APOLLONIUS
AC
SERENUS
PROMOTUS

AUCTORE

BARTHOLOMÆO INTIERI

FLORENTINO

Ad Illustrissimum, & Excellentissimum Dom.

D. HIERONYMUM
ONERUM CABANILIUM

E Comitibus Trojæ, & Montellæ,

Sancti Marci Marchionem, Ducem S. Johannis Rotundi, Rodi, Candelari, & S. Severi Dominum &c.

NEAPOLI, M.DCCIV.
Ex Typographia Leonardi-Josephi Sellitto.

Superiorum Permissu.

Excellentissime Princeps.

Paulò postquam de inveniendis infinitis curvis methodum excogitavi, meditanti rem eandem iterato alia occurrit dilucidior, ac perpulcrior, ut assolet de uno in aliud inventum, ac de una in aliam veritatem mens nostra progredi. Hanc tribus ab hinc mensibus excogitatam ne aliquantisper lateret alios Geometriæ amatores, quæ mihi mens est, semperq; fuit, in publicam proferre lucem decrevi, contra quàm nonnullorum est ingenium, præsertim nostri ævi, qui vel minimum, quod fortassis scire rentur, suis in præcordijs abdentes premere satagunt; quemadmodum pecuniarum avari, & vix sibi tutas divitias credentes, quas ipsi soli norunt: atque id ea mente agunt, ne qua facilitas alijs proveniat ad quædam intelligenda, quæ non sine magno labore ipsi intellexisse ducunt. res sanè viro ingenuo, nedũ literato indignæ. Tibi nuncupatum volo, Excellentissime Princeps, hoc qualecumque est opusculum eadem de causa, eodemque nomine, quo primum illud, quandoquidem gemelli videntur fœtus, & continuò fermè editi. Majora deberem pro tuis in me collatis jugiter beneficijs, proque animi benevolentia, quam testa-

tam

tam mihi in dies facis, meamque qualemcumque doctrinam mirificè commendas, sicuti nuper cum Illustrissimo D. Paulo Matthia Doria lubentissimè egisti, de meis laboribus, atque adinventis verba faciens; à quo viro in Republica literaria optimè merito non sine admiratione, ac humanitate, qua decet, fuere commendata. At hoc, quod exhibeo arrhæ instar est majorum, quæ polliceor, Deo conatibus meis annuēte; quicquid enim è paupere ingenio meo prodiverit tibi jure merito omnes acceptum referent, à quo otium omne in hujusmodi res incumbendi mihi partū, ea qua solitus es largitate majorum tuorum munificentiæ æmulatrici in literatos viros, bonasque artes excolendas, cujusmodi etiam ingenij Excellentissimum Ducem CAROLUM ONERUM CABANILIUM *nobis genuisti*

sti

sti præ reliquis natis tuis tecum, ut ità dicam, morum comitate, ac magnanimitate certantem, cui ferè quantum Tibi debeo, ac reliquæ tuæ domui. Is enim, ut & alij natu minores mei semper studiosissimi, semperque hortatores uti novi quiddam ederem, benemereri quantum possent de re literaria cupientes. Quamobrem serves illos tui imitatores etiam, atque etiam oro, atque hoc titulo magis ames, quod bonarum artium amore flagrent. Vale.

Excellentiæ Tuæ

Neap. XV. Martii 1704.

Addictissimus Servus
Bartholomæus Intieri.

AMICE LECTOR

OPellam, quam tibi trado, non cupidine gloriæ adductus, neque ad meorum detractorum tela retundenda, Typis committere decrevi, sed malui methodum tribus ab hinc mensibus de infinitarum Curvarum sectionibus à nemine hactenus, quem sciam, excogitatam indicare; præsertim, quia nunc temporis omnes ferè Geometriæ amore tenentur, cui nedum, at reliquis etiam disciplinis noster Excellentissimus PROREX, licèt variis, gravibusque negotiis, tam exteris, quàm totius Regni occupatus inter horas succisivas operam dare non dedignatur. *T*anto autem Principi, si hæc accepta fuisse cognovero, ad alia animum appellam; & præcipuè ad omnibus numeris absolvendum opusculum de Æquationum constructione. Unum scias velim cuncta, quæ hic leguntur, toto cælo ab iis, quæ nuper in alio libello edidi differre, neque illa quippiam mihi contulisse ad hæc invenienda: propterea de iis ne ullum hic quidem verbum. Vale.

DEFINITIONES

(*Fig.* 1.)

SI ab aliquo puncto A, in sublimi ad circumferentiam BHC recta linea ducatur AB, atque in utramque partem producatur, & manente puncto A, convertatur eadem AB circa circumferentiam, quousque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri; Superficiem BACFE recta linea BAE descriptam, constantemque ex duabus superficiebus BAC, EAF, ad verticem A inter se aptatis, quarum utraque indefinitè augeri potest, voco *Conicam superficiem*; & quidem, *Primam*, si circumferentia BHC hujus sit naturæ, ut ducta qualibet perpendiculari, vel applicata IK ad diametrum BC continuè proportionales sint BK, IK, KC. Hæc autem *Primus Circulus* vocetur.

Secundam verò *Superficiem Conicam* voco, si circumferentia BHC hujus naturæ fuerit, ut quadratum BK ad quadratum applicatæ IK eandem rationem habuerit, ac applicata IK ad KC. Hæc autem curva *Secundus circulus* vocetur.

Tertiam autem *Superficiem Conicam* voco, si circumferentia BHC hujusmodi fuerit naturæ, ut cubus BK ad cubum applicatæ IK eandem habuerit rationem, qu am IK ad KC. Hæc autem curva *Tertius Circulus* voce tur.

Quartam deniquè, & ita eodem modo in infinitum, voco *Conicam Superficiem*, si circumferentia BHC hujus naturæ fuerit, ut quadratoquadratum BK ad quadratoquadratum IK eandem habuerit rationẽ, ac eadem applicata IK ad KC. Hæc verò *Quartus Circulus* vocetur.

Idem dicendum, si ita fuerit BK ad applicatam KI, ut quadratum KI, ad quadratum KC; vel ita cubus IK ad

A cubum

cubum KC, vel quadratoquadratum IK ad quadratoquadratum KC, & ita in infinitum.

Not. Vox circuli modò curvam, modò planum curva inclusum significat.

SCHOLIUM.

QUomodo hæ curvæ describi possint, demonstravi in meo *Aditu*; verùm quia pollicitus sum, nihil eorum, quæ à me in lucem edita sunt, in medium allaturum, uti poterimus ad ipsarum descriptionem methodo à Carolo Renaldino tradita in suo Geometra Promoto. Quòd si cui illa Renaldini Methodus non arriserit, non ideo ab his, quæ mox tradam, animum avertere debet, utpotè quæ his curvis egeant; quandoquidem his positis ingens ad novas curvas detegendas campus aperitur. Quin & maximi Geometræ hoc idem fecerunt; Huddenius etenim, referente Schootenio Miscellaneorum sectione 22, Solidum secavit, cujus genesis longè hac difficilior existit: mente enim illa tantùm concipi potest, non autem ad praxim revocari; quod in nostris his curvis assumptis non accidit.

II.

Verticem cujuslibet voco manens punctum A.

III.

Axem rectam lineam DA, quæ per punctum A, & D, centrum curvæ BHC, transit.

SCHOLIUM.

SI curva BHC sit primus, vel planus circulus, quid sit centrum patet. In reliquis verò curvis punctum intelligo, quod bifariam dividit diametrum BC, ad quam ordinatim applicatur IK.

Co-

IV.

Conum autem voco figuram ABC contentam superficie plana BHCL, à curva BHCL inclusa, & conica superficie, quæ inter verticem, & curvæ circumferentiam interjicitur. Et quidem *Primum Conum* voco, si curva BHCL fuerit primus circulus. *Secundum* verò *Conum*, si curva BHC fuerit secundus circulus. *Tertium Conum*, si curva fuerit tertius circulus. *Quartum* denique *Conum*, & ita deinceps, si eadem curva BHC fuerit quartus circulus.

V.

Basim circulum ipsum, cujuscumque generis sit.

VI.

Conorum *rectos* voco, qui axes habent ad angulos rectos ipsis basibus.

VII.

Scalenos, qui non ad rectos angulos ipsis basibus axes habent,

VIII.

(*Fig.* 2. & 3.)

Omnis curvæ lineæ, vel duarũ curvarum CAD, CBD in uno plano existentium *Diametrum* voco rectam lineam FBAE, vel AE, quæ quidem ducta à linea curva CAD, vel à duabus curvis CAD, CBD, omnes lineas CD, quæ in ipsa, vel in ipsis curvis ducũtur cuidam lineæ AS, æquidistantes bifariam dividit.

IX.

Verticem lineæ rectæ terminum A, qui est in ipsa curva CAD. Si duæ autem curvæ fuerint, *Vertices* puncta A,B, quæ sunt in ipsis curvis, atque in ipsa diametro.

X.

Ordinatim ad diametrum *applicari* dicitur unaquæque æquidistantiarum linearum CE, DE.

XI.

Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum rectam lineam, quæ cum sit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum æquidistantes ad rectos secat angulos.

In præsentiarum his tantùm definitionibus contentus fui, cum ob nimiam temporis angustiam curvas, quas modo tradam excolere, ut animus erat, non potuerim. Culpandus tamen ipse non sum, quippe qui omnia dicere non suscepi, sed genesim tantùm curvarum, quas mox tradam. Puto tamen ingratum non fecisse iis, quibus Geometria cordi est; hac siquidem methodo detecta ad altiora gradum facere quisque proprio marte potest. Etenim, ut Cartesius ait (*lib.3.Geom.*) cognitis in materia Mathematicarum progressionum duobus, aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non est difficile.

PROPOSITIO I.

(*Fig. 4.*)

R*ectæ lineæ AG, AG, quæ a vertice A, cujuscumque superficiei ad puncta G,G, quæ in superficie conica sunt, ducuntur; in ipsa superficie erunt.*

Quo-

Quoniam enim puncta A, G sunt in superficie conica; idcirco recta ipsam describens [ex prima def. hujus] trãsibit in ipsa coni descriptione per puncta G, G; adeoque vel ex ipsa coni generatione, liquet, rectam AG totam in superficie conica existere. Q. F. D.

Coroll. Rectæ à vertice ad puncta, quæ sunt in superficie conica, basis circumferentiæ occurrent, si ulterius producantur.

PROPOSITIO II.

(*Fig.* 5.)

SI in alterutra superficierum quarumlibet conicarũ, quæ sunt ad verticem, sumantur duo puncta D, E, & conjungantur recta linea DE; atque ex vertice ducantur rectæ AD, AE, occurrentes ipsi circumferentiæ basis in punctis F, G, (coroll. p. hujus) *, ita ut FG, quæ hæc puncta conjungit perpendicularis sit ad diametrum BC; recta DE intra superficiem tota cadit: quæ verò ultra hæc puncta producitur tota extra cadit.*

Quoniam enim FHG perpendicularis est ad diametrũ BC, tota intra circulum cadet, ac proinde intra superficiem conicam: ergo (2. 11.) intra conicam superficiem est planum trianguli AFG, uti & DE in eodem plano sita. Q. E. D. Quòd verò producta extra superficiem cadat, satis in aperto est.

SCHOLIUM.

LAtius demonstrari hæc propositio potest, cum verò quod demonstratum fuit, satis ad ea, quæ sequuntur, sit, hæc in medium attulisse sufficiat.

PRO-

PROPOSITIO III.

(*Fig.5.*)

S*I quilibet conus plano ABC per verticem A secetur, sectio triangulum erit.*

Nam utraque AB, AC (1.*hujus*) potest concipi, tanquam recta linea superficiem conicam describens; item (3. 11.) BC est recta, utpote quae duorum planorum communis sectio est, nempe circuli subjecti, & plani per axem ducti, ergo figura ABC, triangulum erit Q.E.D.

PROPOSITIO IV.

(*Fig.6*)

S*I alteratra superficierum conicarum per verticem oppositarum secetur plano DFE aequidistante ipsi circulo BHC, per cujus periferiam fertur linea recta superficiem conicam describens, planum DFE, quod conica superficie clauditur circulus erit, ejusdem quidem generis, ac ille, qui est basis coni, centrum verò V erit in coni axe AO.*

Sit conus ABC secundus, & secetur plano ABC per axem, & per diametrum BC, sectio triangulum erit (3. *hujus*); tum in sectione DFE sumatur quodlibet punctum F; junctaque AF producatur [*corol.* 1. *hujus*] usque dum occurrat circumferentiae basis in puncto H. Per rectas autem AB, AH, planum ducatur ABH, secans basis planum recta (3. 11.) BH, planum verò DFE recta DF. Item per rectas AH, AC planum ducatur, secans basis planum (3. 11.) recta HC, planum verò DFE recta linea FE. Quoniam itaque (16. 11.) CB ipsi DE, BH ipsi DF, & CH ipsi FE parallela est, ergo triangulum BHC (10. 11. & 4.6.) triangulo DFE simile erit; ductisque HL ad BC, & FI ad DE perpendicularibus, simile erit triangulum

BHL

BLH triangulo DIF, ac propterea ita BL ad LH ut DI ad IF, vel (22.6.) ita quadratum BL ad quadratum LH, ut quadratum DI ad quadratum IF. Eadem ratione: triangulum LHC simile erit triangulo FIE, ac propterea (4.6) ita LH ad LC, ut FI ad IE. Sed (*hyp.*) ut quadratum BL ad LH quadratum, ita LH ad LC, ergò ut quadratum DI ad quadratum IF, ita IF ad IE, ac propterea sectio DFE, DE, Secundus circulus erit [*Def.* 1. *hujus*). Eadem ratione de quolibet alio circulo idem demonstrabitur, quod erat demonstrandum.

Quoniam verò, ità est BO ad OC, ut DV ad VE, ideo patet V fore centrum sectioni DEE (*Schol. def.* 3. *hujus*) Q.E.D.

Coroll. Ex dictis colligitur DE fore Diametrum circuli DFE cujuscumque generis fuerit.

PROPOSITIO V.

(*Fig.* 7.)

SI conus quicumque plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, sumatur autem aliquod punctum D in superficie coni, quod non sit in latere trianguli per axem, & ab ipso puncto ducatur recta linea DE parallela cuidã rectæ MN, quæ perpendiculariter ducta sit à circumferentia basis conicæ ad trianguli basim, sivè diametrum BC, triangulo per axem occurret, & ulterius producta usque ad alteram superficiei conicæ partem, bifariam a plano trianguli secabitur.

