænotata.

Quintò, ex commemorata definitione rationum æqualium, & prius prænotatis (quæ ſingula pertinent ad terminorum intelligentiam, requiſitam pro elementari proportionum doctrina noſtræ Logiſticæ, [illegible] ad eius axiomata, & ex his deducimus elementaria eius theoremata, de quibus agimus cap. 1. & 2. lib. 2.

Ex his conſtat ordo, quo à Logiſtica traditur doctrina elementaris proportionum; ad hunc ordinem non pertinet vlterior ſubdiuiſio rationum inæqualium, in rationes, quarum alias dicimus indifferentes, alias appellamus non indifferentes: iſtarum tamen rationum intelligentia & declaratio neceſſaria eſt pro noſtra Logiſtica; pro hac intelligentia, ante omnia ſciendum, quid à nobis ſignificetur per quantitates indifferentes, quæ aliter dici poſſunt, contrariantes, vel aduerſantes, vel compenſantes. De his quantitatibus egimus in ſecunda conſideratione, exponendo diuerſos valores, qui numeris conuenire poſſunt, maximamque Matheſi afferunt vtilitatem. Iuxta hæc, in Logiſtica noſtra quantitates compenſantes dicuntur, quæ conſiderantur habere valorem ad fines contrarios atque inter ſe oppoſitos. Exempli gratia, in puerorum ſcholis, numeri bonarum & malarum notarum, ſunt numeri compenſantes, quia bonæ notæ compenſant malas notas: & viciſ-

viciſſim notæ malæ, compenſant bonas: ſic vt ſtatus in ordine ad præmium vel pænam non varietur per acquiſitionem æquè multarum bonarum & malarum notarum. Rurſus numeri milliariorum itineris, verſus Orientem & Occidentem ſunt numeri compenſantes: ſic vt locus in quo aliquis exiſtit, inuariatus perſeueret poſt æquè multa itineris milliaria, tum verſus Orientem, tum verſus Occidentem. Præterea numeri graduum meriti boni & meriti mali, ſunt numeri compenſantes: ſic vt ſtatus in ordine ad præmium vel ſupplicium idem perſeueret poſt acquiſitos æquè multos gradus meriti boni & meriti mali ſe inuicem deſtruentes. Intellectis in hunc modum numeris ſiue quantitatibus compenſantibus, paſſim conſideratis, etiam à non Mathematicis: pro commodo illorum vſu in Matheſi, aſſumũtur à noſtra Logiſtica duo ſigna + & —, & ſtatuitur lex vniuerſalis præſcribens, vt in vſu duarũ cõpenſantiũ quantitatũ pro libitu vna ſigno + altera ſigno — afficiatur: ita tamen vt omnes quantitates, quæ expreſsè atq; explicitè affectæ non ſunt ſigno —, conſiderentur vt affectæ ſigno +: & vt poſitiuæ appellentur, omnes & ſolæ illæ quæ afficiuntur ſigno +: reliquæ affectæ ſigno —, appellentur negatiuæ. Hinc fit in noſtra Logiſtica, quod parum vtile ſit, ſignis + & — ab inuicem diſtinguere quantitates compenſantes, quando ſimul non adhibentur; quandoquidem enim ſingulæ eumdem valorem habentes ſiue inter ſe non contrariæ, pro libitu affici poſſunt vel ſigno + vel ſigno —, & appellari poſitiuæ, vel negatiuæ: patet quod hoc caſu, omnis vtilitas ſignorum + & — ceſſaret in Logiſtica, niſi hæc ſigna etiam prodeſſent, vt clarius ab inuicem ſeparata exhiberentur in ſucceſſiua ſcriptione, quæ inter ſe diuerſa ſunt, & conſtituunt diuerſos numeros, quorum aggregatum à tali ſcriptione repræſentatur; vt ſatis clarè patet ex dictis de compendiatis ſcriptionibus Logiſticis, ſuperius in parte 2. cap. 1. lib. 1.

Intellectis quantitatibus compenſantibus, quæ aliter dicuntur quantitates ſigno + vel — affectæ: rationem indifferentem appellamus, omnem & ſolàm illam rationem, quæ inter duas quantitates compenſantes inuenitur; hoc eſt inter duas quantitates diuerſis ſignis affectas, ſiue inter duas quantitates quarum altera eſt poſitiua, altera eſt negatiua; hæc indifferentia ex eo deſumitur, quod quælibet reliqua maiorem valorem habet, ſed in ordine ad contrarios & inter ſe oppoſitos fines; poſitiuę habent maiorem valorem ad augendum poſitiuarum quantitatum valorem, vel ad imminuendum negatiuarum quantitatum valorem. Et viciſſim negatiuæ quantitates habent maiorem valorem, ad augendum negatiuarum quantitatum valorem, vel ad imminuendum valorem quantitatum poſitiuarum.

De vſu practico quantitatum poſitiuarum & negatiuarum pro operationibus Logiſticis, agitur ſuperius in parte 4. cap. 2. lib. 1. Quare verum ſit quod illic dicitur verum eſſe de illarum vſu pro additione vel ſubtractione: non difficulter colligi poteſt ex ſpeculatiua iſtarum quantitatum declaratione propoſita vel hic, vel in ſecunda conſideratione. Quod verò ibidem pro praxi docetur in ordine ad reliquas duas Logiſticas operationes, nimirum multiplicationem & diuiſionem: talia non ſunt, vt ex hactenus dictis de quantitatibus noſtris poſitiuis & negatiuis, facilè colligi poſſit, quare vera ſint: id autem conſtabit ex ſubſequente conſideratione, agente de regula aurea, cuius compendia ſunt duæ iſtæ vltimæ operationes Logiſticæ.

Con-

Consideratio VII.

Declaratur regula aurea, prout necessaria est pro nostra Logistica, admittente rationes indifferentes.

Regula aurea, tum in Logistica nostra, tum in antiqua Mathesi, appellatur illa praxis, quæ ad datos tres terminos, docet inuenire quartum proportionalem. Hanc regulam auream, quantum pro praxi sufficit, satis declarauimus in parte 1. cap. 3. lib. 1.

Quoad vniuersalitatem huius aureæ regulæ, nō conuenit nostra Logistica cum antiqua Mathesi; hæc nusquam considerat rationes quæ à nobis appellantur indifferentes, vt notauimus in reflexione 5. capitis præcedentis: Logistica verò nostra, præter rationes in antiqua Mathesi consideratas, quasque non indifferentes appellamus: etiam considerat rationes indifferentes, explicatas in præcedenti consideratione. Hinc in Mathesi antiqua, solui tantum possunt quæstiones, pro quibus requiritur æqualitas duarum rationum non indifferentium: quæ omnes & solæ, soluuntur per auream regulam antiquæ Matheseos; reliquæ quæstiones, pro quibus requiritur æqualitas duarum rationum indifferentium: etiam soluuntur per regulam auream nostræ Logisticæ, quæ proinde vniuersalior negari non potest. Tales quæstiones non solubiles per auream regulam antiquæ Matheseos, sunt subsequentes.

Nonnullæ quæstiones, quæ faciles quidem sunt: sed tamen insolubiles, regulis aut legibus annotatis, in Mathesi diuersa à nostra Logistica.

Quæstio. Vna nota bona delet vnam notam malam, quid delebunt duæ notæ malæ? Respondeo quod delebunt duas notas bonas. De hac qustione aliqua notata inueniuntur versus finem 5. reflexionis capitis præcedentis. Vt questio compendiata scriptione exhibeatur, duplex fieri potest hypothesis; prima est, vt notæ malæ dicantur negatiuæ; secunda est vt notæ bonæ dicantur negatiuæ. Supposita prima hypothesi, prior ex subsequentibus duabus compendiatis scriptionibus repræsentat propositam quæstionem: altera scriptio illam repræsentat in secunda hypothesi. I.

Prima scriptio; $+1$ dat -1, quid -2? Respondeo dat $+2$.

Secunda scriptio; -1 dat $+1$, quid $+2$? Respondeo dat -2.

Quæstio. Creditum vnius aurei, compensat debitum vnius aurei: quid compensabit debitum duorum aureorum? Respondeo, quod compensabit creditum duorum aureorum. Supponi potest duplex hypothesis, quarum prima est, vt aurei debiti dicantur negatiui: altera est, vt aurei crediti dicantur negatiui. In prima hypothesi, prima scriptio Logistica exhibet propositam quæstionem: quam secunda scriptio exhibet in secunda hypothesi. II.

Prima scriptio; $+1$ dat -1, quid -2? Respondeo dat $+2$.

Secunda scriptio; -1 dat $+1$, quid $+2$? Respondeo dat -2.

Quæstio. Vnus gradus meriti boni, tollit vnum gradum meriti mali: quid tollent duo gradus meriti mali? Respondeo quod tollent duos gradus meriti boni. Ex duplici hypothesi licita, prior sit, quod gradus mali meriti sint vnitates negatiuę. III.

Secun-

Secunda sit, quod gradus boni meriti, sint vnitates negatiuæ. Subsequens prior scriptio compendiata, exhibet propositam quæstionem in prima hypothesi; altera scriptio, exhibet eamdem quæstionem in secunda hypothesi.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

IV. Quæstio. Vnum milliare accessus ad locum, causat oppositum eius quod causatur ab vno milliare recessus ab eodem loco: duo milliaria recessus à tali loco, quid causabunt? Respondeo quod causabunt oppositum eius quod causaretur à duobus milliaribus accessus ad talem locum. Ex duplici hypothesi quæ fieri potest: prima sit, vt milliaria recessus vocentur negatiua; secunda sit vt milliaria accessus dicantur negatiua. Ex sequentibus duabus scriptionibus, prior in prima hypothesi: posterior in secunda hypothesi compendiatè repræsentat propositam quæstionem.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

V. Quæstio. Distantiam quam dat motus vnius horæ iuxta ordinem signorum, tollit motus vnius horæ contra ordinem signorum: quid faciet motus duarum horarum contra ordinem signorum? Respondeo, tollet distantiam quam daret motus duarum horarum iuxta ordinem signorum. Ex duplici hypothesi quæ fieri potest: prima sit, quod negatiuæ sint horariæ vnitates significantes motum contra ordinem signorum; secunda hypothesis sit, quod negatiuæ dicantur horariæ vnitates significantes motum iuxta ordinem signorum. In prima hypothesi, propositam quæstionem compendiatè repræsentabit prima scriptio; secunda scriptio hoc præstabit in secunda hypothesi.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

VI. Quæstio. Ascensus duorum scalæ graduum, inutilem reddit descensum duorum eiusdem scalæ graduum: quid inutile reddet descensus quatuor scalæ graduum? Respondeo quod inutilem reddet ascensum quatuor scalæ graduum. Prima vocetur hypothesis quæ supponit gradus descensus esse negatiuos; secunda dicatur quæ supponit gradus ascensus dici negatiuos. Prima scriptio in prima hypothesi: secunda scriptio in secunda hypothesi exhibebit compendiatè propositam quæstionem.

Prima scriptio; † 2 dat — 2, quid — 4? Respondeo dabit † 4.

Secunda scriptio; — 2 dat † 2, quid † 4? Respondeo dabit — 4.

VII. Quæstio. Lucrum vnius aurei, satisfacit damno vnius aurei: damnum duorum aureorum, cui satisfaciet? Respondeo quod satisfaciet lucro duorum aureorum. Prima hypothesis supponat aureorum damnum indicari signo —: secunda hypothesis supponat aureorum lucrum indicari signo —. Prima scriptio in prima hypothesi: secunda scriptio in secunda hypothesi compendiatè repræsentat propositam quæstionem.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dabit † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dabit — 2.

VIII. Quæstio. Vas quod implet vna mensura infusa: euacuat vna mensura effusa: vas quod euacuant duæ mensuræ effusæ, quid implebit? Respondeo quod hoc vas implebunt duæ mensuræ infusæ. In prima hypothesi, signo — afficiantur mensuræ effusæ; In secunda hypothesi, signo — afficiantur mensuræ infusæ. In prima hypothesi, prima scriptio: in secunda hypothesi, secunda scriptio compendiatè repræsentat propositam quæstionem.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo quod dabit † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo quod dabit — 2.

Quæ-

Quæstio. Vnus gradus caloris, destruit vnum gradum frigoris: quid destruent duo gradus frigoris? Respondeo quod destruent duos gradus caloris. In prima hypothesi signum — indicet gradus frigoris: in secunda hypothesi signum — indicet gradus caloris. In prima hypothesi prima scriptio: in secunda hypothesi secunda scriptio compendiatè exhibet propositam quæstionem. IX.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda Scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

Quæstio. Scriptio vnius horæ, compensat otium vnius horæ: quid compensabit otium duarum horarum? Respondeo quod hoc otium compensabit scriptio duarum horarum. Prima dicatur hypothesis in qua horæ otij afficiuntur signo —; secunda dicatur hypothesis in qua horæ scriptionis afficiuntur signo —. Prima scriptio, in prima hypothesi: altera in secunda hypothesi compendiatè repræsentat quæstionem. X.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

Quæstio. Fructus vnius anni, respondent alimentis vnius anni: cui respondebunt alimenta duorum annorum? Respondeo quod respondebunt fructibus duorum annorum. In prima hypothesi signum — denotet alimenta annua: in secunda hypothesi signum — denotet fructus annuos. Ex sequentibus scriptionibus; prior in prima hypothesi: posterior in secunda hypothesi indicabit propositam quæstionem. XI.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dat † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dat — 2.

Quæstio. Additio vnius vnitatis, compensat subtractionem vnius vnitatis: quid compensabit subtractionem duarum vnitatum? Respondeo quod illam compensabit additio duarum vnitatum. In prima hypothesi vnitates subtractæ afficiantur signo —: in secunda hypothesi vnitates additæ afficiantur signo —. Prima scriptio, in prima hypothesi: secunda scriptio, in secunda hypothesi, compendiatè exhibet propositam quæstionem. XII.

Prima scriptio; † 1 dat — 1, quid — 2? Respondeo dabit † 2.

Secunda scriptio; — 1 dat † 1, quid † 2? Respondeo dabit — 2.

Quis in Mathesi non satis versatus credere posset, facillimas quæstiones hic enumeratas & innumeras illis similes, & facilè enumerabiles, tales esse: vt dici possit pro illarum solutione non sufficere, neque antiquam Mathesim, neque Algebram? Vt Mathematicus intelligat hoc verissimum esse: satis illi est reflectere, singulas istas quæstiones tales esse, vt pro illarum solutione necessariò requiratur æqualitas, inter duas rationes, quæ in Logistica nostra appellantur indifferentes; quoniam igitur vel in antiqua Mathesi, vel in Algebra, nusquam considerantur istæ rationes indifferentes, aut hoc, aut alio nomine indicatæ; satis patet, nullas præscribi aut regulas, aut praxes, aut præcepta: quæ sufficiant pro solutione istarum quæstionum: quas proinde fateri oportet insolubiles, & antiquæ Mathesi, & Algebræ.

