BARTHOLOMÆI INTIERI FLORENTINI AD NOVA ARCANA GEOMETRICA DETEGENDA ADITUS

Ad Illustriss. & Excellentiss. Dominum

D. HIERONYMUM ONERUM CABANILIUM S. MARCI MARCHIONEM,

Ducem S. Johannis Rotundi, Rodi, S. Severi, & Candelari Dominum, e Comitibus Trojæ, & Montellæ, &c.

BENEVENTI, E' Typographia Archiepiscopali.
Anno reparatæ salutis MDCCIII.

Superiorum permissu.

EXCELLENTISSIME DOMINE.

SI omnibus, in quorum manus hæc perventura sunt, manifestum foret, quid me causæ impulerit, ut hæc mea invẽta Tibi dicarem, opus profectò non esset, hìc in prima fronte libelli pluribus pręfari, ut meum & Tibi, & cuicumque hęc legerit, animũ aperirẽ. Verùm, quia lõgè alia me ratio movit, ac ea, qua adduci solent, quicumque maximis Viris, ceù Patronis sua scripta commendãt; ideò paucis hìc exponam, quid me adegerit ad hæc Tibi nuncupanda: fieri quippè posset, ut aliquis id me fecisse putaret, quò eorum vestigiis insisterem, qui æternam sibi nominis famam adepti, Tibi, & Majoribus Tuis suos labores sacrarũt; quemadmodum factum videmus ab Actio Sincero Sannazario claro illius sęculi ornamento, a quo Salices suæ magno Trajano Cabanilio Musas, Musisque operam navantes tũc temporis protegenti dono datæ sunt; & ab Iohanne Cotta mollitie Catulliana insigni, à quo lepidisſimo epigrammate hendecaſſllabis verſibus conſcripto Calor fluvius, atque Montella ſub Trajani ditione celebrata eſt, ut eidem gratum faceret, à quo benignè ſuſceptus divitiis, honoribuſq; auctus fuerat; ut præteream Ludovicum Vives, & Illuſtriſſimum Dominum, D. Franciſcum Verde, Virum tum doctrina, tum morum integritate conſpicuum, Iohannem Acamporam, & plurimos alios, qui Cabaniliũ nomen honoris, tutelæq; cauſa ſuis lucubrationibus inſcripſere. Qui verò præclari Generis Tui decus, ſplẽdoremq; norunt (norũt autẽ omnes) me in hanc ſententiam adductum fuiſſe pro certo habebunt; ut meus hic parvus, incultuſque libellus præclariſſimo Cabaniliorum nomine inſignitus aliquid ſplendoris, honoriſque acquireret. Tanta ſiquidem eſt Cabaniliæ Gentis dignitas, atque nobilitas, ut ex hujus ſola inſcriptione æternam nominis immortalitatem conſequi facillimũ ſit; cum inter Europæ clariores, ſplendidioreſque recenſenda ſit, ſivè ad ejuſdem primam, & à longa innumerabilium annorum ſerie repetẽdam originẽ ſpectes, ſivè ad magnitudinẽ rerum, quas Summi, Maximique Cabanilii Viri pace, & bello inſignes geſſere, non quidem intra unius vaſtiſſimæ regionis limites, qualis eſt Hiſpania; ſed & in univerſa ferè Europa, Aſiaque; quemadmodum teſtantur, qui rerum geſtarum memoriam ſcriptis tradiderunt. Sed nec deerũt etiam, qui me id feciſſe arbitrabuntur, ut gratum Tibi facerem Viro ſummoperè potenti, cum quia ab omnibus ſummo in honore, & amore habitus es, tum quia Deus

op-

Optimus Max: Te iis Fortunę bonis auxit, quæ nobilem Virum maximè fælicem reddere possũt. At, ut veritati locus sit, nullum horum me movit. Quid itaque? Maximus Virtutum omnium cumulus, quæ in Te uno elucent. Crede mihi (nullos potius veritas decet, quàm qui Mathematicis operã dant) quamvis prętcr ea, quæ superius dicta sunt, plurima, quæ in me contulisti beneficia ad hoc Tibi præstandum me adigerent; nihil tamen apud me tãtum ponderis habuit, quàm ut hoc levi munusculo aliquid grati exhiberem ei, qui omnibus virtutibus ornatus est. Quid enim in Viro omni scientiarum genere prędito desiderari potest, quod in Te non splendeat? Quid in Viro claritate Generis maximè conspicuo, quod in Te non eluceat? Quid deniquè in eo, qui toto corde Pietatem colit, quod Tu ipse summa animi contentione sequendum, amplectendumque non cures. Te celebrant unanimi ore quotquot hac tempestate literis operam dant; non solum, ut ipsorum dulce præsidiũ, & decus; sed etiam, quia primum inter omnes locum habes, tanta est ingenii Tui vis, atquè acies, qua ea scrutari, atquè enodare potes, quę altis obvoluta tenebris, multorum ingenia diù, molestèque torserunt. Id manifestè etiam apparet ex omnigena librorum copia, quam Tibi maximis sumptibus, incredibilique diligentia comparasti, in quo Parentis Tui fęlmem: præclarum exemplum imitatus es, cui plurimùm quidem bonæ literæ debent; is enim fuit, qui audaci nisu, tantoque viro digno non solum à levibus, perpetuoque risu di-

gnis

gnis poëtis, qui verbosam, riduculosamque poëseos artem invehere conabantur, summoperè abhorrebat; quemadmodum ex ipsius doctissimis scriptis, quæ adhuc extant, cognosci potest: sed & eas disciplinas colere, atquè colendas curavit, e quibus ingentem deindè utilitatem universa Respublica literaria consequuta est; cum anteà in nullo pretio habitæ, neglectæq; jacerent: ita erant quisquiliis, nugisque hominum ingenia addicta: hinc factum est, ut summo in honore haberetur ab iis, qui tunc temporis veram sapientiam colebant; unde Maximus ille M. Aurelius Severinus eũdem & librorum suorum, & cæterarum rerum hæredem instituit. Quis verò Te non demirabitur, ut clarissimum veræ Nobilitatis exemplar? Equidem si ea agere, & curare, quæ Patriæ decus, & gloriam, cunctis utilitatem, & admirationem, sibi verò æternam laudem, nomenque allatura sunt, Viri nobilitate conspicui est; nullus certè Tibi æquiparandus, nedum anteponendus. Quod verò hæc, & majora in Te eluceant, clarissima, quæ de Te Fama circumfertur, centum suis tubis toto Terrarum orbe prædicat. Quid verò dicam de ea, qua præditus es Pietate? Profectò nullum veræ virtutis genus est, in quo excellere, primumque locum tenere non curaveris; in hoc verò ita Te præbes, ut omnes longè post Te relinquas. Neque singula hìc enumerabo, quibus manifesta signa dedisti, non minus ea Tibi cordi esse, quę Viros summo genere natos decent, quàm quę recti, honestique sectatorem, qualem esse oportet

Chri-

Christianæ Reipublicæ Civem; plurima siquidem essent, nequè huic oneri ferendo meæ vires sunt. Verùm silētio hoc unum præterire nolo, quo bonorū omnium digito mōstrari dignus es, Te summam operam, diligentiamque adhibuisse, ut Filii Tui, quibus æternam felicitatem precor, sanctissimis institutis, omniumque disciplinarum genere, perquàm optimè instituerentur; undè nullis laboribus, sumptibusque parcens viros undequaque doctissimos arcessisti, quibus ipsorum cura demandaretur. Atquè utinam tam nobile, sanctumque exemplum omnes imitarentur; sic enim fieret, ut & aurea sæcla redirent, Terrasque iterum peteret Cęlos Astrea relinquens. Tibi autem gratulor, quod Deus Opt. Max. votis Tuis annuit, Tuisque conatibus benedixit, dum tot, tantisque virtutibus eosdem auxit, ut quemadmodum sol inter sidera micat, sic inter ingenuos hujus Vrbis Juvenes, splendeant, atque eluceant. Nullus enim morum suavitate, animi candore, & fortitudine, cæterarumque virtutum ornamento cum ipsis comparari potest. Cum itaquè in Te uno ea omnia animadverterem posita, quorum exigua pars vix, aut rarò in aliis reperiri potest; facere non potui, quin Tibi hæc dicarem, quibus perspectum haberes, me ex eorum numero esse, qui Te plurimi faciunt, omnique veneratione prosequuntur non levibus rationibus adducti; sed sola virtutum Tuarum admiratione, quæ quidem tanti apud me ponderis est, ut pluris valeat, quam quæ superius dicta sunt, quæque in me contulisti

be-

beneficia, quibus ita teneor, ut jure hæc Tibi debeam. Nunc itaque grato animo hæc excipias rogo, cum ut meum in Te studium, & obsequium ingratum non fuisse intelligam; tum ut ab iis defendantur, qui aliena scripta carpere, & lacerare avent, iniquo potius livore, quam veritatis amore impulsi. Cum etenim quisque Te Patronum, Defensoremque eorum, qui literis operam dant, probe noscat; nullus ita felle madebit, ut me, meaque hæc inventa insequi audeat. Quòd si hæc, qualiacumque sint, accepta habere non dedignatus fueris, vires, animosque mihi addideris, ut majora aggredi non dubitem, quò magis meum in Te animum notum reddam. Vale, Teque Literis, & Patriæ ornamento Deus Opt. Max. servet.

Excellentiæ Tuæ

Dabam in S. Marci Oppido
IV. *Idus. Nov. Anno rep. sal.*
MDCCIII.

Devotiss. atque Addictiss.
Bartholomæus Intieri.

MATHEMATICARVM DISCIPLINARVM AMATORIBVS BARTHOLOMÆVS INTIERI S. P. D.

VT primum ad Mathematicas disciplinas animũ applicare cæpi, dici nõ poteſt, quàm ardenti erga illas amore flagraverim, cum ob ipſarum ſupra reliquas, quæ ſcientiæ nomine, ſi quæ ſunt, appellantur, præſtantiam, & dignitatem, tum etiam ob nectaream illam dulcedinem, qua hominis mentem allicere primum ad ſe, deindè occulta quadam vi trahere ſolent. Quarè mihi ipſi indulgens totũ his me tradere ſtatui. Verùm multùm, diùque dubius hæſi; cum etenim à prima pueritia ſacris initiari (ſi Deus votis annueret) decreviſſem, longè ab inſtituto meo alienum putabam iſtas tam avidè ſectari. Nec deerant, qui ab omni ſcientiarum generè abhorrentes, ab hoc ſtudio me avertere conabantur, idque, velut probrum, mihi obiiciebant. Quem autem mihi inieceram ſcrupulum, omninò exemit ter illius maximi Philoſophi, nullique in Mathematicis ſecundi, Petri inquam Gaſſendi, Inauguralis Oratio in regio Pariſienſi Collegio habita: ibi enim rationibus firmiſſimis oſtendit, nullos potius, quã ſacris addictos Mathematicas decerè; cum hæ ad ſummam Dei potentiam intelligendam, quantum infir-

ma humanæ mentis acies patitur, plurimùm conducant. Hoc itaquè obice, qui mihi non parvam molestiam afferebat, amoto, totum me ipsis tradidi, nihil sollicitus, quòd ab iis, quos sola lucri cupido delectat, ceu mentis inops digito monstrarer. Ita verò magis in dies crescebat harum scientiarum, & præcipuè Geometriæ ardor, ut nihil mihi potius esset, quàm solidos trãsigere dies, aut cum iis, quibus hęc eadẽ studia cordi erãt, aut inter libros ad harum sciẽtiarum progressum aditum patefacientes. Hinc autem factum est, ut summo prosequerer amore, & veneratione, qui omnem curam, diligentiamque adhibuerunt, ut has disciplinas promoverent. Quarè quotiescumque sese mihi occasio offerebat, Vietas, Galilæos, Borelliosque summis laudibus extollebam ob ipsorum præclara in Geometricis inventa; Cartesium verò, Fermatiumque, ceu duo clarissima Geometriæ lumina, demirabar: eò enim ob ipsorum exantlatos labores deventum est, ut facillimum sit ad Geometriæ penitiora arcana rimãda aditum facere, ut benè norunt, qui ipsorum præceptis imbuti sunt. Cumque animadvertissem, quantum jacturæ passa Geometria foret, si horum Virorum elucubrationes publici juris factæ non fuissent; perpetua nota eos dignos censebam, qui aut aliorum inventa sepulta jacere patiuntur, aut propria palam facere non satagunt. Ego verò ita semper ab hoc abhorrui, ut insuper putaverim, omnibus esse, nulla interposita mora, communicandum, si quid novi in his scientiis reperire contigerit, nec diù in mente, aut adversariis latere patiendum esse; melius quippè, fœliciusque à multis nova inventa excoluntur, atque promoventur,

tur, quàm ab uno: ut prætercam, quod ipsa cunctatio maximo sæpè cedit detrimento; ut benè multorum exẽpla monent, qui morte præventi æterna nominis immortalitate fraudati fuere. Hæc cum ita se habeant; iniquè me agere existimarem, si libenti, candidoque animo Vobis, qui idem, sed fælicius calcatis iter, hanc nuper à me excogitatam methodum describendi non solum lineas illas curvas, quæ primum post Conicas sectiones locum sibi vendicant; sed eas etiam, quæ has, ceterasque deinceps, & miro quidem ordine, in infinitum consequuntur, impartirer. Opus à nullis quidem antehac, ut sciam, peractum; omnibus verò summoperè optatum. Id verò, eò libentius, citiusque, quam par esset Vobis offerre æquũ mihi visũ est, quòd ab hoc sublimis illa, Cælitusque (liceat his verbis uti) de locorum compositione demissa scientia, quæ jam ulterius promoveri potest, pendet. Spero etenim, si quis mihi opem ferat, auxiliatricesque manus porrexerit, ut quamprimùm locorum supersolidorum facillimè compositio absolvi possit; hac siquidem methodo, qua cubicas parabolas, hyperbolasque in plano describo, plurimæ aliȩ curvæ ejusdem generis describi possunt, ita ut non admodum difficile sit, cujuscumque loci curvam invenire. Quin ex ipsa, quam adducam, methodo manifestè, ni fallor, colligitur, si eorum locorum compositio perficiatur, quæ ad tertiam, vel quartam dimensionem assurgunt, perquam facillimum fore, & cætera componere: in sequentibus siquidem demonstrabo, plurimas proprietates, quæ alicui curvæ cõveniunt, easdẽ, habita ratione potestatum, & cæteris curvis convenire, eodemque insuper modo demonstrationem procedere; quod quidem methodi elegantiam satis demonstrat. Quarè cum Apolloniana parabola hac proprietate prædita sit, ut quadratum cujuscumque ex applicatis æquetur plano sub parametro in interceptam; eadem hæc proprietas, & parabolæ, quæ hanc consequitur, cõvenit, modò quæ in Apolloniana de plano dicta sunt, in hac de solido intelligantur. Demonstratio verò, qua ambæ hæ proprietates demonstrantur, non solùm eadem, atquè unica est, sed & locum etiam habet in altioribus deinceps curvis; undè absquè iniuria dicere ausim, non rectam, simplicissimamque adhuc initam esse viam, qua ad Conicarum sectionum proprietates detegendas itur, nequè etiam benè institutam esse locorum compositionem. Quarè nil aliud ad hanc adeò utilem doctrinam promovẽdam superest, ò Optimi veræ Geometriæ Amatores, quàm ut animum ad horum locorum compositionem advertatis; quandoquidem, & maximi labores, molestiæque, quas impressorum menda, atquè errata pariunt, sublatæ sunt; Illustrissimum quippè, atquè Excellentissimum Dominum D. Hyeronimum Onerum Cabanilium, Virum tum generis nobilitate conspicuum, tum virtutum omniũ ornamento insignem rogavi, ut pro sua, Majorumque suorum in Viros literis addictos propensione, huic rei opitularetur. Qui quidem summa animi alacritate omnem operam pollicitus, libenter hoc onus suscepit, ut propriis sumptibus de eorum editione curaret, quę ab aliis ad hanc remspectantia excogitata ad ipsum transmitterentur, una cum authorum nominibus, nequis hantillam, quam sibi cõparavit, gloriam amittat. Quòd si id nobis ad exitum perducere contigerit, haud minus hoc

sęsæculo nacta incremẽtum Geometria erit, quàm proximè elapso summorum Virorum opera, & labore; ita ut, si multum ipsis debemus, non minus etiam nobis Nepotes nostri debeant. Hoc autem opusculum in lucem emisi tribus epistolis comprehẽsum, quarum secunda, in qua difficillima, quæ in Cartesiana Geometria sunt, enodantur, atquè explanantur, Illustrissimo Domino, D. Didaco Vincentio à Vidania Regii Sacelli Præsuli, studiorumque Præfecto nuncupata est; cum etenim decrevissem coram ipso, atquè Illustrissimo Senatu de Geometria disserere, ut idem una cum aliis mei periculum faceret; possemne instituendæ iuventutis in his disciplinis munus obire; nec cum tempus aderit, quod pollicitus sum, præstare valeam; Neapoli enim absum: animadvertere, atque judicare ex ipsa, & reliquis epistolis ipse cum aliis, quorum est, poterit, an huic oneri ferendo meæ vires sint. Cęterum eos, quibus mecum in eodem stadio currendum est, rogatos velim; ut pro bono harum disciplinarum incremento, typis etiam committere velint, quæ ab ipsis excogitata sunt; sic enim fiet, ut pateat non minus hujusmodi disciplinas Italis cordi esse, quã reliquis Europæ gentibus. Valete, & si quid boni, in his meis inventis inest, benignè excipite.