Conjungatur AD, & protrahatur (*coroll.* 1. *hujus*) donec occurrat circumferentiæ basis in puncto K, ex quo in eadem basi ducatur recta KHL parallela ad MN, & proindè etiam parallela ad DE; nec nõ KL (*hyp.* 26. & 29. 1.) perpendicularis erit ad BC: quoniam verò BC est etiam in plano trianguli per axem: ergo si ducatur ex vertice A ad punctum H linea AH, hæc erit in plano trianguli per

axem,

axem. Jam verò concipiatur triangulum AKH, erit DE in hujus trianguli plano; aliàs enim, si in hoc plano AKH duceretur ex pũcto D recta quæpiam parallela basi KH, atque hujusmodi parallela non esset eadem, ac DE, quam ostendimus esse parallelam KH: essent (9.11) duæ lineæ ex eodem puncto emanantes parallelæ inter se, quod fieri nequit: itaque DE est in plano AKH, & ulterius producta [29.1.] incidet in lineam AH, quæ est in plano trianguli per axem. ABC, Q.E. primo loco D.

Deinde verò producatur DE, donec occurrat superficiei conicæ in puncto G, & quoniam lineæ DEG, KHL sunt in eodem plano AKL, hinc recta AGL erit latus trianguli AKL; adeoque (29.1. & 4.6.) ita KH ad HL, ut DE ad EG; sed (*ex natura curvæ BKC*) KH æquatur HL; ergo DE æquatur etiam EG Q.E.D.

PROPOSITIO VI.

(*Fig.* 8.)

SI conus quicumque plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano DFE secante planum basis conicæ secundùm rectam lineam DE, quæ sit perpendicularis, vel ad BC basim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipsi constituitur; lineæ KH, KH, quæ in sectione DFE ordinatim applicantur in communi sectione FG plani secantis, & trianguli per axem cadent. Atque si conus sit rectus linea DE, quæ est in basi perpendicularis erit ad FG diametrum sectionis conicæ: sin verò scalenus, nõ semper, nisi cum planum ABC, quod per axem ducitur ad basin coni rectum fuerit.

Quod enim HK plano ABC, & proindè ejus cum plano DFE communi sectioni FG occurrat, & in ipso occursu bifariam secetur, id quidem liquet ex præcedenti. Cæterum si conus rectus sit, erit [*def.v.*] axis perpendicula-

ris

ris ad ejus basim, adeoq;circulus subjectus, plano [18.11] ABC rectus erit; ac proinde (3.*def.*11.) eadem DE ad lineam FG perpendicularis erit. Eadem autem est ratio, si conus sit scalenus, sed triangulum ABC rectum sit circulo subjecto. Sin verò triangulum ejusmodi rectum non fuerit subjecto circulo, non erit DE ad FG perpendicularis. Nam si DE esset utrique BC, FG perpendicularis, esset etiam (4.11.) eadem DE recta plano ABC; adeoque (18.11.) ipsum planum circuli BDC applicatũ lineæ DE rectum esset triangulo ABC contra hypothesim.

Corol. Hinc (7.*def.hujus*) recta FG diameter est sectionis DFE, utpote quæ rectas ordinatim applicatas bifariam secat.

PROPOSITIO VII.

(*Fig.* 9.)

SI conus quicumque secetur plano MAN per axem, & per diametrum MN, & secetur altero plano KFI secante basim coni secundùm rectam lineam KLI, quæ ad MN diametrum basis sit perpendicularis; diameter autẽ FL sectionis conicæ vel æquidistet uni AC laterum trianguli per axem, vel cum ipso extra coni verticem conveniat, & producantur in infinitum superficies conica, & planum secans KFI. Sectio quoque ipsa conica in infinitum augebitur, & ex sectionis conicę producta in infinitum diametro FL abscindet lineam FG ęqualem cuicumque datæ ipsa DGE, quæ ordinatim applicabitur.

Quoniam enim (*hyp.*) diameter FL cum latere AN ad partes C nunquam convenit; hinc si ipsa ad libitum producatur, puta ad G, & per G ducantur DE ad KI, atque BC ad MN parallelæ; erit [15.11.] planum productum per BC, DE parallelum plano MKN; adeòque (4.*hujus*) in superficie conica ulteriùs producta circulum efficiet,

 ejus-

ejusdē naturæ, atque est circulus MKN basis coni MAN ad quem, si protrahatur planum secans KFI, augebitur sectio conica: etenim cujuscumque generis fuerit circulus BDC semper vel planum sub BG in GC, vel solidum sub quadrato BG in GC,&c. majus erit vel plano sub ML in LN, vel solido sub quadrato ML in LN, &c. ac propterea (*ex propr. horum circulorum*] DG major KL, & patet, quod erat O.

PROPOSITIO VIII.

(*Fig. 9.*)

Genesis, & Natura Parabolarum, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum æquantur, vel planis sub abscissis inter verticem, & applicatas in Parametrum, vel solidis sub abscissis inter verticem, & applicatas in Parametri quadratū, vel deniq; planoplanis sub abscissis, & cubo Parametri, &c. in infinitum.

SI conus ABC plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autē & altero plano DFE, secante basim conicam secundùm rectam lineam DE, quæ ad diametrum BC sit perpendicularis, & sectionis

co:

conicæ diameter FG, *sit uni* AC *laterum trianguli per axem æquidistans, & quidem sectus conus primus sit, recta linea* KL *ordinatim applicata poterit spatium contentum sub linea* FL, *quæ ordinatim applicatam, & verticem sectionis interjacet, & Parametro* FH, *ad quam nempè linea* AF, *quæ coni verticem, & verticem sectionis interjacet, habeat eam rationem, quam ad* BC *quad. basis trianguli per axem habet rectangulum contentum sub* AB, AC *reliquis trianguli lateribus.*

Si verò conus, qui secatur, secundus fuerit, cujus basis BDC *hujus naturæ fuerit, ut quadratum* CG *ad quadr.* GD *eam rationem habeat, quam eadem* GD *ad* GB; *sive, quod idem est, ut solidum sub* CG *quad. in* GB *æquetur cubo* GD, *eademque, ut supra, ratione sectio instituatur, cubus rectæ* KL *ordinatim applicatæ æquabitur solido, quod continetur sub recta* FL, *& quad. Param.* FH, *ad quod scilicet quadratum eandem habeat rationem quadratum* AF, *quæ coni, & sectionis verticem interjacet, quam ad cubum* BC *solidum sub quad.* AB *in* AC.

Si autem conus tertius fuerit, cujus basis BDC *hujus naturæ fuerit, ut planoplanum, quod continetur sub cubo* CG *in* GB *æquetur quadratoquadrato* DG, *quadratoquadratum rectæ* KL *æquabitur planoplano, quod continetur sub abscissa* FL, *& cubo Parametri* FH, *ad quem scilicet cubum eãdem habeat rationem cubus* AF, *ac ad quadratoquadratum* BC *planoplanum, quod continetur sub cubo* AB *in* AC.

Et tandem, si conus eodem, quo supra, modo secandus, quartus fuerit, cujus basis BDC *hujus naturæ sit, ut planosolidum quod continetur sub quadratoquadrato* CG *in* GB *æquetur quadratocubo* GD, *quadratocubus* KL *æquabitur planosolido sub recta* LF, *& quadratoquadrato Parametri* FH, *ad quod quadratoquadratum eandem habeat rationem quadratoquadratum* AF, *ac ad quadratocubum* BC *planosolidum sub quadratoquadrato* AB *in* AC.

 SCHO-

SCHOLIUM.

Eodem modo ex quinti, ſeptimi, & aliorum in infinitum conorum ſectionibus cœteræ hujus generis curvæ haberi poſſunt, ut ex modo allatis, atque ex iis, quæ mox afferam manifeſtum erit. Nec diverſa in ſequentibus utemur methodo pro earum curvarum geneſi, quæ Apollonianam Hyperbolam, atque Ellipſim excedunt. Quare iis gratum me feciſſe exiſtimo, qui Geometriæ amore tenentur; idque affirmare jam auſim; etenim cum hæc eadem nunquam ſatis laudato, æternique nominis Viro, maximo, inquam, Dominico Auliſio, nulli, qui literis inſignis fuit, ſecundo, omnibus verò, qui nunc, vel doctrina, vel morum integritate conſpicui ſunt, abſque injuria præferendo, communicaſſem, eo, quo præditus eſt animi candore, certa mihi ſigna dedit, ſibi hæc placuiſſe, maximèque accepta fuiſſe, undè ſtimulos mihi addidit, ut ſtatim hæc in lucem ederem. Pro certo ſiquidem habeo, omnibus hæc accepta fore, dum illi ingrata non fuerunt, qui primum in his diſciplinis, cæteriſque ſcientiis locum tenet. Eos autem rogatos velim, qui nullis rationibus adducti, ſed nimia in eos, qui me mordicùs carpunt, propenſione impulſi, parum benè de me ſentiunt, ut æquâ mente hæc perpendant; ab his enim manifeſtè deduci poteſt; quid de aliis, quæ paucis abhinc menſibus in lucem edidi, judicandum ſit: etenim ut meam hic mentem aperiam, hanc methodum priori anteponendam puto ob hoc præcipuè, quia plurimæ ab Apollonio concinnatæ demonſtrationes his etiam curvis ſatis eleganter conveniunt, ut ex dicendis colligere erit, & præcipuè cum de tangentibus inveniendis in poſterum ſermo habebitur. Accedit etiam quod, hac methodo inventa tot illuſtrium virorum conatus, maximo nobis laboris, moleſtiarumque compendio

erunt,

erunt; quod quidem plurimi faciendum eſt.

Hoc autem extra dubium eſt, eorum reſpectu; quæ paucis ab hinc menſibus publici juris feci, quæ nunc facio, majorem ingenii aciem redolere, utpote quibus in inveniendis acutiori mente opus fuit, quàm in prioribus.

Demonſtratio

Sed jam demonſtrationem afferamus, quæ non ſolùm in omnibus modò expoſitis curvis locum habet, ſed etiam ipſiſſima eſt, ac Apolloniana: quare eandem huc afferre mihi viſum eſt, juxta methodum ab Elia Aſtorino Mathematico præſtantiſſimo excogitatam, quæ quidem omnibus, quotquot inventæ uſque adhuc fuere, præferenda eſt.

Per L ducatur MLN parallela ad BC in plano trianguli per axem, erit (15.11.) planum ductum per MN, KL parallelum baſi conicæ BDC, adeòque (4.*hujus*) ſectio MKNI circulus erit, & quidem ejuſdem naturæ, atque eſt baſis circulus BDC, cujus diameter erit MN, ad quam (10.11.) perpendicularis erit *KL*, adeoque

Si circulus BDC fuerit	Primus,	KL quad.	Æquab.	Rectglo ſub NL in LM
	Secundus,	KL cub.		Solido ſub NL quad. in LM
	Tertius,	KL ququad.		Plplano ſub NL cub. in LM
	Quartus,	KL qutub.		Plſolido ſub NL ququad, in LM

Atque adeo.

Pro curva ex ſectione primi Coni genita.

Æquant. hæ Rat.	Reglum ſub FL, & FH ad rectglum ſub FL, & FA (1.6.)
	FH ad FA (*hyp. & invert.*)
	BC quad. ad rectglum ſub AC, & AB (23.6.)
	BC ad AB, plus BC ad AC (4.6.)
	NL, ſive FO ad FA, plus ML ad FL (23.6.)
	Rectglum ſub NL in LM ad rectglum ſub FL, & FA.

Ergo

Ergo (9.5.) Rectglum sub FL in FH æquabitur reglo sub ML in LN, cui (*ut prius*) æquatur KL quad. adeòque sibi æquantur KL quad.& rectglum sub abscissa FL, & Param. FH. Q.E.D.

Pro curva ex sectione secundi Coni genita.

Æquant. hæ Rat.

[Solid. sub FL in quad. FH ad Solid. sub FL in FA quad.(.32.11.)
[FH quad.ad FA quad.(*hyp.& invert.*)
[BC cub. ad Solid. sub BA quad. in AC (30. *lib.6.Eucl.Borell.*)
[BC quad.ad AB quad.plus BC ad AC (4.6.)
[LN quad. sive FO quad. ad FA quad. plus ML ad FL.
[Solid.sub LN quad. in ML ad solid. sub FA quad.in FL.

Ergo (9.5.),Solidū sub abscissa FL in quad. FH æquabitur Solid.sub LN quad.in ML, cui, (*ut prius*) æquatur KL cub.; adeòque sibi æquantur KL cub.. & Solid. sub abscissa FL,& quadrato Param.FH. Q.E.D.

Pro curva ex sectione tertii Coni genita.

Æquant. hæ Rat.

[Planopla.sub FL in cub.FH, ad planopl.sub FL in cub.FA.
[FH cub.ad FA cub.(*hyp.& invert.*)
[BCquadquad.,ad planopl.sub cub.BA in AC
[BC cub.ad AB cub.plus BC ad AC(4.6.)
[LN cub.,vel FO cub.,ad AF cub.,plus ML, ad FL
[Planopl.sub LN cub.,in ML,ad planopl. sub FL in FA cub.

Ergo(9.5.) planoplan.sub FL in cub. FH æquabitur planoplan.sub LN cub.in ML,cui(*ut prius*)æquatur qua-

dra-

draqua dr KL; adeòque sibi æquantur KL qu adquad. & planopl. sub abscissa FL in cub. Param. FH. Q.E.D.

Pro curva ex sectione quarti Coni genita.

	[Planosolid. sub FL in quadquad. FH ad planosolid. sub FA quadquad. in FL.
	[FH quadqua. ad FA quadquad. (*hyp. & inv.*)
Æquant.	[BC quadcub. ad planosolid. sub AB quadraquad. in AC.
hæ Rat.	[BC quadquad. ad AB quadquad. plus BC ad AC (4. 6.)
	[LN quadquad. vel FO quadquad. ad FA quadquad. plus ML ad LF.
	[Plansolid. sub LN quadquad. in ML, ad plan. solid. sub FA quadquad. in LF.

Ergo (9. 5.) planosolidum sub quadquad. FH in FL æquabitur planosolid. sub LN quadquad. in ML, cui [*ut prius*) æquatur quadcub. ex LK; adeòque sibi æquantur quadcub. KL, & planosolid. sub abscissa FL, & Param. FH quadquad. Q.E.D.

Demon-

Demonstratio Recentiorum Analystarum more pro secunda Parabola.

Esto AB ∞ a.
BC ∞ b. Fiat propter similit. triangulor. ABC, AFO;
CA ∞ c. ut AB ad BC, ita AF ad FO, vel LN
FA ∞ d. a — b — d — $\frac{db}{a}$
FL ∞ y. Rursus fiat propter similitudinem triangu-
LK ∞ x. lorum ACB, FLM.
ut AC ad CB ita FL ad LM.
c — b — y — $\frac{yb}{c}$

Multipl. quad. LN, hoc est $\frac{ddbb}{aa}$

per LM, hoc est $\frac{yb}{c}$

Fit solidum sub quad. LN in LM æquale cubo LK; hoc est $\frac{ddbbb}{caa} y ∞ x^3$

Hinc si fiat, ut caa ad bbb, ita dd ad quad. FH, quod vocemus rr, habebitur hujusmodi æquatio $rry ∞ xxx$.