Si quis parum versatus in rebus Mathematicis, sed tamen non ignarus praxium fundamentalium Algebræ, agentium de vsu signorum † & —: existimet tales praxes sufficere ad soluendas quæstiones commemoratas, ex eo capite, quod ex his Algebræ praxibus inferri possit singularum quæstionum compendiatè scriptarum, solutio compendiatè scripta, quam quæstioni apposuimus: à veritate non aberraret; inde tamen malè inferret, quod prædictæ quæstiones Algebræ solubiles sint; sed bene inferret quantum Algebra practica debeat nostræ Logisticæ, quod præcipuas & practicas Algebræ praxes agentes de vsu signorum † & — retinuerit, & per hoc effecerit, vt deinceps Algebra practica possit soluere prædictas

dictas quæstiones, saltem compendiatè scriptas: atque ita aliquid præstare, pro quo non sufficiebat, neque speculatiua neque practica, aut antiqua Mathesis aut Algebra, antequam extaret nostra Logistica. Si quis huius veritatis euidentiam desideret, quærat vbi Algebra doceat ad longum propositas prædictas quæstiones exhibere ea compendiata scriptione, qua singulas exhibuimus; profectò si hanc compendiatam scriptionem doceret Algebra: intellexisset Clauius quare verum sit, quod fatetur in sua Algebra, se ignorare cur verum sit: vlterius affirmando, quod *debilitas ingenij humani accusanda sit, quod capere non possit quo pacto id verum esse possit*. Vt notauimus in paradoxo primo cap. 3. huius lib. Pro ijs qui speculatiua delectantur, magis proderunt subsequentia nostrę Logisticæ speculatiua fundamenta, quibus regula aurea innititur: ex quibus cognoscent verissimum esse quod asseruimus verum esse de quæstionibus paulò ante commemoratis, vt ostenderemus regulam auream nostrę Logisticæ amplitudine superare regulam auream traditam ab antiqua Mathesi vel Algebra.

Speculatiua fundamenta aureæ regulæ, requisita pro nostra Logistica.

Quoad speculatiua fundamenta regulæ aureæ, differt nostra Logistica à Mathesi antiqua: quod non tantum verum est, agendo de differentia quæ resultat ex maiori amplitudine requisita pro aurea regula nostræ Logisticæ: verum etiam agendo de fundamētis illius regulæ aureæ, quæ nostræ Logisticæ & antiquæ Mathesi communis est: quæque tantum admittit æqualitatem duarum rationum, quæ diuersæ sint, à rationibus quas appellamus indifferentes. Hæc differentia inter speculatiua fundamenta regulæ aureæ, communis antiquæ Mathesi & nostræ Logisticæ, nobis videtur digna consideratione: quippe ex illa resultat & sequitur, antiquæ Matheseos regulam auream bene fundatam non esse, atque speculatiuè demonstratam non subsistere: licet Logisticæ nostræ regula aurea, firma subsistat, atque legitimè demonstrata. Vt hæc differentia intelligatur, in memoriam reuocanda est, ex Cartesio in initio paradoxi 6. cap. 3. annotata doctrina, communis antiquæ Mathesi; in hac asseritur, quod multiplicatio sit compēdiū regulæ aureæ: nimirū in illo casu, in quo ex tribus terminis datis pro multiplicatione, primus est vnitas; quoniā igitur cōpendiū intelligi non potest aut demonstrari, nisi prius intelligatur & demonstretur illud cuius cōpendiū est: patet, multiplicationis intelligentiā atq; demōstrationē supponere intelligentiā atq; demonstrationē regulæ aureæ; quare Matheseos doctores antiqui atq; moderni, citatæ ex Cartesio doctrinæ adhærentes; hoc est Matheseos doctores omnes (illis exceptis, qui, vt in præcedenti consideratione vidimus, malè docent, multiplicationem esse iteratam additionem, quorum doctrinam hic negligimus) hunc ordinem seruant in suis speculatiuis doctrinis. Primò, exordium sumunt à proportionum doctrina. Secundò, ex præmissa proportionum doctrina, supponendo cognitionem rationum æqualium: declarant regulam auream. Tertiò, ex cognita regula aurea, exponunt eius compendia, nimirum multiplicationem & diuisionem. Hic doctrinæ ordo, legitimus negari non potest, dummodo singula quæ pręcedunt, legitimè subsistant: id enim requiritur, vt quæ subsequuntur, firma dici possint, atque speculatiuè & demonstratiuè subsistentia. Iam verò, vt hic non enarrem alias huius vię difficultates non passim indicatas (& fortassis parum cognitas, multòque minus sufficienter superatas: de quibus aliquid notauimus in sexta consideratione) nos terrent à tam multis doctissimis viris inutili labore consumptę horæ, vt explanatam redderent difficultatem ab omnibus cognitam in Euclidea rationum ęqua-

ęqualium definitione: quę difficultas in hac via declinari non poteſt, ſed neceſſariò ſuperanda eſt in ipſo eius initio. Hanc à nemine ſuperatam eſſe vt requiritur pro hac via, fatentur pręcipui atque perſpicaciores huius vię doctores: quare ex ipſorum confeſſione manifeſtè ſequitur, neminem hactenus perueniſſe ad illa quę ſubſequuntur in hac via: ea ſcilicet cognitione, quam requirit ſpeculatiua Matheſis.

Logiſtica noſtra aliam viam ingreditur, vt ſuos deducat ad commemoratas cognitiones ſpeculatiuas. Primò, exordium ſumendo ab expoſitione ductus primi nominati, quem realem appellat: pergit ad ductum primum reali ductui ęquiualentem: declarando, quomodo ductu primo æquiualente, quælibet data quantitas, duci poſſit in quamlibet datam quantitatem; vt conſtat ex conſideratione 3. Secundò, ad maiorem huius viæ explanationem in 4. conſideratione vlterius declarat, quomodo aliquis ductus Arithmeticus, qui aliter bene dicitur multiplicatio: ſit ductus ęquiualens ductui primo Geometrico nominato atque prius declarato. Tertiò, ex pręmiſſis cognitionibus, nullatenus ſupponentibus ęqualium rationum notitiam, ſed ab hac notitia planè independentibus, gradum facit ad ęqualium rationum cognitionem atque definitionem: de quibus agitur in 6. conſideratione. Quartò, ex prius declarata, æqualium rationum notitia, & definitione: immediatè patentes, atque ex pręmiſſis terminis manifeſtas aſſertiones aliquas notat inter ſua axiomata. Quintò, ex pręcedentibus, ſpectantibus ad prima fundamenta, peruenit ad theorema quod in cap. 2. lib. 2. quartum eſt, & idem docet, quod docet regula aurea. Sextò, à pręcognita regula aurea, eiuſque demonſtratione: procedit ad eius compendia, ſiue Logiſticę operationes, quæ appellantur multiplicatio, vel diuiſio.

Circa commemoratam viam noſtræ Logiſticę, reflectendum, multiplicationem quę regulæ aureæ compendium dicitur, & ſequitur regulam auream: eſſe diuerſam ab altera multiplicatione, quæ in hac via pręcedit regulam auream: hæc non annumeratur operationibus Logiſticis: intelligi poteſt, non intellectis pluribus quam duobus datis terminis: productum eius conſiderari poteſt genere differre, à quantitatibus ex quibus producitur: & quia in hac conſideratione, nullus ex terminis producentibus, ad productum habet vllam proportionem: ad huius multiplicationis intelligentiam, non requiritur intelligentia proportionum: atque nullatenus dependet à proportionum æqualium intelligentia. Altera multiplicatio, quam diximus compendium regulæ aureæ, annumeratur operationibus Logiſticis: intelligi non poteſt, niſi intellectis pluribus quam duobus datis terminis: ſupponit enim tres cognitos terminos, ex quibus primus ſit vnitas, & reliqui duo ſunt illi qui dicuntur multiplicari: productum eius conſiderari non poteſt genere differre à producentibus: ſed eius productum, neceſſariò eſt quantitas eiuſdem generis, cum aliqua ex producentibus: ad huius multiplicationis intelligentiam, neceſſariò requiritur intelligentia rationum ęqualium, vt pro regula aurea, cuius compendium eſt.

Regula aurea vniuerſalior, atque requiſita pro noſtra Logiſtica: dependet non tantum ab ea rationum æqualitate, quæ inuenitur inter duas rationes quæ diuerſæ ſunt à rationibus quæ in Logiſtica noſtra indifferentes dicuntur, ſed etiam dependet ab illa duarum rationum æqualitate, quæ inuenitur inter duas rationes indifferentes. Quod ſufficit ad partialem Logiſticæ noſtræ regulam auream, nobis cum antiqua Matheſi communem: videtur ſatis conſtare ex hactenus dictis de hac regula aurea; quibus proinde nobis tantum addendum eſt, quod requiritur ad regulam auream, in quantum termini pro illa dati, ſunt ex illis, qui conſtituunt rationes indifferentes: ſic vt prima ratio data, cui altera æqualis inueniri debet, ſit ratio indifferens: quo caſu, etiam poſterior atque per regulam auream inuenienda ratio priori æqualis, alia esse non potest quam ratio indifferens. Etenim ex præcedenti consideratione in qua declarauimus, tum rationes quæ in Logistica nostra dicuntur indifferentes, tum etiam illas quæ dicuntur non indifferentes: patet illas amplius inter se differre, quam quod vna sit maior vel minor altera. Similiter, ex ibidem dictis constat, quod in ea consideratione, in qua vna, vel absoluta quantitas, vel ratio, dicitur altera maior, vel minor, vel illi æqualis: vtraque considerari debeat, sic vt in hac consideratione non aliter inter se differant, quam quod vna sit maior, vel minor altera, vel illi æqualis; ex quibus patet, quod si vna ex duabus rationibus æqualibus atque requisitis pro regula aurea, sit ratio indifferens: etiam alteram per hanc regulam inueniendam rationem debere esse rationem indifferentem.

Hoc requisitum, claritatis gratia, vocando primam legem rationum inter se æqualium: hæc prima lex requirit, vt quotiescunque ex duabus rationibus inter se æqualibus, prior non est ratio indifferens: etiam secunda non sit ratio indifferens; quoties verò prima est ratio indifferēs, etiā altera sit ratio indifferēs. Ex vi huius primæ legis, supposito quod prima ratio non sit indifferens, adeòq; eius termini similibus signis afficiantur: altera ratio nō potest esse indifferens, sed debet esse ratio non indifferens: siue constare ex terminis affectis similibus signis. Ex. gr. supposito quod singuli duarum inter se æqualium rationum termini constituantur à numeris binarijs, tantum quoad signa inter se differentibus, vel non differentibus: quando prima ratio est † 2 *ad* † 2, secunda ratio alia esse non poterit quam † 2 *ad* † 2, vel certè − 2 *ad* − 2. Similiter si prima ratio est − 2 *ad* − 2, secunda ratio alia esse non poterit quam † 2 *ad* † 2 vel − 2 *ad* − 2; vtroque enim casu prima ratio constat terminis affectis similibus signis, adeòque iuxta præscriptam legem, secunda ratio debet constare terminis similibus signis affectis. Vt verò constet hanc præscriptæ legis primam partem non esse arbitrariam, atque tantum fundatam in beneplacito legislatoris: sed esse necessariam in ea significatione signorum † & −, quam admittit & supponit nostra Logistica: sufficit considerare significationem quam istarum rationum termini habent: ex quo manifestum fit, impossibile esse oppositum eius quod lex necessarium asserit. Si enim fieri potest, supponatur verum quod † 2 *ad* † 2 = † 2 *ad* − 2; quoniam in hac æquatione euidens est, primam rationem, esse rationem æqualitatis: vt æquatio vera esse possit, secunda ratio etiam deberet esse ratio æqualitatis: sed ex præmissa terminorum expositione constat, quod ratio † 2 *ad* − 2, non possit esse ratio æqualitatis: ergo etiam ex terminis constat, impossibile esse, vt † 2 *ad* † 2 = † 2 *ad* − 2; & consequenter patet ex terminis necessarium, & etiam manifestum, quod in propositæ legis prima parte præscribitur. Huius eiusdem legis secunda pars præscribit, vt quotiescunque ex duabus rationibus inter se æqualibus prioris rationis termini dissimilibus signis afficiuntur: etiam posterioris rationis termini, afficiantur signis dissimilibus. Vt etiam huius partis necessitas, manifesta fiat ex terminis: iuuat considerare impossibilitatem eius quod aduersatur præscripto huius partis propositæ legis; supponatur itaque verum quod † 2 *ad* − 2 = − 2 *ad* − 2: hoc supposito, quoniam manifestum est, secunda huius æquationis parte contentam rationem, esse rationem æqualitatis: vt asserta æquatio vera esse possit, necessarium foret, vt etiam ratio contenta in prima parte eiusdem æquationis, foret ratio æqualitatis: sed ex præmissa terminorum expositione constat, quod ratio † 2 *ad* − 2, non sit ratio æqualitatis: ergo etiam ex terminis constat, impossibile esse vt † 2 *ad* − 2 = − 2 *ad* − 2: & consequenter constat ex terminis, manifestum & necessarium esse, quod pręscribitur in secunda parte propositæ legis: nimirum supposito quod duarum inter se ęqualium rationum, prior habeat terminos diuersis signis affectos: etiam secundam rationem requirere terminos affectos

fectos

fectos diuersis signis; & exempli gratia supposito quod ex tribus prioribus terminis, vnus sit affectus signo —, reliqui sint affecti signo †, quartum necessariò requirere signum —; vel supposito quod ex tribus prioribus terminis, primus afficiatur signo †, reliqui duo afficiantur signo —, quartum necessariò requirere signum †. Iuuabit tamen considerare sensum, siue significationem, quam habet æquatio conformis secundæ parti legis prius præscriptæ; talis æquatio est illa in qua asseritur — 2 *ad* † 2 = † 2 *ad* — 2: hoc est, quod duæ vnitates negatiuæ ad duas vnitates positiuas, habeant eamdem rationem, quam habent duæ vnitates positiuę ad duas vnitates negatiuas; huius assertionis sensus est, quod duæ vnitates negatiuæ, respectu facto ad duas vnitates positiuas, habeant eamdem magnitudinem, quam habent duæ vnitates positiuæ respectu facto ad duas vnitates negatiuas: magnitudo cuius identitas asseritur in vtraque ratione, est magnitudo compensationis: quæ tanta asseritur inueniri in duabus vnitatibus negatiuis ad compensandas duas vnitates positiuas: quanta est illa quæ inuenitur in duabus vnitatibus positiuis, ad compensandas duas vnitates negatiuas: quæ singula videntur mihi clarissima, supposita intelligentia terminorum prius declaratorum.