Illu-

Illustrissimi, Nobilissimique Viri

JOHANNIS MICHAELIS

CABANILII

Equitum Catholici Monarchæ Præfecti, &c.

EPIGRAMMA.

QVi legit hunc, Veterum mirari inventa, libellum
Desinat, & quicquid prisca Mathesis habet.
INTERVS nobis en clausa arcana repandit;
Et docet insolitas absque labore vias.
Gallia jam sileat, nec jam se Græcia jactans
Laudibus ipsa suos tollat ad astra Viros:
Nunc dedit Heroes tellus Saturnia, quales
Ætas nulla dedit, nec dabit ulla dies.

ALIVD.

EIa age, BARTHOLOMÆE, novos meditare labores;
Et tactum à nullo contere tutus iter.
Quid cessas nobis reserare arcana Mathesis?
Arcana à magnis non patefacta Viris!
Edas illa precor, quæ nunc incognita multis
Quicquid splēdoris, quicquid honoris habēt.
Æternum Tibi nomen erit, Tibi fama perennis,
Sic tibi permagnum, perpetuumque decus.

EMIN. PRINCEPS.

IUſsù Eminentiæ Tuæ, Librum, cui Titulus eſt *Aditus ad Nova Arcana Geometrica detegenda* per Bartholomæum Intieri Florentinum editum, attentè per legi, in eoque nil à Fide orthodoxa devium, nil bonis moribus diſſonum reperi, imo cuncta ad litterariæ Reipublicæ decus augendum, nec non ad eruditionem Chriſtiani Hominis, Geometricæ facultatis ſtudioſi, conducentia, ſum admiratus, quapropter ut publici Juris fiat, in lucem edi poſſe, cenſeo, ſi tamen ita Eminentiæ Tuæ videbitur, interim Paſtoralis Benedictionis exoptans radios, humillimè deoſculor Sacræ Purpuræ oras, ex Carmelo Beneventi hac die 21. Novembris 1703.

Eminentiæ Tuæ

Humill. & Obſequentiſs. Seruus
M.Fr. Albertus Annubba Carmelita.

Imprimatur die 23. Nouembris 1703.
Fr. Vincentius Maria Card. Archiep.

ERRATA CORRIGE.

Pag.	linea	Errata	Corrige
5	14	BG	BC
6	2	constituta Efficiente	constituatur Efficiens
14	26	quadratocubus	quadratoquadratum
16	22	ASB	SAB
23	10	primam	secundam
32	12	plano	in plano]
35	33	prætercam	præteribo
38	7	punctum	puncto
Eadē	Eadē	ipsos	ipsas
Eadem	31	fieri	cieri
43	17	quadratoquadratica	quadratosolida
49	22	*x3y*	*y3x*
53	pen.	*in prima epistola*	*in secunda epistola*
53	ult.	*prima sex.*	*prima secundi*
59	4	*r*	*r4*
60		in aliquibus locis ponatur D pro A.	
73	13	Diameter	Parameter

Hæc, & plurima alia, quæ irrapserunt menda; corrigas benigne Lector, etiā atque etiam te rogo.

EPISTOLA
PRIMA

Ad Illustriss. & Excellentiss. Dominum

D. DOMINICVM
IVDICE

Cellamaris Principem, Juvenacii Ducem, Terlitii Dominum, S. Jacobi Equitem, S.C.M. à consiliis in supremo Belli, & Jtaliæ Senatu, &c. Hispaniarum Magnatem.

In qua

De ortu, atquè in plano generatione infinitarum Parabolarum agitur, in quibus applicatarum cubi, vel quadratoquadrata, &c. æquantur vel solido sub quadrato interceptæ in parametrum, vel planoplano sub cubo intercæptæ in parametrum, &c.

Illuſtriſs. & Excellentiſs. Domino

D. DOMINICO

JUDICE JUVENACII DUCI, &c.

BARTHOLOMÆUS INTIERI S. P. D.

SI quis unquam fuit, Excellentiſſime Domine, qui eos plurimi fecerit, faciatque, à quibus Mathematicæ diſciplinæ in pretio habitæ, & cultæ ſunt, is profectò ego ſum, cui nihil potius fuit, & eſt, quam tales viros veneratione proſequi, ipſorumque amicitiam, cum mihi licuit, comparare; vel certè grata recordatione, laudibuſque eorum nomina extollere, qui modo vita functi, de his diſciplinis bene meriti fuere; cæteris enim mente, & animo illos præſtare puto, qui levibus ſtudiis poſthabitis, atque hanc viam ingreſſi, ad verarum ſcientiarum ſedem, quæ procul dubio Mathematicæ ſunt, pervenire valuerunt. Quare cum ſæpius inter diſſerendum cum harum ſcientiarum ſtudioſis, quos noſco (noſco autem plurimos, quique non vulgarem ſibi gloriam compararunt) Te eò in hiſce diſciplinis perveniſſe cognoverim, quo nullus, vel pauci pervenire potuerunt, maximo ſum affectus deſiderio in Tuam amicitiam, atque in eorum numerum, qui Te maxime colunt, obſervant, & amant, re-

recipi. Et jam mecum ipse constitueram Excellentissimum Dominum Celamaris Principem dignissimum, tanto Patre Filium, tum literarum omnium, quibus ornatur, splendore, tum animi magnitudine, humanitate, morum integritate, cæterarumque virtutum, quæ nobiles viros decent, ornamento, rogare, ut me Tibi per literas commendaret. Verum, quia id paulo temporis opus habuisset, Neapoli enim nunc absum, & studiorũ meorum causa, atque ut morem geram Illustrissimo, & Excellentissimo Domino meo D. Hyeronimo Onero Gabanilio, qui etiam Tibi plurimam salutem dicit, moræ impatiens Sententiam muto, nulloque adhibito Patrono, en ad Te hac Epistola venio, etiam atque etiam rogans, ut me mei voti compotem reddas; nihil enim mihi jucundius accidere potest, quam me totum ei devovere, qui nullis Generis claritate, fortunæque bonis cedit, omnes vero doctrina, cæterisque virtutibus, quas à majoribus accipere non possumus, sed nobis nos metipsi comparamus, præcellit. Vt verò magis Tibi persuasum sit, quã in Te exardescat animus meus, utque mihi facilior aditus pateat, libens hoc Tibi munus offero, exiguum quidem, at non spernendum, ob ejus, qui donat in Te obsequium, & studium, qui nihil apud se charius, vel præstantius habet, quo suam in Te observantiam notam reddat.

Id verò est, quod nuper excogitavi de ortu, atque in plano descriptione infinitarum Parabolarum, in quibus cubus, vel quadratoquadratum, vel quadratocubus applicatarum, & ita deinceps, æquatur solido, vel quod sub quadrato intercæptæ inter verticem, & applicatas in datam rectam, sive parametrum, vel sub cubo intercæptæ in parametrum, aut sub quadratoquadrato intercæptæ in parametrum continetur, & ita etiam deinceps. Quod quidem inventum quãtam utilitatem Geometriæ allaturum sit Tibi judicandum relinquo; ex hac quippe methodo hujusmodi curvas describendi non solum elegans difficillimorum probleblematum pendet solutio; sed & doctrina locorum, quam cælitus demissam puto, quò clarius Geometriæ miracula eluceant, multum incrementi accipere potest; ut prætereamn quòd ex ipsa descriptione plurimæ harum curvarum proprietates erui possunt, quibus, & naturalis Philosophia, & cuncta denique Mathesis non parum promoueri possit. Si etenim primi generis curvæ, quæ tres, aut quatuor tantum sunt Parabola videlicet, Hyperbola, Ellipsis, atque Circulus ingentes suppetias Mathesi, atque Philosophiæ tulerunt, quis non videt maximas ab his præstari posse, quæ non quatuor, aut quinque, vel decem, aut centum, sed numero indefinitæ sunt? Sed hæc satis dicta sint; nunc ad propositum venio, & planæ, sive Apollonianæ Parabolæ in plano descriptionem primo loco tradam, ut manifestè appareat genesim curvarum, quas descripturus sum, earumque etiam, quas Veteres coni sectiones appellare consueverunt, non à solido, ut ipsi à cono, petendam esse, sed ex plano; cum hoc naturæ magis consonum sit, simpliciusque, quemadmodum ex methodo, quam allaturus sum cognosci poterit, ex qua mira apparet harum parabolarum Natura, atque ordo; ad altiores quippe transitus fieri non potest, nisi prius simpliciores cognitas habeamus: quod quidem plurimi in Mathematicis faciendum est. Itaque prima parabola (ita deinceps appellare libet Apollonianam parabolam) originem trahit à linea recta, secunda, sive cubica, à prima; tertia, sive Quadratoquadratica à secunda, sive cubica, & ita deinceps eodem ordine. An vero has easdem curvas è solidis eruere liceat hoc simplicissimo ordine, videant ii, quos nimium delectat solidorum contemplatio. Ego vero ita primã parabolã describo.

In figura prima hujus epistolæ sit triangulum isosceles BIH, cujus æqualia latera sint BI, IH, quæ quidem indefinitè producantur, latus BI ad partes D, & A: latus HI ad partes G, reliquum vero latus BH ad partes C, latus autem IH, ita moveri concipiatur, ut semper sibi ipsi æquidistet, atque dato sui puncto H maneat semper in latere BH, motu

 au-

autem suo motu etiam faciat rectam ID datam, quæ quidem semper applicata maneat in latere BI, punctum autem ipsius I, maneat semper fixum in latere HI, ita ut quando latus HI excurrit ad partes C, & recta ID tẽdat ad partes S, cũ vero latus HI accedit ad punctum B, & recta ID etiam ad punctum B accedere debeat. Per puncta autem H, D transeat recta HD, quæ libere per hæc pũcta excurrere possit. In puncto autem B constituatur recta BG indefinita ad partes G, quæ circulariter moveri possit in eodem puncto B, quæque parallela semper existat rectæ HD. Hæc itaque recta BG rectam HG intersecabit. Dico ex hac intersecatione curvam oriri, quæ prima parabola, sive Apolloniana parabola erit, cujus vertex erit B, diameter recta BK, quæ parallela ducitur rectæ HG, applicatæ vero erũt eæ omnes, quæ æquidistantes ducuntur rectæ ADS, velut recta GK. Hæc autem omnia demonstrari facillime possunt; sumto quippe in curva hac ratione descripta, quolibet puncto, ut G, constituisque rectis, quarum motu, atque intersectione descripta fuit in ea statione, uti fuere, quando descriptum est punctum G (id vero fieri intelligatur, quoties opus erit, quod hic monere visum est, ne eadem in sequentibus, non sine tua molestia, repetere cogar) similia itaque erunt triangula DIH, GIB, (a) quare ita erit DI ad IH, ut BI ad IG, & rectangulum sub extremis, nempe rectangulum DIG æquabitur rectangulo BIH, (b). Quoniam vero BI æquatur IH, (c) erit rectangulum DIG æquale quadrato BI, hoc est ex puncto G ducta GK parallela BI occurrente rectæ BK in K, erit rectangulum sub DI in rectam BK æquale quadrato BI, vel GK, unde omnia, quæ demonstranda erant, patent. Quod si recta HIG perpendicularis fuerit ad rectam AS, diameter BK erit axis. Quomodo vero ex altera parte continuari hæc curva possit satis ex appositis schematibus patet; quare in hujus curvæ descriptione amplius non immorabor.

Vs-

(a) 29. *Primi, & 4. sex.* (b) 16. *sex.* (c) 4 *sex.*

Vsque adhuc alii pervenire potuerunt: Iohannes siquidem de Witt insignis sane Geometra Parabolam, & reliquas coni sectiones in plano satisbellè descripsit, verum, præterquam quod ulterius ille progredi non potuit, ejusdem methodum nostræ posthabendam puto, non solum, quia unica, & simplicissima utimur, tam cum data diameter est axis, vel non; verum etiam, quia hæc ad infinitas alias parabolas describendas aditum patefacit; ita ut dicere ausim, me ulterius, quam alii, prætervectum, immensum aperuisse iter, cujus quantumvis emensus fueris, nunquã tamen metam attigeris.

Quoniam vero in sequentibus eodem fere motu rectas lineas cieri concipiendum est, ideo nonnullas ex his, quæ præcipuæ in descriptione sunt, istis appellationibus designabimus. Esto itaque BG, per quam recta HG movetur, sive recta, vel curva fuerit DIRECTRIX. HG vero, quæ semper sibi ipsi paralella movetur DESCRIBENS, cum vero ipsa est in puncto B, ubi constituitur vertex anguli HBI, Describens in statione prima; recta vero BG, EFFICIENS, recta autem AS Efficiens in statione prima; Punctum vero B Polus appellabitur: Recta autem data DI Intervallum vocetur. His præmissis ad secundæ parabolæ descriptionem accedo.

Cum prima parabola illa sit, in qua quadratum applicatæ æquatur rectangulo sub intercæpta, & data recta, ut supra demonstratum est, primum autem locum post quadratum cubus occupet; illa dicenda erit secunda parabola, in qua cubus applicatæ, æquatur solido, quod continetur sub data in quadratum interceptæ; Vel certè solido, quod sub datæ rectæ quadrato in interceptam continetur, nihil autem in præsentiarum de hac(a): illam verò ipsissima methodo, ac prima parabola descripta fuit, immutata tantummodo Directrice, sic describo.

In figura secunda hujus Epistolæ vertice A diametro AB, para-

(a) *Vide epistolam tertiam ad Illustrissimum D. D. Michaelem Cabanilium.*

parametro AS prima parabola describatur AC, tum in ipsius vertice A, ut Polo, constituta Efficiente AD, Directrice eadem parabola AC, Describente vero CBD, quæ sit perpetuo applicata ad diametrum AB, cujus punctum datum G, sit sẽper in parabola Directrice, quæque semper sibi ipsi parallela moveri concipiatur, motu autem suo, ut supra dictum est movere faciat rectam BI, æqualem parametro AS, quæ quidem BI maneat semper applicata in diametro AB; recta autem CI transeat semper per puncta C, & I, cui parallela semper existat Efficiens AD. Intersecabunt itaque se se Efficiens, atque Describens; Dico ex hujusmodi intersectione curvam AOD procreari, quæ secunda parabola erit, cujus vertex erit A, diameter recta AE, quæ primam parabolam AC in puncto A tangit, sive Describens in statione prima; applicatæ verò eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvę puncto parallelæ ducuntur diametro AB, sive Efficienti in statione prima, quarum una in recta DE conspici potest; Dico autem cubum hujus applicatæ DE, æquari solido, sub quadrato interceptæ AE, in Intervallum BI, sive parametrum AS; quod ita facillimè demonstratur.

Quoniam enim parallela est AD ipsi CI similia erunt triangula IBG, ABD (*a*) quare ita erit *I*B ad BG, ut AB ad BD, ergo rectangulum IBD æquabitur rectangulo ABC(*b*); quod si utraque hæc rectangula in BD ducantur, erit solidum sub BI in quadratum BD æquale solido sub tribus DB, BA BC. Quoniam vero continuè proportionales sunt IB, BC, BA, nam IB æquatur parametro AS (*c*): ut autem IB ad BC, sive ut BC ad BA ita AB ad BD (*d*), continuè etiam proportionales erunt CB, BA, BD, ac propterea cubus, qui fit à media AB æquabitur solido sub tribus DB, BA, BC (*e*): hoc est cubus AB, sive ED æquabitur solido sub data BI, sive parametro AS in quadratum BD, sive AE. Quod erat demonstrandum.