Ex qua cognoscitur solidum sub quad. datæ rectæ FH, vel Param. in abscissam LF æquari cubo applicatæ LK, vel xxx. Hinc ea omnia patent, quæ superius dicta sunt, videlicet solidum sub quadrato AB in AC eandem rationem habere ad cubum BC, quam quad. FA ad quad. Param. FH. Q.E.D.

Eadem prorsus ratione operandum non solùm in altioribus Parabolis, sed etiam in omnibus curvis, quas deinceps tradam; quod unico exemplo demonstrasse sufficiat.

SCHO-

SCHOLIUM.

Hujusmodi autem curvas Apollonii vestigiis inhærens, Parabolas vocandas censui, ob id nempè, quòd quadratum, vel cubus, vel quadquad. vel quadcub. &c. applicatæ non excedit, nec deficit, vel à rectglo, vel à solido, vel à plplano, vel à planosolido, &c. cui comparatur; sed vera adest inter ejusmodi quantitates COMPARATIO.

Quoniam verò non una tantùm, sed indefinitæ Parabolæ generari possunt; ideo eas ordinalibus numeris designare incongruum non erit. Quare Apolloniana, *Prima hujus prop.* vocabitur, quæ verò ex secundi coni sectione generatur *Secunda hujus prop.*, & quæ ex tertii coni sectione *Tertia: hujus propos.*. & ita deinceps,

Cœterùm ex supra allatis demonstrationibus manifestè apparet Apollonianam demonstrationem locum habere in omnibus hujus generis Parabolis; etenim paucis immutatis omnia cum eadem conveniunt, ubi enim in Apolloniana, sive Prima habetur Quadratũ, in Secunda habetur Cubus, in Tertia Quadratoquadratum, in Quarta Quadratocubus, in Quinta Cubocubus, & ita eodẽ ordine in altioribus. Similiter, ubi in Apolloniana, sive Prima habetur Rectangulum, in secunda Solidum, in Tertia Planoplanum, in Quarta Planosolidum, in Quinta Solidosolidum, & ita eodem ordine in altioribus. Quare facillimum cuique erit, hanc demonstrationem ad quamlibet Parabolam accomodare.

PROPOSITIO IX.

(*Fig.* 9.)

Genesis, & Natura earum Parabolarum, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum æquantur rectangulis sub abscissis inter verticem, & applicatas, in Parametrum, vel solidis sub abscissarum quadratis in Parametrum; vel planoplanis sub abscissarum cubis in Parametrum, &c.

SI conus ABC, cujus basis BDC, hujus naturæ sit, ut vel rectangulum sub BG in GC æquetur quadrato applicatæ GD, vel solidum sub quadrato BG in GC æquetur cubo applicatæ GD, vel planoplanum sub cubo BG in GC æquetur quadratoquadrato applicatæ GD, plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano DFE secante basim conicam secundùm rectam lineam DE, quæ ad diametrum BC sit perpendicularis, & sectionis conicæ diameter FG sit uni AC laterum trianguli per axem æquidistans; recta linea KL ordinatim applicata, si *si conus primus fuerit, poterit ſpatium contentum ſub linea FL, quæ verticem ſectionis, & ordinatim applicatam interjacet, & Parametro FH, ad quam nempe linea AF, quæ coni, & ſectionis vertices interjacet habet eam rationem, quam ad BC quad. baſis trianguli per axem habet rectangulum contentum ſub AB, & AC reliquis trianguli lateribus.*

Si verò conus ſecundus fuerit, rectæ applicatæ KL cubus æquabitur ſolido ſub quad. FL, & Param. FH, ad quam eandem habet proportionem AF, quam ad BC cub. habet ſolidum ſub AB in quadratum AC lateris paralleli diametro ſectionis FG.

Si denique conus tertius fuerit, quadquad. applicatæ KL æquabitur planoplano ſub cubo FL in Param. FH, ad quam eãdem habet rationem AF, quam ad BC quadquad. habet planoplanum ſub cubo AC in AB, & ita in infinitum.

Per L ducatur MLN parallela BC, ergo (15.11.) planum MKNI parallelum plano baſis conicæ BDC ſectionem efficiet (4.*hujus*) ejuſdem generis, atque eſt circulus baſis BDC; quare

Si circulus BDC fueri	Primus rectglum MLN	æquab.	LK quad.
	Secund. ſolid. ſub MLq in LN		LK cub.
	Tertius, plplnum ſub ML cub. in LN		LK ququad.

Unde in curva ex ſectione primi Coni genita.

	Rectglum ſub FH in FL, ad rectglum ſub AF in FL (1.6.)
Æquant.	FH ad FA (*hyp. & inv.*)
hæ Rat.	BC quad. ad rectglum BAC (23.6.)
	BC ad AC, plus BC ad AB [4.6.]
	ML ad LF, plus FO, ſive LN ad FA [23.6.]

 Re-

[Rectglum sub ML in LN, ad rectglum sub
[LF in FA.

Ergo[9.5.)rectglum sub FL in FH æquabitur rectglo sub ML in LN, cui, *ut prius*, æquatur quad.LK, & patet quod E.D.

Pro curva ex sectione secundi Coni genita.

[Solid. sub FH in FLq., ad solid. sub FA in
[FLq. (25.11.)
[FH ad FA (*hyp.& invert.*
Æquant. [BC cub.ad solid. sub BA in ACq(30.*lib.6.*
hæ Rat. [*Euc.l Borell.*
[BCq. ad ACq.plus BC ad BA (4.6.)
[MLq.,ad LFq.plus LN,vel FO,ad AF.
[Solid.sub MLq.in LN, ad solid. sub FA in
LFq.

Ergo (9.5.)solidum sub FH in FLq.æquabitur solido sub MLq, in LN,cui [*ut prius*)æquatur cubus LK, & patet Q.E.D.

Atque hæc etiam demonstratio locum in altioribus etiam curvis habet, immutatis tantummodo iis, quæ in prop.8.dicta sunt.

Cœterum & hæ curvæ Parabolarum appellationibus designabuntur ob easdem superius allatas rationes; hoc unico addito, quod Parabolam, quæ ex primi coni sectione oritur *Primam hujus prop.*vocabo, quæ verò ex *secundi Secundam hujus propositionis*, & deinceps.

Atque hisce duabus Propositionibus omnium earum curvarum Genesim demonstravi, quas Illustrissimis, & Excellentissimis Dominis D.Dominico Judice Hispaniarū Magnati, & D. Johanni Michaeli Cabanilio Equitum C.M.Præfecto in meo *Aditu* dicaveram.

PROPOSITIO X.

Fig. 10.

Genesis, & Natura earum Hyperbolarum, in quibus applicatarum quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. excedunt, vel plana sub abscissis inter verticem, & applicatas, & Parametro, vel solida sub abscissis, & quad. Parametri, vel plplana sub abscissis, & cubo Parametri, & ita in infinitum.

SI conus ABC plano per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano DFE secante basim conicam secundum rectam lineam DE, quæ perpendicularis sit ad diametrũ BC, & sectionis diameter IG producta, cum latere AC trianguli per axem extra coni verticem conveniat in H, & quidem conus sectus primus sit, recta linea MN ordinatim applicata poterit spatium, quod continetur sub abscissa FN, quæ sectionis verticem, & applicatam interjacet, & Parametro FL, ad quam eandem habet proportionem recta linea FH, quæ in directum consti-

tui

tuitur diametro sectionis FG, quam AK quad. lineæ; quæ sectionis diametro FG æquidistans à coni vertice A ad trianguli basim BC ducitur, ad rectangulum basis partibus BK, KC, quæ ab ipsa eadem AK æquidistante fiunt, contentum; unà cum alio spatio, quod sub eadem abscissa FN, & alia recta OX, quæ eandem habet proportionem ad OL, sive abscissam FN, quam Parameter LF, ad FH.

Quòd si conus eadem ratione sectus secundus fuerit. & quidem basis circulus BDC hujus sit naturæ, ut cubus applicatæ DG æquetur solido sub quadrato CG in GB, cubus applicatæ MN æquabitur solido sub abscissa FN, & quadrato Parametri FL, ad quod Parametri quad. eandem habet rationem quad. HF, atque cubus AK ad solidum sub quad. KC, in KB, unà cum alio solido sub eadem abscissa FN, & sub dupla FL, & OX in OX, ad cujus OX quadratum eandem habet rationem quadratum abscisæ FN, atque quadratum FH habet ad quadr. Param. FL.

Si denique conus eadem prorsus ratione secandus, tertius fuerit, & quidem circulus BDC hujus sit naturæ, ut quadquadratum DG æquetur plplano sub cubo CG in GB, quadquad. applicatæ MN æquabitur plplano sub abscisa FN, & cubo à recta FL Param., vel NO, & OX, tanquam una, ad quem scilicet cubum FL, vel NO eandem habet rationem cubus HF, atque quadratoquadratum AK ad plplanum sub cubo CK in

KB,

KB; ad cubum verò recta OX eandem habet proportionem cubus abscissæ FN, quam cubus FH, ad cub. Param. FL.

SCHOLIUM.

Eodem modo cæteræ in infinitum curvæ haberi poterunt, quæ magis, magisque se ordine excedant, modò alius, atque alius deinceps conus secandus proponatur; unica verò in qualibet harum sectionum demonstratio est, eaque omnino cum Apolloniana convenit, quarè hanc ob causam eandem huc afferre methodo supra laudati Astorini, non piguit.

DEMONSTRATIO.

Per N in plano trianguli per axem ducatur RS ad BC parallela, eritque (15.11.) planum ductum per MN, & RS ad basim coni parallelum, ac proinde (4. *hujus*) circulum efficiet ejusdem naturæ, atque est basis circulus; adeoque.

	Primus,	MN quad.		Rectglo sub RN in NS	
circulus BDC fuerit	Secundus,	MN cub.	Æquab.	Solido sub RN	in NS quad.
	Tertius,	MN ququad.		Pplano sub RN	in NS cub.

Ac propterea constructa figura, ut apparet factum.

Pro curva ex sectione primi Coni genita.

Æquant. hæ Rat.
[Rectglum sub FN, & NH, ad rectglum sub FN, & NX (1.6)
[NH, ad NX (4.6.)
[FH, ad FL (*hyp.*)
[AK quad:, ad rectgulum sub CK in KB (23.6.)
[AK, ad KC, plus AK ad KB. (4.6.)
[HN, ad NS, plus FN ad NR (23.6.)

Ro:

[Rectglum sub FN in HN, ad rectglum sub
[NR in NS ,

Ergo (7.5.) sibi æquantur rectglum sub FN, & NX, & rectglum sub NR, & NS, cui (*ut prius*) æquatur quad. NM. sed rectglum sub FN, & NX est id, quod continetur sub FN abscissa, & *Param*: FL, unà cum plano sub eadem abscissa, & OX, ad quam eadem habet proportionem abscissa FN, vel LO, quam FH, ad *Param*. FL; ergo patet quad: applicatæ NM æquari plano sub abscissa, & *Param*: unà cum plano sub eadem abscissa, & recta OX. Q.E.D.

Pro curva ex sectione secundi Coni genita.

[Solid. sub FN, in NH quad: ad solid: sub FN,
[in NX quad.
[NH quad:, ad NX quad: (4.6.)
Æquant. [FH quad: ad FL quad: (*hyp*.)
hæ Rat. [AK cub: ad solid: sub CK quad: in KB (30.
[*lib*.6.*Eucl*: *Borell*:
[AK quad: ad CK quad:, plus AK, ad KB
[(4.6.)
[HN quad: ad NS quad: plus FN ad NR
[Solid: sub FN in HN quad:, ad solid: sub
[NS quad: in NR.

Ergo (7.5.) solid: sub FN in NX quad: æquabitur solido sub NS quad: in NR, cui (*ut prius*) æquatur cubus MN applicatæ; sed solid: sub FN in NX quad: est id, quod continetur sub FN abscissa in quad: Param. FL, unà cum solido, quod continetur sub eadē abscissa F N, & rectglo sub 2NO, & OX, in OX, ad cuius OX quad: eādē habet proportionē quad. abscissæ, atque est quad: FH, ad quad: *Parametri* FL. ergo patet cubum applicatæ NM æquari solido sub abscissa. & *Parametri* quad: una cum alio solido sub eadem abscissa, &c. Q.E.D.

Pro curva ex sectione tertii Coni genita.

	Plplanum sub FN, & HN cub., ad plplanum sub FN, & NX cub.
	NH cub. ad NX cub. (4.6.)
Æquant.	FH cub. ad FL. cub. (*hyp.*)
hæ Rat.	AK ququad., ad plplan. sub CK cub. in KB.
	AK cub., ad CK cub., plus AK ad KB.
	HN cub., ad NS cub., plus FN ad NR.
	Plplanum sub HN cub. in FN, ad plplanum sub NS cub. in NR.

Ergo [9.5.] plplanū sub FN, & NX cubo æquatur plplano sub NS cubo in RN, cui (*ut prius*) æquatur ququadr. applicatæ MN; sed plplanum sub FN in NX cubū æquatur plplano sub FN abscissa in cubū Param. FL, unà cum recta OX tanquam una linea ? ergo patet ququad. applicatæ MN æquari plplano sub abscissa in cubum NX, ut supra. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Sed nec ab Apollonio discedere visum est in his curvis nomina imponendo, quare nos etiam *Hyperbolas* vocabimus; quadratum enim, vel cubus, vel ququad. &c. cujuscumque ex applicatis excedit rectāgulum, vel solidum, vel plplanum, &c. sub abscissa, & Parametro, vel sub abscissa, & Parametri quadrato, vel denique sub abscissa, & cubo Param., & ita deinceps.

Quoniam autem numero indefinitæ hæ Hyperbolæ sūt, ideo, ut supra in Parabolis factum est, nominibus ordinalibus easdem designabimus, quare quæ oritur ex sectione primi coni Hyperbola *Prima hujus propos.* nuncupabitur; quæ verò ex sectione secundi *Secunda hujus proposit.* &c.

Illud etiam hoc loco monendum censui, demonstratiotionem, qua pro omnibus his in infinitum curvis opus habemus unicam esse, atq; omnino cum Apolloniana convenire; sat enim est, ubi in Apolloniana habetur quadratum, in secunda hyperbola ponere cubum, in tertia quadratoquadratum, in quarta quadcub., & ita deinceps; ubi verò in Apolloniana habetur planum, vel rectglum, in secunda reponi debet solidum, in tertia plplanum, in quarta plsolidum, & ita deinceps; quæ omnia manifestè apparent ex supra allatis demonstrationibus.

PROPOSITIO XI.

(*Fig.* 10.)

Genesis, & Natura omnium Hyperbolarum, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum excedunt, vel plana sub abscissis, & Parametro, vel solida sub abscissarum quadratis, & Parametro, vel planoplana sub ascissarum cubis, & Parametro, &c. & ita deinceps in infinitum.