Quoniam igitur hic, vt fit in antiqua Mathesi, tantum agimus de regula aurea nō admittente plurium quam duorum diuersorum nominum terminos, ex quibus, tres dantur, & quartus proportionalis inueniendus est: in hac regula aurea prout requiritur pro nostra Logistica, vtiliter considerantur duo casus; quorū primus est, vt dati termini (siue careant signis † vel —, siue habeant illa signa) non afficiantur diuersis signis, sed omnes tres conueniant inter se quoad signa. Secundus casus est, vt ex illis datis terminis, vnus aliquis, à reliquis duobus differat quoad signum. In primo casu, regula aurea, & antiquæ Mathesi & nostræ Logisticæ, dici potest communis: quippe ad eius intelligentiam sufficiunt, quæ requiruntur pro regula aurea quam docet antiqua Mathesis; hæc primo loco declarauimus in consideratione speculatiuorum fundamentorum regulæ aureæ. In secundo casu, regula aurea dependet à rationibus indifferentibus, quarum considerationem existimamus propriam nostræ Logisticæ; quæ ad istarum indifferentium rationum intelligentiam requiruntur, adeòque necessaria sunt pro regula aurea in secundo casu: abundè indicata & declarata videntur, in hactenus dictis de quantitatibus contrariantibus, & rationibus indifferentibus, atque requisitis vt duæ rationes indifferentes intelligi possint inter se æquales. Reliquum igitur est, vt aliqua notemus circa declaratæ regulæ aureæ compendia, constituentia illas Logisticas operationes, quæ aliter appellantur, multiplicatio, & diuisio: quæ sola duo compendia regulæ aureæ à nobis admittuntur: quandoquidem radicum extractiones annumeremus compendio regulæ aureæ quod diuisio dicitur, atque in diuersas diuisiones subdiuidi potest: quarum vna est prima radicis extractio, hoc est diuisio propositi numeri, vt productum diuisori æquetur: siue compendium regulæ aureæ in qua primus terminus est diuisor, incognitus quidem, sed producto æqualis: secundus terminus est propositus numerus: tertius terminus est vnitas. Reliquarum verò radicum extractiones dici possunt iteratæ regulæ aureæ, aut illarum compendiua.

De compendijs regulæ aureæ quorum vnum multiplicatio alterum diuisio appellatur.

Intelligentia compendiorum regulæ aureæ deriuanda est ex cognitione regulæ aureæ cuius compendia sunt; talia compendia non admittit regula aurea, nisi in quan-

quantum aliquis ex tribus terminis ad quos quartus proportionalis inueniendus est, constituatur ab vnitate. Si primus ex his tribus terminis vnitas est, compendium regulæ aureæ appellatur multiplicatio. Verum si aliquis ex his tribus terminis à primo diuersus, vnitas est; huius regulæ aureæ compendium appellatur diuisio. Hæc multiplicatio aut diuisio dici non posset compendium regulæ aureæ, si illi non conueniret quidquid necessariò conuenit regulæ aureæ cuius compendium dicitur: vnde per singula ex his compendijs, inuenitur illud idem productũ quod inuenitur per regulam auream cuius compẽdium est; dicũtur verò compendia, in quantum illud productum assequuntur via paulò magis compendiata atque breuiori: cæterum hoc productum tam pro non compendiata quam pro compendiata regula aurea, necessariò talis terminus est, vt aliquis ex tribus terminis qui pro regula aurea dati dicuntur, & à primo diuersus est, ad terminum productum ex regula aurea, habeat eamdem proportionem, quam primus terminus habet ad reliquum ex datis tribus terminis; sic vt nulla regula aurea intelligibilis sit, sine intelligentia duarum rationum inter se æqualium; idem enim est quartum terminum proportionalem inuenire, & inuenire duas rationes inter se æquales: quia quatuor termini proportionales haberi non possunt, nisi habeantur duæ rationes inter se æquales: neque haberi possunt duæ rationes inter se æquales, nisi habeantur quatuor termini proportionales. Iam verò in vniuersaliori illa regula aurea requisita pro nostra Logistica, duos casus vt diximus diuersos considerauimus: primus est, quando duæ rationes æquales, atque requisitæ pro regula aurea: sunt rationes diuersæ ab illis quas appellamus indifferentes, quæ tantum considerantur ab antiqua Mathesi; secundus casus est, quando duæ rationes inter se æquales, atquæ requisitæ pro regula aurea: sunt rationes indifferentes, quæ nusquam considerantur ab antiqua Mathesi: vt notauimus in reflexione quinta capitis quarti. Agendo autem paulò superius de regula aurea non compendiata: ostendimus, quod in primo casu nulla ex duabus rationibus inter se æqualibus, atque requisitis pro regula aurea, possit habere terminos diuersis signis † vel — affectos: alioquin enim singulæ istæ duæ rationes non essent diuersæ à rationibus indifferentibus, sed ex illis aliqua esset ratio indifferens. In secundo casu etiam ostendimus quod quælibet ex duabus rationibus inter se æqualibus, atque requisitis pro regula aurea, necessariò requirat duos terminos affectos diuersis ex signis † vel —; alioquin enim singulæ istæ duę rationes non essent rationes indifferentes. His prænotatis prius consideramus compendia regulæ aureę spectantis ad primum casum: deinde compendia regulæ aureæ pertinentis ad secundum casum.

Quidquid dubiũ aut non satis intelligibile videri posset circa compendium aliquod regulæ aureæ spectantis ad primum casum, fit satis manifestum, ex intelligentia regulæ aureæ, si consideretur regula aurea cui respondet tale compendium. Exempli gratia non immeritò dubitari posset, quod, & quale productum sit, quod oritur ex multiplicatione, pro qua ex datis duobus terminis vnus sit numerus trium monetarum argentearum: alter sit numerus quatuor monetarum aurearum; etenim licet satis manifestum sit, quod ex multiplicatione instituta circa tres monetas & quatuor monetas, producantur duodecim monetæ: tamen dubium est, an ex multiplicatione instituta circa tres monetas argẽteas & quatuor monetas aureas, productum indicet monetas argenteas, vel certè indicet monetas aureas: immo huius dubij solutio, haberi non potest independenter à regula aurea, cuius compendium constituit proposita multiplicatio: hæc, ex se planè indifferens est, tum ad producendum 12 monetas aureas, tum etiam ad producendum 12 monetas argenteas; talis tamen eius indifferentia, aut propositi dubij difficultas, non inuenitur in regula aurea cuius compendium est. Eius indifferentia oritur

ex

ex eo, quod duplicis atque inter se diuersæ regulæ aureæ compendium dici possit proposita multiplicatio; ex his duabus regulis aureis, prima vocetur, in qua petitur: vna moneta argentea dat tres monetas argenteas, quid dabunt quatuor monetæ aureæ? manifestum est productum ex hac regula aurea constitui tantum posse à 12 monetis aureis. Secunda regula aurea vocetur, in qua petitur, vna moneta aurea dat tres monetas argenteas, quid dabunt quatuor monetæ aureæ? patet productum huius regulæ aureæ constitui tantum posse à 12 monetis argenteis. Ex his regulis aureis, quarum compendium est multiplicatio prius considerata, manifestum est, quid dicendum sit ad illud quod de hac multiplicatione quærebatur: nimirum eius productum non necessariò indicare vel monetas argenteas vel monetas aureas, sed esse indifferens, vt indicet monetas, vel aureas vel argenteas: licet ab his diuersi nominis monetas indicare non possit. Quod hoc productum non possit indicare monetas diuersi nominis ab aureis & argenteis, constat ex eo, quod diximus hic non considerari nisi regulā aureā non admittentem terminos plurium quam duorum diuersorum nominum: quare cum in datis pro multiplicatione terminis inueniantur duorū diuersorū nominū monetę, nimirum aureæ & argenteæ: regula aurea, cuius compendium est hæc multiplicatio, non potest agere de monetis habentibus diuersum nomen ab aureis & argenteis. Quod productum multiplicationis de qua agimus, sit indifferens vt indicet vel aureas vel argenteas monetas, oritur ex eo, quod multiplicatio ex qua producitur, sit indifferens vt dicatur compendium vel primæ vel secundæ regulę aureæ prius propositæ; si hanc multiplicationem placeat intelligere vt compendium primæ regulæ aureæ: hoc casu, & vnitas quæ in multiplicatione subauditur, significat vnitatem monetæ argenteæ; atque productum multiplicationis significat monetas aureas: vt fit in prima regula aurea. Si eamdem multiplicationem placet considerare vt compendium secundæ regulæ aureæ: hoc casu, & vnitas quæ subauditur in multiplicatione, significat vnitatem monetæ aureæ, atque productum significat monetas argenteas: vt fit in secunda regula aurea.

Quod hic diximus de vna multiplicatione atque compendiata regula aurea, pro qua proponuntur duo termini diuersi nominis: similiter verum est, & dictum intelligi debet, de alijs omnibus regulæ aureæ compendijs, quæ aliter dicuntur multiplicationes, quando pro illis dati duo termini habent diuersum nomen; tales sunt, multiplicationes constituentes compendium regulæ aureæ in qua exempli gratia petitur, vnus circulus dat 10 circulos, quid dabunt 4 lineæ, vel corpora, vel anguli, vel rationes, vel soni &c. etenim multiplicatio quæ est compendium alicuius huiusmodi regulæ aureæ, est multiplicatio pro qua dati duo termini habent diuersum nomen: vnus enim ex his duobus terminis constituitur à 10 circulis, alter constituitur à 4 lineis, vel à 4 corporibus, vel à 4 angulis, vel à 4 rationibus, vel à 4 sonis &c.

Compendium regulæ aureæ quod dicitur diuisio: non habet quidem productum cui conueniat ea indifferentia, quam hic considerauimus in producto multiplicationis quæ est compendium regulæ aureæ: sed tamen quæ circa hanc diuisionem dubia esse possent, clarè intelliguntur, considerando regulam auream cuius compendium est talis diuisio: ex qua consideratione, manifestè patet verum esse, quod huius diuisionis producto non conueniat indifferentia, prius considerata in producto multiplicationis pro qua dantur duo termini habentes diuersum nomen. Vt hoc constet in exemplo, petatur productum ex diuisione pro qua dati termini sint leones, & canes, atque 6 leones per 3 canes diuidendi proponantur; hoc supposito asserimus productum ex proposita diuisione, necessariò indicare leones: neque indicare posse canes. Etenim hæc diuisio est compendium regulæ aureæ in qua petitur, tres canes dant 6 leones, quid dabit vnus canis: vel certè est compendium huic æquiualentis regulæ aureæ in qua petitur, tres canes

dant

dant vnum canem, quid dabunt ſex leones. In his duabus, vel eadem regula aurea duplici modo propoſita, productum numerat duos leones: quare etiam productum ex propoſita diuiſione quæ huius regulæ aureæ compendium eſt, poterit indicare duos leones; reliquum eſt vt videamus, an hoc productum poſſit indicare canes; qui hoc aſſereret poſſibile, deberet aſſignare regulam auream cuius compendium dici poſſit propoſita diuiſio. Vt cognoſcatur hanc regulam auream non eſſe poſſibilem, reflectendum, quod ex duobus terminis datis pro diuiſione, ille qui diuiſor appellatur, neceſſariò conſtituat primum terminum illius regulæ aureæ cuius compendium eſt talis diuiſio; quare fit manifeſtum, quod tres canes conſtituentes diuiſorem propoſitæ diuiſionis, neceſſariò conſtituant primum terminum regulæ aureæ cuius compendium eſt propoſita diuiſio; quia verò in hac regula aurea neceſſariò primus terminus indicat canes: & prætera ex ſecundo & tertio termino, vnus indicat leones: reliquus qui vnitas eſt, non poteſt indicare niſi leones vel canes: quandoquidem regula aurea de qua agimus, pro ſuis terminis plura quam duo nomina non admittat; igitur hæc vnitas conſtituens ſecundum vel tertium terminum regulæ aureæ, neceſſariò indicat canem vel leonem: ſuppoſito quod indicet canem, habetur regula aurea cuius compendium aſſeruimus propoſitam diuiſionem, cuius productum indicat leones; ſi hęc vnitas indicet leonem, regula aurea erit talis, tres canes dant 6 leones, quid dabit vnus leo? quæ regula aurea, non poteſt habere productum indicans canes, vt patet ex dictis ſuperius de regula aurea. Conſtat igitur poſſibilem non eſſe regulam auream, cuius productum indicet canes, ita vt eius compendium quod appellatur diuiſio, ſit diuiſio, pro qua 6 leones per tres canes diuidendi proponantur: adeòque huius diuiſionis productum neceſſariò leones indicare debet in ea regulę aureæ conſideratione de qua hic agimus, atque tantum admittit terminos duorum diuerſorum nominum.

Quod hic vidimus & oſtendimus verum eſſe, de multiplicatione & diuiſione quæ ſunt compendia regulę aureę conſiderantis rationes diuerſas à rationibus indifferentibus: ſimiliter verum eſt, de multiplicatione & diuiſione, quę ſunt compendia regulę aureę conſiderantis rationes indifferentes: nimirum quę circa has multiplicationes aut diuiſiones poſsent eſse dubia, aut parum intelligibilia, fieri certa & clarè intelligibilia, cōſiderando regulam auream cuius compendium eſt aut multiplicatio aut diuiſio de qua dubitatur. Huiuſmodi multiplicatio eſt, in qua -2 ducitur in -2: ex qua multiplicatione producitur $+4$: quod idem productum $+4$, oritur etiam ex multiplicatione in qua $+2$ ducitur in $+2$. Quod hoc verum ſit, docet noſtra Logiſtica & etiam Algebra; quare verum ſit, nunquam oſtendere potuit Algebra, vt diximus in paradoxo 6. cap. 3; quomodo verum eſse poſſit, tam difficile videbatur P. Clauio, vt pronunciare non dubitet quod *debilitati ingenij humani accuſanda ſit, quod capere non poſſit, quo pacto id verum eſſe poſſit*: vt diximus in paradoxo primo cap. [illegible] his citatis habetur ſufficiens fundamentum dubit[illegible]plicationes: reliquum eſt vt videamus, quomodo habeatur clara [illegible] ex conſideratione regulę aureę, cuius compendium conſtituit multiplicatio [illegible] dubitatur. Vt dubij ſolutio vtilior [illegible], conſideretur ſecunda ſignorum [illegible] initio partis 4. cap. 2. lib. 1. atque præſcripta pro vſu practico ſignorum $+$ & $-$, in multiplicatione & diuiſione de qua hic agitur. Hęc lex communis eſt & noſtrę Logiſticę & aliorum Algebræ; iuxta hanc legem practicam conſtat [illegible] eſse quod paulò ante aſseruimus, nimirum $+2$ *in* $+2 = +4$, & etiam -2 [illegible] $-2 = +4$, de quo dubitabatur quomodo verum eſse poſſit; vt clarius [illegible] que intelligatur quomodo hoc verum eſse poſſit: immo quare neceſsari[illegible]rum ſit: atque idem conſtet de integra citata lege practica: propono [illegible] in quarum

rum prima, repeto & propono citatam legem practicam: in reliquis duabus notis, ex prius dictis de rationibus indifferentibus, breuiter in memoriam reuoco aliqua magis vtilia ad claram intelligentiam eius quod hic indicandum est: nimirum quare necessariò vera sit lex practica annotata in prima nota hic proposita.