Quod

(*a*) 29. *primi*, & 4. *sex.* (b) 16. *sex.* (c) 11. *lib. primi Apol.* (*d*) 4. *sex.* (*e*) 36. *Vnd.*

Quòd si curvā AOD, ex altera parte, qua est punctum G continuare velimus, facillimè id præstari poterit; producta namque diametro AB ad partes G, vertice eodem pūcto A, parametro autem eadē recta AS describēda est circa diametrum AG prima parabola AF, ita ut applicatæ ad diametrum AG parallelæ sint applicatis ad diametrum AB, hoc est parallelæ sint rectæ CBD, quam modo Describentem vocavi. Si enim polo A, Describente una ex applicatis ad diametrum AG, recta videlicet FGH, quæ certo sui puncto, ut F, maneat sēper in Directrice, quæ sit parabola AF, Intervallo vero recta GK æquali parametro AS, Efficiēte autē AH parallela rectæ FK, quæ per puncta F, K transit, curva AOH ex intersectione Efficientis AH, Describentisque FGH describatur; erit hæc eadem parabola AOD ad partem H continuata, quemadmodum manifestè apparet.

Ex hac autem descriptione patet, Efficientem in statione prima, sive rectam GAB descriptam parabolam in puncto A, sive Polo contingere: sumto quippè in curva quolibet puncto, ut D, semper demonstrabitur idē existere supra rectā AB. Item rectas omnes, quæ Efficienti in statione prima, sivè rectæ GAB parallelæ ducuntur, atque utrinque in curva terminantur, bifariam à Describente in statione prima, sivè recta AE dividi; sumto quippè in curva AOD quolibet puncto, ut D, ductaque DEH parallela GAB, hæc in Describentem AE, atque in curvam AOH incidet, quod facile demonstratu est; incidat itaque in H, dico bifariam in E dividi: ex proprietate siquidem hujus curvæ, tam cubus ED, quàm EH æquantur solido sub parametro in quadratum AE, quarè cubus ED æquabitur cubo EH, ac propterea EH, ED æquales erunt. Patet insuper Describētem in statione prima AE vocari posse diametrum hujus curvæ, quando autem AB est axis parabolæ primæ AC, AE erit etiam axis secundæ parabolæ AOD: at DEH, omnesque parallelas AB ad eandem diametrum, sivè axem AE applicatas esse conftat. Manifeſtum etiam eſt applicatarum cubos inter ſe eſſe, ut ab interceptis quadrata. Item ita eſſe parametrum, ſivè ſectam AS ad applicatam DE, ut ejuſdem applicatæ DE quadratum, ad quadratum intercæptæ AE; ſi nempè tam quadratum applicatæ, quàm intercæptæ pro baſibus horum ſolidorum accipiantur, parameter verò, ac applicata pro altitudinibus (*a*) Demonſtrari etiam poteſt, rectas omnes, quæ diametro parallelæ ducũtur in uno tantum pũcto parabolæ occurrere; quæ vero quemlibet angulum cum diametro cõſtituunt, in duobus punctis occurrere. Item quodlibet curvæ punctum parabolæ verticem eſſe poſſe, & quæ ipſi diametro parallela ducitur, diametrum fore, ad quam applicatæ erunt eæ rectæ, quæ contingenti in vertice parallelæ ducuntur; atque adeo via ſterni poteſt ad ducendas rectas, non ſolum quæ hanc curvam in dato puncto contingant, ſed eas omnes, quæ expoſita methodo deſcribi poſſunt, quæ quidem curvæ, ut deinceps oſtendam, indefinitæ ſunt. Quoniam vero uberiorem de his curvis tractatum editurus ſum, ſi votis Deus annuat, ideo ab his demonſtrandis abſtineo, Tibi præcipuè, qui ea, qua polles ingenii acie omnia hæc, & longè penitiora ſcrutari potes. Quarè ad deſcriptionem tertiæ Parabolæ tranſitum faciam.

Tertia verò parabola illa eſt, in qua quadratoquadratum cujuſvis ex applicatis æquatur planoplano, quod continetur ſub cubo intercæptæ in datam rectam, ſivè parametrum. Quòd verò parabola quæ hac proprietate gaudet tertium locum inter parabolas occupet, ac propterea tertia dicenda ſit, ex eo patet, quod cum quadratoquadratum proximè cubum ſubſequatur, etiam hæc ſecundam Parabolam ſubſequi debeat. Id verò alia inſuper ratione colligi poteſt. Prima enim parabola illa eſt in qua parameter, ſivè data rècta eandem habet rationem ad applicatam, quam eadem applicata ad intercæptam; quoniam verò poſt latus qua-

(a) 34. *Und.*

quadratum, sive planum subsequitur; ideo & post primam parabolam illa veniet, in qua data recta, sive parameter eandem habet proportionem ad applicatam, quam ejusdem applicatæ quadratum, ad quadratum intercæptæ; quare quam supra descripsimus parabolam, secunda dicenda est, in ea enim parameter ad applicatam eandem rationem habet, ac ejusdem applicatæ quadratum ad quadratum intercæptæ: cumque à quadrato ad cubum fiat transitus, etiam à secunda parabola ad eam fiet transitus, in qua parameter eandem habebit rationem ad applicatam, ac ejusdem applicatæ cubus ad cubum intercæptæ; hoc est in qua quadratoquadratum applicatæ æquatur planoplano sub cubo intercæptæ in datam rectam; hæc autem curva tertia parabola, vel Quadratoquadratica ab ea, qua gaudet præcipua proprietate dicenda est, quemadmodum & prima Parabola plana appellari consuevit.

Huiusmodi autem curva, Vir præstantissime, eadem prorsus ratione, ac secunda describi potest. In eadem quippe figura omnia ut supra intelligantur: sed Directrix AC non sit prima parabola, sed secunda in qua videlicet cubus applicatæ æquetur solido sub quadrato datæ rectæ, sive parametri in intercæptam; quamvis autem nullus huius secundæ parabolæ descriptionem tradiderit, ego tamen illius descriptionem faciliter absolvam, Teque, cum fecero, certiorem statim reddam (a). Nunc autem liceat eadem uti, ac si descripta esset, ut à simplicissima non deflectatur via. Dico curvam, quæ ex Describentis CD, Efficientisque AD intersectione gignitur tertiam parabolam esse, cujus vertex erit A: diameter vero AE, Describens scilicet in statione prima, parameter autem AS, applicata vero DE, omnesque æquidistantes Efficienti GAB in statione prima; præcipua vero hujus curvæ proprietas erit, ut quadratoquadratum cuiuscumque applicatæ DE, æquetur planoplano sub cubo intercæptæ AE, vel

(a) *Vide epistolam tertiam,*

BD in Intervallum BI, sive parametrum AS, vel quod idem est ut parameter BI ad applicatam AB, vel ED eandem habeat rationem, quam cubus ejusdem applicatæ DE ad cubum intercæptæ DB, vel AE. Id vero probari potest facillima quidem demonstratione, quæque in altioribus etiam curvis locum habeat, ex quo quidem hujus methodi elegantia satis elucet. Quoniam enim, ut supra dictum est, similia sunt triangula CBI, ABD erit ut IB ad BC, quemadmodum AB ad BD, quare & cubi ab his curvis proportionales etiam erunt (a); ergo ita cubus IB ad cubum BC, ut cubus AB ad cubum BD; quoniam vero ex proprietate secundæ parabolæ AC, cubus BC æquatur solido sub quadrato parametri BI in intercæptam BA, erit cubus BI ad solidum sub quadrato ejusdem BI in BA, vel quia eandem habent basim, quadratum nempe rectæ BI, ut data BI ad AB, vel ED, ita ejusdem AB, vel ED cubus ad cubum BD, vel intercæptæ AE. Quod erat ostendendum.

Cæterum, & ex hujus etiam curvæ descriptione manifesta sunt ea omnia, quæ supra de secunda parabola dicta sunt; ubi verò illic diximus, ita esse parametrum, sive datam rectam ad applicatam, ita quadratum applicatæ, ad quadratum intercæptæ, dicendum in hac est, ita esse parametrum, sivè datam rectam ad applicatam, ut ejusdem applicatæ cubus, ad cubum intercæptæ, quod quidem satis manifestè patet. Notatu insuper dignum æxistimo, præcipuam proprietatem cujuscunque harum curvarum, quæ hac methodo describi possunt, unica inniti demonstratione: etenim demonstratio, qua hujus tertiæ parabolæ præcipuam proprietatem probavi, locum etiam habet in secunda, quarta, quinta, sexta, & reliquis, ut in sequentibus palam fiet; Quod vero locum etiam habeat in secunda, ita demonstro. In eadem secunda figura sit curva AOD secunda parabola descripta Directrice AC, quæ sit prima parabola, Describente vero CD, efficien-

(a) 37. Vnd.

ciente AD, &c. ut supra, demonstrandum est cubum cujuscũque applicatæ DE æquari solido sub quadrato intercæptæ AE, in datam BI. Id autem demonstrandum eadem prorsus demonstratione, ac in tertia parabola factum est. Quoniam enim proportionales sunt IB, BC, BA, BD, & quadrata, quæ ab his curvis fiunt, proportionalia erunt (*a*). Sed quadratum BC æquatur rectangulo sub parametro, sive recta IB in BA(*b*), ergo ita erit quadratũ IB ad rectangulũ sub IB, & BA, hoc est ita IB ad BA(*c*), ut quadratum AB ad quadratum DB, quare(*d*) patet cubũ AB, æquari solido sub quadrato BD, vel AE in rectã datã BI. Quod erat demonstrandũ.

Quod verò hæc eadem demonstratio locum in cæteris deinceps curvis habeat, in sequentibus manifestum fiet, dummodo quod hic de quadrato, in tertia de cubo, in quarta de quadratoquadrato dicendum intelligatur.

E quibus, ut puto, manifestè apparet, hanc describendi curvas methodum, pro simplicissima, & maximè naturali, ac germana habendam esse, dum non solum ab hac unica omnium in infinitum parabolarum genesis facillimè deducitur, sed præcipuæ etiam, primariæque ipsarum proprietates ab unica, & per quam eleganti demonstratione pendent, ut in altioribus parabolis manifestum fiet. Id vero an conorum, vel aliorum quorumlibet solidorum sectiones præstare possint, compertum nondum habeo. Hoc unum scio proprietates omnes, quæ usque adhuc cognitæ sunt, earum curvarum, quæ coni sectiones appellantur, melius, facilius, brevius, elegantiusque erui ex earundem in plano descriptione, quam ex illa conorum sectione, quicquid strepant Apolloniani sectatores, à quibus ingentia sæpe volumina conscribuntur, non ut aliquid utilitatis afferant, sed ut legentium animos, nimia, qua eos afficiunt molæstia ab his disciplinis avertant.

(a) 20. *sex.* (b) 11. *pr. Apoll.* (c) *pri. sex.*
(d) 34. *Vnd.*

Quomodo verò hæc eadem curva ab altera parte puncti H continuari possit, ita per se patet, ut explicatione penitus non egeat, quod, & satis abundè ipsa figura docet, quare ad quartam parabolam describendam accedam.

Quartam vero Parabolam illam esse dicimus, in qua quadratocubus applicatæ æquatur planosolido, quod continetur sub quadratoquadrato interceptæ in datam rectam, sive parametrum, unde, & Quadratocubicæ nomen sortita est; Vel illa est quarta Parabola, in qua data recta, sive parameter eandem habet proportionem ad applicatam, ut ejusdem applicatæ quadratoquadratum ad quadratoquadratum interceptæ; ita autem describitur. In eadem secunda figura hujus epistolæ, omnibus, ut supra positis, pro Directrice AC constituatur tertia parabola AC, in qua cujuscumque applicatarum quadratoquadratum, æquetur planoplano, quod continetur sub cubo datæ, quæ sit Intervallum BI, in interceptam inter verticem, & applicatas. Dico curvam, quæ oritur ex intersectione Describètis CD, nec non Efficientis AD, quartam parabolam esse, cujus vertex erit A, diameter AE, applicatæ verò rectæ omnes, quæ parallelæ ducuntur ipsi AB. Somto enim quolibet puncto in curva AOD, ut D, ductaque DE, erit IB, ad BC, ut BA ad BD, ac propterea, ita etiam quadratoquadratum IB ad quadratoquadratum BC, sive ex proprietate parabolæ AC ad planoplanum sub cubo IB in interceptam AB, vel ita IB ad BA, ut ejusdem BA, vel DE quadratoquadratum, ad quadratoquadratum BD, vel AE, unde patet propositum.

Quod si parabolam quartam, loco Directricis ponamus, in qua quadratocubus applicatæ æquetur planosolido sub quadratoquadrato parametri in interceptam, quinta parabola procreabitur, in qua videlicet cubocubus cujuscumque ex applicatis æquabitur solidosolido, sub quadratocubo interceptæ in datam rectam, sive parametrum. Demonstratio vero eodem prorsus modo procedit: Ete-

nim

nim proportionales sunt rectæ IB , BC , & AB , BD , quare & quadratocubi ab his curvis proportionales erunt ; quoniam verò ex proprietate quartæ parabolæ AC quadratocubus applicatæ CB æquatur planosolido sub quadratoquadrato IB , sive parametri , in intercæptam AB , erit etiam quadratocubus datæ BI ad planosolidum sub quadratoquadrato BI in AB , vel ut BI ad BA, ita ejusdem AB , vel applicatæ DE quadratocubus ad quadratocubum BD , vel intercæptæ AE, & patet propositum .

Atque usquè adhuc, ut existimo, satis manifestè demonstratum est , quomodo quamcumque parabolam describere possibile sit, simulque etiam, quomodo demonstratio concinnanda; quæ quidem si Tibi ingrata nõ erunt, omnibus etiam geometris accepta fore confido .

Ideo autem in his curvis describendis adhibui parabolas, quarum descriptionem , non dum tradidi , quia hujusmodi methodus simplicissima mihi visa est ; facillimè enim quæcunque parabola describi potest, qualibet data diametro, sit ea axis, nec ne. Quare puto parabolas, quas pro Directricibus assumpsimus simpliciores quodammodo fore iis , quas hac epistola tradidimus .

Cæterum non desunt aliæ etiam methodi , quibus hæ eædem curvæ describi possint. In figura etenim tertia hujus epistolæ, vertice A, axe verò AB , parametro AS, prima parabola describatur AC . Tum in ipsius vertice A constituatur rectus angulus DAC, circulariter mobilis in eodem vertice A; recta autem CBD ad axem AB applicata, ita semper sibi ipsi parallela moveri concipiatur , ut certo sui puncto C , maneat semper in parabola AC, motu autem suo secum ducat latus AC anguli CAD , ita ut transeat semper per ejusdem punctum C; quare hoc motu movebitur etiam reliquũ anguli CAD latus AD, fietque intersectio hujus ejusdem lateris , & rectæ CBD ; dico ex hujusmodi intersectione , curvam generari AOD , quæ erit eadem , ac secunda parabola supra descripta , cujus vertex erit A ; axis verò recta AE ,

quæ

quæ perpendicularis ex puncto A ad axem AB ducitur, applicatæ verò ad eundem axem AE erunt eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ducuntur rectæ AB, velut in recta DE apparet; hujus autem curvæ hæc erit proprietas, ut cubus cujuscunque applicatarũ, velut DE æquetur solido sub quadrato intercæptæ AE in parametrum parabolæ AC, rectam videlicet AS; ita verò procedit demonstratio. Quoniam enim cõtinuè proportionales sunt CB, BA, BD (*a*), proportionalia etiam erunt, quæ ab ipsis quadrata (*b*), sed quadratum CB æquatur rectangulo, sub parametro SA in AB (*c*), ergo ita rectangulum sub parametro SA in AB ad quadratum ejusdem AB, ut idem quadratum AB ad quadratum BD, vel sumta comuni altitudine AB, ut parameter AS ad AB, vel applicatam DE, ita ejusdem DE quadratum, ad quadratum BD, vel interceptæ AE, quare patet cubum applicatæ D æquari solido sub parametro SA in quadratum interceptæ AE. Quod erat demonstrandum.