SI conus plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano DFE secante basim conicam secundùm rectā lineam DE, quæ ad basim BC trianguli per axē,

vel

vel ad diametrum sit perpendicularis, & sectionis diameter FG producta cum latere AC trianguli per axem extra coni verticem conveniat in H, rectæ lineæ MN ordinatim applicatæ quadratum, si conus primus sit, æquabitur plano, quod continetur sub abscissa FN in Parametrũ FL, ad quam ea FH, quæ in directum constituitur diametro sectionis, eam proportionem habet, quam AK quad. lineæ, quæ sectionis diametro FG æquidistans à coni vertice A ad trianguli basim BC ducitur, ad rectglum basis partibus BK, KC, quæ ab ipsa eadem AK æquidistante fiunt, contentum, unà cum alio plano, quod continetur sub eadem abscissa, & alia linea XO, ad quam eam rationem habet abscissa FN, quam recta HF ad Parametrum FL.

Quòd si conus secũdus fuerit, & circulus BDC hujus sit naturæ, ut cubus applicatæ DG æquetur solido sub quad. BG in GC, cubus applicatæ MN æquabitur solido, quod continetur sub quad. abscisæ in Param., ad quam eam proportionem habet recta HF, ut supra, quam cubus AK, ad solidum sub quad. BK in KC, unà cum alio solido sub quad. ejusdem abscissæ FN in XO, ad quam XO eam rationem habet abscisa FN, quam FH ad FL Parametrum.

Si denique sectus conus tertius fuerit, & quidẽ circulus BDC hujus sit naturæ, ut ququad. DG æquetur plplano sub cubo BG in GC; ququad. applicatæ MN æquabitur plplano sub cubo abscis-

sæ FN in Param. FL, ad quam eam rationem habet FH, atque ququad. AK, ad plplanum sub cubo BK in KC, unà cum alio plplano sub cubo abscissæ in XO, ad quam ita est eadem abscissa FN, ut FH ad FL Parametrum.

SCHOLIUM.

Eodem modo; & cæteræ curvæ haberi poterunt, quæ magis, magisque se ordine excedunt, modò alius, atque alius deinceps conus secandus proponatur.

DEMONSTRATIO.

Per N in plano trianguli per axem ducatur RS ad BC parallela, eritque (15. 11.) planum ductum per MN, & RS ad basim conicam parallelum, ac proinde (4. *huius*) circulum efficiet ejusdem naturæ, atque est basis circulus; adeoque

Si circulus BDC fuerit	Primus,	MN quad.		Rectglo sub RN in NS
	Secundus,	MN cub.	Æquab.	Solido sub RN in NS quad,
	Tertius,	MN ququad,		Plplano sub RN in NS cub,

Adeoque, constructa figura, ut apparet.

Pro curva ex sectione primi Coni genita.

Æquant: hæ Rat.

Rectglum sub FN, & HN, ad rectglum sub FN, & NX (1.6.)
HN ad NX (4.6.)
HF ad FL (*hyp.*)
AK quad., ad rectglum sub BK, & KC (23. 6.)
AK ad BK, plus AK ad KC [29. 1. & 4.6.]
FN, ad NR, plus HN ad NS [23.6.]
Rectglum sub FN, & HN, ad rectglum sub NR, & NS,

Er-

Ergo (9.5.) sibi æquantur rectglum sub FN,& NX, & rectglum sub NR, & NS, cui (*ut prius*) æquatur quad: NM. Sed rectglum sub FN, & NX est id, quod continetur sub FN abscissa, & Param: FL, unà cum plano sub eadem abscissa, & OX,ad quam eandem habet proportionem abscissa FN, vel LO,quam FH, ad Param: FL. Ergò patet, quad:applicatæ NM æquari plano sub abscissa, & Param: unà cum alio plano sub eadem abscissa, & recta OX. Q.E.D.

Pro curva ex Sectione secundi Coni genita.

Æqu:hæ Rat:
- Solid:sub FNq;in HN,ad solid: sub FNq. in NX(25.11.)
- HN, ad NX (4.6.)
- HF ad FL (*hyp*:)
- AK cub: ad solid: sub BKq.in *K*C (30. *lib*.6. *Eucl*: *Borel*:)
- AKq.ad BKq;plus A*K* ad *K*C.(29.1.& 4.6.)
- FNq.ad RNq; plus HN ad NS.
- Solid:sub FNq. in HN, ad solid: sub RNq. in NS.

Ergo (9.5.) sibi æquantur solid: sub FNq. in NX, & solid: sub RNq, in NS, cui [*ut prius*] æquatur cub. NM. Sed solid: sub FNq. in NX,est solid: sub abscissæ FNq. in Param:FL, unà cum solido sub ejusdem abscissæ FNq. in OX, ad quam ita est abscissa FN, sive LO, ut HF ad parametrum LF. Ergo patet cubum applicatæ NM æquari solido sub abscissæ quadrato in Parametrum, unà cum solido sub ejusdem abscissæ quad: & alia recta OX, ut supra dictum est. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Superfluum foret hic alias demonstrationes pro aliis curvis addere, cum omnes ex Apolloniana pēdeant, facillimummumque sit quaslibet concinnare, nil enim immutandum est, quàm verba quadrati in cubum,& plani,vel rectgli in solidum, ut in modò allata demonstratione factum est.

Necesse etiã est,ut & has curvas *Hyperbolas* vocemus, etenim quadratum, vel cubus, &c. applicatæ excedit,vel planum sub abscissa,& Param:,vel solid:sub abscissæ quad: in Parametrum.

Quoniam autem non unica,sed indefinitæ Hyperbolæ sunt, ideo easdem insuper nominibus ordinalibus designabimus; quare Apolloniana *Prima hujus prop*:dicetur,quæ verò oritur ex sectione secundi coni, *Secunda hujus prop*: dicetur, & quæ ex tertii *Tertia hujus prop*:& ita deinceps in infinitum.

PROPOSITIO XII.

(*Fig.* 11.)

Genesis, & Natura Oppositarum Hyperbolarum.

SI quæcumque superficies BAC, AXQ, quæ sũt ad verticem, plano BAQXC per axem, & per diametrum BC alicujus ex basibus secentur, secentur autem & altero plano DEFOHK non per verticem, secante basim v.g. BDC secundùm rectam lineam DF, quæ perpendicularis sit ad diametrum BC, erit in utraque superficierum sectio DEF, OHK, quæ vocatur Hyperbola, altera propos. 10., altera verò propos. 11. Et duarum Hyperbolarum diameter MEHN eadem erit. Parametri verò EP, HR inter se æquales

erunt

erunt, si sectiones Primæ Hyperbolæ fuerint: si verò secundæ, & quidem Hyperbola DEF sit Secunda propos.10. Parameter EP ad Parametrū HR ita erit, ut HE ad EP; si autem sectiones genitæ Tertiæ Hyperbolæ fuerint & quidem Hyperbola DEF Tertia Propos.10. Parameter EP ad parametrum HR eandem habebit rationem, ac quadratum HE ad quad. EP; & ita eodem modo.

Nota I. Planum ABC secans basim BDC per diametrū BC secare etiam basim XKQ secundum rectam lineam XQ, quæ erit diameter circuli XKQ cujuscumque generis fuerit.

Nota II. Si solidum sub quad:BM in MC æquetur cubo applicatæ DM; in circulo XKQ solidum sub quad:QN in NX æquabitur cubo applicatæ NK, quæ omnia ex prop: 4.*huius* patent.

His præmissis. Quòd utriusque sectionis diameter sit eadem, id quidem *ex hyp*: patet.

Quòd verò cum sectio DEF est Hyperbola prop.10, altera OHK sit Hyperbola prop:11: in hunc modū demonstrari potest.

Per A ducatur ALY parallela sectionū diametro MN, sitque Hyperbola DEF secunda prop:10. cujus Parameter EP. Similia [29. 1.& 4.6.] erunt triangula ALC, AYX, item ALB, AYQ. quare

	[HE quad: ad EP quad: [*hyp*, & 10.*hujus*].
	[AL cub: ad solid: sub CL quad: in BL [30 *lib.6.Euclid.Borel.*]
Æq. hæ	[AL quad: ad LC quad:, plus AL ad LB [4.6.]
Rat.	[AY quad: ad YX quad:, plus AY ad YQ.
	[AY cub: ad solid: sub YX quad: in YQ [11. *hujus*.
	[EH ad HR Param.

Unde patet sectionem OHK Hyperbolam secundam prop.11. esse, quod demonstrare opus erat.

Quod si Hyperbola DEF secunda fuerit propos. 11. OHK erit secunda propos. 10. nec dissimilis est demonstratio.

Quòd autem Parametri æquales inter se sint, si Hyperbolæ primæ fuerint, demonstravit Apollonius. Quòd verò, si Hyperbolæ secundæ fuerint, ut supra dictum est. Parameter EP, ad Param. HR eandem rationem habeat, ac HE ad EP, id manifestè deducitur ex modò allata demonstratione; ab ea enim colligitur, ita esse HE quadratū ad EP quadratum, ut HE ad HR Param: unde continuè proportionales erunt HE, PE, HR; quare erit PE Parameter ad HR Param, ut HE ad E*P*. Q.E.D.

Si Hyperbola DEF tertia fuerit prop. 10. demonstrabitur ita esse cubum HE ad cubum EP, ut EH ad HR, unde apparet ità esse PE *Param.* ad RH Param. ut HE quad. ad EP, &c.

SCHOLIUM.

Hæ autem curvæ *Oppositæ Hyperbolæ* Apolloniano more vocari possunt.

PROPOSITIO XIII.

(*Fig.* 12.)

SI conus quicumque ABC plano per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano LEF conveniente cum utroque latere trianguli per axem & quod non sit parallelum plano basis. Planum autem in quo est coni basis BC conveniat cum plano secante secundum rectam lineam FQ, quæ sit perpendicularis

ad

ad diametrum BC ad partes G productã, si opus fuerit: sectio LME primus circulus erit; si conus ABC fuerit primus, atque si continuè proportionales fuerint BG, GA, GC: intellige autem rectam AG esse in plano trianguli per axem, necnõ parallelã LF diametro sectionis productæ ad F.

Quòd si conus ABC secundus fuerit, ita ut solidum sub quad. CV in VB æquetur cubo applicatæ DV, atque eodem modo instituatur sectio, omnibusque ut supra positis, BG ad GA sit, ut quadratum GA ad GC quadratum, sectio LME secundus circulus erit.

Si denique conus eadem ratione secandus tertius fuerit, ita ut plplanum sub cubo CV in VB æquetur quadquadrato applicatæ VD, atq; ita sit BG ad GA, ut GA cubus ad CG cubũ, sectio LME tertius circulus erit, & ita eodem modo in cæteris omnibus.

Sumpto quolibet puncto M in curva LME applicetur MN, & per N ducatur RNS parallela diametro BC; tum per rectas RS, MN ducatur planum RMS, quod parallelum erit [15.11.] basi conicæ; ac propterea (4. *hujus*) circulum efficiet, cujus diameter RS, applicata verò (10.11.) recta MN, adeoque

	Primus,	MN quad.		Rectãglo sub RN	in NS
Si circulus BDC fuerit	Secundus,	MN cub.	Æquab.	Solido sub RN	in NS quad,
	Tertius,	MN ququad.		Pl. plano sub RN	in NS cub,

Adeoque si conus primus fuerit

[BG ad GA (4.6.)
[BF ad FL (4.6.)
[RN ad NL [*ut prius*)

E BG

Æquant. hæ Rat. [BG ad GA (*hyp.*)
[GA ad CG (4.6.)
[EF ad FC (4.6.)
[EN ad NS.

Ergo (11.5.) ita EN ad NS, ut RN ad NL; quare ◡ 16.6 rectglum sub EN in NL æquatur rectglo sub RN in NS, cui æquatur quad. NM. Ergo rectglum sub EN in NL æquatur quadrato applicatæ NM; ac propterea sectio circulus erit. Q.E.D.

Si Conus secundus fuerit.

Æquant. hæ Rat. [BG ad GA (4.6.]
[BF ad FL [4.6.]
[RN ad NL [*ut prius*]
[BG ad GA (*hyp.*)
[GAq. ad CGq. (4. & 22.6.)
[EFq. ad FCq. (4.6.)
[ENq. ad NSq.

Ergo (11.5.) ita est RN ad NL; ut EN q. ad NS q. quare solid. sub EN q. in NL æquabitur solido sub RN in NSq. cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM; ergo patet sectionem LME circulum secundum existere. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Eadem demonstratione in altioribus opus est. Hujusmodi autem sectiones *Subcontrariæ* vocentur.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

(*Fig.* 12.)

Iisdem autem positis, si circulus BDC hujus sit naturæ, ut cubus DV æquetur solido sub quadrato BV in VC, vel ququadratum DV æquetur plplano sub cubo BV in VC, &c. sectio LME circulus erit, & quidem primus, si existente cono ABC primo, ita sit BG ad GA, ut GA ad GC.

Vel circulus secundus erit, si existente cono ABC secundo, ita fuerit BG quadratum ad GA quadratum, ut GA ad CG.

Vel denique tertius circulus erit, si existente tertio cono ABC, ita fuerit BG cubus ad GA cubum, ut BA ad GC, & ita eodem modo in infinitum.

Omnibus enim, ut supra in proposit. 13. constructis.

	Primus,	MN quad.		Rectglo sub RN	in NS
Si circulus BDC fuerit	Secundus	MN cub.	Æquab.	Solido sub RN	in NS quad,
	Tertius,	MN ququad.		Plplano sub RN	in NS cub,

	BG ad GA (4.6.)
	BF ad FL (4.6.)
Æqu. hæ	RN ad NL (*ut prius*)
hæ Rat.	BG ad GA (*hyp.*)
	GA ad GC (4.6.)
	EF ad FC (4.6.)
	EN ad NS

Ergo ita EN ad NS, ut RN ad NL, ac propterea (16.6.) planum sub EN in NL æquabitur plano sub NS, & RN,

 cui

cui [*ut prius*] æquatur quadratum MN; ergo planum sub EN in NL æquabitur quadrato MN; unde sectio LME est circulus Q.E.D.

Si conus secundus fuerit.

	BG quad: ad GAq. [4. & 22.6.]
	BF quad: ad FL quad: [4.6]
	RN quad: ad NL quad: [*ut prius*]
Æqu. hæ	BG quad: ad GA quad: [*hyp:*]
Rat.	GA ad CG [4.6.]
	EF ad FC [4.6.]
	EN ad NS

Ergo RN quadratum ad quadratum NL, ut EN ad NS. Ergo solidum sub quadrato NL in EN æquabitur solido sub quadrato RN in NS, cui [*ut prius*] æquatur cubus NM. Ergo solidum sub quadrato NL in NE æquabitur cubo NM, ac propterea sectio LME secundus circulus erit. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Hujusmodi etiam sectiones *Subcontrariæ* vocentur.