Nota primò, legem practicam annotatam in initio partis 4 cap. 2. lib. 1. agentem de multiplicatione & diuisione terminorum affectorum signis † vel —: præscribere, vt productum, siue multiplicationis siue diuisionis, semper afficiatur signo †, quādo dati duo termini conueniunt inter se quoad signum; quando verò dati duo termini non conueniunt inter se quoad signum, tunc semper signo — afficiendum esse productum.

Nota secundò. In Logistica nostra omnes & solæ quantitates expresè affectæ signo —, sunt ex illis quæ appellantur negatiuæ: reliquæ omnes, siue expresè signo † afficiantur, siue nullo ex signis † vel — afficiantur, negatiuæ quantitates non sunt: sed dicuntur positiuæ; vt diximus versus finem *6.* considerationis.

Nota tertiò. Quod inter duas rationes quarum vna est indifferens, altera non est ratio indifferens, æqualitas inueniri non possit. Hinc supposito quod ex duabus rationibus inter se æqualibus, vna sit ratio non indifferens, etiam altera necessariò est ratio non indifferens; vnde supposito quod termini vnius ex istis duabus rationibus non differant inter se quoad signa † vel —: etiam alterius rationis termini necessariò inter se conueniunt quoad signa; supposito verò quod ex duabus rationibus inter se æqualibus, vna sit ratio indifferens, etiam altera necessariò est ratio indifferens; quare supposito quod vnius rationis termini inter se differant quoad signa † vel —, etiam alterius rationis termini necessariò inter se differunt quoad signa † & —. Quod in hac nota asseritur, constat ex dictis in hac consideratione de regula aurea non compendiata quæ considerat rationes indifferentes.

Ex veritatibus in duabus postremis notis propositis, atque in Logistica nostra ex ipsa terminorum intelligentia manifestis: constat, quare vera sint, singula quæ præscribuntur à lege practica quæ continetur prima nota. Vt hoc clarè intelligatur, propono assertiones, conformes singulis partibus huius practicæ legis, & breuiter considero singulas, ostendendo quomodo, illarum veritas sequatur ex præmissis notis, & non compendiata regula aurea.

Primò, assero † 2 *in* † 2 = † 4. Hæc assertio conformis est legi contentæ prima nota. Multiplicatio de qua agit assertio, est multiplicatio pro qua dati duo termini sunt † 2 & † 2: & vnitas quæ subauditur, atque constituit primum terminum regulæ aureæ cuius compendium est hæc multiplicatio, est vnitas positiua, siue affecta signo †: vt constat ex secunda nota: quandoquidem vnitas quæ nequidem expressa est, sed tantum subauditur, non possit dici expresè affecta signo —: & consequenter iuxta secundam notam, est vnitas affecta signo †; igitur proposita multiplicatio, est compendium regulæ aureæ, in qua petitur, † 1 dat † 2, quid dabit † 2? sed iuxta notam tertiam & dictis de regula aurea, manifestum est huius regulæ aureæ productum, esse † 4: igitur etiam eius compendij, hoc est propositæ multiplicationis productum, est † 4: adeòque † 2 *in* † 2 = † 4, vt asserebatur.

Secundò, assero quod — 2 *in* — 2 = † 4. Hæc assertio etiam conformis est legi contentæ prima nota. Multiplicatio de qua agit assertio, est multiplicatio pro qua dati duo termini sunt — 2 & — 2: vnitas verò quæ subauditur atque constituit primum terminum regulæ aureæ cuius compendium est hæc multiplicatio, necessariò est vnitas positiua, siue affecta signo †: vt iterum constat ex secunda nota; igitur proposita multiplicatio est compendium regulæ aureæ, in qua petitur, † 1 dat — 2, quid dabit — 2? sed ex nota tertia, & dictis de regula aurea, nō compenpendiata, manifestum est, huius regulæ aureæ productum, esse + 4: igitur etiam productum eius compendij, hoc est propositæ multiplicationis, est + 4: adeòque − 2 *in* − 2 = + 4, vt asserebatur.

Tertiò, assero quod − 2 *in* + 2 = − 4. Hæc assertio iterum est conformis legi contentæ prima nota. Multiplicatio de qua agit assertio, est multiplicatio pro qua dati duo termini sunt − 2 & + 2; vnitas verò quæ subauditur, & necessariò constituit primum terminum regulæ aureæ cuius compendium est hæc multiplicatio, necessariò est vnitas positiua, siue affecta signo +: vt rursus constat ex secunda nota; igitur proposita multiplicatio, est compendium regulæ aureæ in qua petitur, + 1 dat − 2, quid dabit + 2? vel certè est compendium huic æquiualentis regulæ aureæ in qua petitur, + 1 dat + 2, quid dabit − 2? atqui ex nota tertia, & dictis de regula aurea, constat, in hac vtraque vel eadem regula aurea, productum esse − 4; igitur etiam compendij, siue propositæ multiplicationis productum, est − 4: adeòque − 2 *in* + 2 = − 4: vt asserebatur.

Quartò, assero quod + 4 *per* + 2 = + 2. Hæc etiam assertio est conformis legi contentæ prima nota. Pro diuisione de qua agit assertio, datus antecedens terminus qui diuidendus est, constituitur à + 4, consequens terminus siue diuisor, est + 2: præterea vnitas quæ subauditur, & constituit secundum vel tertium terminum in regula aurea cuius compendium est, necessariò est vnitas positiua, siue affecta signo +: vt constat ex secunda nota; igitur proposita diuisio, est compendium regulæ aureæ in qua petitur, + 2 dat + 4 quid + 1? sed ex nota tertia patet quod productum huius regulæ aureæ, sit + 2: igitur etiam eius compendij, siue propositæ diuisionis productum, est + 2: adeòque + 4 *per* + 2 = + 2: vt asserebatur.

Quintò, assero quod − 4 *per* − 2 = + 2. Hæc denuo assertio concordat cum lege contenta in prima nota. Ex duobus terminis datis pro hac diuisione, antecedens qui diuidendus proponitur, est − 4: consequens terminus siue diuisor, est − 2: præterea vnitas quæ in diuisione subauditur, iuxta notam secundam, est vnitas positiua, siue + 1: quare proposita diuisio, est compendium illius regulæ aureæ in qua petitur − 2 dat − 4, quid dabit + 1? vel certè est compendium regulæ aureæ in qua petitur, − 2 dat + 1, quid dabit − 4? sed productum huius regulæ aureæ, est + 2: vt constat ex tertia nota, & dictis de regula aurea: igitur etiam compendij, siue propositæ diuisionis productum, est + 2: adeòque − 4 *per* − 2 = + 2: vt asserebatur.

Sextò, assero quod − 4 *per* + 2 = − 2: & præterea + 4 *per* − 2 = − 2. Hoc etiam conforme est legi propositæ in prima nota. Præterea ex secunda nota manifestum est, vnitatem quæ in vtraque diuisione subauditur, esse positiuam siue affectam signo [illegible] sunt compendia regulæ aureæ in qua petitur + 2 dat − 4, qu[illegible] vel certè regulæ aureæ in qua petitur − 2 dat + 4 quid dabit [illegible] vel alterius regulæ aureæ in qua tantum locum inter se mutant, secund[illegible] constituti termini: atqui [illegible] libet ista regul[illegible]: vt constat ex tertia nota, [illegible] de re[illegible] aurea; igitur et[illegible] ex ipsorum compendijs, hoc est ex propositis diuisionibus, est [illegible] adeòque − 4 *per* + 2 = − 2: & præterea + 4 *per* − 2 = − 2: vt asserebatur.

[illegible], agendo de diuisione quæ aliter dicitur radicis extractio, eodem fere modo patet veritas legis propositæ in prima nota: & assero R 1 *q* + 4 = + 2 vel − 2: etenim ex intelligentia extractionis radicis, patet radicem debere esse numerum qui producitur ex diuisione in qua per diuisorem ipsi æqualem diuiditur numerus cuius radix petitur; iam verò iuxta 4. assertionem, + 4 *per* + 2 = + 2: & præterea iuxta 6. assertionem, + 4 *per* − 2 = − 2: atque in vtraque hac diuisione, diuisor æquatur producto ex diuisione: igitur vtriusque huius diuisionis

nis productum posset esse radix propositi numeri † 4, si hæc secunda diuisio posset appellari radicis extractio, hoc verò iuxta nostram Logisticam asseri non potest: etenim quia in illa diuisione quæ in Logistica nostra appellatur radicis extractio, non exprimitur diuisor, impossibile est vt sit expresse affectus signo —, adeòque iuxta præcedentem notam secundam, necessariò positiuus est iste diuisor: & consequenter verum quidem est quod R1q † 4 = † 2: falsum verò est, quod R1q † 4 = — 2: adeòque R1q † 4 = 2, non — 2. Vt asserebatur.

Hinc facilè colligitur, quod (suppositis nostræ Logisticæ placitis) peteret productum ex impossibili diuisione, qui peteret radicem alicuius negatiuæ quantitatis: etenim peteret numerum negatiuum æqualem numero positiuo, talemque numerum impossibilem esse patet ex terminis. Hoc enim casu, numerus, cuius radix petitur, adeòque diuidendus proponitur, est negatiuus; eius diuisor (iuxta secundam notam, vtpote non expressus) necessariò est positiuus: igitur iuxta diuisionis legem signorum, productus ex hac diuisione numerus, qui constituit petitam radicem, necessariò est negatiuus: atqui iuxta nostram definitionem illius diuisionis quæ appellatur radicis extractio, productus hic negatiuus numerus debet æquari diuisori, quem ostendimus necessariò esse numerum positiuum: igitur petendo radicis extractionem ex numero negatiuo, petitur numerus negatiuus æqualis positiuo. Vt asserebatur.

Si petatur, an quemadmodũ in Logistica per numerum † 9 indicari potest numerus † 3, in quantum R1q † 9 = † 3: itàetiam per numerum — 9 indicari possit numerus — 3? Respondeo, numeros radicales ad hoc non sufficere: cæterum nominando vel petendo medium proportionalem inter — 1 & — 9, nominatur vel petitur numerus — 3: similiter, supposito quod † A = RnqB; etiam — A, erit vnitati proximus ex tot medijs proportionalibus inter — 1 & — B, quot vnitates indicantur à numero N qui est denominator radicalis numeri RnqB. Quod verò in nostra Logistica per radicales numeros indicari non possint numeri negatiui, in illa tantum causat aliquam laudabilem impotentiam ad vitiosam æquiuocationem quæ in Algebra inueniri potest.

Consideratio VIII.

Declarantur requisita pro lineis aut superficiebus, vt dicantur parallelæ.

ARbitror atque suppono apud omnes Mathematicos indubitatum esse, quod distantiæ sumantur penes breuissimas lineas: & licet singulæ lineæ breuissimæ ductæ à centro ad diuersas partes, aut circumferentiæ circuli, aut superficiei sphæræ, sint inter se æquales: adeòque illæ partes dici possint æquidistantes à centro: tamen dici non possint parallelæ: hac tamen à Græcis mutuata voce, benè indicari possit illa æquidistãtia, à qua duæ lineę aut duę superficies dicũtur inter se æquidistantes. Has distantias sumi penes perpendiculares, cum alijs nonnullis notat P. Taquet ad defin. 36. lib. 1. in suis Euclideis elementis: quod verum esse non negamus, sed non existimamus manifestum ex terminis, sic vt sufficiat hoc tantum annotare: vel si est veritas manifesta ex terminis, quare non adhibetur, tum alibi, tum in propositione 16. lib. 3. Euclidis, vt constet breuissimam esse rectam, quæ ex centro ad tangentem circuli perpendicularis supponitur, quod per longiores ambages tandem infertur ex propositionibus demonstratione indigentibus.

Pro rectarum atque parallelarum linearum definitione, ab Euclide (vt eius interpretes testantur) assumpta fuit istarum linearum proprietas, quod vtcunque rectà productæ nunquam concurrant: vbi per *non concurrere* intelligendum arbitror, *versus inuicem non currere*, quod idem est ac non accedere: & negari non potest conuenire lineis quæ dici possunt æqualiter ab inuicem distare. Nos pro definitione, tam rectarum linearum, quam etiam planarum superficierum, assumimus aliam proprietatem, quia videtur non tantum pro vsu commodior, sed etiam intellectu facilior, propter dependentiam à motu qui sæpe consideratur in nostra Logistica, quo aliquid tantum vehi dicitur, & intelligitur non habere rotationis motum, sine quo impossibilis anguli variatio; ideòque connexus est cum proprietate quam assumimus, quæque consistit in angulorum æqualitate: statuimus enim in Logistica nostra, omnes & solas illas, aut rectas lineas aut planas superficies appellandas esse parallelas, quæ habent hanc proprietatem, vt cum alia recta linea vtramque intersecante, faciant angulum internum, æqualem externo angulo. Ex hac nostra definitione immediatè patet, quod quando A B
Fig. 1. & D E sunt rectæ lineæ vel planę superficies, ex eo quod sint parallelæ, liceat inferre quod angulus A B C = angulo D E C: atque vicissim, ex eo quod angulus A B C = angulo D E C, liceat inferre quod lineæ A B & D E sint parallelæ. Has illationes adhibemus in theor. 3. cap. 3. lib. 2. quo theoremate contentæ assertiones, etiam proponuntur ab Euclide in primo libro suorum elementorum: quomodo inferantur ex præmissa Euclidea definitione parallelarum, considerandum relinquimus, præsertim ijs quibus minus arridet nostra parallelarum definitio.