Tertia autem, & reliquæ deinceps parabolæ eadem prorsus methodo describuntur, immutata tãtummodo Directrice AC, atque earum proprietates ipsissima, ut supra demonstratione probantur; sic ad describendam curvam, quam tertiam parabolam supra vocavi, opus est, pro Directrice AC adhibere curvam, quam modo supra descripsimus, secundam videlicet parabolam; Nam ex intersectione rectæ CD, atque lateris AD tertia parabola AOD describetur, in qua quadratocubus applicatarum æquatur planoplano sub cubo intercæptæ in datam rectam AS, sive parametrum. Ita verò se habet demonstratio. Quoniam continuè proportionales sunt tres rectæ CB, AB, BD, proportionales etiam erunt ab ipsis cubi (*d*), sed cubus CB ex proprietate secundæ parabolæ AC æquatur solido, quod continetur sub parametro AS in quadratum AB, ergo ita erit solidum sub qua-

dra-

(a) 8. *sex.* (b) 20. *sex* (c) 11. *lib. pr. Apoll.*
(d) 37. *Vnd.*

drato AB in parametrum AS ad cubum ejusdem AB, vel, quia hæc solida eandem basim habent, quadratum videlicet AB, ita parameter AS, ad rectam AB, ut ejusdem AB cubus, ad cubum BD, quare, & quadratoquadratum AB, vel applicatæ DE, æquabitur plano plano, sub cubo BD, vel interceptæ AE, in parametrum AS, quod quidem demonstrandum susceperam. Similiter ad describendam quartam parabolam, opus tantum est pro secunda parabola AC, tertiam cōstituere, quæ Directricis efficium subeat, ad describendam verò quintam, sumenda est quarta AC, & ita deinceps. Quæ omnia ita per se patent, ut in his amplius insistere non debeam.

Hanc autem methodum, ideo superiori posthabendam duco, quod non ita facile sit has parabolas describere, data qualibet diametro; quàm enim modo exposui, locum tantum habet cum data diameter est axis. Quare & supra etiam diximus methodum, qua Iohannes de witt parabolam primam delineavit nostræ superius allatæ posthabendam; ratio enim, qua ille parabolam descripsit cum data positione diameter est axis alia est, atque ea, cum non est. Quod unico modo à nobis factum est. Accedit etiam quod alterius speciei parabolas, de quibus in tertia epistola dissero, primo loco exposita methodo multò facilius describi possunt, quam modò tradita; ut prætercam, quod & hyperbolas omnes, de quibus in secunda epistola, simili quadam methodo etiam describuntur.

Si vero Tibi magis hæc arrideat, hac ratione & easdem parabolas describemus. In figura quarta circa diametrum AE, vertice A parametro AS, applicatis verò in dato angulo, puta SAB, describenda sit secunda parabola, in qua cubus cujuscumque ex applicatis, æquetur solido sub quadrato interceptæ in datam rectam. Ex puncto A ducatur AB, ita ut angulus SAB, æquetur dato angulo, tum vertice A, parametro AS, diametro verò AB prima parabola describatur AC, ita ut applicatæ ad diametrum AB faciant angulos

æqua-

æquales dato SAB, vel ipsius ad duos rectos complemento; tum ex quolibet hujus curvæ puncto, ut C, ducta applicata ad diametrum AB, fiat ut CB ad BA, ita eadem BA ad BD; dico punctum D esse ad secundam parabolam, cujus vertex erit A, parameter verò AS, diameter autem AE, applicatæ verò ad diametrum AE eæ omnes, quæ cum eadem datum angulum SAB comprehendunt: Quare si alia, atque alia puncta in parabola AC accipiantur, curvā AOD quæsitam designabimus. Demonstrationem autem non affero quia, ex iis, quæ supra dicta sunt, facillimè colligi potest.

Si vero satis hæc Tibi methodus expedita nō videatur, facillimè quidem, ut puto, remedium afferri poterit: qualibet enim diametro data, anguloque, quem applicatæ cum eadem faciunt, una cum parametro ad eandem pertinente, nō difficile quidem erit punctum invenire, quod sit extremum, sive vertex axis parabolæ describendæ, nec non parametrū ad eundem axim pertinentem: ita propositæ parabolæ descriptio ad modò expositam methodum reduci poterit: Id verò in prima parabola manifestum fit. Sit enim in figura quinta vertice A, diametro AC, parametro AB, applicatis verò in angulo SAB describenda prima parabola, nec tamen diameter AC sit axis; ducta AB in angulo ASB, in eadem sumatur AB æqualis lateri recto ad diametrum AC pertinenti, tum ex A perpendicularis ad diametrum AC erigatur AD, atque ex puncto B demittatur BD parallela AC, occurrens AD in D: quoniam itaque angulus SAB datus est, dabitur etiam BAD complementum ad rectum, cumque angulus BDA sit rectus, (a) dabitur etiam ABD, quare cum detur AB, dabitur, & BD (b), quæ bifariam in I dividatur, sumtaque AG æquali dimidio, hoc est DI ex puncto G ducatur GE parallela BD, divisaque bifariam in F; ipsis FG, EA tertia proportionalis inveniatur FO. Dico punctum F esse verticem axis; quæ verò ex puncto F parallela ducitur AC esse

(a) 32. pr. (b) 6. sex.

esse axem, rectam autem FO esse parametrum ad eundem axem pertinentem. Demonstrationem verò non afferam, ne nimia Te molestia afficiam, quandoquidem eo, quo polles ingenii acumine facillimum Tibi erit, hæc, & alia sexcenta, & quidem longè penitiora perspicere. Quod verò id in altioribus etiam parabolis locum habeat, pro certo habeo, quarè modò exposita methodo uti poterimus, etiam si data positione diameter non sit axis.

Possunt quoque hæ eædem curvæ infinitis fermè modis describi, verùm silentio eos præterire æquum duxi, nullos enim faciliores, aut elegantiores iis, quos exposui, inveniri posse autumo.

His autem curvis satis, ut reor fæliciter, descriptis, operæ pretium est, ut aliqua dicam de utilitatibus, quæ ab istis emanant; verùm ita plurimæ sese mihi offerunt, ut multitudine earum penè obrutus, undè initium mihi faciendum sit, non planè videam. Quoniam verò de locorum compositione supra me aliqua allaturum promisi, ideo nonnulla hac de re in medium prius afferam, quæ Tibi non iniucunda fore spero.

Beneficio itaque ejus, quam primo loco exposuimus, methodi, ea eadem loca componi possunt, quorum æquationes duobus tantum terminis comprehenduntur, quorum unum altera ex ignotis quomodolibet in se ducta constituit, alterum verò reliqua ignota, ita in datam quantitatem ducta, ut numerum dimensionum hujus ignotæ excedat numerum dimensionum quantitatis notæ. Itaque si locus per hanc æquationem designatus $x^3 \infty ayy$. componendus proponatur: supposito initio quantitatis indeterminatæ. x. puncto A (vide figuram 2. hujus epist.) ita, ut hæc eadem quantitas x. sese extendere intelligatur ab A versus B; quantitas verò indeterminata y, supra hanc in dato angulo ABD. exurgat, quod & in sequentibus semper intelligendum est; opus tantum est vertice A, parametro verò recta data, per literam a designata, diametro verò AE, quæ ex puncto A

 pa-

parallela ipsi BD ducitur, secundam parabolam AOD describere ita, ut applicatæ sint rectæ, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ AB ad diametrum AE ducuntur: quæ omnia juxta ea, quæ superius tradita sunt, perfici possunt; curva enim AOD erit locus quæsitus. Sumto quippè in ipsa quolibet puncto, ut D, ductaque DB parallela ipsi AE, nec non DE parallela ipsi AB; quoniam cubus applicatæ DE, vel AB, hoc est x^3 æquatur solido sub quadrato AE, vel BD, sive yy in parametrum, quæ est a, ideo habebitur hujusmodi æquatio $x^3 \infty ayy$. & patet propositum.

Quod si habeatur huiusmodi locus $x^4 \infty ay^3$ facillimè quidem componetur describendo curuam, quam supra tertiam parabolam vocavimus.

Si vero locus componēdus per hanc æquationem $x^5 \infty ay^4$ designabitur, componi quidem ille poterit describendo curvam, quam supra quartam parabolam diximus. At sub hoc genere alia etiā parabola hìc cōsideranda venit, cujus æquatio constitutiva per hos terminos exprimitur videlicet $x^5 \infty aay^3$ Quarè si locus per hanc æquationem designatus componendus fuerit, ita exposita methodo id assequemur. In eadem secunda figura intelligatur curva Directrix AC secūda parabola esse, in qua cubus cujuscumque in ea applicatæ æquetur solido, quod continetur sub quadrato intercæptæ in parametrum, quæ sit a. quomodò verò hæc curva describi possit superius tradidimus; Describente autem CBD, Intervallo verò parametro, sive a, à recta BI designato, Efficiente autem AD, curva AOD describatur; dico hanc esse locum quæsitum. Sumto quippè in ipsa quolibet puncto, ut D, constructisque omnibus, ut in figura apparet; cum similia sint triangula CBI, ABD (a), sitque ut AB ad BD, sive x, ad y, ita BI ad BC, sive a. ad quartam, erit BC æqualis ay diu: per x. quoniam verò ex proprietate parabolæ AC, cubus BC, sive a^3y^3, diu: per x^3, æquatur solido, quod con-

(a) Ex hyp. 29. pri. & 4. sex.

continetur, ſub quadrato AB in parametrum a, hoc eſt, ſolido axx: (intellige autem AB eſſe diametrum parabolæ AC) habebimus æquationem hujuſmodi $x^5 \propto aay^3$. Et patet, quod erat demonſtrandum. Quod ſi æquatio ad ſex dimenſiones aſcendat, hoc modo $x^6 \propto ay^5$, facillimè quidem conſtrui poterit, adhibendo curvam, quam ſupra quintam parabolam nuncupavimus; ſub hoc autem gradu duæ tantum parabolæ cadunt, ea videlicet, quam modo expoſuimus; quæque per hanc æquationem $x^6 \propto a^5y$ exprimitur, de qua in tertia epiſtola diſſerimus. Si verò conſtruenda æquatio ſeptem dimenſionum fuerit, quæque per hos terminos exprimatur $x^7 \propto ay^6$ conſtrui ipſa poterit, adhibendo curvam, quæ ſexta parabola erit, quæque facillimè utraque allata methodo deſcribi poterit. Quoniam autem ſub hoc gradu ſex diverſæ parabolæ cadere poſſunt, quæ per hos terminos exprimuntur $x^7 \propto ay^6$. $x^7 \propto aay^5$. $x^7 \propto a^3y^4$. $x^7 \propto a^4y^3$. $x^7 \propto a^5y^2$. $x^7 \propto a^6y$ Ideo quò clarius methodi, qua utor præſtantia appareat, utque alios etiam ad harum contemplationem recta, quæ ad illas ducit, detecta via, alliciam, quomodò primæ tres parabolæ deſcribi poſſint oſtendam; reliquæ verò tres in tertia epiſtola explanabuntur. Si itaquè hujuſmodi habeatur æquatio, $x^7 \propto ay^6$ illa conſtrui poterit adhibita curva, quæ eadem prorſus ratione deſcribetur, atque prima, ſecunda, & tertia deſcriptæ ſunt, ut ſupra dictum eſt. Si autem hæc fuerit æquatio $x^7 \propto aay^5$ in eadem figura ſecunda, pro Directrice AC conſtituatur parabola, cujus æquatio conſtitutiva per hos terminos exprimatur $x^5 \propto a^3y^2$, quæ quidem parabola in tertia epiſtola deſcripta habetur: ex interſectione etenim Deſcribentis, Efficientiſque curva AOD deſcripta erit illa, qua indigebimus ad propoſitæ æquationis conſtructionem; id verò ita patet. Intervallum BI vocetur a; AB verò, ut ſupra, x, BD autem y. Quoniam itaque ſimilia ſunt triangula ABD, CBI, (a) BC erit ay, diviſ-

 per

(a) *Ex hyp. 29. pri. & 4. ſex.*

per x. Quoniam verò planocubus BC, sive a^5y^5 diu: per x^5 æquatur planosolido sub cubo Intervalli BI in quadratum intercæptæ AB, hoc est a^3xx; ideo habebitur hujusmodi æquatio a^5y^5 diu: per $x^5 \infty a^3xx$; & facta congrua multiplicatione, atque divisione, habebitur æquatio $aay^5 \infty x^7$, & patet propositum. Pro constructione autem tertiæ equationis $x^7 \infty a^3y^4$, ita operandum est. In eadem secunda figura, Directrix AC sit curva, quam supra tertiam parabolam appellavi, curva enim, quæ ex interfectione Describentis, Efficientisque describetur, apta erit ad propositæ æquationis constructionem. Sumto enim in ipsa quolibet puncto, ut D, omnibusque conctructis, ut in figura apparet, demonstrabitur BC esse ay, diu: per x. Quoniam verò quadratoquadratum ejusdem BC, sive a^4y^4 diu: per x^4 æquatur planoplano sub cubo intercæptæ AB in Intervallum BI, hoc est ax^3, ex proprietate Directricis AC; ideo habebitur hujusmodi æquatio, videlicet a^4y^4, diu: per $x^4 . \infty ax^3$, vel facta multiplicatione, & divisione $a^3y^4 \infty x^7$, & patet propositum.

Nec absimili methodo parabolæ omnes, quæ sub quolibet gradu comprehenduntur describi possunt, ita ut omnia ea loca, quorum æquationes duobus terminis exprimuntur, quæque ad has reduci possunt, composita sint, quemadmodum ex secunda, & tertia epistola colligi potest: nec puto facillorem, aut elegantiorem methodum excogitari posse.

Quæ autem ab hac locorum compositione, necnon ab harum curvarum descriptione emanare potest utilitas tanta est, ut ausim dicere, maximè usquè adhuc mancam, atque imperfectam fuisse Geometriam, quæ quidem omnem perfectionem consequi, omnibusque numeris absoluta evadere potest, modò aliqua diligentia adhibeatur, in excolendis iis, ad quæ exposita methodus ducit. Te verò Dux Excellentissime, qui summis virtutibus ornatus totius Reipublicæ literariæ bono semper studuisti, enixè rogo, atque obsecro, ut hæc tuis auspiciis inventa, Tibique, ut primum excogitata mihi fuere, sincera mente dono data, ex-

co-

colenda, atque illustranda cures; Ipse enim es, qui, ceù Sol radiis suis omnia fovet, miraque fœcunditate complet, hominum ingenia, nescio, qua præpotenti vi, ita acuis, atquè fœcundas, ut grandia quisque Tuo numine ductus aggredi non dubitet: unde Tua, totiusque Domus Tuæ Fama, atque Nomen totum jam pervolat orbem, dum quilibet Te, Tuorumque inclita gesta, scriptis celebrare gestit. Mihi verò ad hæc ulterius promovenda animos, atque vires adiicere poteris, si meum erga Te studium, atque amorem acceptum habere non dedignatus fueris.

At verò non solùm ea loca componi possunt, quorum æquationes duobus tantum terminis exprimuntur, sed & cætera omnia, modo aliqua diligentia in his curvis excolendis adhibeatur; si enim, ut aliquod exemplum afferam, locus componendus proponatur, hac æquatione designatus $x^3 - 2bxy \propto ayy$. Quantitas verò indeterminata x (vide figuram sextam), initium ex puncto A sumere, atque se per rectam ABI positione datam extendere ad partes I concipiatur; reliqua verò indeterminata y, supra AB exurgere in dato angulo ABQ: ex puncto A, rectam AM ducere oportet in dato angulo ABQ, & sumta AM æquali quantitati, quæ in æquatione per b, designatur, opus est ex puncto M rectam ducere MQ parallelam AB; vertice autē V, ita ut MV æquetur bb, diu: per a, parabola prima describatur VAC, cujus quidem parameter sit quantitas, quæ per a designatur, applicatæ verò ad diametrū VQ sint in dato angulo ABQ. Polo deinde A, Directrice verò modo descripta parabola AC, Describente autem CBQ, atquè Intervallo BI æquali parametro a, & Efficiente AD curva describatur AOD, hæc enim erit locus quæsitus; sumto enim in ipsa quolibet puncto, ut E, constructisque omnibus, ut in figura apparet, cum AB sit x, BD vero y, & BI a, erit BC ay, diu: per x. CQ verò erit ay, diu: per x, $\ast b$. Quoniam verò hujus rectæ CQ quadratum, quod est $aayy$ diu: per xx, $\ast 2aby$ diu: per x, $\ast bb$,

æqua-

æquatur rectangulo sub parametro in intercæptam QV,(a) hoc est bb*ax, ideo habebitur hujusmodi æquatio $aayy$ diu: per xx,*$2aby$ diu:per x,*bb ∞ bb*ax, vel ablatis iis, quæ se invicem tollunt, factaque congrua multiplicatione per xx, nec non divisione per a, exurget hujusmodi æquatio $x^3 - 2bxy$ ∞ ayy. Et patet propositum.