PROPOSITIO XV.

(*Fig.* 13.)

Genesis, & Natura earum Ellipsium, in quibus applicatarum quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. deficiũt vel à planis sub abscissis, in Parametrũ, vel solidis sub abscissis

in

in Parametri quadratum, vel à planoplanis ſub abſciſſis in Parametri cubum, & ita eodem ordine in infinitum.

SI conus plano ABC per axem, & diametrum BC ſecetur, ſecetur autem & altero plano FMH conveniente cum utroque latere trianguli per axem, atque ſecante planum baſis coni ſecundùm rectam lineam GP, quæ perpendicularis ſit ad diametrum circuli BDC, productam, ſi opus fuerit, ad partes K, nec ſubcontrariè ponatur, rectæ lineæ MN ordinatim applicatæ quadratũ, æquabitur plano ſub abſciſſa FN, & Parametro FL, ad quam eandem rationem habet diameter FH, atque quadratum AK rectæ parallelæ diametro FH ad planum ſub BK, & CK, minus plano ſub eadem abſciſſa FN, vel OX; & recta XL, ad quam XL eandem habet proportionem abſciſſa OX, vel FN, quam diameter FH ad Parametrum FL.

Quòd ſi conus ſecũdus fuerit, & circulus BDC hujus naturæ, ut ſolidum ſub quadrato CG in GB æquetur cubo applicatæ DG, cubus applicatæ NM æquabitur ſolido ſub abſciſſa FN, & quadrato rectæ NO, vel FX deficientis à Parametro FL, recta LX, ad quam LX ita eſt abſciſſa FN, atque diameter FH ad Parametrũ FL.

Si

Si denique conus tertius fuerit, & circulus BDC hujus naturæ, at plplanum sub cubo CG in GB æquetur ququadrato applicatæ DG; ququatum applicatæ NM æquabitur planoplano sub abscissa, & cubo rectæ NO, vel FX, deficientis à Parametro FL recta LX, ad quam LX ita est abscissa FN, atque diameter FH ad Parametrũ FL

SCHOLIUM.

Eadē ratione ex quarti, quinti, & sexti coni, &c. sectionibus cœteræ in infinitum curvæ magis compositæ haberi possunt. Demonstratio autem unica in omnibus est, atque omnino cum Apolloniana convenit; unde facillimum erit cuilibet propositæ curvæ accomodare.

DEMONSTRATIO.

Per N ducatur recta RNS ad BG parallela: Ergo (15. 11.) planum per RS, NM, parallelum erit basi coni, atque conum secando (4. *huius*) circulum efficiet, ejusdem quidem naturæ, atque est basis circulus: adeoque

	(Primus,	MNquad. (	Rectglo sub RN in NS
Si circulus BDC fuerit	(Secundus,	MNcub.	(Aequ. Solid. sub RN in NS qua.
	Tertius	MNququad. (	Plplan. sub RN in NS cub,

Ergo pro curva ex primi Coni sectione orta.

	Rectglum sub HN in FN, ad rectglum sub FN, & NO (1.6.)
Æqu. hæ Rat.	NH ad NO (4.6.)
	HF ad FL (*hyp*)
	AK quad: ad rectglum sub KC in KB (23.6.)
	AK ad KC, plus KA ad KB.
	HG ad CG, plus FG ad GB (4.6.)
	HN ad NS, plus FN ad NR (23.6)

Re-

[Rectglum sub HN in FN ad rectglum sub NS in NR

Ergo (9. 5.) rectglum sub FN, & NO æquatur rectglo sub NS in NR, cui (*ut prius*) æquatur quadratum NM. Ergo rectglum sub FN, & NO, vel FX æquatur quadrato NM. Sed rectglum sub FN, & NO, vel FX est id, quod continetur sub abscissa FN, & recta FX, deficiente à Parametro FL recta XL, ad quam eandem habet proportionem abscissa FN, vel OX, quam diameter FH ad Parametrum FL? ergo patet Q.E.D.

Pro curva ex sectione secundi Coni orta.

Æqu: hæ Rat.

[Solidum sub FN, & quad: NH ad solid: sub FN, & quad: NO.
[HN quad: ad NO quad: (4. & 22.6.)
[HF quad: ad FL quad: (*hyp.*)
[AK cub: ad solid: sub CK quad: in KB (30. *lib.* 6. *Eucl. Bor.*)
[AK quad: ad CK quad: plus AK ad KB (4. & 22.6.)
[HG quad: ad CG quad: plus FG ad GB (4.6.)
[HN quad: ad NS quad: plus FN ad NR
[Solid: sub HN quad: in FN ad solid: sub NS quad. in NR.

Ergo (9. 5.) sibi æquantur solidum sub NO quad: & FN, & solidum sub NS quadratum in NR, cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM. Ergo solidum sub quadrato NO, vel FX æquatur cubo applicatæ NM. Sed solidum sub FX quadrato in FN est id, quod continetur sub abscissa FN, & quadrato rectæ FX deficientis à Parametro FL recta XL, ad quam FX ita est quadratum abscissæ, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet, quod E.D.

Pra

Pro curva ex sectione tertii Coni orta.

Æquant.	[Plplanum sub FN, & cubo NH ad plplanum
	[sub FN, & cubo NO
hæ Rat.	[Cub: NH ad cub: NO
	[Cub: HF ad cub: FL [*hyp.*]
	[Ququad: AK ad plplanum sub cub: CK in KB
	[AK cub: ad cub: CK, plus AK ad KB [4.6.]
	[HG cub: ad CG cub. plus FG ad GB [4.6.]
	[HN cub. ad NS cub: plus FN ad NR
	[Plpla. sub HN cub: in FN ad plpla: sub NS
	[cub: in NR

Ergo [9.5.] sibi æquantur plplanum sub FN, & cubo NO, & planum sub cubo NS in NR, cui [*ut prius*] æquatur quadratum applicatæ NM. Ergo æquantur plplanum sub cubo *N*O, vel FX, & ququadratum applicatæ NM. Sed plplanum sub FN, & cubo FX est id quod continetur sub abscissa FN, & cubo rectæ FX, deficientis à Parametro FL recta XL, ad quam LX eandem habet rationem abscissa FN, vel OX, quam diameter FH ad Parametrum. Ergo manifestè apparet, quod D. susceperam.

S C H O L I U M.

Curvas modò descriptas *Ellipses* vocare æquum est, quandoquidem eodem nomine Apollonius usus est, cum quadrata, vel cubi, vel ququadrata, &c. applicatarum deficiant à planis, vel solidis, vel plplanis, quibus comparantur.

Quoniam autem non una, sed numero indefinitæ hæ curvæ sunt, ideo easdem ordinalibus nominibus designare necessum puto. Quare quæ oritur ex sectione primi coni *Prima Ellipsis* nuncupabitur, numerumque hujus propositionis addemus. Quæ verò ex secundi sectione

ne

ctione oritur *Secunda hujus propositionis Ellipsis*; & quæ ex tertii *Tertia*, & ita deinceps eodem ordine.

Atque hoc etiam loco animadvertere licet, demonstrationem, qua usus sum, omnino cum Apolloniana convenire, ubi enim in illa habetur quadratum, in hac habetur cubus, aut quadratoquadratum, &c. ubi verò in Apolloniana habetur rectglum in hac habetur, vel solidum, vel plplanum, &c.

PROPOSITIO XVI.

(*Fig.* 13.)

Genesis, & Natura earum Ellipsium, in quibus quadrata, vel cubi, vel quadratoquadrata, &c. applicatarum deficiunt vel à planis sub abscissis in Parametrum, vel a solidis sub abscissarum quadratis in Parametrum, vel à planoplanis sub abscissarum cubis in Parametrum, &c.

Si conus ABC plano ABC per axem, & per diametrum BC secetur, secetur autem & altero plano FMH conveniente cum utroque latere trianguli, atque secante planum basis coni secũdùm rectam lineam GP, quæ perpendicularis sit ad diametrum BC productam, si opus fuerit, ad partes K, nec subcontrariè ponatur, rectæ lineæ NM ordinatim applicatæ quadratum, si conus primus fuerit, æquabitur plano sub abscissa, in Parametro FL, ad quam eandem habet rationem diameter FH, quam quadratum AK rectæ paralelæ diametro sectionis FG, ad planum sub CK in KB, minus plano sub eadem abscissa in rectam XL, ad quam ita est eadem abscissa, ut diameter FH ad Parametrum FL.

Quòd si conus secundus fuerit, atque circulus BDC bujus naturæ, ut solidum sub quadrato GB in GC æquetur cubo applicatæ DG, rectæ applicatæ NM cubus æquabitur solido sub abscissæ FN quadrato in Parametrum FL, ad quam eandem rationem habet diameter FH, quam cubus AK ad solidum sub quadrato KB in CK, minus solido sub quadrato abscissæ FN in XL, ad quã XL ita est eadem obscissa FN, ut diameter ad Parametrum.

Si denique conus eadem ratione secandus tertius fuerit, & circulus BDC bujus naturæ, ut plplanum sub BG cubo in CG æquetur ququadrato applicatæ GD, quadratoquadratum applicatæ NM æquabitur plplano sub abscissæ FN cubo in Parametrum FL, ad quam eandem habet rationem diameter FH, quam ququadratũ AK ad planoplanum sub cubo BK in CK, minus plplano sub ejusdem FN cubo in LX, ad quam XL ita est abscissa FN, ut diameter FH ad Parametrum FL.

SCHO.

SCHOLIUM.

Eodem prorſus modo in altioribus curvis operandum, ita ut facillimum cuique ſit, quamlibet hujus generis curvam invenire.

DEMONSTRATIO.

Per N ducatur recta RNS parallela diametro BC : ergo planum ductum per RS, NM parallelum erit plano baſis coni, ac propterea ſectio RMS circulus erit [4. *hujus*] ejuſdem quidem naturæ, atque eſt baſis circulus: adeoque,

Unde.

	(Primus,	MNquad. (	Rectglo ſub RN in NS
Si circulus BDC fuerit	(Secundus,	MNcub.	(Aequ. Solid, ſub RN in NS qua.
	Tertius	MNququad. (	Plplan. ſub RN in NS cub.

Pro curva ex ſectione primi coni genita.

[Rectglum ſub FN in NH ad rectglum ſub
[FN in NO (1.6.)
[NH ad NO (4.6.)
Æqu: hæ [HF ad FL (*hyp.*)
Rat. [AK quad: ad rectglum ſub KB in KC [23.6.]
[AK ad KB, plus AK ad KC [4.6.]
[FG ad GB, plus HG ad GC [4.6.]
[FN ad NR, plus NH ad NS [23.6.]
[Rectglum ſub FN in NH ad rectglum ſub
[NR in NS.

Ergo [9.5.] ſibi æquantur rectglum ſub FN, & NO, & rectglum ſub RN, & NS, cui [*ut prius*] æquatur quadratum applicatæ NM. Ergo ſibi æquantur rectglum ſub FN, & NO, & quadratum NM. Sed rectangulum ſub FN, & NO eſt rectglum ſub abſciſſa FN, & Parametro FL, minus rectglo ſub eadem abſciſſa FN, vel OX, & recta LX ad quam ita eſt abſciſſa OX, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet, Q.E.D.

Pro curva ex sectione secundi Coni genita.

Æquant. hæ Rat.
[Solid: sub FN quad: in NH ad solid: sub FN quad: in NO
[NH ad NO (32.11.)
[HF ad FL (*hyp.*)
[AK cub: ad solid: sub *K*B quad: in *K*C (36. *lib.*6.*Eucl.Bor.*)
[AX quad: ad KB quad:, plus AK ad *K*C (4.6.)
[FG quad: ad GB quad: plus HG ad CG (4.6.)
[*F*N quad ad NR quad: plus HN ad NS
[Solid: sub *F*N quad: in HN ad solid: sub NR quad in NS

Ergo (9.5.) sibi æquantur solidum sub *F*N quadrato in NO, & solidum subquadrato NR in NS, cui (*ut prius*) æquatur cubus applicatæ NM. Ergo sibi æquantur cubus applicatæ NM, & solidum sub quadrato FN, & NO. Sed solidum sub quadrato FN in NO æquatur solido sub quadrato abscissæ FN in Parametrum, minus solido sub ejusdem abscissæ FN quadrato in XL, ad quam ita est abscissa FN. vel OX, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet Q.E.D.

Pro curva ex sectione tertii coni genita.

Æquant. hæ Rat.
[Plplanũ sub FN cub: in NH ad plplanum sub cubo FN in NO
[NH ad NO (4.6.)
[HF ad FL (*hyp*(
[AK ququad: ad plplan. sub KB cub. in KC;
[AK cub. ad KB cub; plus AK ad KC
[FG cub. ad GB cub., plus HG ad GC
[FN cub. ad RN cub: plus HN ad NS
[Plplanum sub FN cub. in HN ad plplanum sub RN cub: in NS

Er-

Ergo (9.5.) sibi æquantur plplanum sub cubo FN in NO & plplanum sub RN cubo in NS, cui (*ut prius*) æquatur ququadratum applicatæ NM. Ergo sibi æquantur ququadratum applicatæ NM, & plplanum sub cubo FN in NO. Sed plplanum sub cubo FN in NO, vel FX est id quod continetur sub cubo abscissæ FN in Parametrum FL, minus plplano sub cubo FN, vel OX in XL, ad quam XL ita est abscissa FN, vel OX, ut diameter FH ad Parametrum FL. Ergo patet Q.E.D.

SCHOLIUM.

Hæ autem curvæ *Ellipses* vocentur, nam & in his quadrata, vel cubi, vel ququadrata applicatarum, &c, deficiunt, à planis, vel solidis, vel planoplanis, &c. quibus comparantur.

Quoniam verò & hæ *Ellipses* indefinitæ sunt, ideo numeris ordinalibus easdem designabimus. Quarè Apolloniana, vel quæ oritur ex sectione primi coni, *Prima hujus Prop.* vocabitur, quæ verò oritur ex sectione secundi coni *secunda hujus prop.*, & quæ ex tertii *Tertia*, & ita in infinitum eodem ordine.

Notandum hoc loco etiam est, allatam pro his curvis demonstrationem unicam esse, atque omnino cum Apolloniana convenire paucis tantummodo immutatis, ut supra dictum est.

PROPOSITIO XVII.

(*Fig.* 14.)

In Parabola prima prop.8. quadrata applicatarum EC, FD sunt inter se, ut AE, AF abscissa ab ipsis. In secunda verò ejusdem propos. Parabola

cubi

cubi applicatarum EC, FD, sunt inter se, ut eædem abscissæ AE, AF. In tertia autem ejusdem propositionis Parabola, ququadrata applicatarum EC, *FD sunt inter se, ut eædem abscissæ AE, AF, & ita in infinitum in altioribus.*

Pro *Prima Parabola, Parametro AG.*

	[EC quad: ad FD quad: (*prop.* 8. *huius &* 7.5.)
Æquant: hæ Rat.	[Rectglum sub AE, & AG ad Rectglum sub AF, AG (1.6.)
	[AE ad AF, Q.E.D.