Quod distantiæ à rectis lineis aut planis superficiebus sumantur penes perpendiculares, verissimum quidem esse concessimus, sed non manifestum ex terminis vsitatis, aut in antiqua Mathesi, aut in nostra Logistica. Verum esse ità ostendi potest: supposito quod recta E F sit perpendicularis ad rectam A B ad quā nō perpendicularem quamlibet repræsentet recta E B: per assert. 5. theor. 8. cap. 3. lib. 2. (quæ hinc non dependet) E Bq = E Fq + B Fq: ergo recta E B, est maior quam recta E F. Idem etiam sic constat: diametro E B descriptus circulus transit per punctum F, quia angulus E F B rectus est: ergo recta E F huius circuli diameter non est, sed est subtensa minor diametro E B.

Si supponatur quod recta E F sit perpendicularis, tum ad A B, tum etiam ad D E: necessariò esse breuissimam lineam connectentem rectas A B & D E, adeòque illarum ab inuicem distantiam, ità ostendi potest. Quia recta E F supponitur perpendicularis ad rectam A B, vt iam ostendimus, est breuissima: adeòque distantia puncti E à recta A B: sed quando linea E F, tantum vehitur vt eius punctum F percurrat rectam A B, & punctum E describat lineam, patet huius lineæ puncta quælibet, & totam hanc lineam à puncto E descriptam, distare à recta A B, intervallo E F: ergo E F est breuissima linea connectens, & punctum F & lineam A B, cum linea, quæ vt diximus describitur à puncto E: ergo, vt prius ostendimus, recta E F est perpendicularis ad hanc lineam à puncto E descriptam: atqui ex hypothesi etiam E F est perpendicularis ad D E: ergo linea vt diximus descripta à puncto E, non est diuersa à recta D E: sed iam constat quod E F sit breuissima connectens lineam A B cum linea vt diximus descripta à puncto E: ergo etiam E F est breuissima connectens rectam A B cum recta D E. Vt asserebatur.

Si vlterius placet breuiter videre quomodo nostra, vt putamus, commodior definitio parallelarum, cohæreat, tum cum illa à multis vsitata definitione quæ asserit, parallelas rectas lineas esse, quæ vtuntur communi perpendiculo: tum etiam cum illa quam diximus à nobis putari Euclideam: supponatur angulus A B C æqualis angulo D E C, sitque E F perpendicularis ad rectam A B. Quoniam angu-

angulus A B C = angulo D E C, patet rectam A B præcisè tantum vectam, posse peruenire in D E: sed hoc motu non variat angulum cum vlla recta cui occurrit, cum ad hanc anguli variationem requiratur rotatio: ergo recta E F quæ supponitur perpendicularis ad rectam A B ante motum, erit ad illam perpendicularis postquam peruenerit in D E; adeòque etiam ad D E perpendicularis est: ergo rectæ A B & D E, quæ iuxta nostram definitionem sunt parallelæ, vtuntur communi perpendiculo: ergo etiam, iuxta alteram à nobis prius annotatam definitionem, sunt parallelæ. Præterea quia iam constat quod rectæ A B & D E vtantur communi perpendiculo, hoc est quod eadem E F sit perpendicularis, tum ad A B, tum ad D E, habetur hypothesis paulò antè supposita, in qua ostendimus, lineas A B & D E vbique eodem interuallo ab inuicem distare, adeòque ad inuicem non accedere: quare, iuxta definitionem quam supponimus Euclideam, erunt parallelæ.

Rursus (rarius tamen) considerantur superficies non planæ, aut lineæ non rectæ, inter se parallelæ: tales sunt, idem centrum habentes, aut superficies sphærarum, aut arcus circulorum. In his considerationibus, non est recurrendum ad aliquam proprietatẽ parallelis quantitatibus cõuenientẽ, sed satis vtilis est ipse parallelismi cõceptus, nimirum, singularum ab inuicem æquidistantia: siue vt singulæ lineę minimæ connectentes punctum aliquot vnius ex istis quantitatibus cum altera quantitate, sint inter se æquales. Ità supposito quod X & Z sint partes superficierum in sphæris idem centrum habentibus, vel partes circumferentiarum in circulis eodem centro descriptis: ex intelligentia sphæræ, ac circuli, satis patet singulas partes quantitatis X, esse quantitates æquidistantes à suo centro: & similiter singulas partes quantitatis Z, esse quantitates æquidistantes à suo centro, talesque distantias non esse diuersas à radijs quantitatum X vel Z: iam verò si minores radij inter se æquales, non tantum sint maiorum radiorum partibus æquales, sed tales partes constituant: horum radiorum differentiæ constituent distantias inter quantitates X & Z: quæ iuxta axioma 4. cap. 1. lib. 2. erunt æquales inter se, adeòque ex parallelarum conceptu, quantitates X & Z erunt parallelæ.

Si hactenus dicta de parallelis superficiebus aut lineis, paulò attentius considerentur, facilè, vt arbitror, intelligetur, non semper absolutè cæteris præferendas esse definitiones, quæ simpliciter siue secundum se consideratę, sunt pręstantiores: negari non potest secundum se consideratam, esse præstantiorem eam definitionem, quæ rei definitæ essentiam siue naturam explicat, quam quę affert aliquam proprietatem omni & soli definito conuenientem: hæc tamen alteri videtur pręferenda, quando pro vsu notabilem habet facilitatis prærogatiuam: tales duas definitiones hic attulimus; secundum se præstantiorem non negamus, definitionem quam diximus adhibendam pro curuarum superficierum liniarumue parallelismo, si tamen superficies planę aut rectæ lineæ considerentur, altera definitio à nobis allata, videtur pręferenda. Quid dicendum sit de præstantia diuersarum hic commemoratarum definitionum, pro rectis ac parallelis lineis: alijs relinquimus cõsiderandum: antequam tamen aliqui decernant, ac statuant, Euclideam omni ex parte præferendam: moneo vt meminerint considerare demonstrationes in quibus adhibetur hæc definitio, & reflectere an in illis nulla adhibeatur ex Mathematicorum phrasibus, quę non malè dici possent similes Rhetoricorum figuratę locutioni quam appellant Pręteritionem; hac sępe clara & omnibus nota insinuant plurima, etiam ipsi dicenti aut scribenti prorsus ignota. Hoc modo non infrequenter à Matheseos doctoribus declinari difficultates ipsis insuperabiles, norunt omnes in his studijs versati, quorum iudicium non reformido: sed pro alijs tantum (ad quos potissimùm scribo) hæc putaui admonenda.

Con-

Consideratio IX.

Exponitur quid requiratur atque sufficiat in nostra Logistica, vt duæ quantitates dicantur similes aut dissimiles inter se: vel certè, vt dicantur specie aut genere conuenire, vel inter se differre.

AGendo superius de significatione vocum *ratio* & *proportio*, diximus, per has voces significari vnam quantitatem relatam ad alteram, non quacunque relatione, sed relatione magnitudinis. Hic rursus consideranda occurrit relata quantitas, sed relatione diuersa à magnitudinis relatione: nimirum quantitas relata ad alteram relatione similitudinis, à qua dicitur similis vel non similis quantitati ad quam refertur; quemadmodum verò huius libri pag. 68. ostendimus magnitudinis relationem à qua vna quantitas ad alteram dicitur habere proportionem, non inueniri nisi inter duas eiusdem generis quantitates, atque inter se proportionem habere quaslibet duas eiusdem generis quantitates; ità Logistica nostra docet, omnes & solas illas duas quantitates habere similitudinis relationem, atq; inter se similes esse, quę specie inter se conueniunt: & consequenter dicendas esse non similes siue dissimiles, eo ipsò quod inter se specie differant. Hoc de quantitatibus similibus aut dissimilibus dictum sufficeret, ad intelligentiam significationis quam habent voces *simile* aut *dissimile*, quando duæ quantitates dicuntur inter se similes aut dissimiles: si satis constaret quænam quantitates dici debeant inter se specie conuenire, aut ab inuicem differre; hac cognitione etiam indiget antiqua Mathesis quæ passim considerat quantitates, aut genere aut specie inter se diuersas; attamen, quæ sint requisita necessaria ad cognitionem differentiæ genericæ aut specificę inter duas quantitates, nusquam declaratum inueni, aut indicatũ vnde Mathesis antiqua supponat hanc cognitionem: talis cognitio quidē in aliquibus casibus tam manifesta est vt non indigeat speciali declaratione: tamen prout requiritur pro nostra Logistica, & fortassis etiã pro antiqua Mathesi, eam nulla declaratione indigere, existimo asseri non posse, nisi ab aliquo laborante profunda Matheseos ignorantia. Vtrum in hac mea opinione aberrem à veritate, colligi poterit ex ijs quę remanent dicenda de quantitatibus genere aut specie differentibus.

Vt pro Logistica nostra requisitam claritatem afferamus, ijs quę hic breuiter atque vniuersaliter diximus de quantitatibus similibus: quęque nostro iudicio satis intelligibilia non sunt sine vlteriori declaratione: reflectendum exempli gratia, quod duo numeri 12 & 12, inter se æquales, similes, specie conuenientes (qui etiam ijdem appellari possunt in quantum habent solam differẽtiam numericam) possint amittere hanc æqualitatem, similitudinem, conuenientiam specificam, per hoc quod diuerso modo diuisi intelligantur. Si enim primus diuisus intelligatur per 4: secundus per 3, constituent fractiones inæquales, diuersi nominis, atque specie differentes: sic vt simul addi non possint, nisi prius reuocentur ad alios numeros ipsis æquiualentes, atque eiusdem speciei, siue habentes nomen commune. Rursus si considerentur duæ superficies X & Z inter se æquales: eas considerando præcisè tantum vt sunt superficies inter se æquales: non solum dici possunt duæ superficies eiusdem speciei, verum etiam dici possunt non diuersæ, siue eædem: quippe in hac consideratione nullam habent differentiam nisi

nisi numericam, quam non considerat Mathesis; tamen aliter considerari possunt istæ duæ superficies X & Z inter se æquales: nimirum vt vna superficies X, sit triangulum, altera Z sit quadratum: per quod non desinunt inter se æquales esse: tamen in hac consideratione, non possunt amplius dici eædem; immo non possunt amplius dici eiusdem speciei. Ex his alijsque huiusmodi locutionibus passim vsitatis in antiqua Mathesi, satis constat, quomodo ex diuersis earumdem duarum quantitatum considerationibus, vna requirere possit, vt quantitates de quibus agitur dicantur inter se specie differre: licet altera requirat vt dicantur specie non differre; ex quo patet exponi non posse, quænam duæ quantitates dicendæ sint inter se specie differre vel non differre, independenter à consideratione in qua agitur de talibus duabus quantitatibus. Idemque verum est de duabus quantitatibus, in ordine ad hoc vt dicantur inter se genere differre aut non differre.

Vt igitur declarem, quod hic diximus necessariò declarandum esse: distinguo tres diuersas duarum quantitatum considerationes: differentia desumpta, à diuersitate vel non diuersitate prædicati, quod in illis considerationibus prædicatur, siue asseritur de quantitatibus: intelligendo per vocem *prædicatum*, illud quod de aliqua quantitate asseritur, affirmatur, siue prædicatur. Tale prædicatum potest esse, vel necessarium siue essentiale: vel non necessarium siue accidentale: dicitur necessarium siue essentiale, in illa consideratione, in qua necessariò conuenit quantitati de qua affirmatur hoc prædicatum: dicitur accidentale siue non necessarium, in consideratione in qua non necessariò conuenit quantitati de qua asseritur. Exempli gratia, rectitudo, à qua linea dicitur recta: est prædicatum essentiale, quando linea recta consideratur vt recta linea: verum est prædicatum non essentiale siue accidentale, quando linea recta non consideratur vt recta linea, quomodocunque aliter consideretur: vel præcisè vt linea est, vel vt inclinata, vel vt parallela, vel vt maior, vel vt integra, vel vt secta, vel vt radius circuli, vel vt basis trianguli, vel alio quocunque ex innumeris modis diuersis, ab eo, in quo consideratur vt linea recta. Vbi notandum, quod licet linea non possit considerari vt radius circuli, vel vt basis trianguli rectilinei, nisi consideretur recta linea: tamen considerando lineam vt est radius circuli, vel basis trianguli, non consideratur vt recta linea; aliud enim est considerare, vt rectam lineam, hoc est vt habentem rectitudinem: quæ consideratio subsistere non potest sic, vt non consideretur rectitudo, quæ proinde illi necessaria est: aliud est considerare rectam lineam, quæ considerari potest præscindendo à rectitudine, siue non considerando rectitudinem, quæ proinde illi accidentalis est, & non necessaria. His prænotatis pro intelligentia terminorum quibus vtimur in considerationibus diuersis hic declarandis.

Prima consideratio vocetur, quæ quantitatum de quibus in illa agitur, prædicata diuersa, atque necessaria inuoluit. Secunda consideratio dicatur, quæ quantitatum de quibus in illa agitur, prædicata nulla diuersa atque necessaria, sed tamen aliqua prædicata diuersa atque non necessaria inuoluit. Tertia consideratio appelletur, quæ quantitatum de quibus in illa agitur, nulla prædicata diuersa inuoluit. In prima consideratione, duæ quantitates de quibus in illa agitur, habent diuersa prædicata necessaria, siue essentialia; sunt inter se genere diuersæ: nullam inter se proportionem habent: sunt inter se dissimiles. In secunda consideratione, duæ quantitates de quibus in illa agitur, habent tantum diuersa prædicata accidentalia; specie tantum inter se differunt: habent inter se proportionem: sunt inter se dissimiles. In tertia consideratione, duæ quantitates de quibus in illa agitur, non habent prædicata diuersa; sunt eiusdem speciei: habent inter se proportionem: sunt similes inter se.

Vt

Vt vniuersalior hæc doctrina de duabus quantitatibus quæ inter se similes aut dissimiles dicendæ sunt, atque dependet ex intelligentia duarum quantitatum. quæ dici debent inter se conuenire vel ab inuicem differre, aut specie aut genere; vt inquam clarior atque intelligibilior euadat hæc doctrina, non tantum vtilis, sed maximè necessaria pro nostra Logistica: & præterea melius faciliusque intelligatur eius vtilitas atque necessitas, placet hic enumerare aliquas quantitates inter se discrepantes aut conuenientes, vel genere vel specie: & consequenter similes vel dissimiles inter se; ex qua enumeratione, etiam commodius poterit intelligi, vtrum omni ex parte hæc Logisticæ nostræ doctrina conueniat cum doctrina antiquæ Matheseos, vel certè ab illa discrepet, siue quoad vniuersalitatem, siue quoad modum eam proponendi atque explicandi, siue quoad aliquam dissonantiam atque contrarietatem.