Similiter si construenda proponatur hæc æquatio byy ∞ $axx - x^3$, hac ratione construi poterit. In figura septima intelligatur quantitas x initium sumere à puncto A, & per rectam ABV ad partes V sese extendere; y verò supra hanc in dato angulo ABD. Sumta deinde AV æquali quantitati datæ a. Vertice V diametro VA, parametro data recta b, applicatæ autem ad diametrum VA sint in angulo IBC dato angulo ABD æquali, parabola prima describatur VGE: si enim Polo A, Intervallo BI, æquali parametro b, Directrice verò parabola EGV, Describente CBD una ex applicatis, Efficiente verò AD, curva describatur AD GV, hæc erit locus quæsitus; Si enim aliquod punctum in ipsa sumatur, ut D, construanturque omnia, ut in figura apparet, cum AB sit x, BD verò y, & BI b, atquè AV a; erit BC by, diu:per x, BV verò $a - x$. quoniam autem quadratũ BC, sive $bbyy$, diu: per xx, æquatur rectangulo IBV(a), sive $ba - bx$, habebitur hujusmodi æquatio $bbyy$ divisa per xx ∞ $ba - bx$, vel $bbyy$ ∞ $baxx - bx^3$, & facta congrua divisione per b. byy ∞ $axx - x^3$ Q. E. D.

Hujus autem curvæ proprietas similis est proprietati parabolæ primæ, quam demonstravit Pappus propositione ultima *lib*.4. *Collect. Math.* dummodò, quæ ibi de plano ab eodem dicta sunt, hic de solido intelligantur. Etenim modo descripta curva ADGV hac proprietate pollet, ut sumto in ipsa quolibet puncto, velut D, atque ab eodem ducta DB in dato angulo, solidum, quod continetur sub quadrato AB in BV, æquetur solido sub quadrato BD in parametrum, sive

In-

(a) 11. *lib.pr. Apoll.*

Intervallum *BI*, quæ quidem omnia ex allata æquatione patent; Quod si aliam demonstrationem desideras, en quomodo concinnavi. Cum similia sint triangula ABD, BCI (*a*) erit quadratum AB ad quadratum BD, ut quadratum *BI* ad quadratum *BC*; quoniam vero (*b*) quadratum *BC* æquatur rectangulo *IBV*; ergo ita erit quadratum AB ad quadratum *BD*, ut quadratum *IB* ad rectangulum *IBV*, vel ut IB ad *BV*; ergo (*c*) solidum sub quadrato *AB* in *BV* æquatur solido sub quadrato *BD* in parametrum BI. Q. E. D.

An verò hæc curva eadem sit, ac illa, quam supra primam parabolam vocavi, pro certo affirmare non audeo, non enim mihi otium fuit, ut in hæc multum incumbere possem. Reor autem eandem omnino esse, quod & confirmare videntur ea, quæ mox addam: silentio enim præterire nolo, quod animadversione dignum mihi visũ est, videlicet, quod si pro prima parabola VCE recta adhibeatur, curva genita ADGV, erit prima parabola, atque ex hac descriptione manifesta redditur proprietas à Pappo tradita.

In figura enim octava, sit triangulnm isoscele VAE, recta autem CBD parallela lateri AE pro Describente habeatur, moveaturque in Directrice VE. Polus autem sit A, in quo sit Efficiens AD; Intervallum autem sit data quælibet recta *BI*. Dico curvam ex intersectione Describentis, Efficientisque genitam, talem esse, ut sumto in illa quolibet puncto, ab eoque ducta *DB* parallela lateri trianguli AE, rectangulum, quod continetur sub intercæpta *AB* in *BV* æquetur rectangulo sub intervallo BI in *DB*. Demonstratio verò eadem ratione procedit, ac modo allata in superiori curva. Quoniã isoscele est triangulum AEV, erit BC æqualis BV (*d*). Sed similia sunt triangula ABD, BCI, ergo rectangulum ABC, sive ABV æquatur rectangulo IBD. Q. E. D. (*e*)

Quo-

(a) *Ex hyp.* 29. *pri.* & 4. *sex.* & 20. *sex.* (b) 11. *lib. pri. Apoll.* (c) 34. *Vnd.* (d) 4. *sex.* (e) *ex hyp.* 29. *pri.* 4. *sex*; & 16. *sex.*

Quoniam verò idem omninò accidit, fuerit triangulum EAV rectangulum in A, nec ne? ideo facere nõ possum, quin mirer, cur Pappus, omnesque alii, qui de hac parabolæ proprietate loquti sunt (a), hanc conditionem apposuerint, ut angulus EAV esset rectus, hoc est, ut DB sit ad rectos angulos rectæ AV, id enim necesse nullo modo est: In parabola siquidem ADGV, ducta qualibet recta AV, atque ex quolibet hujus parabolæ puncto, ut D ducta qualibet diametro parallela, rectangulum ABV æquabitur rectangulo, quod continetur sub DB, & parametro pertinente ad eam diametrum, quæ ductam AV bifariam dividit.

Si verò iisdem omninò stantibus, pro directrice VE curva parabolica VCB adhibeatur (vide figuram septimam), in qua cubus cujuscumque applicatarũ æquetur solido sub parametri quadrato in interceptã, curva describetur ADCV, in qua hæc erit proprietas, ut planoplanum, quod continetur sub cubo AB in BV æquetur planoplano sub cubo DB in parametrum, sivè Intervallum BI. Quoniam enim similia sunt triangula ABD, DCI (b), erit cubus AB ad cubum BD, ut cubus BI parametri, ad cubum BC, vel ad solidum sub quadrato BI in BV; ergo ut cubus AB ad cubum BD, ita BI ad BV, ergo &c.

Similiter si curva Directrix VCE hujus naturæ fuerit, ut quadratoquadratum applicatæ, æquetur planoplano sub cubo parametri in interceptam, erit planosolidum sub quadratoquadrato AB in BV æquale planosolido sub quadratoquadrato BD in parametrum, & ita deinceps.

Ex harum verò proprietatum contemplatione non parva emanare potest rebus Geometricis utilitas, ego enim, qui hebetiori ingenio sum, pulcherrimum, omniumque utilissimum problema absolvere potui, quod videlicet attinet ad ma-

---

(a) *Franciscus à Scoboten in comm. ad Cart. Geom.*
(a) *Ex hyp. 39. pri. & 4. sex.*

maximum, atque minimum inveniendum; quamvis enim hujus problematis solutio eadem omnino sit, ac ea, quam nobis scriptam reliquit Petrus ille Fermatius, clarissimum Geometriæ lumen, & splendor; cognoscere tamen quisque poterit ex iis, quæ tradam, ita facillimum fuisse id ex his curvarum proprietatibus eruere, ut nullam in hoc mihi facem prætulerit Fermatiana Methodus.

Expositio autem inventionis nostræ methodi ingrata iis nõ erit, quibus Fermatii methodus omninò perspecta nõ est. At Tu, Vir supra cæteros præstantissime, cui nihil adeo occultũ, abscõditũve est, quod nõ manifestè pateat, si aliquãdo tantillum tẽporis, quo animum summis, maximisque rebus gerendis assiduè incumbentem subleves, nactus fueris, hæc legere ne dedigneris; quamvis enim hæc, & longè difficiliora non te fateant, ingrata Tibi forsan non videbuntur, aliosque insuper ad hæc ulterius promovẽda exemplo tuo compelles, quemadmodum multi, Te præeunte, ad veræ virtutis culmen ascendere potuerunt.

Sit data recta AV, in figura octava, oporteatque ita in aliquo puncto, ut I, secare, ita ut rectangulum sub AI in AV, sit omnium maximum. Hoc facile admodum est, colligiturque ex circulo, atque ex modo allata proprietate primæ parabolæ, ut prætercam, quod & in Elementis habetur (a). Si verò datam AV, in figura septima, ita in aliquo puncto, ut R, secare velimus, ut solidum, quod continetur sub quadrato AR in RV sit omnium maximum, curva ADGV, quæ primum locum post primam parabolam sortitur, id præstare poterit, modò in ipsa aliquod punctum inveniatur, ut G, ita ut ducta GR in dato angulo, ut opus erit, eadem GR sit omnium maxima. Quod si data AV ita secanda in aliquo puncto, ut R, fuerit, ut planoplanum, quod continetur sub cubo AR in RV, sit omnium maximum, curva ADGV, quæ secundum post primam parabolam locum obtinet, idem

D etiam

(a) 27. sex.

etiam præstare poterit, si inveniatur punctum, ut G, ita ut ducta GR in angulo dato, eadem GR sit omnium maxima: idem dicendum in aliis casibus, adhibita convenienti curva. Quarè si regula tradi posset hæc puncta inveniendi, absolutum esset, quod faciendum proponebatur. Sed hujusmodi regula ita inveniri potest. Proponatur in curva AGV, cujus proprietas hæc est, ut ducta qualibet GR in dato angulo, solidum, quod continetur sub quadrato AR in RV æquetur solido sub quadrato GR in datam rectam, quæ sit BI; proponatur, inquam, inveniendum punctum, ut G ita, ut ducta GR sit omnium maxima, quæ duci possunt, atque adeò, ut ducta recta ex puncto G ita invento parallela AV, tota extra parabolam cadat. Ponamus GR, in figura septima, esse omnium maximam. AV autem data recta sit a. Intervallum autem BI sit b. at indeterminata AR sit x; ergo RV erit $a-x$.

Quoniam verò ex proprietate hujus curvæ, ita est BI, sive b ad VR, sive $a-x$, ut quadratū AR, sive xx ad quadratū RG, erit quadratū RG $axx-x^3$ diu: per b, & hujus radix, hoc est R. ($axx-x^3$ diu: per b) erit ipsa RG. Quoniā verò hæc maxima est omnium, quæ ex quolibet puncto rectæ AV ad curvam ADGV duci possunt, fiet, ut si sumatur aliud punctum, ut B, atque ab hoc in dato angulo ducatur recta BD, hæc minor erit ducta RG, quarè si RB dicatur y. BA erit $x-y$. VB autem $a+y-x$; & quoniam ob eandem curvæ proprietatem, ita est data BI, sive b, ad BV, vel $a-x+y$, ut quadratum AB, quod est $xx-2xy+yy$ ad quadratum BD; erit hujus quadratū $axx-2axy+ayy-x^3+3xxy-3xyy+y^3$ diu: per b. latus verò BD erit hujus sūmæ radix. Sed hæc minor esse debet radice, sive recta RG, hoc est R. ($axx-x^3$ diu: per b), quarè & quadratū BD, quod est $axx-2axy+ayy-x^3+3xxy-3xyy+y^3$ diu: per b, minus erit quadrato RG, sive $axx-x^3$. diu: per b. Quoniā verò hæ duæ quantitates, quadratū nempe BD, & quadratum RG eundem habent denominatorem b. ideò omnibus per b, multiplicatis, eadē etiam manebit proportio, nempe hæc summa $axx-2axy+ayy-x^3+3xxy$

$-3xyy$

$-3xyy+y^3$, minor erit summa $axx-x^3$. Quoniam verò in utraque harum quantitatum eædem utrinque quantitates inveniuntur iisdem signis affectæ, fiet, ut si tam à minori, quam à majori æqualia demantur, quod in minori superest, multò minus evadat quantitate, quæ in majori relinquitur; undè in apposito exemplo, cũ sublatis æqualibus, nihil in majori supersit, erit $-2axy+ayy+3xxy-3xyy+y^3$ minor, quàm nihilo. Quarè facta transpositione, ita ut termini signo $-$ notati contraria nota afficiantur, erit quantitas $2axy+3xyy$ maior quantitate $ayy+3xxy+y^3$. Quòd si omnia per quantitatem y dividiantur, eadem etiam permanebit proportio; undè quantitas $2ax+3xy$ major erit $ay+3xx+yy$. Quod si à minori quantitate aliquid auferatur; à majori verò nihil, major multo magis superabit minorem; undè si à minori quantitate $ay+3xx+yy$ auferatur quantitas $ay+yy$. $2ax+3xy$ maior erit reliqua quantitate $3xx$, & facta divisione per x; erit $2a+3y$ major $3x$. Patet itaquè quantitatem $3x$ non debere esse majorem quantitate $2a$; Si enim quantitas $2a$ minor esset $3x$. fieri posset, ut quantitas indeterminata y, ita esset parvula, ut quantitas $2a+3y$ etiam esset minor $3x$; quod esset absurdum. Si verò quantitas $3x$ ponatur æqualis quantitati $2a$, quantulacumque sumatur indeterminata y; semper tamen $2a+3y$ erit major $3x$; ac propterea ubicumque sumatur punctum B inter A, & R semper tamen B*D* minor erit RG. Idem infra demonstrabitur, si punctum sumatur inter R, & V; undè si dempta quantitate $3y$ fiat $2a$ æqualis $3x$ habebitur $x \propto 2a$ diu: per 3. Quarè si dividatur AV in R, ita ut AR contineat duas tertias ipsius *AV*, recta, quæ ex puncto R in dato angulo ducitur ad parabolam A*D*G*V*, ut RG, erit omnium maxima. Vnde patet, solidum sub quadrato AR in RV esse etiam omnium maximum.

Quòd si punctũ B sumatur inter R, & V, ut apparet factũ esse in T, atque RT dicamus y; erit AT æqualis $x+y$, TV verò $a-x-y$; undè operando, ut prius, quadratum TS erit

quan-

quantitas per hos terminos designata $yya + 2ayx + axx -$ $3xyy - 2yxx - x^3y^3$ divisa per b; quod quidem quadratum minus esse debet quadrato GR, quod est $axx - x^3$, diu. per b, & demtis ex utraq; parte æqualibus, & facta multiplicatione per b; erit etiam, quæ relinquitur quantitas $ayy + 2ayx - 3xyy - 3yxx - y^3$, minor nihilo; vel facta congrua transpositione, ut omnia signa nota additionis afficiantur, erit quantitas $ayy + 2ayx$ minor $3xyy + 3yxx + y^3$. Omnia per y. dividantur, & habebitur $ay + 2ax$ minor $3xy + 3xx + yy$; quoniam autem quantacunq; sumatur quãtitas y; semper tamen minor esse debet, data quantitate a; ideò, & quantitas ay, maior erit quantitate yy; quarè si à minori quãtitate $ay + 2ax$ anferatur maior quãtitas ay, à majori verò $3xy + 3xx + yy$ maior quantitas yy; erit etiam reliqua quantitas $2ax$, multò minor quãtitate $3xy + 3xx$; quod si fiat divisio per x, erit $2a$ minor $3y + 3x$; Vndè colligitur, quantitatem indeterminatam $3x$ non debere esse minorem a: sed suprà demonstravimus non debere esse maiorem? ergò æqualis erit: quod à multis demonstratum est, novissimè verò, simplicissima, atque omnium elegantissima methodo(a) ab Antonio Monfortio, Viro omnium virtutum genere ornatissimo, nullique in Mathematicis secundo; à quo brevi, Deo favente, omnibus numeris absolutissimã Astronomiam expectamus. Idem omnino accidit si curva ADGV fuerit parabola, aut tertii, aut quarti generis, & ita deinceps. Quare facillimum erit, sequentem hunc canonem formare.

Fiat prima positio sub una ignota, formeturque maximum; tum secunda fiat positio sub eadem primo loco posita ignota, & altera insuper ingnota, formeturque iterum maximum, fiat inter hæc duo producta adæquatio; atque eæ deindè quantitates expungantur, in quibus ignota secunda ad quadratum, vel ad altiorem potestatem ascendit. Item ea, quæ se mutuò tollunt; tum fiat di-

di-

(a) *In ingeniosissimo tract. de probl. determ.*

visio, tam per primam, quam secundam ignotam, dum fieri potest, habebiturque æquatio inter datam quantitatem, atque ignotam. Sit exempli gratia data AV, quam dicamus a; ita in puncto R secanda, ut rectangulum sub segmentis, sit omnium maximum. Ponamus AR esse x. ergo RV erit $a-x$ maximum erit $ax-xx$. Rursus ponatur AR $x+y$; RV erit $a-x-y$. Maximum verò erit $ax+ay-xx-2xy-yy$. Sic facta adæquatione, ablatisque auferendis, quantitatibus videlicet $ax-xx$ & yy. habebitur $ay-2xy \propto 0$, vel $ay \propto 2xy$ fiat divisio per y; & exurget $a \propto 2x$. quod ab Euclide, & aliis sexcentis demonstratum est. Hæc autem ipsissima methodus est, quam nobis tradidit Fermatius, à quo quidem alia ratione inveniri potuit, ut etiam demonstrare possem, sed vereor, ne te nimia molestia afficerem.