Pro secunda Parabola, Parametro AG.

	[EC cubus ad FD cubum (8. *hujus, &* 7.5.)
Æquant. hæ Rat.	[Solid. sub AG quad. in AE, ad solid: sub AG quad: in AF [32.11.]
	[AE ad AF. Q.E.D.

Pro tertia Parabola, Parametro AG.

	[EC ququad: ad FD ququad: (8. *hujus &* 7.5.)
Aquant. hę Rat.	[Plplanum sub AG cub. in AE ad plpla: sub AG cub. in AF.
	[AE ad AF. Q.E.D.

PROPOSITIO XVIII.

(*Fig.* 14.)

In prima Parabola prop. 9. quadrata applicatarum EC, FD sunt inter se, ut ab ipsis abscissæ AE, AF. In secunda Parabola ejusdem 9. propos.

ap

applicatarum EC, FD cubi sunt inter se, ut abscissarum AE, AF quadrata. In tertia denique Parabola ejusdem propositionis ita sunt inter se applicatarum ququadrata, ut abscissarum AE, AF cubi, & ita eodem ordine in infinitum.

Pro prima Parabola, cujus Parameter AG

[EC quad: ad FD quad. (7. 5. & 9. *hujus*)
[Rectglum sub GA, AE ad rectglum sub GA,
Æqu. hæ [AF (1. 6.)
Rat. [AE ad AF. Q.E.D.

Pro secunda Parabola, cujus Parameter AG

[EC cub: ad FD cub: (7. 5. & 9. *hujus*)
[Solid: sub GA in AE quad: ad solid: sub GA
Æqu. hæ [in quad: AF [31. 11.]
Rat. [AE quad: ad AF quad: Q.E.D.

Pro tertia parabola, cujus Parameter AG

[EC ququad: ad FD ququad: (7. 5. & 9. *hujus*)
[Plplan: sub GA in AE cub: ad plplanum sub
Æqu. hæ [GA in AF cub.
Rat. [AE cub: ad AF cub: Q.E.D.

PROPOSITIO XIX.

(*Fig.* 15.)

In primis Hyperbolis proposit. 10., *& primis Ellipsibus propos.* 15. *quadrata applicatarum DE, FG, ita sunt ad rectgla contenta sub lineis EB, EA, & GB, GA, ut Parameter AC ad diametr, AB. In Hyperbola autem intellige, AB esse rectū inter oppositas hyperbolas interceptam. Quadrata* *ta verò earundem applicatarum inter se sunt, ut prædicta rectangula inter se.*

In secundis verò Hyperbolis, atque Ellipsibus earundem propositionum, cubi applicatarum DE, FG ad solida sub AE, & quadrato EB, ac sub AG in quadratum GB, ut AC Parametri quadratū ad quadratum AB, cubi verò inter se, ut prædicta solida.

In tertiis denique hyperbolis, atque ellipsibus earundem prop: ita applicatarum DE, FG ququadrata ad plplana sub AE, & cubo EB, & sub AG in cubum GB, ut cubus Parametri AC ad cubum AB: ququadrata verò prædicta, ut ipsa plplana, & ita in infinitum.

Producantur DE, FG donec occurant BC productæ in punctis H, K; quare in prima hyperbola, & Ellipsi.

[DE quad:ad rectglum AE, EB (10. *vel* 15. *hujus*, & 7.5.)
Æq. hæ Rat. [Rectglum sub AE, EH ad rectglum sub AE, EB (1.6.)
[EH ad EB (4.6.)
[AC Parameter ad AB, & patet primum.
[GK ad GB (1.6.)
[Rectglum sub GK in GA ad rectglum sub GA in GB (7.5. & *prop.* 10. *vel* 15. *hujus*
[FG quad:ad rectglum sub GA, GB

Atque (*alternando*) DE quadratum ad FG quadratum, ut rectglum sub AE, EB ad rectglum sub AG, GB. Q. E. secundo loco D.

In secunda hyperbola, & Ellipsi.

[DE cub: ad solid. sub AE, in BE quad. (7.5. & 10. *vel* 15. *hujus*)
Æqu. hæ Rat. [Solid. sub AE, in EH quad. ad solid: sub AE in EB quad.

EH

[EH quad: ad EB quad:
[AC quad: ad AB quad: Q.E.primo loco D.
Æqu: hæ [GK quad:ad GB quad:
Rat. [Solid: ſub GK quad: in AG ad ſolid: ſub GB
[quad:in AG(10.& 15 *hujus* & 7. 5.
[Cub:FG ad ſolid: ſub AG in GB quad:

Atque[*alternando*]DE cub: ad FG cubum, ut ſolidum ſub AE in EB quadratum ad ſolidum ſub AG in GB quadratum. Q.E.ultimo loco D.

In Tertia hyperbola, & Ellipſi.

[DE ququad:ad plpla:ſub AE in EB cub:(7.5
[& 10, *vel* 15,*hujus*.
Æquant. [Solid. ſub AE in EH cub: ad plpl.ſub AE in
hæ Rat. [EB cub.
[EH cub.ad EB cub.
[AC cub.ad *AB* cub. Q.E.primo loco D.
[GK cub.ad GB cub.
[Plpla: ſub AG in GK cub. ad plplan. ſub AG
[in GB cub. (7.5.& 10, *vel* 15 *hujus*]
[FG ququad.ad plplan.ſub AG in GB cub.

Atque[*alternando*]DE ququadratũ ad FG ququadratum,ut plplanum ſub AE in EB cub; ad plplanum ſub AG in GB cub. Q.E. ultimo loco D.

PROPOSITIO XX.

(*Fig.* 15.)

In primis Hyperbolis prop. 11., *& primis Ellipſibus propoſ.* 16.*hujus, quadrata applicatarũ DE, FG ita ſunt ad rectangula ſub AE, EB, & ſub AG, & GB, ut Parameter AC ad rectã AB, quæ oppoſitas ſectiones interjacet, & earundem applica-*

G ta-

tarum quadrata sunt inter se, ut prædicta rectangula.

In secundis verò Hyperbolis, & Ellipsibus earundem propos. cubi applicatarum DE, FG ad solida sub quadrato AE in EB, & sub quadrato AG in GB, ut AC, ad AB, & cubi applicatarum sunt inter se, ut prædicta solida.

In tertiis denique Hyperbolis, & Ellipsibus ita sunt applicatarum ququadrata ad plplana sub cubo AE in EB, & sub cubo AG in GB, ut AC ad AB, & ita eodem modo in infinitum.

Si hyperbola, vel Ellipsis prima fuerit, patet ex antecedenti.

In secunda Hyperbola, & Ellipsi.

	[DE cub. ad solid. sub quad. AE in EB (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
Æquant. hæ Rat.	[Solid. sub AE quad. in EH ad solid. sub AE quad. in EB
	[EH ad EB
	[AC ad AB Q.E. primo loco D.
	[GK ad GB
	[Solid. sub GK in quad. GA ad solid. sub GB in quad. GA (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
	[Cub: FG ad solid. sub GB in quad. GA.

Atque [*alternando*] DE cubus ad cubum FG, ut solidum sub quadrato AE in EB ad solidum sub quadrato AG in GB. Q.E. ultimo loco D.

In tertia Hyperbola, & Ellipsi.

	[DE ququad. ad plplanum sub cub. AE in EB (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus*)
Æquant.	[Plplan. sub AE cub. in EH ad plplan. sub cub. AE in EB
hæ Rat.	[EH ad EB (4.6.)

AC

[AC ad AB, & patet Q. E primo loco D.
[GK ad GB.
[Plapla. sub Gk in cub. GA ad Plplan. sub GB
[in cub. GA (7.5. & 11. *vel* 16. *hujus.*)
[FG cub. ad solid: sub GB in cub. GA.

Atque [*alternando*] ut ququadratum DE ad ququadratum FG, ita plplanum sub cubo AE in EB ad plplanum sub cubo AG in GB Q. E. ultimo loco D.

L E M M A. *Fig.* 16.

Recta linea AC indefinita ad partes V bifariã dividatur in D, atque infra D, ad partes V sumatur quodlibet punctum, B, dico quadratum AB majorem habere rationem ad rectangulum ADB, quàm quadratum AC ad rectglum ADC.

Quòd si AC ita in D secta fuerit, ut AD dupla sit DC, cubus AB ad solidũ sub quadrato AD in DB in majori ratione erit, quàm cubus AC ad solidum sub quadrato AD in DC.

Quòd enim quadratum AB maiorem rationem habeat ad rectglum ADB; quã quadratum AC, &c. ita patet. Dividatur AB bifariam in E; ergo rectglum AEB majus erit rectglo ADB; ac propterea in majori ratione erit quadratum AB ad rectglum ADB, quàm ad rectglum AEB. Sed (4.2.) ut quadratum AB ad rectglum AEB, ita quadratum AC ad rectglum ADC. Ergo quadratum AB ad rectglum ADB in majori ratione erit, quàm quadratum AC ad rectglum ADC. Q. D. E.

Quòd verò cubus AB ad solidum sub quadrato AD in DC, &c. majorem rationẽ habeat, ita patet. Fiat ut AC ad AD, ita AB ad AE, ergo (*ex doctrina de Maximis, & Minimis,*) solidum sub quadrato AE in EB majus erit solido sub quadrato AD in DB, quare in majori ratione erit cubus AB ad solidum sub AD quadrato in DB, quàm ad solidum sub quadrato AE in EB. Sed ut cubus AB ad solidum sub quadrato AE in EB, ita cubus AC ad solidum sub quadrato AD in DC. Ergo cubus AB ad solidum sub quadrato AD in DB in majori ratione erit, quàm cubus AC ad solidum sub quadrato AD in DC. Q.E.D.

SCHOLIUM.

Eadem ratione si AC ita in D secta fuerit, ut AD sit tripla, vel quadrupla, &c. ipsius DC demonstrabitur ququadratum, vel qucubum, &c. AB in majori ratione esse ad plplanũ, vel plsolidum &c. sub cubo, vel ququadrato AD in DB, quam ququadratum, vel qusolidum, &c. AC, ad plplanum, vel plsolidum sub cubo, vel ququadrato AD in DC, & ita eodem modo in infinitum.

Idem dicendum, si AC ita in D secta fuerit, ut AD sit subdupla, vel subtripla, &c. ipsius DC, nam hoc casu cubus, vel ququadratum, &c, AB majorem haberet proportionem ad solidum sub AD in quadratũ DB, vel ad plplanum sub AD in DB cubum, quàm cubus, vel ququadratum AC ad solidum sub AD in quadratum DC, vel ad plplanum sub AD in cubum DC &c. quod monuisse sufficiat.

PROPOSITIO XXI.

(Fig. 17.)

Si Parabola DEG prima fuerit prop. 8. hujus, sumtoque in ipsa quolibet puncto E, ducatur ab ipso EC applicata ad diametrum DB, atque AD sit æqualis DC inter verticem, & ordinatam EC, recta, quæ per puncta A, E, ducitur, parabolam in puncto E tanget.

Si

Si verò Parabola DEG fuerit secunda ejusdem propositionis, & DA dupla DC, recta AE tanget in puncto E.

Si deniq; Parabola DEG fuerit tertia ejusdem propos. 8. & AD tripla DC, recta AE tanget in semper puncto E.

Eodem modo si DEG fuerit quarta Parabola, & DA quadrupla AC, & si DE fuerit quinta, & DA etiam quintupla DC, & ita in infinitum, AE erit tangens.

Ex quolibet puncto G applicetur ad diametrum DB recta GB occurrens AE productæ, si opus fuerit, in puncto F.

Pro Prima Parabola

Quoniam itaque recta linea AC indefinita ad partes V secta est bifariam in D, sumptumque est punctum B infra D ad partes V, majorem rationē habebit quadratum AB ad rectglum ADB, quàm quadratum AC ad rectglum ADC, & *alternando*, in majori ratione erit quadratum AB ad quadratum AC, quàm rectglum ADB ad rectglum ADC, vel (1.6.) DB ad DC. vel (17. *hujus*) GB quadratum ad EC quadratum. Ergo quadratum AB ad quadratum AC, vel (4. & 22.6.) quadratum FB ad quadratum EC in majori ratione erit, quàm GB quadratum ad quadratum *E*C. *E*rgo quadratum FB majus est quadrato GB, ac propterea FG major GB: unde punctum F erit extra parabolam D*E*G. Q.E.D.

Pro secunda Parabola.

Quoniam recta AC indefinitè producta ad partes V ita in D secta est, ut AD dupla sit ipsius DC, atque infra D ad partes V sumptum est punctum B, cubus AB ad solidum sub quadrato AD in DB majorem rationem habebit, quàm cubus AC ad solidum sub eodem quadrat

AD

AD in DC, & altern. cubus AB ad cubum AC majorem proportionem habebit, quàm solidum sub quadrato AD in DB, ad solidum sub quadrato AD in DC, hoc est quam DB, ad DC, vel [17. *hujus*] quam cubus GB ad cubum EC. Sed ut cubus AB ad cubum AC, ita cubus FB ad cubum EC. Ergo cubus FG majorem rationem habebit ad cubum EC, quàm cubus GB ad eundem cubum EC; ac propterea [10.5.] FB major erit GB, unde patet punctum F esse extra Parabolam. Q.E.D.

Pro tertia Parabola.

Quoniam AD tripla est ipsius DC, eodem modo *ex Lemmate ant.* ququadratū AB maiorē habebit rationē ad ququadratū AC, sive ququadratū FB ad ququadratū EC, quàm plplanum sub cubo AD in DB ad plplanum sub cubo AD in DC, hoc est, quàm DB ad DC, vel (17. *hujus*] quàm ququadratum GB ad ququadratum EC. Ergo ququadratum FB ad ququadratum EC majorem proportionem habebit, quàm ququadratum GB ad ququadratum EC, ac propterea [10.5.] FB maior GB, & punctum F extra Parabolam. Q.E.D.

PROPOSITIO XXII.

(*Fig.* 17.)

Si Parabola DEG fuerit prima propos.9. hujus, et in ipsa sumatur quodlibet punctum E, à quo applicetur EC ad diametrum DB abscindens rectam DC, cui æqualis ponatur DA, & jungantur puncta A, E, recta AEF, hæc parabolam DEG in puncto E tanget.

Si verò Parabola DEG fuerit secunda ejusdem propos.9. hujus, & DC fuerit dupla DA, *AE erit tangens.*

Quòd si Parabola DEG fuerit tertia, & DC

tri-

tripla DA, AE erit etiam tangens, & ita eodem ordine in infinitum.

Si Parabola prima fuerit, demonstratum est in antecedenti, AE parabolam tangere in puncto E.