Genere inter se differunt duæ quantitates X & Z diuerso modo restrictæ; sed tantum in ea consideratione in qua necessariæ, siue essentiales sunt tales illarum diuersær estrictiones; ita, vt diximus, statuit Logistica nostra. Hinc, exempli gratia, supposito quod quantitas X restricta sit, & tantum restricta sit ad discretam quantitatem: quantitas verò Z restricta non sit, vel sit restricta ad quantitatem continuam, vel ad corpus, vel ad superficiem, vel ad lineam, vel ad quantitatem discretam vlterius restrictam ad binarium, ternarium, senarium &c. si quantitates X & Z cõsiderentur vt sic restrictæ, hoc est in ea consideratione quantitatũ X & Z, in qua necessariæ siue essentiales sunt illæ restrictiones: etiam quantitates X & Z genere different, eruntque diuersi generis quantitates. Hinc in prima consideratione, pagina 67. vel 68. huius libri (vbi breuius & obscurius aliquid notauimus de generica & specifica duarum quantitatum conuenientia vel differentia) diximus circulum consideratum vt circulus est, & quadratum consideratum vt quadratum est, esse duas diuersi generis quantitates, nullamque inter illas proportionem admitti posse. Præterea in reflexione 7. cap. 4. prius ostendimus, contra aliorum quorumdam opinionem, angulos quantitatibus annumerandos esse, sed tamen, vt huius libri pagina 59. diximus, angulũ rectilineum ad angulum contactus nullam habere proportionem: sed esse quantitates diuersi generis. Petenti an angulus rectus vel 90 graduum, ad angulum acutum 50 graduum habeat proportionem iuxta Logisticam nostram: respondendum foret quod isti duo anguli considerati vt sic diuersimodè restricti, nullam habeant proportionem, sed sint diuersi generis quantitates; & similiter nullam habere proportionem, sed esse diuersi generis quantitates lineas rectas, quarum vna maior, altera minor est: quando vna vt maior, altera vt minor consideratur; ac pari modo, duos numeros inæquales, exempli gratia ternarium & binarium, esse duas quantitates diuersi generis, nullam inter se proportionem habentes: supposito quod vnus vt ternarius, alter vt binarius: vel vnus vt maior, alter vt minor consideretur. Rursus quia iuxta Logisticam nostram, ratio est quantitas, adeòque duæ rationes, sunt duæ quantitates: non quidem absolutæ, sed quantitates relatæ: patet exempli gratia quantitates esse, duas rationes quarum vna est *6 ad 4*, altera est *2 ad 4*: ex quibus vna est ratio maioris inæqualitatis, altera est ratio minoris inæqualitatis; hæ duæ rationes, si considerentur vt rationes maioris & minoris inæqualitatis, erunt quantitates diuersi generis, & vna ad alteram nullam habebit proportionem. Similiter ex duabus rationibus quæ exempli gratia singulæ sunt rationes maioris inæqualitatis, vt sunt rationes *8 ad 4* & *6 ad 4*; quoniam vna est maior altera, supposito quod vna vt maior, altera vt minor consideretur, erunt dicendæ relatæ quantitates, siue rationes diuersi generis, & vna ad alteram non poterit dici habere proportionem: vnde etiam hoc casu dici non poterit quod *8 ad 4* respectu *6 ad 4* = *8 ad 6*, quod in alia suppositione verum esse asserit axioma 11. cap. 1. lib. 2.

Sin-

Singulas quantitates hic commemoratas admittere inter quantitates genere differentes, & tales eſſe, exempli gratia, lineam maiorem A, & lineam minorem B, quando conſiderantur vt tales: alicui nouum videri poſſet, atque parum conforme antiquæ Matheſeos doctrinæ; is reflectat, quod antiqua Matheſis admittat proportionem inter omnes & ſolas eiuſdem generis quantitates: quare admittere non poteſt lineam A maiorem ſiue excedentem, & lineam B minorem ſiue deficientem conſideratas vt tales, eſſe quantitates eiuſdem generis, ſi inter illas non poſſit admittere proportionem: quod ſi faceret, deberet admittere propoſitionem aſſerentem, quod linea A excedens, ſit maior excedens linea, quam ſit linea B deficiens, quæque non eſt excedens linea: hoc non magis admittere poteſt aut dicere, quam quod corpus A, ſit maius corpus, quam ſuperficies B quæ non eſt corpus: ſecundum dici non poſſe manifeſtum eſt: igitur neque primum dici poteſt: vnde ſatis conſtat, etiam iuxta antiquam Matheſim, diuerſi generis quantitates dicendas eſſe, lineam A maiorem ſiue excedentem, & lineam B minorem ſiue deficientem, in caſu in quo à nobis numerantur inter quantitates diuerſi generis. Immo hoc, alijſque ſimilibus argumentis perſuaſi, exiſtimamus, ea quæ in præſenti conſideratione tradimus de quantitatum conuenientia aut differentia generica vel ſpecifica, nullatenus aduerſari doctrinis antiquæ Matheſeos; in hac, frequenter quidem agitur de quantitatibus genere aut ſpecie conuenientibus aut differentibus, ſed non declaratur quid per genericam vel ſpecificam differentiam aut conuenientiam intelligendum ſit: vel vnde colligi poſſit ac ſtatui, vtrum genere vel ſpecie conueniant, vel ab inuicem differant propoſitę duę quantitates.

Genere conueniunt, ſed tamen ſpecie inter ſe differunt, duæ quantitates X & Z: quando in conſideratione in qua de illis agitur, habent diuerſa prædicata accidentalia, nulla verò habent prædicata eſſentialia diuerſa, quod idem aliter ſignificamus, dicendo, quod quantitates X & Z tantum nomine differant; ità nomine tantum, & cõſequenter ſpecie tantum inter ſe diſcrepant, circulus & quadratum, ſi conſiderentur vt ſuperficies, ſiue vt ſuperficies planæ: prædicata enim diuerſa ab his diuerſis nominibus indicata in tali conſideratione, tantum ſunt accidentalia: quandoquidem circulus non vt circulus, ſed vt plana ſuperficies conſideretur: & quadratum non conſideretur vt quadratum, ſed vt plana ſuperficies: eſſe verò planam ſuperficiem, tam circulo quam quadrato commune eſt. Rurſus quantitas vniuerſalis lineæ, & quantitas vniuerſalis ſuperficiei, tantum nomine, adeòque ſpecie inter ſe differunt; & generaliter diuerſimodè reſtrictæ quantitates, ſed non conſideratæ vt ſic diuerſimodè reſtrictæ, ſpecie tantum inter ſe differunt, & habent tantum diuerſa nomina, ſiue diuerſa prædicata accidentalia. Similiter ſpecie tantum inter [illegible] acutus, angulus rectus, angulus obtuſus, ſi conſider[illegible] tales [illegible], ſed vt anguli rectilinei, quod omnibus [illegible] commune, preterea ratio æqualitatis, maioris inęqualitatis, [illegible] tantum ſpecie ſiue nomine differunt, quando conſiderant[illegible]tiones ſunt, quod his omnibus diuerſi nominis rationibus co[illegible]ecta & linea curua, tantum ſpecie differunt, quando tantum [illegible] lineę ſunt, quod commune eſt tam rectis quam curuis lineis.

Specie inter ſe conueniunt duę quantitates X & Z, quando in conſideratione in qua de illis agitur, nulla habent diuerſa prędicata, neque eſſentialia, neque accidentalia: quod idem aliter ſignificamus, dicendo, quod non habeant diuerſum nomen. Ità quantitates X & Z ſpecie conueniunt ſi ne quidem nomine differant, aut vllam habeant diuerſam reſtrictionem, in ea conſideratione in qua de illis agitur: ſed vtraque tantum conſideretur vt quantitas, vel vt quantitas continua, vel vt quantitas discreta, vel vt linea, vel vt superficies, vel vt angulus, vel vt angulus planus, vel vt ratio, vel vt ratio maioris inæqualitatis, vel vt ratio minoris inæqualitatis, vel vt numerus, vel vt numerus vulgaris: in qua consideratione sunt similes inter se, & vna ad alteram habet proportionem: hoc est vna quantitas relatè ad alteram quantitatem Z, potest dici maior, vel minor, vel illi æqualis.

His consonum videtur quod in suis doctrinis supponit antiqua Mathesis; Etenim agendo de additione quam appellamus realem atque propriè dictam, à qua diuersa est quæ æquiualens dicitur: pro tali additione propriè dicta requirit numeros spectantes ad eamdem speciem, siue habentes idem nomen: vt verò addat diuersæ speciei siue nominis numeros, docet prius illos reuocare ad æquiualentes, sed eiusdem speciei siue nominis numeros: hos addendo, inuenit productum, quod quidem est productum reale ac propriè dictum inuentorum numerorum eiusdem nominis, sed non datorum numerorum diuersi nominis aut speciei, quorum est tantum productum æquiualens. Quandoquidem igitur antiqua Mathesis, pro numerorum additione reali ac propriè dicta, requirat numeros eiusdem speciei: & non admittat numeros habentes diuersum nomen: sequitur, nominis diuersitatem causare differentiam specificam: adeòque pro specifica conuenientia requiri nominis identitatem. Antiqua Mathesis cum Logistica, admittit realem atque propriè dictam additionem, inter quoslibet duos vulgares integros numeros: quos proinde concedit specie conuenire; quod verò etiam nomine conueniant, licet diuersis vocibus exprimantur, patet consideranti quid intelligendum sit per numeri nomen: nimirum quod indicat quales, siue qualiter restrictæ sint vnitates quæ numerantur: constat autem vnitates omnes quæ numerantur à quibuslibet numeris vulgaribus integris, esse vnitates integras, ità vulgaris numerus tria, numerat tres vnitates integras siue simplices, & numerus vulgaris duo, numerat duas vnitates integras siue simplices: & isti numeri, tria & duo, diuersi quidem numeri sunt, in quantum diuersam vnitatum multitudinem numerant: sed tamen sunt numeri eiusdem nominis, in quantum vnitates quæ à singulis numerantur, idem nomen habent, atque appellantur integræ siue simplices vnitates. Quod per vocem tria indicatur, aliter æquiualenter significari potest per vocem ternarius, vel nominando duodecim quartas: similiter, quod per vocem duo indicatur, aliter æquiualenter significari potest per vocem binarius, vel nominando decem quintas: propriè tamen dicta & reali additione addi non possunt duodecim quartæ & decem quintæ: vel ternarius & binarius: quia sunt numeri specie differentes, & non habent idem nomen, sed tantum addi possunt æquiualenti additione: vt hoc fiat, dati isti numeri prius reuocandi sunt ad alios ipsis æquiualentes, atque habentes idem nomen; hoc iuxta antiquam Arithmeticam verissimum esse, in illa versatus nemo negare potest: quoniam autem verum est, patet quomodo solius nominis mutatio causare possit differentiam specificam: & per hoc quod duo numeri desinant conuenire quoad nomen, desinant specie conuenire in antiqua Mathesi: adeòque in illa supponi prius propositam à nobis generaliorem doctrinam, de conuenientia atque differentia specifica ac similitudine numerorum: licet ab eius doctoribus exposita non inueniatur.

Vt hoc idem constet de figuris, quarum similitudo non minus frequenter consideratur ab antiqua Mathesi, quodque de his docet, esse conforme à nobis allatæ doctrinæ vniuersaliori de quantitatibus similibus: consideretur figurarum similium definitio, quæ ab Euclide proponitur initio libri sexti suorum elementorum. *Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos, singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circum angulos æquales, proportionalia.* Ita Clauius noster,

Igi-

Igitur vt iuxta antiquam Mathesim similia sint duo triangula A B C, & D E F, requiritur & sufficit, vt singulis angulis trianguli A B C, respōdeat ęqualis angulus trianguli D E F: & pręterea, vt latera, æqualibus angulis opposita, sint proportionalia, siue eamdem habeant proportionem; quare duorum istorum triangulorum similitudo vniuersim habet sex requisita: siue sex æquationes necessariæ sunt, vt dici possit, duo ista triangula esse inter se similia. Etenim vt triangulum A B C, sit simile triangulo D E F, iuxta præmissam definitionem requiritur & sufficit, primò, vt angulus A = angulo D: secundò, vt angulus B = angulo E: tertiò, vt angulus C = angulo F: quartò, vt A C *ad* D F = A B *ad* D E: quintò, vt A B *ad* D E = B C *ad* E F: sextò, vt B C *ad* E F = A C *ad* D F. Idem nos passim in prioribus libris supponendo, ex eo quod constet, triangula A B C, & D E F esse similia, inferimus, quaslibet ex commemoratis sex æquationibus. Reliquum est vt videamus an hoc sit cōforme traditæ hic vniuersaliori doctrinæ de quantitatibus similibus, in qua statuimus, omnes & solas istas duas quantitates inter se similes esse, quæ conueniunt quoad nomen; in quem finem obseruandum, quod triangulum A B C sex diuersas partes habeat, nimirum tres angulos diuersos, & tria latera diuersa: si cæteris quantum fieri potest manentibus, in vna ex his partibus fiat variatio, etiam mutatur trianguli nomen; sic si prius omnes tres anguli erant inter se æquales, dicitur æquiangulum; per vnius anguli variationem sublata hac æqualitate, desinit esse triangulum æquiangulum. Si prius erat triangulum rectangulum, vel obtusangulum, quia habebat vnum angulum rectum vel obtusum: eo ipso quod desinat vnus eius angulus esse rectus, vel obtusus, non potest amplius dici rectangulum, vel obtusangulum. Similiter, æquilaterum dicitur, si omnia tria latera sint inter se æqualia: & isosceles siue æquicrure dicitur, si habeat duo latera inter se æqualia; per vnius lateris mutationem, tollendo hanc æqualitatem, desinit esse triangulum aut æquilaterum, aut isosceles. Scalenum dicitur si habet tria latera inter se inæqualia, hanc inæqualitatem tollendo, per vnius lateris variationem, fit, vt amplius dici non possit scalenum; & generaliter, cæteris quantum fieri potest manentibus, mutatio facta in vna ex commemoratis sex trianguli partibus, causat nominis eius mutationem: si verò perseuerent ijdem singuli tres anguli, & eædem singulæ tres laterum proportiones: perseuerat idem trianguli nomen: ex quo patet, omnia & sola duo triangula quæ habent idem nomen, habere sex commemoratas conditiones, quæ iuxta Euclidis definitionem requiruntur vt duo triangula dici possint similia; & consequenter constat, Euclideam doctrinam, ad duorum triangulorum similitudinem requirentem prædictas sex conditiones, consonam esse vniuersaliori doctrinæ à nobis propositæ, iuxta quam, ad duorum istorum triangulorum similitudinem requiritur, vt conueniant quoad nomen: siue vt in consideratione in qua de illis agitur, non differant inter se, neque quoad prædicata essentialia, neque quoad prædicata accidentalia: ex quibus priora genericam, posteriora specificam differentiam causant, atque eam quam appellamus nominis diuersitatem. Reliquæ figuræ planæ atque similes, ab antiqua Mathesi considerantur vt triangulorum similium aggregata, producta ex similium triangulorum simili additione, siue simulpositione: quę proinde aggregata similia, per similes sectiones in triangula similia resolui possunt: vt facile est colligere ex ijs quę de figuris similibus docet antiqua Mathesis, atque hic paulò antè notata Euclidea definitione similium figurarum. Hęc definitio atque doctrina de similibus figuris, si pro planis rectilineisque figuris sufficiens est, certè non sufficit, vt statuatur vtrum circuli omnes inter se similes sint: vel quæ circulorum segmenta, aut qui sectores circulorum, admitti debeant inter figuras quæ dicuntur inter se similes: maximeque angustis limitibus circumscribitur.