Quid verò dicam de constructione æquationum, in quibus una ignota reperitur, quæ quidem facillimè jam cõstrui possunt harum curvarum ope, cujusque eæ dimensionis fuerint? Equidem non me latet, multos de his verba fecisse; quia verò his curvis ad illarum constructionem uti coacti fuere, nec quomodò hæ describi possent demonstrarunt, dicendum absque iniuria est, quæcunque hactenus dicta fuere, manca, atque imperfecta fuisse: nunc autem eò reducta res est, ut quicquid sub geometriam cadit enodari, atque resolui possit, non secus, ac æquicrure triangulum ab Euclide constructum est.

Si enim verbi gratia proponantur inveniendæ quatuor mediæ continuè proportionales inter duas datas, quarum primam vocemus a. extremam autem b, id facillimè absolui potest, quemadmodum inter duas datas una proportionalis inveniri potest. Ducta enim qualibet recta, ut AE fig. 4. vertice A, parametro recta, quam vocavi b; axe verò AE secunda parabola describatur ADQ. Tum ex puncto A ducatur recta AB ipsi AE ad angulos rectos; si tamen AE sit axis parabolæ; sumta deindè AB æquali primæ ex datis, nempe a. ducatur ex puncto B recta BD parallela ipsi AE, atque ipsi AB æquali: tum asymptotis AB, AE ex puncto T Apolloniana

hy-

hyperbola ODO describatur; quæ quidem secundam parabolam ADS in aliquo puncto secabit. Secet itaque in D, atque ex puncto D ducta DE parallela ipsi AB, hæc erit prima ex quæsitis, nec demonstratione opus est, ita manifestè patet. Sed nec difficiliori ratione quælibet alia problemata cujuscũque ea sint generis, harum curvarum ope enodari possunt, quemadmodum ex allatis in sequẽtibus epistolis exemplis colligi potest.

Atquè hæc sunt, Dux Excellentissime, quæ exiguo temporis intervallo de harum curvarum ortu, atquè in plano descriptione concinnare potui, ne vacuus ad Te accederem, utquè magis perspectam haberes animi mei propensionem, atque obsequium. Reliquum est, ut Te etiam, atque etiam rogem, ut pro Tua in omnes, sed in eos præcipuè, qui his scientiis addicti sunt humanitate hilari hæc vultu suscipias; quanquam enim nihil, quod à te legatur dignum contineãt; hoc certè ipsis boni inest, quòd ea mihi inventa sunt dum otio affluo, quod mihi facit Illustrissimus, & Excellentissimus Dominus meus D. Hyeronimus Cabanilius, qui Tibi nõ solum arcto sanguinis vinculo, sed & Theseæ amicitiæ necessitudine coniunctissimus est: Quarè hæc spernenda Tibi non sunt, utpotè quæ ad Propinquo, & Amico Tuo proveniunt; mihi verò, quia Te, Eundemque summo amore observo, & colo, da, atque largire hoc, ut merear in tuorum numerum recipi; id enim si mihi assequi contigerit sublimi feriam sidera vertice. Vale, maximum Italiæ Decus, ac Splendor literarumque omnium dulce Præsidium. Ex S. Marci Oppido. XVII. Kalend. Sext.

EPISTOLA
SECVNDA

Ad Illustriss. & Ampliss. Virum Dominum

D. DIDACVM

VINCENTIVM A VIDANIA,

Regii Sacelli Præsulem, Gimnasii Neapolitani Præfectum, Regiarum Ecclesiarum S. Nicolai in Pargoleto, & in Bucisano Abbatem Catholico Monarchæ à Consiliis in supremo S. Inquisitionis Hispaniarum senatu, Generalem Visitatorem siculi Tribunalis Fidei, &c. in qua de genesi, atque plano descriptione infinitarum hyperbolarum, atque Ellipsium agitur.

Illustriss. atque Ampliss. Viro D.

D. DIDACO VINCENTIO
A VIDANIA

Regii Sacelli Præsuli, & Gymnasii Neapolitani Præfecto, &c.

BARTHOLOMÆUS INTIERI S.P.D.

CUr Tibi, Vir Amplissime, hæc mittam, quæ paucis ab hinc diebus reperire mihi contigit, multæ quidem, eæque non levis momenti causæ sunt. Assidua cura, atque diligentia, quam in scientiis omnibus promovẽdis adhibes, multi apud me ponderis fuere. Vna eorum omnium, qui literarum ornamento fulgent, vox, quæ Te supra æthera extollit, me maximè movit. Impulere Maximorum Virorum exempla, qui Tibi labores suos, queis æternam sibi nominis famam adepti sunt, dicarunt, sacraruntque; quemadmodum factum videmus ab omni scientiarum genere ornatissimo Dominico Aulisio, & sexcentis aliis, quos hic recensere longum esset. Nec tamen id facio, ut in horum Virorum numerum referri præsumam; sed ut cuicumque notum, perspectumque sit, me nulli in Te amando, atque observando manus dare. Coëgit deniquè me, ut verum fatear, id, quod quiſque novit, Tua videlicet hæc eſſe, ſi quid boni continent, quæ Tibi non offero, ſed reſtituo potius: Tuo enim juſſu, Tuiſque auſpiciis inventa fuere; undè æquo jure nulli, niſi Tibi dicanda erant. Etenim cum noviſſimè maximo ſanè Mathematicarũ, atque adeò ſcientiarũ omniũ bono de nova, atq; optima in his diſciplinis inſtituendæ Iuventutis ratione maxima, ſicut in cæteris omnibus Tibi mos eſt, animi attentione, atque vigilantia curas; quicumque Matheſi operam dat, ut Tibi morem gerat, utque coram Te, atque Illuſtriſſimo Senatu ſui ſpecimen præbeat, poſſitne inſtituendæ Iuventutis munus obire, majore animi contentione in hæc ſtudia incumbit; ipſe ex iis unus, dum Carteſianam Geometriam, quam explanandam juſſiſti, paulò attentius mentis oculis inſpicio, in hæc incidi, quæ ex Te emanaſſe nullus, ut reor, inficias ibit. Ideò autem Typis hæc eadem committere decrevi, cum, ut quãtũ pro mea virili valeo Geometriæ ſtudioſis gratũ facerem, atque aditum ad majora patefacerem, tum, ut ea præſtarem, quæ Tibi pollicitus ſum, videlicet, ut Te coram, Illuſtriſſimoque Senatu de Geometria verba facerem; ex his enim colligere quiſque poterit, me non temerè in arenam deſcendiſſe; dum non ſolum difficillima, quæ communi omniũ cõſenſu in Carteſiana Geometria sũt, explicanda ſuſcepi, ac de quibus ne ullum quidem verbum ab iis factum eſt, qui in eandem commentaria edidere; ſed & ea addidi, quibus manifeſtè apparet, quomodò longè ulterius eadem Geometria promoveri poſſit; ita ut dicere non verear, multa hoc ſæculo detegi poſſe, quæ Priſcis ignota fuere; modò omnes, quibus mecum in eodem ſtadio currendum eſt, tantundem, ac ego incrementi huic ſcientiæ attulerint; quarè eos enixè rogo, atque obteſtor, ne ea, quæ ab ipſis inventa, atque excogitata fuere, ſepulta apud ſe jacere patiantur, ſed in omnium commodum, atque utilitatem publicæ luci tradant: ſic enim fiet, ut & majorem ſibi gloriam comparent, maturiuſque de iis judicium ferre valeant, quibus hoc onus incum-

bit,

bit; difficile enim est de his disciplinis judicare, nisi prius oculis subiiciantur. Sed, ut mentem meam accipias paucis hic exponam, de quibus disserendum mihi est.

Cum non multo ab hinc tempore invenire mihi cōtigisset methodum describendi parabolas, quæ magis, magisque in infinitum se excedunt, idque tanta, ut puto, facilitate, ut nihil penitus intersit inter circuli, & illarum cujuslibet descriptionem; cumque animadverterem harum curvarum contemplationem, cognitionemque plurimum rebus Geometricis conducere, quemadmodum ex paucis iis, quæ in prima epistola demonstrata sunt, facile est colligere, totus in hoc deindè esse cæpi, ut & hyperbolarũ, quæ Apollonianã, sivè planam hyperbolã consequuntur, genesim, atque in plano descriptionem investigarem: putabam enim, non ingratum, nec iniucundum Geometris præstiturum, si eos ad harum curvarum contemplationem, ex qua uberrimi fructus colligi possunt, detecta via, invitarem: quoniam verò in describendis in plano parabolis, quæ se magis, magisque in infinitum excedunt rectam inisse viam mihi, ni fallor, contigit (a), ideò, non sine ingenti animi mei voluptate, statim sese etiam mihi obtulit facillima methodus, qua & hyperbolæ magis, magisque in infinitum se excedentes in plano describi possunt, earumque præcipuæ proprietates eadem descriptione erui; quod multò quidem mihi jucundius accidit, quia ansa mihi dari cognoscebam, qua animum meum Tibi aperirem, qui Te unum ob egregias animi Tui dotes veneratur, & colit.

Primò itaquè planæ hyperbolæ descriptionem aggrediar, deindè verò cæterarum, id autem simplicissimo ordine. Demonstrationes verò afferam Veterum Geometrarum more, nec tamen si Tibi magis Algebra arrideat, Algebricas prætermittam. Postremò autem pauca afferam de iis curvis, quæ circulum, atque ellipsim excedunt. En autem quomodò planæ,

(a) *Vide pr. Epistolam.*

sive Primæ hyperbolæ (ita deinceps appellare libet Apollonianam hyperbolam) descriptionem facillimè perago.

In figura prima hujus secundæ Epistolæ, sint rectæ FB, KL, sese in puncto A ad quoslibet angulos intersecantes; sumtoque in recta LAK quolibet puncto, ut K, ducatur ex eodem recta KC parallela ipsi AB. Intelligatur deinde recta CED indefinita ad partes D semper sibi ipsi, & rectæ KAL parallela moveri, ita ut ejus punctum C maneat semper in recta KC; hoc autem motu secum ducat rectam AG circulariter mobilem in puncto A, ita ut semper transeat per datum punctum G. In recta autem AB indefinitè producta ad partes B data recta constituatur EB, quæ liberè per eandem AB excurrere possit, ita tamen ut semper in illa applicata maneat. Hãc autẽ EB movere faciat recta CED, ita ut altero sui puncto E hæreat semper in recta CED, velut in figura apparet. In reliquo verò extremo sui puncto B recta BD indefinita ad partes D constituatur, circulariter in eodem puncto B mobilis, quæ quidem BD ita moveri concipiatur, ut semper parallela maneat rectæ AC. Hæc igitur curva BD rectam CED in aliquo puncto intersecabit, ut D. Dico ex hac intersectione curvam DO generari, quæ hujusmodi pollebit proprietate, ut sumto in ipsa quolibet puncto, velut D, ductaque DE parallela AL, ipsique AB occurrente in E, rectangulum, quod cõtinetur sub rectis AE, ED, æquetur dato rectangulo; ei videlicet, quod continetur sub datis CE, EB. Sumto quippe in curva hac ratione descripta quolibet puncto, ut D, constitutisque rectis CD, CA, EB, BD in ea statione, uti fuere, cum ipsarum motu, atque intersectione descriptum est punctum D (ne verò eadem sæpius repetendo aures Tibi obtundam; id semper fieri intelligatur, quoties opus erit ad aliquã demonstrationem concinnandam) quia itaquè AC, BD parallelæ sunt, similia erunt triangula BED, CAE (a); quarè ita erit BE, ad ED, ut AE ad EC; ergo rectangulum BEC, quod

(a) *Ex hyp. 29. pr. & 4. sex.*

quod est datum, æquatur rectangulo AED (a). Cumque id semper eveniat, ubicumque assumtum fuerit punctum D; patet, quod erat demonstrandum.

Atque ex hac curvæ proprietate manifestè apparet, hanc eandem esse, quæ ab *Apollonio* hyperbolæ nomine nuncupatur, rectas verò AB, AL easdem, quæ *Asymptoti*; Punctum autem *A*, centrum hujus sectionis. Hyperbolæ autem potentiam quadratum æquale dato rectãgulo CED. Quod verò simplicissima, & maximè hyperbolæ genesi consona sit hæc methodus, vel ex eo patet, quod ex ipsa descriptione atque in plano generatione, ultro se prodit præcipua ejusdem curvæ proprietas, ipsiusque demonstratio, tanta quidem facilitate, ut pro certo habeam, nullam excogitari posse, quæ cum hac elegãtia comparari possit. Accedit etiam, quod unico, & simplicissimo motu oppositas etiam sectiones (ut verbis usu receptis utar) describere facillimum erit: sumta enim AL æquali AK, si ex eodem puncto L recta LI agatur parallela rectæ FAB; recta autem CA usque ad I producta, dum in puncto A rotatur, rectam IGH indefinitam ad partes H movere concipiatur ita, ut eadem IGH semper sibi ipsi, ac rectæ KAL parallela existat, quæque etiam dato sui puncto I, in quo semper reperiri debet recta C*AI*, maneat in recta IL; motu autem suo movere etiam faciat datã rectam GF æqualem datæ EB, quæ quidem GF in recta FAB applicata semper maneat, quemadmodum suprà de recta EB dictum est, atque altero sui puncto G hæreat perpetuò in recta IGH; in reliquo verò extremo sui puncto F infixam habeat rectam FH indefinitam ad partes H, quæ etiam circulariter in eodem puncto mobilis sit, perpetuòque parallela existat rectæ IAC: hæc itaque recta FH rectam IGH in aliquo puncto intersecabit, quæ quidem intersectio curvam HO describet, quæ opposita hyperbola erit curvæ modò genitæ DO; quemadmodum manifestè apparet. Hinc facillimè etiam colligi po-

(a) 16. *sex.*

poteſt; curvas hac ratione genitas magis, magiſque ad utramque aſymptotum AB, AL, vel AK, AG accedere, numquam tamen ad ipſa pervenire. Item rectas, quæ per centrum A tranſeuntes in oppoſitis hyperbolis terminantur bifariam in odem centro dividi, quemadmodum in recta HAD demonſtrari poteſt. Item quomodo datis quibuslibet aſymptotis AE, AL, & punctum intra ipſos, ut D, hyperbola deſcribi poſſit per datum punctum tranſiens; quæ quidem omnia non ſine longa, molœſtaque propoſitionum ſerie ab Apollonio, & cæteris demonſtrata ſunt. Tantæ molis eſt, rectã, ſimpliciſſimamque in Mathematicis inire viam; quæ ſi priſcis illis Geometris in aperto fuiſſet, ulteriùs ſectionum conicarum doctrinam promoviſſent, nec ſolum in hyperbolæ, Parabolæ, atque Ellipſis contemplatione perſtitiſſent, ſed ad cæteras curvas conſiderandas, atque explanandas provecti perfectiorem Geometriam non ſine magno laborum, molœſtiarumque, quæ nos manent, compendio tradidiſſent: methadus enim ſupra expoſita, rectà ad alias hyperbolas detegendas nos ducit, ut mox demonſtrabo: quod an aſſequi poſſibile ſit, ex illa conorum, vel aliorum ſolidorum ſectione, nec ſcio, nec intelligo: videant qui plus otii, quam ego, nacti ſunt.

Sed antequã ad cæteras hyperbolas deſcribẽdas accedam, operæ pretium duxi, demonſtrare quomodo ex motu rectæ CE, ſivè AC fieri poſſit, ut BD, quæ infixa intelligitur in pũcto B, ita circa illud rotari queat, ut ſemper maneat parallela rectæ BD; ita enim fiet, ut magis pateat hujus methodi facilitas, atque elegantia, utque ad praxim revocari poſſit, ſi cui ſorte libeat.