Si verò Parabola secunda fuerit prop. 9. hujus, ita procedet demonstratio. Quoniam AC indefinitè producta ad partes V, ita secta est in D, ut AD subdupla sit ipsius DC, atque in ipsa infra *D* ad partes V sumptum est punctum B, majorem rationem habebit cubus AB ad solidum sub AD in quadratum DB, quàm cubus AC ad solidum sub AD in quadratum DC, atque *alter.* in majori ratione erit cubus AB ad cubum AC, vel FB cubus ad cubum EC, quàm solidum sub AD in quadratum DB, ad solidum sub AD in quadratum DC, vel quàm quadratum DB ad quadratum DC, vel [18. *hujus*] quàm cubus GB ad cubum EC. Ergo cubus FB ad cubum EC majorem rationem habebit, quàm cubus GB ad cubum EC, ac propterea [10. 5.] FB major erit recta GB, & patet punctum F esse extra Parabolam. Q.D.E.

Si autem Parabola DEG fuerit tertia prop. hujus, eodem modo (*ex lemmate anteced.*) ququadratum AB ad quadratoquadratum AC, sive ququadratum FB ad quadratoquadratũ EC majorem rationem habebit, quàm planoplanum sub AD in cubum DB ad planoplanum sub AD in cubum DC, hoc est quàm ququad. DB ad ququad. DC, vel (18. *hujus*) quàm ququad. GB ad ququad. EC. Ergo in majori ratione erit ququad. FB ad ququad. EC, quàm quadratoquadratum GB ad quadratoquadratum EC. Ergo (10. 5.) FB major erit GB, ac propterea punctum F erit extra Parabolam Q.D.O.

SCHOLIUM.

Ex his, quæ in medium attuli, facillima se prodit ratio, qua, cujuscumque Parabolæ datæ tangentes in dato puncto invenire possibile esset, atque adeo ea omnia peragere

re

re, quæ ab Apollonio hac de re tradita sunt: quæ quidem omnia silentio præterire visum est, cùm quisque proprio marte, nulloque negotio perficere possit.

PROPOSITIO XXIII.

(*Fig.* 18.)

Si in prima Hyperbola prop. 10. *vel prima Ellipsi prop.* 15. *sumatur aliquod punctum C, ab eoque recta linea CD ad diametrum BD ordinatim applicetur, & quam proportionem habent lineæ BD, & AD interjectæ inter ordinatim applicatã CD, & sectionum vertices A, B, eandem habeant inter se, BE, AE partes diametri inter vertices, recta linea EC conjungens punctum E in diametro, & punctum C in sectione, sectiones ipsas continget.*

Quòd si Hyperbola, aut Ellipsis secunda fuerit earundem propositionum; omnibusque ut supra peractis, fiat ut BD *ad* 2 *AD, ita BE ad EA, recta linea EC conjungens puncta E,* C *tangens sectiones ipsas erit.*

Et si Hyperbola, vel Ellipsis tertia fuerit earundem propositionum, & fiat ut DB *ad* 3 *AD, ita BE ad AE, recta linea conjungens puncta E, C sectiones continget.*

Sumto quolibet puncto in CE, ut F, ordinatim applicetur FG ad diametrum BD, sectioni occurrens in H, & per A, & B ducantur AL, BM ad EF parallelæ, & protrahantur CD, BM usquedum sibi mutuò occurrant in puncto K, ducantur etiam rectæ BCX, GQM; igitur

(a) 9.

(29.1.& 4.6.] similia erunt inter se triãgula CBE,&XBA; BCK,XCM; BCN,XCO. Atque hæc omnibus Hyperbolis, & Ellipsibus communia sunt. Sed

In prima Hyperbola, & Ellipsi.

	[BK ad AN (4.6.)
Æqu. hæ	[BD ad AD (*hyp.*)
Rat.	[BE ad EA (2.6.)
	[BC ad CX
	[BK ad NX.

Ergo (9.5.) sibi æquantur AN, & NX; adeoque

[*Not. primò.*] Rectglũ ANX, sive quadratum AN maius est rectglo AOX (ex doctrina de Maximis, & Minimis). Ac propterea majorem proportionem habet NX ad OX, quàm AO ad AN.

[*Secundò.*] KB ad BM est, ut NX ad OX; nam NO ad KM, ut OC ad CM, vel ut OX ad MB; ergo (*alternando, & componendo*) erit NX ad OX, ut KB ad BM. Ergo (ex nota 1. præced.] KB ad BM in majori ratione erit, quàm AO ad AN; quare rectglum sub KB, & AN majus erit rectglo sub BM, & AO.

[*Tertio.*] Quoniam AN ad CE, ita AD ad DE, & ut CE ad KB, ita ED ad DB, erit rectglum sub AN in KB ad quadratum CE, ut rectglum ADB ad quadratum ED. Quare rectglum ADB ad quadratum DE, ut rectglum sub KB, & AN ad quadratum CE. Sed rectglum sub KB, & AN (ex not. 2.) majus est rectglo sub BM, & AO. Ergo majorem proportionem habet rectglum ADB ad quadratum DE, quàm rectglum sub MB, AO ad quadratum CE, vel *ob similitudinem triangulorum*, quàm rectglum sub AG, & GB ad quadratum GE. Ergo (*altern.*) erit BDA ad BGA, vel (propositione 19. huius) quadratum CD ad quadratum GH in majori ratione, quàm DE quadratum ad EG, sive, quâm CD ad FG. Ergo [10.5.] HG minor est FG, ac propterea punctum F est extra curvas. Q.D.E.

Pro secunda Hyperbola, vel Ellipsi.

Dividatur EA bifariam in S, item CX bifariam in . Hinc omnibus, ut supra imperatum est, constructis, habebitur.

	[KB ad AN (4.6.)
	[BD ad DA (*hyp.*)
Æqu.hæc	[BE ad dimidium EA, vel ES (2.6.)
Ration.	[BC ad dimidium CX, vel CV (4.6.)
	[KB ad dimidium XN

Ergo (9.5.) sibi æquantur AN, & dimidium XN. quare XN dupla erit ipsius AN; adeoque

(*Not. primò*) solidum sub quadrato NX in NA (ex doctrina de Maximis, & Minimis) majus erit solido sub quadrato XO in OA. Ac propterea majorem rationem habebit quadratum NX ad quadratum XO, quam OA ad AN.

(*Secundo*) ita est quadratum KB ad quadratum MB, ut quadratum NX ad OX, ut supra demonstratum est. Ergo (*ex not. 1. præced.*) quadratum KB ad quadratum MB majorem habet proportionem, quàm OA ad AN; quare solidum sub quadrato KB in AN majus erit solido sub quadrato MB in OA

(*Tertio*) Ex ijs, quæ supra demonstrata sunt, deducitur, ita esse solidum sub AN, & quadrato KB ad cubum CE, ut solidum sub AD in quadratum DB ad cubum DE. Quare ex *not. 2. præced.*) majorem proportionem habebit solidum sub AD in quadratum DB ad cubum DE, quàm solidum sub AO, & quadrato BM ad cubum CE, vel quàm solidum sub AG, & quadrato GB ad cubum GE. Ergo (*altern.*) solidum sub AD in quadratum DB ad solidum sub AG in quadratũ GB, vel (propositione 19. huius) cubus CD ad cubũ HG in majori ratione erit, quàm DE cubus ad cubum GE, vel quàm cubus CD ad cubum FG. Ergo (10.5.) HG minor est ipsa FG; ac propterea patet, punctum F esse extra curvas. Q.D.E. *Pro*

Pro tertia Hyperbola, & Ellipsi.

Sit ES dimidium S , item CV dimidium VX , ergo.

[Bk ad AN (4.6.)
[BD ad DA (*hyp.*)
Æqu. hæ [BE ad ES (2.6, & *hyp.*)
Rat. [BC ad CV (4 6.)
[Bk ad tertiam partem X N

Ergo (9.5.) XN tripla est ipsius NA ac propterea (*Not. Primò*) Plplanum sub cubo NX in NA (*ex doctrina de maximis, & minimis*) majus erit plplano sub cubo OX in OA ; undè majorem proportionem habebit cubus NX ad OX cubum, quàm OA ad AN.

(*Secundò*) Ex ijs , quæ suprà demonstrata sunt, cubus KB ad cubũ MB, ut cubus NX ad OX cubũ. *Ergo* (*ex nota præced.*) cubus KB ad cubum MB in majori ratione erit, quàm AO ad AN: quare plplanum sub cubo KB in AN majus erit plplano sub cubo MB in AO.

(*Tertio*) Ex supra demonstratis ita erit plplanum sub AN in cubum KB ad ququadratum CE , ut plplanum sub AD in cubum DB ad ququadratum DE. Quare plplanum sub AD in cubum DB ad ququadratum DE majorem rationem habebit, quàm plplanum sub AO in cubum MB ad ququadratum CE, vel quàm plplanum sub AG in cubum GB ad plplanum GE . Undè (*altern.*) plplanum sub DA in cubum DB ad plplanum sub AG in cubum GB; vel (propositione 19. huius) ququadratum CD, ad ququadratum HG majorem proportionem habebit, quàm ququadratum DE ad ququadratum GE , vel quàm ququadratum *DC* ad ququadratum FG. *Ergo* (10.5.) HG minor est FG, & patet punctum F esse extra curvas. Q.*E.D*.

PROPOSITIO XXIV.

(*Fig.* 18.)

Si in prima Hyperbola prop. 11. *vel in prima Ellipsi prop.* 16. *sumatur quodlibet punctum C, ab eoque applicetur CD ad diametrum AB, & quam proportionem habent rectæ BD, AD interjectæ inter applicatam CD, & sectionum vertices A, B; eandem habeant inter se BE, EA partes diametri inter vertices; recta linea EC puncta conjungens, curvas in puncto C tanget.*

Si verò hyperbola, aut ellipsis secunda fuerit earundem propositionum, & fiat, ut DB ad dimidiam partem AB, ita BE ad EA; recta EC hyperbolam, aut ellipsim continget.

Et si denique hyperbola, aut ellipsis fuerit tertia earundem propositionum, atque sit BD ad tertiam partem AD, ita BE ad AE; recta EC tangens curvarum erit. Ita in infinitum eadem ratione operandum erit.

Omnibus enim, ut in prop. antecedenti, constructis, quando hyperbola, aut ellipsis est prima, patet propositum ex iis, quæ modò attulimus. Quando autem hyperbola, aut ellipsis est secunda, ita demonstratur. Ob similitudinem triangulorum, ut supra.

[KB ad AN (4.6.)
Æquant. [BD ad DA (*hyp*)
hæ Rat. [BE ad 2EA [4.6.]
[BC ad 2CX (4.6.)
[BK ad 2XN

Ac

; propterea (7.5.) AN dupla erit ipsius NX. Unde (*Not. Primò.*) Solidum sub quadrato AN in NX majus erit solido sub quadrato AO in OX; atque adeo majorem proportionem habebit NX ad OX, quàm quadratum AO ad quadratum AN.

(*Secundò*) Quoniam ex iis, quæ in anteced: prop: dicta, & demonstrata sunt, ita est KB ad BM, ut NX ad OX, erit KB ad BM in majori ratione, quàm quadratum AO ad quadratum AN, ac propterea solidum sub quadrato AN in kB majus erit solido sub quadrato AO in BM.

(*Tertiò*) Ita est solidum sub quadrato AN in KB ad cubum CE, ut solidum sub quadrato AD in DB ad cubum *D*E. Ergo [ex not. 2.] solidũ sub quad. AD in BD ad cubũ DE majorem proportionem habebit, quàm solidum sub quadrato AO in MB ad cubũ CE, vel quàm solidum sub quadrato AG in GB ad cubum GE. Ergo (*altern.*) solidum sub quadrato A*D* in *D*B majorem proportionem habebit, ad solidum sub quadrato AG in GB, vel (20. *prop. hujus*) cubus C*D* ad cubum HG majorem proportionem habebit, quàm cubus E*D* ad cubum *E*G, vel quàm cubus CD, ad cubum FG. Ergo (10.5.] HG minor est FG, ac propterea punctum F erit extra hyperbolam, aut ellipsim. Q.E.D.

Pro tertia Hyperbola, *aut Ellipsi.*

Omnibus ut supra constructis, facillimè demonstrabitur AN triplam esse ipsius NX. Quare.

(*Not. Primò*) Plplanum sub cubo AN in NX majus erit plplano sub cubo AO in OX, unde majorem proportionem habebit XN ad XO, quàm cubus AO ad cubum AN.

(*Secundò*) Quoniam, ut supra demonstratum est, ita KB ad BM, ut NX ad OX, erit etiam (*ex not. anteced.*) KB ad BM in majori ratione, quàm cubus AO ad cubum AN: quare plplanum sub KB in cubum AN majus erit plplano sub MB in cubum AO.

(*Tertiò*) Ita est plplanum sub cubo AN in kB ad ququadratum CE, ut plplanũ sub cubo AD in DB ad ququadratum

tum DE Ergo(*ex not.2.præced.*)plplanum sub cubo AD in DB ad ququadratum DE majorẽrationẽ habebit,quàm plplanum sub cubo AO in MB ad ququadratum CE, ve quàm plplanum sub cubo AG in GB ad ququadratum GE Ergo (*alternando*) plplanum sub cubo AD in DB ad plplanum sub cubo AG in GB,vel (20.*huius*) ququadratum CD ad ququadratum HG majorẽ rationem habebit,quàm ququadratum ED ad ququadratum EG,sive quàm ququadratum CD ad ququadratum FG;ac propterea FG (10.5.) major erit HG.Unde punctum F erit extra propositas curvas.Q.E.D

S C H O L I U M.

Atque quatuor his propositionibus ea omnia demonstrata sunt, quibus ad inveniendas tangentes omnium Parabolarum, Hyperbolarum, atque Ellipsium opus est. Quæ cùm literis mandassem, in ea incidi, quæ habentur in *Geometrica* Exercitat ion e ardinalis Michaelis Angeli Riccii, eximii sanè GeCoetræ; in qua ea quæ ad tangentes spectant, methodomparùm à mea diversa explicata offendi. An verò in iis, quæ meditatum se ait de infinitarum curvarum genesi,quidquam cum meis inventis commune fueram divinare nõ possum;nullus siquidem,quem sciam, illa vidit unquam; nec satis ex eius verbis colligi potest; ait enim loco citato: *Quare pergimus ad reliqua usum præstantissimum habentia ad inveniendas plurium linearum tangentes,figurarum centra gravitatis,& quadraturas,& ad alia,item multa, quæ justo servamus operi; ubi dabimus novam solidorum conicorum seriem, qui secti exhibent infinitas; uti vocant, hyperbolas, infinitas parabolas,infinitas ellipses, & analogiam servando circulos etiam infinitos.* Maximè autem lætarer, si quid mihi cum tanto viro commune esset. Quid enim mihi iucundius accidere posset, quàm ea sub prima iuventute excogitasse,quæ viro doctissimo,jamque seni, in mentem venissent!

PRO-

PROBL. I.

Fig. 19.