Fig. 2.

Vt pro nostra Logistica habeatur amplior doctrina de superficiebus, & corporibus similibus; siue potius, vt habeatur superior atque maximè vniuersalis doctrina magis declarata, in casu in quo superficierum vel corporum similitudo consideratur: distinguimus quantitates continuas ex ductibus Geometricis genitas, in simplices, & compositas ex simplicium additione. Per simplices intelligimus, duas quantitates quæ singulæ producuntur ex vnico ductu Geometrico nominato atque reali; hæ erunt similes, si singulæ producantur ex basibus similibus, eodem ductu similiter assurgentibus in altitudines habentes eamdem proportionem ad basium longitudines. Duæ verò quantitates non simplices, sed quæ singulæ sunt per realem additionem genitæ ex pluribus simplicibus quantitatibus, erunt inter se similes, si sint æquemultarum simplicium atque similium aggregata, per similes additiones genita: vbi per quantitatum additionem, intelligenda est quantitatum simulpositio: hæ autem additiones, aut simulpositiones erunt similes, si non differunt nomine: hoc est, si non habeant vlla prædicata siue essentialia, siue accidentalia diuersa, vt supra diximus requiri, vt duæ quantitates dicantur similes.

Duæ ex quantitatibus quas hic simplices appellauimus, siue quæ singulæ producuntur ex vnico reali ductu Geometrico nominato, sunt similes, quando habent has conditiones. Primò, vt bases sint inter se similes. Secundò, vt altitudines in quas assurgunt habeant eamdem proportionem quam habent basium longitudines. Tertiò, vt in istis similibus basibus similiter constituta puncta, describant lineas facientes cum basibus angulos æquales. Quartò, vt similes bases quæ rotari intelliguntur, sint similiter constitutæ respectu facto ad axem circa quem rotari intelliguntur.

Quando singulæ istæ duæ quantitates producuntur ex ductu primo reali, si & bases similes habeant, & altitudines basium longitudinibus proportionales: nihil remanet quod istorum productorum similitudinem possit vitiare, quia hoc casu singula basium puncta describunt lineas cum basibus constituentes rectos angulos.

Quando singulæ istæ duæ quantitates producuntur ex ductu secundo: vt productæ quantitates sint similes, non sufficit vt bases sint similes, quodque altitudines sint proportionales basium longitudinibus: sed præterea requiritur, vt in similibus istis basibus similiter constituta puncta, describant lineas facientes angulos æquales cum basibus: ex eo enim quod hi anguli sunt inæquales, fit quod producta ex istis basibus habeant diuersam obliquitatem siue inclinationem, ad quam sequitur diuersum nomen atque specifica differentia talium productorum, quam non admittunt quantitates similes.

Quando singulæ istæ duæ quantitates producuntur ex ductu tertio: vt similes sint, præter basium similitudinem, & altitudines proportionales basium longitudinibus: requiritur, vt in similibus basibus similiter constituta puncta, describant lineas facientes angulos æquales cum basibus: etenim ex istorum angulorum inæqualitate, resultat in productis, vel diuersa incl[illegible] vel [illegible] acumen, in illis causans nominis diuersitatem atque dissimi[illegible]

Quando singulæ istæ duæ quantitates produ[illegible] quarto erunt similes, si bases sint similes, & altitudines sint proportio[illegible] longitudinibus: neque possunt in hoc ductu puncta in similibus basibus similiter constituta, describere lineas quæ cum basibus non faciunt angulos æquales: neque etiam bases similes in hoc ductu possunt esse dissimiliter constitutę respectu facto ad axem circa quem intelliguntur rotari.

Quando singulæ istæ duæ quantitates producuntur ex ductu quinto: vt similes sint, præter bases similes, & altitudines quæ sint proportionales basium longitudinibus, requiritur, vt bases illæ similes, sint similiter constitutæ respectu facto ad axem circa quem hoc ductu rotari, siue circumuolui intelliguntur. In hoc quinto ductu

ductu, bases, vel sunt arcus, vel sectores circulorum, nullasque ab his diuersas bases admittit ductus quintus: iam verò vt huiusmodi duæ bases inter se similes similiter constitutæ sint respectu facto ad axem: requiritur, vt cum axe æquales angulos faciant, lineæ rectæ, à basium centris excurrentes ad puncta in istis basibus similibus similiter constituta.

Nota. Conditio requirens vt bases similes, similiter constitutæ sint respectu facto ad axem, vt ex his basibus similibus ductu quinto productæ quantitates similes sint, etiam requiritur, vt duæ non tantum inter se similes, sed præterea æquales bases, ductæ in eamdem altitudinem, producant quantitates æquales inter se. Exempli gratia duo eiusdem circuli arcus X & Z inter se æquales, ità tamen vt arcus X vna extremitas, sit polus axeos circa quem hic arcus circumducitur siue rotatur: arcus verò Z vna extremitas integro quadrante distet ab eodem axeos polo: erunt duæ bases X & Z inter se similes & æquales; nihilominus maximè inter se inæquales erunt superficies quas producunt, quando ductu quinto ducuntur in eamdem altitudinem: hæ tamen superficies quas producunt, inæquales esse non poterunt, si cæteris manentibus, bases illæ X & Z, similiter constitutæ sint respectu facto ad axem, atque ductu quinto assurgant in eamdem altitudinem. Causa propter quam hoc verum est, satis immediatè patet ex intelligentia ductus quinti; ex qua etiam facilè colligitur, vnde oriatur, quod licet proportio ductus primi ad reliquos ductus nominatos semper eadem atque inuariata perseueret: tamen proportio ductus primi ad ductum quintum non semper sit eadem, sed semper sit diuersa, quando bases quæ ducuntur in hoc ductu quinto, sunt diuersimodè constitutæ respectu facto ad axem circa quem rotantur: ex qua diuersa basium constitutione, resultat, quod cæteris paribus, istis basibus respondentes axeos partes, habeant diuersam magnitudinem variantem proportionem ductus primi ad ductum quintum.

Duæ quantitates quæ non sunt simplices, sed singulæ sunt compositæ ex plurium simplicium quantitatum additione siue simulpositione: erunt similes, si constent singulæ ex æquè multis similibus simplicibus quantitatibus similiter additis: siue eodem modo simul positis. Innumerabiles sunt modi diuersi quibus addi, siue simul poni possunt, duæ quantitates similes. Vt hoc satis constet, considerentur duo triangula similia X & Z in quæ à sua diametro secatur quadratum: hæc triangula addi, siue simul poni possunt: primò, vt quadratum constituant, vt in figura 3. secundò, vt constituant triangulum, vt in figura 4. tertiò, vt constituant rhumbum, vt in figura 5. quartò, vt constituant rectilineam superficiem in figura sexta repræsentatam, atque proprio & vsitato nomine destitutam, sed tamen habentem prædicata diuersa ab ijs quæ in prius nominatis figuris inueniuntur. In hunc modum propè innumeris, atque diuersis, & inter se non similibus additionibus, addi, siue simul poni possunt duo triangula, licet figurarum omnium maximè simplices sint. [illegible] verò innumerabiles sunt inter se diuersæ additiones, aut simulp[illegible]orum similium triangulorum: patet quod plurium triangulorum, [illegible]erum, vel corporum similium atque simplicium possibiles a[illegible] omnes velle aut exponere aut enumerare, nihil aliud foret, quam [illegible] finem inquirere; vt tamen de propositis quibuscunque duabus additionibus statuatur, vtrum similes vel dissimiles dicendæ sint, videntur abundè sufficere, quę de paucis hic enumeratis additionibus aut simulpositionibus diximus, fortassis fusius quam erat necessarium.

Quandoquidem igitur ex hactenus dictis satis constet, quid intelligendum sit per figuras, corpora, aliasue quantitates quæ dicuntur similes aut dissimiles inter se: & etiam quid sint huiusmodi quantitatum additiones similes vel dissimiles: satis etiam manifestum est quid per subtractiones aut sectiones similes aut dissimiles

les intelligendum sit. Hanc verò similitudinem & dissimilitudinem additionis siue appositionis, atque subtractionis siue sectionis, cognitam supponit nostra Logistica ex dictis in hac nona consideratione: atque hæc causa est quod in suis elementaribus propositionibus nusquam consideret vllas proprietates aut corporum aut superficierum quæ considerantur esse aggregata, siue producta per additionem: sed in capite 3. & 4. vbi proponit nonnullas proprietates elementares superficierum & corporum, tantum agat de proprietatibus quæ conueniunt superficiebus corporibusque simplicibus, siue non consideratis vt quædam aggregata vel producta per additionem. Aliæ proprietates quę conueniunt superficiebus vel corporibus quæ considerantur vt quædam aggregata siue producta per additionem, necessariò resultant, vel ex proprietatibus conuenientibus ijs quæ adduntur, vel ex ipsorum additionibus: ex quo fit, quod si singulæ quantitates per additionem producentes quantitatem X, sint similes singulis quantitatibus per additionem producentibus quantitatem Z, & insuper similes sint istæ similium quantitatum additiones; etiam quantitates per additiones productæ, hoc est aggregata X & Z, inter se similia erunt: verum hæc duo aggregata X & Z, erunt inter se dissimilia, si alterum ex his duobus requisitis desit, hoc est, si vel aliquarum similium quantitatum additiones non sint similes, vel in similibus additionibus adhibitæ quantitates similes non sint. Quoniam verò hæ duæ conditiones necessariæ sunt, vt duo aggregata X & Z sint inter se similia; manifestum est, quod quando duo aggregata X & Z sunt inter se similia, necessariò intelligi possint genita per similium quantitatum similes additiones; ex quo vlterius patet, quod per similes subtractiones siue sectiones, resolubiles sint in partiales, & inter se similes quantitates, atque illas vtriusque aggregati X & Z partiales & similes quantitates, æquè multas esse, quia producuntur ex similibus, adeòque æquè multis subtractionibus siue sectionibus; quemadmodum patet similium quantitatum partialium, additiones similes haberi non posse, in duobus productis X & Z, nisi vtrinque addendo æquè multas quantitates partiales inter se similes.

Quandoquidem hæc singula immediatè manifesta sint ex terminorum intelligentia requisita pro nostra Logistica vt sciatur quænam quantitates dicantur similes aut dissimiles inter se: vbi cum Euclide consideramus exempli gratia duo polygona similia (vt facimus in theoremate 5. partis 2. cap. 12. lib. 1.) ex eo quod illæ rectilineæ figuræ X & Z supponuntur similes, etiam iuxta hic dicta euidens supponimus quod singulæ sint secabiles in æquè multa triangula inter se similia, idque in constructione factum supponimus: illicitum foret idem in hunc modum sine vlteriori probatione factum supponere, nisi ex terminis satis euidens foret esse possibile: esse verò euidenter possibile, paulò pluribus hic placuit declarare, ne fortè angustioribus antiquæ Matheseos doctrinis magis assuetis, videatur reprehensibile, quod in Logistica nostra [illegible] atque supponantur huiusmodi aliqua ex eius terminis satis immedi[illegible]sta, quæ ex antiquæ Matheseos terminis non constant, sed indig[illegible] Euclidea similium figurarum declaratione non est manifestum, sim[illegible]na [illegible]milia atque æquè multa triangula resolubilia siue secabilia [illegible], ideòque in propositione 20. libri 6. suorum elementorum (in qua propositione vltimo loco asserit quod asseritur in commemorato theoremate 5. partis 2. cap. 12. lib. 1.) præmittit alteram huius 20. propositionis partem, docentem polygona similia [illegible] æquè multa triangula similia secari posse: idque prius ostendere necessarium erat in methodo Euclidea, atque supposita terminorum intelligentia quam supponit. Hanc partem propositionis Euclideę prætermisimus in supradicto theoremate 5. eamque prætermittere necessarium nobis erat, ne propositionem immediatè mani-

nife-

nifestam ex Logisticæ nostræ terminis, poneremus inter Logisticæ theoremata.
Denique hic iterum moneo pro considerationibus proprietatum dependentium à similitudine vel dissimilitudine quantitatum, expedire, vt ex dictis supposita intelligentia, non tantum quantitatum, sed etiam additionum atque subtractionum similium: pro quantitatibus considerandis eligatur simplicior illarum consideratio, sic vt nunquam considerentur vt aggregata, quando sunt superficies aut corpora quæ intelligi possunt produci ex vnico ductu Geometrico, adeóque vt quantitates simplices siue non compositæ per additionem: reliquæ quantitates quæ non ex vno aliquo ductu productæ intelligi possunt, considerandæ sunt vt aggregata constantia ex additione plurium quantitatum quæ singulæ ex vno aliquo ductu producuntur.

Ad maiorem Dei gloriam.

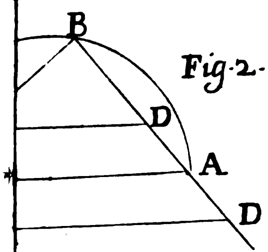


Fig. 2.

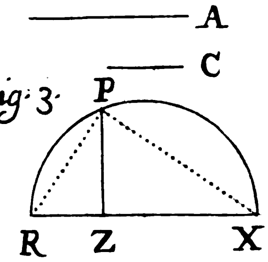


Fig. 3.