In figura itaque ſecunda rectæ AC, CED, BD, EB eodem ut ſupra, motu fieri debeant, ut ubicumque reperiatur CE, recta AC, tranſeat ſemper per ipſius punctum C, BD verò ſemper per punctum B tranſiens parallela eſſe debeat rectæ AC, & reliqua, ut ſupra. Intelligatur recta CED indefinita ad partes D pertuſa in extremo ſui puncto C, ut AC liberè

in

in puncto C excurrere possit, ita eodem sui puncto C applicata esse in recta KC, ut dũ ipsa à recta AC circulariter mobili in pũcto A moveri cogitur, vel ipsa se movet, sẽper eosdẽ angulos cũ KC faciat, hoc est, sẽper sibi ipsi, vel rectæ KAL parallela existat; recta autem data EB fixa sit in pũcto E rectæ CD, ut excurrente CD ad partes S, & EB ad easdem partes in recta AB tendat, &c. At recta AC infixam stabilemque habeat in puncto A rectam AH indefinitam ad partes H, angulus vero HAC æquetur angulo KAB. Item pertusa intelligatur in in puncto *B* recta *B*E, ita ut per ipsum trãsiens BD liberè etiam excurrat, atque eadem B*D*H ita annexa sit rectæ AH, ut cum ipsa semper faciat angulum BHA æqualem angulo CAH, atque etiam in ipsa liberè excurrere possit. Fiet itaque, ut dum recta AC circulariter in puncto *A* movetur, rectæ CD, EB, B*D* talem perpetuò positionem habeant, ut AC semper transeat per punctum C, EB, maneat applicata in recta AB, B*D* transeat per punctum B, atque insuper parallela rectæ AC, cum angulus BHA æquetur angulo CAH; atque adeò unico motu rectæ CA, vel CF, non solum propositam curvam, sed & oppositas etiam describere facillimum erit.

Quoniam vero in sequentibus sæpissimè rectarum CD, DB, EB, KC, nec non puncti A, mentio facienda est, ideò ne Tibi nimiæ molœstiæ sim, his nominibus designabo, atque rectam GE*D* vocabo DESCRIBENTEM. *D*B autem EFFICIENTEM: EB verò INTERVALLVM. KC, sivè recta, sivè curva fuerit DIRECTRICEM. At punctum A, POLVS denuncupabitur. His verò præmissis ad secũdæ hyperbolæ descriptionem venio.

Secunda hyperbola illa est, in qua solidum sub quadrato AE in ED (vide figuram primam) æquatur dato solido, sivè illa est secunda hyperbola, in qua data recta eandem habet proportionem ad eam, quæ ex quolibet hyperbolæ puncto parallela uni ex asymptotis ducitur, atque alteri asymptoto terminatur, velut DE, ut quadratum illius, quæ inter

cen-

centrum, & modò ductam intercipitur, ut *A*E, ad datum quadratum. Quod verò hæc secunda hyperbola dicenda sit, hinc patet. Prima, sive *A*polloniana hyperbola illa est, in qua data recta eandem habet proportionem ad DE, ut intercæpta AE ad aliam datam. Quoniam verò post latus quadratum subsequitur, ideò & post primam hyperbolam illa subsequetur, in qua data recta eandem habebit proportionem ad DE, quam applicatam vocabo, ut intercæptæ *A*E quadratum ad datum quadratum; ac propterèa illa secunda dicenda est, sivè cubica. Similiter tertia, sivè quadratoquadratica hyperbola illa esse dicetur, in qua ita est data recta ad applicatam DE, ut intercæptæ AE cubus ad datum cubum; & ita deinceps in aliis altioribus. Sed ne putes, Vir amplissime, multis me expositurum, quomodò secunda, & cæteræ deinceps hyperbolæ describendæ in plano sint; paucis enim me expediam; etenim nil aliud est faciendum, quàm Directricem AC immutare (vide fig. 1. & 3.) & modò descriptam primam hyperbolam adhibere, cujus asymptoti sint *A*K, AE, centrum verò A, potentia autem quadratum quodcumque, videlicet, quod sit à recta data E*B*; si enim Polo A, *De*scribens CED per hanc *D*irectricem incedere intelligatur, motu autem tuo movere faciat Efficientem *DB*, atque intervallum BE, ex intersectione Describentis C*D*, Efficientisque B*D* curva DO describetur, quæ secunda hyperbola erit, cujus asymptoti erunt rectæ AL, AB, hoc est asymptoti primæ hyperbolæ *D*irectricis, centrum verò A: præcipua verò proprietas erit, ut solidum sub quadrato cujuscumque intercæptæ *A*E in applicatam ED æquetur solido, quod continetur sub Directricis potentia in Intervallum BE. Hæc autem pro hujus curvæ genesi, atque descriptione satis dicta sint, nunc demonstrationem paucioribus afferam. Cõstructis omnibus, ut in figura tertia apparet, quadratum AE ad rectangulum AEC eandem habet rationem, ac AE ad EC (*a*): sed rectangu-

(a) *Prima sex.*

gulum *A*EG ex proprietate hyperbolæ æquatur ejusdem potentiæ (*a*); ergo ita AE ad EC, vel ita EB ad ED (*b*) ut quadratum AE ad potentiam hyperbolæ Directricis; ergo solidum sub quadrato AE in rectam ED æquatur solido sub potentia hyperbolæ in Intervallum (*c*). Q. E. D. Atque hæc demonstratio, præterquam quod elegantissima mihi videtur, locum etiam habet in altioribus hyperbolis, quemadmodum in sequentibus manifestum fiet. *A*beant ergo *A*polloniani illi Coni, dum tanta elegantia, atque facilitate, & quæ illi faciunt, & lōgè majora hæc methodus præstat. Quod autem rectæ AL, *A*B sint hujus secundæ hyperbolæ asymptoti, hinc patet; quia sumtis in curva duobus punctis D, *d*, ductisque rectis, ut in figura apparet factum; ita est AE quadratum ad *Ae* quadratum, ut *ed* ad ED; sed recta AE minor est recta *Ae*; ergò & *ed* minor erit ED; undè colligitur curva Dd. O magis semper, magisque accedere ad rectam AB*e*. Similiter demonstrari potest semper etiam accedere ad rectam *A*L: Notandum tamen est, hanc curvam non æquè ad asymptotos accedere; nam sumtis duobus punctis æquè remotis à centro *A*, ut *e*, L ductisque, *ed* parallela asymptoto *A*L, LO autē asymptoto AE, major erit LO ipsa *ed*, ut in apposita figura videre est; quod multi non cognoverunt, qui harum curvarum genesim ignorantes, eisdem pro problematum constructione usi sunt, quemadmodum ex figura, quam his curvis tribuerunt, colligere est. Similiter etiam patet, punctum A centrum vocari posse.

Hæc autem secunda, sicut & cæteræ deinceps hyperbolæ oppositas etiam habent, quæ pari facilitate, ac in prima factum est describi possunt: descripta quippè in angulo GAL hyperbola IO, opposita primæ hyperbolæ CO; si recta CA usque ad oppositam in I producatur ita, ut motu tuo movere

F etiam.

(a) *Ex iis, quæ supra dicta sunt.* (b) 29. *pr.* & 4. *sex.* (c) 34. *Und.* (d) *ex modò demonstratis.*

etiam faciat rectam IGH parallelam asymptoto LK, quæque Describentis officium subeat; hæc autem movere faciat Intervallum GF æquale Intervallo BE, nec non Efficientem FH, curva HO, quæ ex intersectione Describentis, Efficientisque producitur opposita secunda erit hyperbolæ DO, cujus quidem proprietas erit, ut solidum sub quadrato intercæptæ GA in applicatam GH æquetur solido, quod fit ex potentia primæ hyperbolæ Directricis in Intervallum GF, quod quidem demonstratione non eget. Sed jam ad tertiæ hyperbolæ descriptionem accedamus.

Tertia autem hyperbola ex iis, quæ supra diximus, illa est, in qua planoplanū sub cubo intercæptæ in applicata æquatur planoplano dato; vel in qua data recta eandem habet proportionem ad applicatam, quæ, in eadem figura tertia, per rectam DE designatur, ut intercæptæ AE cubus ad datum cubum. Hujusmodi autem curva hac ratione describitur. In eadem fig. 3. iisdem, ut supra, positis, Directrix CO intelligatur esse secūda hyperbola modò genita, cujus asymptoti sint AB, AK, centrum A: solidum autem sub quadrato intercæptæ AE in EC æquetur dato solido: curva enim DO, quæ ex intersectione Describentis CD, atque Efficientis BD producitur tertia hyperbola erit, cujus quidem centrum erit Polus A, asymptoti autem AB, AL; cujusque hæc erit proprietas, ut planoplanum sub cubo AE in ED æquetur planoplano sub potentia hyperbolæ Directricis CO in datam rectam, sivè Intervallum EB: sumto enim in ipsa quolibet puncto, ut D; omnibusque constructis, ut in figura apparet, cubus AE ad solidum sub quadrato eiusdem AE in EC, hoc est ad potentiam hyperbolæ CO (a) ut AE ad EC, vel ut BE ad ED, (b); ergo & ut BE, sivè data recta ad applicatam DE, ita cubus AE ad potentiam hyperbolæ CO, sivè ad datum solidum (c); ergò & planoplanum sub cubo AE in rectam ED

(a) *Ex propr. sec. Hyperb.* (b) *29. pr. & 4. sex.*
(c) *4. Quinti.*

ED æquabitur dato planoplano. Q. E. D.

At neque hic immorabor in demonstrando, quomodo oppositam huius hyperbolæ describere possibile sit, id enim tempus terere esset, cum manifestè id per se pateat, supposita Directrice IO non prima, sed secunda hyperbola, ut supra factum est; quarè quartæ hyperbolæ descriptionem aggrediar.

Quarta autem hyperbola, ex supra allatis, illa est, in qua plano solidum sub quadratoquadrato interceptæ *A*E in applicatam ED æquatur dato planosolido; vel in qua ita est data recta ad applicatam ED, ut quadratoquadratum interceptæ AE ad datum quadratoquadratum. Hæc autem curva ab hac præcipua proprietate quadratosolida etiam vocari potest. Ita autem facillimè describitur. In eadem figura 3. Omnibus etiam, ut supra positis, Directrix CO sit tertia hyperbola, cujus asymptoti sint AB, AK, centrum verò A: curva siquidem DO, quæ Describente CD, Efficiente BD, Intervallo EB, Polo autem A describitur quarta, sivè quadratoquadratica erit, cujus quidem centrum erit A, asymptoti autem AB, AL, planosolidum verò, quod continetur sub quadratoquadrato AE in rectam ED æquabitur planosolido sub potentia hyperbolæ Directricis CO in Intervallum EB; etenim quadratoquadratum à recta AE eandem habet proportionem ad planoplanum sub cubo A*E* in rectam CE, hoc est ad potentiam hyperbolæ CO (*a*), ut *A*E ad EC; vel ut E*B* ad ED (*b*): ergo & ut EB ad ED, ita quadratoquadratum AE ad potentiam hyperbolæ CO(*c*); ergò planosolidum sub quadratoquadrato AE in ED æquatur dato planosolido. Q. E. D.

Opposita verò hujus hyperbolæ faciliter etiam describi potest, si ponamus curvam IO tertiam hyperbolam esse, velut in cæteris supra factum est.

(a) *Ex proprietate Tertiæ hyperbolæ.* (b) 29.*pr.* & 4.*sex.* (c) 4.*Quinti.*

Atque hæc eſt methodus, qua utor in deſcribendis his curvis, cuius quidem beneficio omnes hyperbolæ, quas quis imaginatus fuerit deſcribi poſſunt; ſicut enim Primam Secundam, Tertiam, & Quartam deſcripſi, ita & Decimam, Centeſimamque deſcribere non difficile erit, modò ea adhibeatur Directrix, quæ proximè deſcribēdam anteit; quemadmodum ex modò deſignatis curvis colligitur. Quarè plurium deſcriptionem in medium non afferam, ne Te molœſtia, potiuſquam jucunditate afficiam; ſatis enim ſuperque huius methodi præſtantia uſquè adhuc patuit, clariuſque in ſequentibus patebit, cum aliqua de locorum compoſitione tradam.

Poſſem quoquè plures alios modos adducere, quibus hæ curvæ deſcribi poſſunt, qui quidem plurimi ſunt. Verum quià nullus ita ſimplex, faciliſque mihi viſus eſt, quam quo ſupra uſus ſum; ideò omnibus prætermiſſis, hunc ſolum breviter exponam, qui originem à Parabola trahit; fieri ſiquidem poteſt, ut & huius contemplatio aliquid etiam utilitatis afferat.

In figura itaquè quarta vertice A, diametro AEB, parametro data EB Parabola prima deſcribatur AC ita, ut applicatæ ad diametrum AE ſint rectæ omnes parallelæ rectæ AK, quarum unam recta CE repræſentat: hæc autem applicata CE moveri concipiatur ſemper ſibi ipſi parallela ita, ut certo ſui puncto C maneat ſemper in Parabola, ſecumque ducat rectam AC circulariter mobilem in vertice A; movere item applicata DC faciat rectam datam EB ita, ut ſemper applicata maneat in parabolæ diametro, atque in extremo ſui puncto B rectam habeat BD indefinitam ad partes D, quæ circulariter moveri poſſit in eodem puncto B; hæc autem BD parallela ſemper exiſtat rectæ AC; Vno verbo: AC parabola ſit Directrix, CDE Deſcribens, BD Efficiens, EB Intervallum, vertex A Polus, ut ſupra dictum eſt; Dico ex interſectione Efficientis, Deſcribentiſque curvam DO generari, quæ ſecunda hyperbola erit; cuius aſym-

ptoti

ptoti, recta AL parabolam in vertice A tangens, & AB diameter; centrum verò A; cujusque hæc erit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto, ut D, ductaque DE parallela asymptoto AL, solidum sub recta AE in quadratum ED æquetur dato solido, quod fit ex quadrato Intervalli EB in parametrum parabolæ; vel ut parabolæ parameter ita sit ad EA, quemadmodum quadratum ED ad datum quadratum Intervalli. Quoniam ex hypoth: similia sunt triangula ACE, DEB(*a*), erit ut quadratum CE, sivè rectangulum sub A*E*, & parametro ad quadratum A*E*, hoc est ita parameter ad A*E*, ut quadratum D*E* ad quadratum Intervalli B*E* (*b*); & patent omnia, quæ demonstranda erant.

Opposita verò hyperbola hujus ita describi potest. Eodem vertice A, diametro verò eadē A*E* ad partes G producta, parametroque eadem data *E*B, parabola prima describatur AI, quam pro Directrice assumemus ita, ut Describens sit IGH applicata ad diametrum *A*G, necnon parallela ipsi CD; Efficiens verò sit FH, Intervallum FG æquale *E*B; nam curva HO, quæ oritur ex intersectione Efficientis, Describentisque opposita erit.

Similiter si tertiam hyperbolam describere velimus. Omnibus, ut supra, positis, pro prima parabola AC Directrice, secunda constituenda est ita, ut cubus cujuscumque ex applicatis æquatur solido sub quadrato intercæptæ in parametrum(*c*). Dico curvam DO tertiam hyperbolam esse, in qua secūdæ parabolæ AC parameter eandem habebit proportionem ad A*E*, ut cubus *E*D ad cubum Intervalli *EB*. Demonstratio verò eodem modo procedit; etenim cum similia sint triangula AC*E*, D*E*B, erit cubus C*E* ad cubum AE; sivè solidum sub quadrato AE, & parametro ad cubum AE; vel ita parameter ad A*E*, ut cubus *DE* ad cubum Intervalli *E*B(*d*), & patet propositum. Quod

(a) 19.*pr.&* 4.*sex.* (b) 1.*&* 20.*sex,* *&* 11.*lib.pr.Apoll.*
(c) *Vide* 1.*epist.* (d) 37.*Vnd.& per ea, quæ in* 1.*epist. demonstrata sunt.*

Quod si parabola AC tertia, supra descripta in prima epistola fuerit, quarta hyperbola orietur, & ita deinceps idem quoquè dicendum de oppositarum descriptione: quarè in his amplius non immorabor.

Hoc autem silentio præterire nolo, cognita harum curvarum genesi, præcipuaque proprietate reliquas quidem proprietates facillimè erui posse; ut ab aliis in conicis sectionibus factum est, idque demonstrare nunc Tibi possem; sed vereor, ne in magnum volumen abeat epistola, plurima enim essent, quæ demonstranda mihi forent: hoc autem, tanquam specimen adducam, ut magis eorum, quæ dixi veritas constet, utque alios ad harum contemplationem alliciam, rectas omnes per centrum quarumlibet harum curvarum transeuntes, atque utrinque in hyperbolis terminatas bifariam in eodem centro dividi.