Sit data recta AB, quæ debeat esse diameter cujuscumque ex parabolis, ita ut A sit vertex, Parameter autem recta Z, applicatæ autem in dato angulo, oportet quæsitam parabolam in plano, in quo est recta AB, delineare.

In subiecto plano, in quo est AB, excitetur planum ipsi perpendiculare incedens per rectam AB, quod sit FDE. Tum in subiecto plano ducatur recta VA faciens cum AB angulum VAB æqualẽ dato, vel ipsius ad duos rectos, complemento. Ex puncto deinde A in plano in sublimi agatur recta AC faciens cum AB angulum CAB æqualem duabus tertiis duorum rectorum, & ponatur AC æqualis datæ rectæ Z. Tum supra AC in plano in sublimi, constituatur triangulum æquilaterum DAC; & per VA, AC ducatur planũ, in quo describatur circulus AOC, aut primus, aut secundus, prout opus fuerit: cuius quidẽ circuli diameter sit AC. Vertice deinde D, circulo AOC, conus describatur DAOC indefinitè productus ad partes EF & per punctum B in plano in sublimi ducatur recta FBE parallela ipsi AC; item in subiecto plano ducatur recta GBH parallela ipsi VA. Ergo [15.11.] planum per rectas GH, FE parallelũ erit plano AOC, ac propterea [4. *hujus*] sectionẽ faciet in cono ADC producto eiusdẽ naturæ, atq; est circulus AOC. Quia igitur planũ in sublimi DFE perpẽdiculare est ad subiectũ planum, in quo est AB, recta CA perpendicularis erit ad VA, & quoniam [*hyp.*] VA ipsi GB, FB ipsi CA parallela est, erit (10.11.) angulus FBG rectus. Planum autem subiectum sectionem faciat GAH. Dico hanc esse parabolam quæsitam iuxta descriptum circulum. Sit enim circulus FGE secundus, ita ut solidum sub qua-

dra-

drato EB in BF sit æquale cubo ordinatæ GB; dico sectionem GAH secundam Parabolam prop. 8, huius fore. Quoniã enim secundus conus DFE sectus est plano per axem, & per diametrum AC, sive (4. *hujus*) FE, secatur item (*hyp.*) altero plano GAH secante basim coni secundùm rectam lineam GH, quæ perdendicularis est ad diametrum FE, & sectionis diameter AB æquidistat DE uni laterum trianguli per axem, nam angulus CAB æquatur angulo ACD; quilibet enim æquatur duabus tertiis duorum recto rum; erit sectio GAH parabola secunda *prop.* 8. *hujus*, cuius vertex A, diameter AB, applicatæ autem omnes ipsi GB parallelæ in dato angulo. Parameter autẽ erit recta linea, ad cuius quadratum ita erit quadratum *DA*, ut cubus FE ad solidum sub quadrato DF in D*E*, sed cubus FE æquatur solido sub quadrato DF in *D*E. Ergo quadratũ *D*A æquatur quadrato Parametri, quare *D*A, vel (*hyp.*) AC sive Z erit Parameter. Unde factum est. Q.E.F.

P R O B L. II.

Fig. 20.

D*ata recta linea AB in plano FBH, Hyperbolam quamcumque in eodem plano invenire, ita ut data AB sit diameter inter oppositas Hyperbolas interjecta, Parameter autem sit data recta BC: applicatæ verò sint in angulo dato VBA.*

In subjecto plano FBH excitetur planum perpendiculare IDO, atque ex puncto B erigatur in quolibet angulo recta BC æqualis Parametro, jungaturque AC. Tum in plano in sublimi IDO ducatur recta DE parallela ipsi AB, itaut æquentur BE, ED, quod ita facilè est, ut demonstrationem afferre necesse non sit, jungaturque BD. Deinde in subiecto plano FBH ducatur recta VB datum angulum

gulum cum AB constituens, atque per VB, BC planum agatur, in quo circulus describatur, prout opus fuerit, cujus diameter sit BC. Tum vertice D, basi autem circulo BSC conus describatur DBSC, indefinitè productus ad partes I, O. Dico hunc conum talem esse, ut sectio facta in ipso à plano FBH sit quæsita hyperbola; cujus diameter BA, Parameter BC, applicatæ autem in dato angulo.

Oporteat enim quæsitam Hyperbolam esse secundam propos. 13. hujus.

Sit itaque circulus BSC secundus, ita ut solidum sub quadrato BE in EC æquetur cubo applicatæ SE. Tum sumpto quolibet puncto infra B, ut G. Ducatur in plano in sublimi recta IGO parallela BC; item in subjecto plano recta FGH parallela VB. Quoniam itaque FG ipsi VB, & IO ipsi BC parallela est, erit [15.11.] planum ductum per IO, FG parallelum plano basis coni BSC, & propterea [4. *hujus*] circulum efficiet ejusdem quidem naturæ, atque est circulus basis, cujus diameter erit IO. Item, quia planum IDO rectum est ad planum FBH, erit BC perpendicularis ad rectam BV, quare [10. 11.] FG erit etiam perpendicularis ad IO. Unde solidum sub quadrato IG in GO æquabitur cubo rectæ FG. Quoniam itaque conus secundus DIO secatur plano DIO per axem, & per diametrum IO, secatur autem & altero plano FBH, sectionem faciente FBH, cujus diameter BG æquidistat [*hyp.*] rectæ DM à coni vertice ad diametrum circuli basis IO, erit sectio FBH, quæ hyperbola dicitur, cujus diameter erit BG, quæ vero inter oppositas hyperbolas interiicitur, erit recta AB. Quod vero sit secunda propos. 13. cujus Parameter data BC, ita patet. Sumpto in hac hyperbola quolibet puncto, ut L, applicetur LR & per R ducatur NQ parallela IO. Quoniam itaque NQ ipsi IO, & RL ipsi FG, vel VB parallela est [15. 11.] erit planum ductum per NQ, RL parallelum plano IFO, ac propterea sectio NLQ secundus circulus erit. Quare solidum sub quadrato NR in RQ æquabitur cubo LR. Quoniam autem [ex hyp.] DE æquatur EB, erit etiam [4. 6.] BR æqualis RN; unde solidum sub quadrato abscissæ BR in RQ æquabitur cubo applicatæ RL. At solidū sub quadrato abscissæ BR in RQ est id, quod continetur sub quadrato BR in BC, vel [34. 1.] RP, unà cum alio solido sub eiusdem abscissæ quadrato in PQ; ad quam PQ ita est abscissa BR, vel CP, ut AB ad BC. Quare [11. hujus] sectio FBH hyperbola secunda prop. 11, erit, cujus Parameter BC, applicatæ verò in dato angulo VBG, vel VBA. Q.E.F.

PROBL. III.

(*Fig. 21. 22. & 23.*)

CUM hujus problematis solutionem diversam ab Apolloniana investigarem, in aliam veritatem incidere mihi contigit, videlicet fieri posse, ut sectio Cylindrica sit etiam Ellipsis quæcumque, modò diversos Cylindros imaginemur bases habētes circulos supra expositos. Quare lubet propositum solvere problema, conisque cylindris adhibitis; ab his enim, quæ afferam, quævis pauca, quæ de quorumcumque cylindrorum sectionibus dici possunt, manifestè apparebūt. Hoc autem præmonere inutile non erit, si cylindrus, quemcūque circulū pro basi habēs, plano ipsis basibus parallelo secetur, sectionē esse circulum eiusdem quidem naturæ, atque sunt basium circuli. Id autem ex ipsa cylindri genesi patet. Hoc itaque præmisso.

Oporteat datis duabus rectis lineis AB, AC Ellipsim quamcumque invenire, cuius diameter sit AB, Parameter AC, applicatæ in datis angulis, oporteat autem inveniendam Ellipsim esse in plano, in quo est AB:

In subiecto plano, in quo est AB, excitetur planum perpendiculare DEB, vel (*fig.* 23.) DABC; in hoc deinde plano in sublimi ducatur recta BD, quemlibet angulum faciens cum AB, sitque BD æqualis BA, iungaturque DA Tum ex puncto A in sublimi plano ducatur AG paralle la BD, atque æqualis dato Parametro, iungaturque BC. Aut itaque rectæ DA, BC supra AC, aut infra convenient, aut parallelæ erunt. Si conveniunt, ducta BG in dato plano faciente datũ angulũ cũ AB, æqualem nempe ei, quẽ applicatæ constituunt, per rectas BG, DB planũ ducatur *D*OB, in quo circulus describatur, cuius diameter *D*B, iuxta *E*llipsim quæsitam. Vertice deinde *E*, circulo *D*OB, conus describatur *ED*OB. Si autem non conveniũt rectæ *DA*, BC in plano DOBG circulus DOB describatur, cujus diameter DB, & super hunc circulum Cylindrus constituatur, cuius latera rectæ DA, BC. Dico sectionem ALB facta à subiecto plano, in quo est AB, in conis Ellipsim esse, cuius diameter AB, Parameter AC applicatæ autem in dato angulo. Oporteat enim quæsitam Ellipsim esse secundam propositionis 16. *hujus*. Circulus DO*B* huius sit naturæ, ut solidum sub quadrato DT in T*B* æquetur cubo TO. Et sumto quolibet puncto in sectione, ut L, applicetur recta LI ad diametrum A*B*, & per I ducatur SV parallela D*B*, & per SV, LI planum ducatur, quod parallelum erit plano DO*B*; etenim LI parallela est *B*G, ac propterea sectio SLV circulus erit eiusdem naturæ, atque est basis circulus, cuius diameter SV. Item quia planum DAC*B* rectũ est subiecto plano AL*B*, erit G*B* perpendicularis ad D*B*, ac propterea (10.11.) & LI perpendicularis erit ad diametrum SV, atque adeo solidum sub quadrato SI in IV æquabitur cubo applicatæ IL. Quoniam autem ut est [4.6.) *DB* ad *B*A, ita est SI ad IA, & D*B* (*hyp*) æquatur *B*A; ergo SI æquabitur IA, unde solidum sub quadrato abscissæ AI in IV æquabitur cubo applicatæ LI. Sed solidum sub quadrato abscissæ AI in IV æquatur soli-

I 2 do

do sub eiusdem abscissæ AI quadrato in AC, minus solido sub ejusdem abscissæ AI in AF, ad quam AF ita est abscissa AI, ut diameter *B*A ad AC. *E*rgo (16.*bujus*) patet sectionem ALB in utroque cono EBD, ellipsim 16. *prop. bujus* esse, cujus diameter AD, Parameter AC, applicatæ autem in dato angulo A*B*G, nam LI parallela est ipsi *B*G; quare factum erit, quod erat faciendum.

Sectio autem in cylindro ACCB facta secundus circulus erit, quandoquidem solidum sub quadrato AI, in IV æquatur solido sub quadrato AI in I*B*. Quarè solidum sub quadrato AI in I*B* æquabitur cubo applicatæ IL, & patet fieri posse, ut sectio cylindri scaleni sit etiam circulus ejusdem naturæ, atque est circulus basis.

Ita autem ex cylindro ellipsis quæcumque ervi potest [*fig*.24.]

Sit, ut supra in plano, in quo est A*B* describenda secunda ellipsis prop. 16. huius; cuius diameter sit A*B*, parameter AC applicatæ in dato angolo A*B*G. In plano, in quo est A*B* erigatur planum perpendiculare DF*B*A incedens per datam A*B*. Tum fiat ut CA ad *B*D, ita *B*D quadratum ad *B*A quadratum, & connectatur *B*D ad quemlibet angulum cum A*B* in plano in sublimi. Item per *B*D, *B*G ducatur planum DO*B*, in quo describatur circulus DO*B*, cujus diameter D*B*, ita ut solidum sub quadrato DT in T*B* æquetur cubo applicatæ TO. Deinde super hunc circulum construatur cylindrus DAF*B*, cuius unum laterum sit recta, quæ jungit puncta DA. Dico subjectum planum, in quo est A*B*, sectionem facere AL*B*, quæ secunda ellipsis erit, ita ut cubus cuiuscumque applicatæ LI æquetur solido sub abscissæ AI quadrato in AC, minus solido sub eiusdem abscissæ AI quadrato in RC, ad quam eandem habet proportionem abscissa AI, quam diameter A*B* ad AC. Sumpto quolibet puncto, ut L, ab eodem applicetur LI, & per I in subiecto plano ducatur SV, ergo (15 11) planum per SV, IL parallelum erit plano basis cylindri

DBO

DQB, unde sectio SLV circulus erit eiusdem naturæ, atque est basis circulus, atque [10, 11.] LI perpendicularis erit ad SV, quæ SV erit diameter circuli, unde solidum sub quadrato SI in IV æquabitur cubo IL. Quare constructa figura, ut apparet, erit.

	[Solid. sub quad. AI in IB ad solid. sub AI quad:
	[in IQ
	[BI ad IQ (4.6.)
Æquant.	[BA ad AC (*hyp.*)
hæ Rat.	[AB cub. ad DB cub:
	[AI cub. ad IS cub. (30. *lib.* 6. *Eucl.* *Borel.*
	[AI quad. ad IS quad: plus AI ad IS (4.6.)
	[AI quad: ad IS quad. plus BI ad IV.
	[Solid. sub AI quad. in BI ad solid: sub IS quad:
	[in IV.

Ergo [7.5.] sibi æquantur solidum sub quadrato AI in IQ, & solidum sub quadrato SI in IV, cui (*ut prius*) æquatur cubus IL; Ergo patet solidum sub quadrato abscissæ AI in IQ. æquari cubo applicatæ IL. Sed solidum sub quadrato AI in IQ æquatur solido sub quadrato abscissæ IA in AC, minus solido sub quadrato eiusdem abscissæ IA in RC, ad quam RC eandem proportionem habet abscissa *A*I, vel QR, quàm diameter AB ad AC. Ergo patet sectionem ALB esse ellipsim propositionis 16. huius, cuius diameter est AB, Parameter AC, applicatæ verò in dato angulo ABG. Q.E.F.

Atque hæc satis sint ad ea omnia demostranda, quæ de quorumcumque cylindrorum sectionibus dici possunt; tam cum sectio est circulus, quàm ellipsis; quicumque enim ea benè perceperit, quæ de ellipsibus prop. 13. 14. 15. & 16. huius supra demonstrata sunt, facillime, & hæc intelliget; etenim & ipsa demonstratio in omnibus ellipsibus tam prop. 15., quàm prop. 16, huius, eadem fere est, atque à modo allata deduci potest.

Quarè non solum Apollonius longè, lateque Promotus

mihi

mihi est, sed Serenus ipse, quod ultimæ laudis nō esse, vel ipsos detractores fateri omnino necessum est. Maximas interim eis gratias ago, quandoquidem ipsis me falsò criminantibus impulsus, ea peregi, quæ nunquam fieri posse putaveram, videlicet, ut ex horum, quos inveni, conorum sectionibus tam elegantes haberi possent cujuscumque generis curvæ.

FINIS.