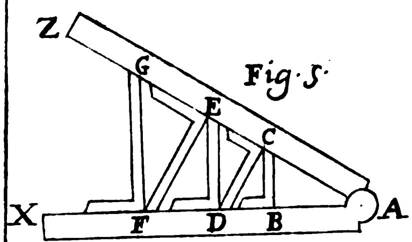


Fig. 5.

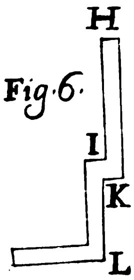
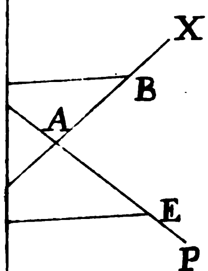


Fig. 6.



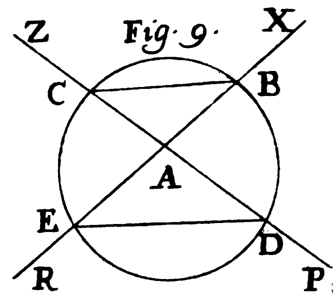
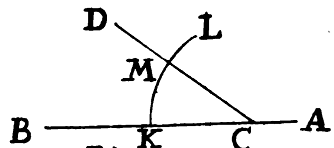


Fig. 9.



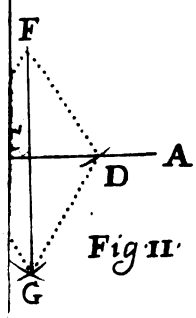


Fig. 11.

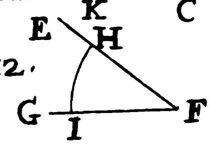
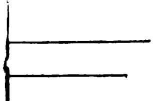


Fig. 12.



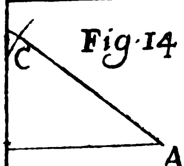


Fig. 14.

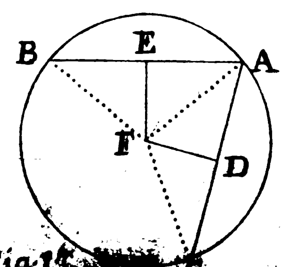


Fig. 15.

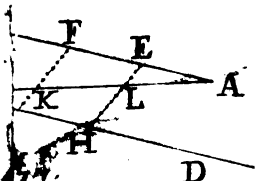


Fig. 17.

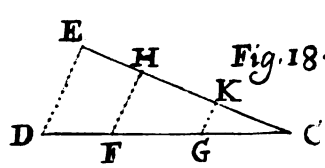


Fig. 18.

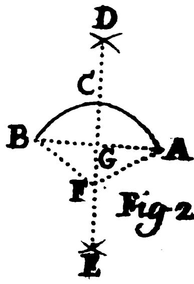


Fig 20.

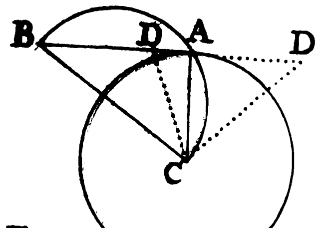
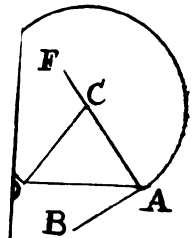


Fig 21.



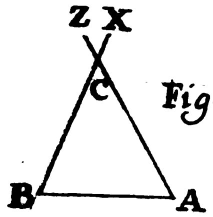
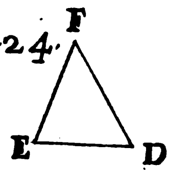


Fig 24.



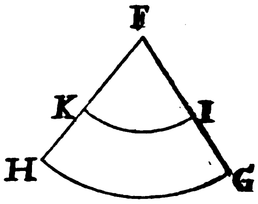


Fig 26.

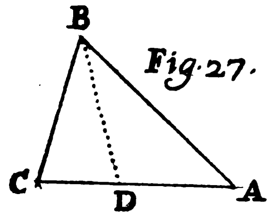


Fig 27.

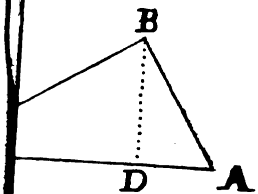


Fig 29.

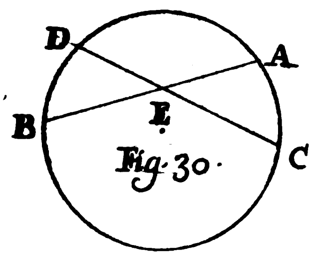
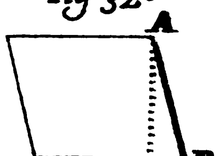
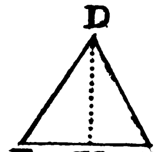


Fig 30.

Fig 32.





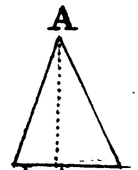
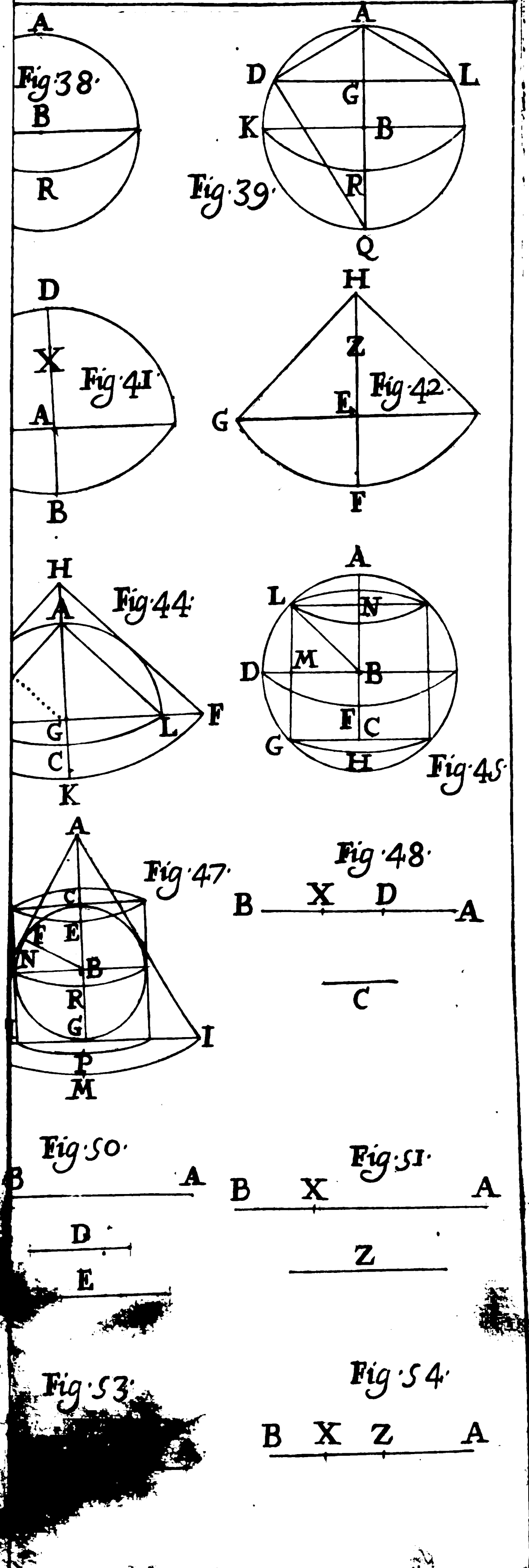


Fig 33.

Fig 36.

rę Libri primi



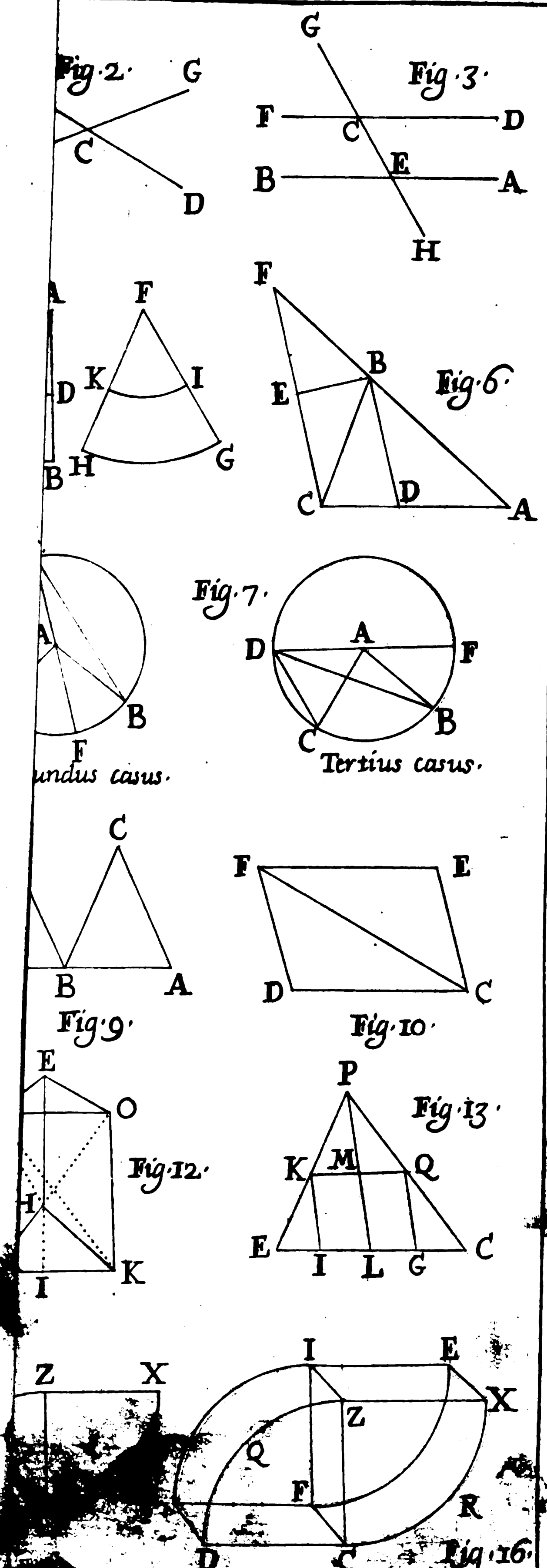
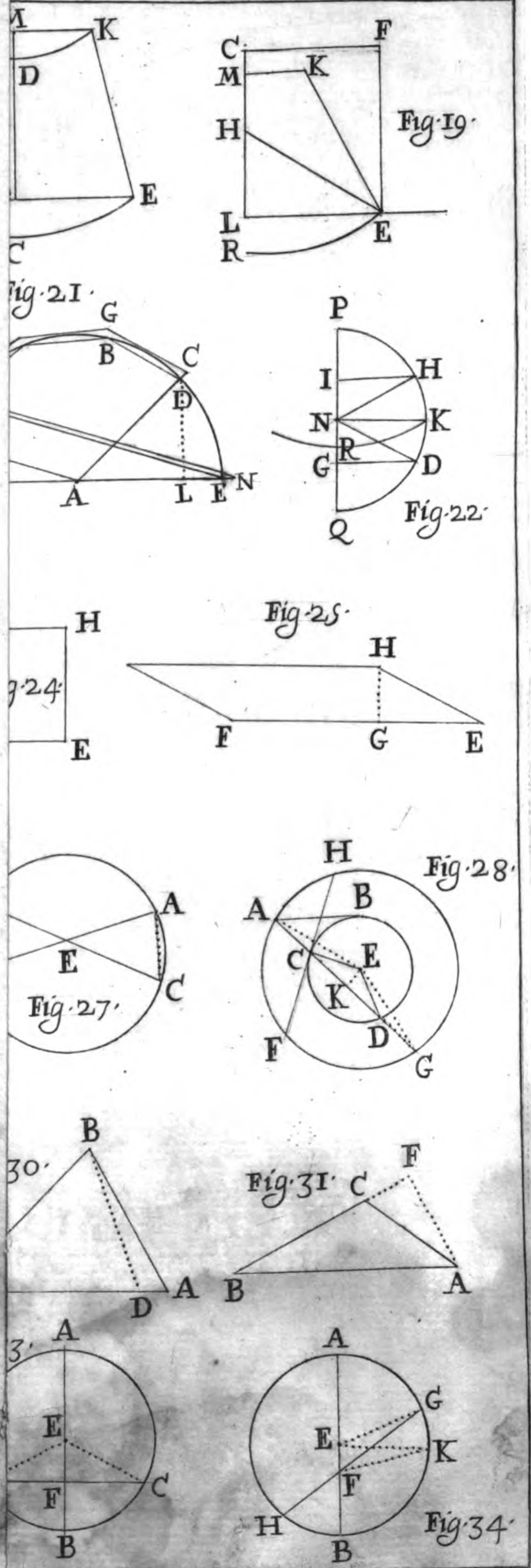
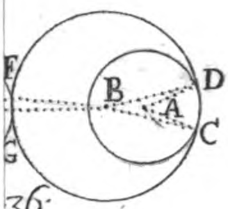


Fig. 2. Fig. 3. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 12. Fig. 13. Fig. 16.

ę Libri secundi

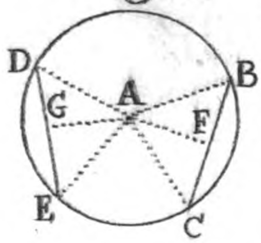


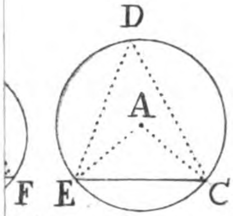
Libri secundi



36·

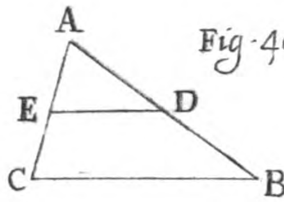
Fig·37·

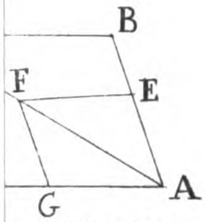




Fig·39·

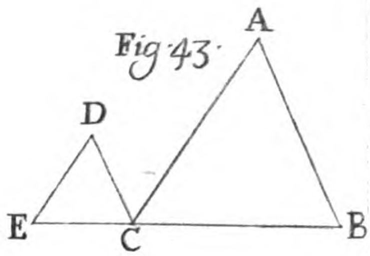
Fig·40·





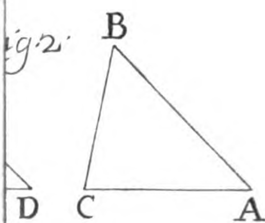
Fig·42·

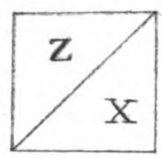
Fig·43·



ræ Libri Tertij.

ig·2·





Fig·3·

ig·5·

Fig·6·