Item duobus punctis in qualibet harum hyperbolarum sumtis, ut D, *d*. fig.3. ductisque rectis ab his D*E*, *de* parallelis asymptoto AL, ita esse quadratum A*E* ad quad: *Ae*, ut recta *ed* ad rectam D*E*.

Patet insuper fig.5. sumtis duobus punctis C, B in secunda hyperbola CP*D*, cujus asymptoti sint AG, *A*H, atque ex his ductis binis rectis sibi invicē parallelis GCPH, E*B*DF occurrentibus hyperbolæ in punctis P, D, solidum, quod continetur sub recta CG in quad: GH æquari solido sub recta EB in quad: BF. Intellige autem talem esse hanc secundam hyperbolam, ut omnia solida, quæ sub quadrato cujuscumque AS in SP continentur æquentur potentiæ hyperbolæ. Quod si hyperbola PC illa fuerit, quam supra tertiam, sivè Quadratoquadraticam diximus, æquale erit planoplanum, quod continetur sub recta CG in cubum CH planoplano sub EB in cubum BF; idem in altioribus dicendum, modò quæ in Tertia de planoplanis, in Quarta de planosolidis, in Quinta de solidosolidis intelligantur, &c.

Manifestum insuper est, in eadem secunda hyperbola PC, si ducatur recta HPCG solidum quod continetur sub quadrato

drato CH in CG æquari solido, sub quadrato HP in PG: quod si data hyperbola Tertia fuerit, planoplanum quod cōtinetur sub recta GC in cubum CH æquabitur planoplano sub cubo HP in PG; idem in altioribus accidit.

E quibus, nifallor, deducitur, in secunda hyperbola PC ductam rectam *KLM*, quæ hyperbolam in puncto L contingat, atque utrinque in asymptotis terminetur, ita in puncto contactus L dividi, ut *LK* dimidium sit reliquæ LM, sivè tertia pars totius KM: si vero hyperbola PC tertia fuerit, recta *K*M, ita in puncto contactus L dividetur, ut *KL* sit quarta pars totius KM; si verò PC sit quarta, KL erit quinta pars totius KM, & ita deinceps.

Quod si in secunda hyperbola PC ducta recta KM utrinque in asymptotis terminata, ita ab hyperbola in puncto L dividatur, ut KL sit tertia pars totius *KM*; hæc recta hyperbolam in puncto L continget; idemque locum etiam habet in altioribus curvis.

Quæ autem de unica hyperbola usque adhuc dicta sunt eadem etiam in oppositis hyperbolis intelligenda, quemadmodum manifestè colligi potest.

Cæteræ autem harum curvarum proprietates eadem ratione erui possunt: quin & hoc maximum laboris compendium est, quòd detectis proprietatibus tertiæ hyperbolæ, aut etiam Parabolæ, eædem rectà ad cæterarum curvarum detegendas nos ducant. Quarè non parva rebus Geometricis fiet accessio, si quis omni studio in hoc incumbat, ut doctrinam sectionum conicarum ulterius ad has etiam curvas promoveat. In hoc verò summa animi contentione, Vir Amplissime, sedulam operam navabo, modò mihi vires, animumque addideris: id verò præstare potes, si facies, ut hæc ingrata Tibi non fuisse intelligam.

Sed jam aliqua de locorum compositione, quemadmodū, in prima epistola pollicitus sum, afferam; ut hinc pateat ex harum curvarum descriptione omnia ea loca composita fuisse, quorum æquationes duobus tantum terminis exprimunmuntur, vel quæ ad easdem reduci possunt: id autem si fecero, Cartesii voluntati morem gessero, qui postquam secundo suæ Geometriæ libro summam operam adhibuit in iis componendis, quæ planorum, solidorumque nomine veniunt, ex quo non paruã sibi gloriam comparavit, sui temporis Geometras hortatur ad altiorum locorum compositionem perficiendam(a). Et quoniam epistola prima omnia ea loca composui, quæ sunt ad parabolas, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum &c. æquantur solido sub parametro in quadratum intercæptæ; vel planoplano sub parametro in cubum intercæptæ &c. in tertia verò epistola de iis differere statui, quæ ad parabolas sunt alterius generis, in quibus videlicet cubi, vel quadratoquadrata applicatarum &c. æquantur solido sub quad: parametri in intercæptam, vel planoplano ex cubo parametri in intercæptam &c. ideò hic eorum compositionem aggrediar, quæ ad hyperbolas sunt, quorumque æquationes constitutivæ duobus terminis designantur, quorum unum binæ ignotæ, quomodolibet in se ductæ constituunt, reliquum verò data omnino quantitas.

Primus itaque locus, qui se nobis componendus præbet per hanc æquationem designãtur $xxy \infty a3$ (quantitates verò x, & y, indeterminatas intelligo; a, verò & quæ per similes literas designãtur, datas) & patet esse ad hyperbolam, quam supra secundam diximus. Componetur autem sic.

In figura tertia, ponamus A esse initium quantitatis indeterminatæ x; atque eadem quantitas x per rectam AB positione datam sese extendere intelligatur; quantitas autem y, supra hanc in dato angulo; puta AED, exurgere concipiatur. Ducta ex puncto A recta AL parallela ipsi ED; asymptotis AL, AB, potentia verò a_3; secunda hyperbola describatur OD; dico hanc curvam esse locum quæsitum. Sumto quippè in hac quolibet puncto, ut D, ductaque ED

paral-

(a) *Eipst.47.lib.3.*

parallela asymptoto AK, erit AE x, at ED y; Et quoniam ex proprietate huius hyperbolæ solidum sub quadrato AE in ED, hoc est xxy æquatur hyperbolæ potentiæ, quæ est a^3. ideò habebitur huiusmodi æquatio $xxy \infty a^3$; & patet propositum. Quod si habeatur æquatio $yyx \infty a^3$; facillimè etiam idem locus per hanc designatus ex iis, quæ supra tradita sunt, componetur.

Si verò æquatio, quæ locum designat, huiusmodi fuerit, $x^3y \infty a^4$. Expeditè etiam construi poterit adhibita curva hyperbolica, quam supra tertiam hyperbolam vocavi: (fig. 3.) si enim initium quantitatis x ponamus esse punctum A ita, ut eadem quantitas x per rectam AE se extendere intelligatur; at y, suprà hanc in dato angulo, puta AED, exurgat; centro A, asymptotis AE, AL tertia hyperbola DO methodo tradita describenda est ita, ut planoplanũ sub cubo AE in DE æquetur dato planoplano a^4; hæc enim erit locus quæsitus: sumto namquè in hac curva quolibet puncto, ut D, ductaque DE, quia AE est x, ED verò y, atque ex proprietate huius hyperb. planoplanum sub cubo AE in ED æquatur dato planoplano a^4. ideò habebitur huiusmodi æquatio $x^3y \infty a^4$. Q. E. D. Nec absimili ratione componetur locus per hanc æquationem expressus $x^3y \infty a^4$.

Si verò æquatio loci constitutiva ad quintam dimensionem assurgat, atquè his terminis notetur, $x^4y \infty a^5$. facillimè etiam hæc construi poterit; omnibus enim, ut supra, positis, ita ut punctum A sit initium quantitatis x, &c. centro A, asymptotis AL, AE hyperbolam quartam describere opus est, quæ locus erit quæsitus. Demonstratio autem, velut in aliis factum est, procedit. Idem ferè dicẽdum si æquatio fuerit $y^4x \infty a^5$.

Sed sub hoc genere hyperbolarum alia etiam cõsideranda venit, cuius quidem ope locus per hanc æquationem $x^3yy \infty a^5$ designatus componi potest. Describitur autem sic. In eadem fig. 3. circa asymptotos AE, AK secunda hyp. describatur CO, in qua solidum, quod continetur sub quadrato CE, in AE æquetur dato solido a^3. Directrice autem hac curva; Describente verò CED, Polo A, Intervallo EB, quod æquetur datæ quantitati a, Efficiente autem BD; curva describatur DO, dico hanc esse curvam quæsitam, cuius beneficio componetur locus per hanc æquationem designatus $x^3yy \infty a^5$. Si enim, ut suprà, AE dicemus x. ED vero y. Quoniam similia sunt triangula BED, AEC erit, BE ad ED, quemadmodum AE, ad EC, ergo EC erit xy, diu. per a. Quoniam autem solidum sub quadrato EC in AE, hoc est x^3yy, diu: per aa. Æquatur dato solido a^3. Ideò habebitur huiusmodi æquatio x^3yy. diu: per $aa \infty a^3$, vel facta congrua multiplicatione $x^3yy \infty a^5$. Et patet, quod erat ostendendum.

Loca autem, quorum æquationes ad sextam dimensionem assurgunt adeò faciliter componi possunt, ut explicatione penitus non egeant; quinta siquidem hyperbola tradita methodo descripta, propositum præstabit.

Sub septimo autem gradu plures loci componendi veniunt, atquè adeò plurium etiam hyperbolarum opus habemus. Sed huius loci $x^6y \infty a^7$. compositio ab iis, quæ supra dicta sunt, pendet, quemadmodum etiam si habeamus $y^6x \infty a^7$. quarè in his amplius non immorabor. Curva autem, quæ ad hunc locum componendum $x^5yy \infty a^7$. deservit, hac ratione in plano designatur. In eadem figura tertia centro A, asymptotis AE, AK hyperbola describatur CO; in qua planosolidum sub quadrato CE in cubũ AE æquetur dato planosolido a_5. Directrice deindè hac curva, Describente verò CED, Polo A, Intervallo EB, sive a, Efficiente BD curva describatur DO. Dico hanc esse curvam quæsitam. Sumatur enim in ipsa quodlibet punctum, ut D. similia item erunt triangula AEC, DEB (a). Cumque AE sit x. ED y, at Intervallum EB a. erit EC xy. diu. per a. planosolidum verò sub quadrato EC in cubum AE, erit x^5yy diu. per aa. quod quidem cum æquari debeat dato planosolido, a^5ha-

(a) *Ex hip. 29. pr. & 4. sex.*

a^5, habebitur hujusmodi æquatio x^5yy. diu.per $aa \infty a^5$, & facta multiplicatione per aa. habebitur æquatio $x^5yy \infty a^7$, quod erat demonstrandum. Similiter sub hoc eodem genere curva cadit, cujus æquatio constitutiva per hos terminos exprimitur $x^4y^3 \infty a^7$; quæ etiam hoc modo in plano describi potest. Centro A, asymptotis iisdem rectis AK, AE curva hyperbolica describatur CO, hujus quidem proprietatis, ut planoplanum sub cubo EC in rectam AE æquetur dato planoplano a^4. Tum hac eadem Directrice, Describente verò, reliquisque, ut supra, hyperbola describatur DO, hæcque erit qualita, eodem quippè modo demonstrabitur EC fore xy. diu.per a, planoplanum verò sub cubo EC sive x^3y^3 diut per a^3, in $A\beta$ sive, x. hoc est x^4y^3. diu.per a^3. æquatur dato planoplano a^4; ergò habebitur hujusmodi æquatio x^4y^3. diu.per $a^3 \infty a^4$, & facta congrua multiplicatione per a^3, erit $x^4y^3 \infty a^7$, & patet quomodò, & hic alius locus componendus sit.

Atquè ex his omnibus manifestè apparet allatam methodum talem esse, qua simpliciorem inveniri posse non puto, dum tanta elegantia, atque facilitate omnes hæ curvæ, & &. miro quidem ordine describi possunt; quarè iterum affirmare audeo, solidorum contemplationem huic nostræ methodo omnino posthabendam: adduci quippè non possum, ut credam, fieri posse, ut ex aliqua sectione hæ eædem curvæ tam faciliter, atque eleganter describi possint.

Eadem ratione operandum est ad omnia ea loca componenda, quorum æquationes quibusque dimensionibus designantur. Quæ quidem omnia quantum Cartesianam Geometriam non modò illustrent, sed etiam promoveant, Tibi judicandum relinquo. At verò non solum allata methodo curvæ describi possunt, quarum ope ea loca componuntur, quorum æquationes postquam ad simplicissimas reductæ sunt, duobus tantum terminis exprimuntur; sed & alias insuper curvas in plano designare possumus, quarum beneficio omnia alia loca componere, pulcherrimaque insuper problemata enodare poterimus. Si enim, in figura quarta, curva AC, non parabola, sed prima hyperbola æquilatera esse ponatur, cujus transversa diameter AN, centrum verò G, vertex A, ita ut applicatæ ad diametrum AE sint rectæ omnes parallelæ ipsi AL, velut recta CE: hac autem curva, ceu Directrice utamur, in qua applicata CE Describens incedat; Polus autem sit vertex A, Intervallum autem ED data quælibet; Efficiens verò recta BD parallela semper rectæ AG; curva DO, quæ ex intersectione Efficientis BD, Describetisque CD describitur hyperbola erit, quæ sub eodem genere, ac secunda comprehendetur, cujus quidem asymptoti erunt AB, AL; cujusque hæc erit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto, velut D, ductaque DE parallela asymptoto AL, solidum, quod continetur sub quadrato applicatæ ED in intercæptam AE æquetur solido, quod continetur sub quadrato Intervalli BE in rectam NE diametrum videlicet transversam, una cum intercæpta AE. Quare hujus curvæ ope, & hic locus componi poterit $xyy \infty abb * bbx$. Si ponamus transversam diametrum AN esse, *a*. Intervallum autem *b*. indeterminata verò *AE* *x*. reliqua autem indeterminata *ED* *y*. sed & alterum exemplum adducere inutile nō erit ad locum explicandum, qui ab omnibus in secundo Geometriæ Cartesii libro difficillimus censetur.

In figura sexta circa asymptotos BC, BS prima hyperbola describatur GO, cujus potentia æquetur duplo quadrato a recta DC. Tum producta asymptoto BC usque ad A ita, ut *AB* æquetur rectæ datæ DC; Polo A, Directrice hyperbola GO, Describente verò recta G*D*F parallela asymptoto BS; Intervallo autem recta DC, atque Efficiente CF parallela rectæ AG, curva describatur FO. Dico hanc hyperbolam esse, quæ secūdi etiam generis erit, cujus quidem asymptoti erunt BC, *B*X, centrum verò B, cujusque hæc erit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto, ut F, ductaque F*D* parallela asymptoto *B*X, solidum sub quadrato BD in rectam *D*F, una cum solido sub tribus *A*B, BD, DF, æquetur duplo cubo *A*B,

vel

vel solido sub potentia hyperbolæ in datum Intervallum.

Quoniam enim ob similitudinem triangulorum CDF, ADC, ita est CD ad DF, ut AD ad DG (a) erit rectangulum GDG æquale renctangulo ADF (b); quòd si omnia hæc rectangula ducantur in BD, erit solidum sub tribus AD, BD, DF; vel solidum sub quadrato BD in DF, una cum solido sub tribus AB, BD, DF (c) æquale solido sub tribus DC, DG, DB; (d) vel solido sub potentia hyperbolæ Directricis in Intervallũ, vel duplo cubo à recta AB (e). Q. E. D.

Atque hæc etiam methodus in infinitum extendi potest. Si enim pro Directrice GO non prima, sed secunda hyperbola constituatur, ut solidum sub quadrato BD in DG æquetur dato solido, curva FO eadem ratione descripta talis erit naturæ, ut planoplanum sub cubo BD in DF, una cum planoplano sub quadrato BD in datam AB in DF, æquetur dato planoplano, quod producitur ex multiplicatione potentiæ hyperbolæ in Intervallum, idemque in altioribus dicendum, modò idoneæ potestates assumantur.

At ad secundi generis hyperbolam FO modò descriptam rediens dico, si in asymptoto BX assumatur recta BE æqualis datæ rectæ AB, atque ex puncto E ducatur recta HN parallela asymptoto BC, occurrens descriptæ hyperbolæ FO, in O, manifestum esse, solidum, quod continetur sub quadrato BD in DF æquari solido sub quadrato BD in DH, necnon solido sub eodem quadrato BD in HF (f); quarè cum ex modo demonstratis solidum sub quadrato BD in DF una cum solido sub tribus AB, BD, DF æquetur duplo cubo ex AB; erit etiam solidum sub quadrato BD in DH una cum solido sub eodem quadrato BD in HF, & solidum sub quadrato AB in BD una cum solido sub tribus AB, BD, HF (f) æquale duplo cubo ex AB. Quoniam verò si ab æqualibus æqualia aufe-

ran-

(a) Ex hyp. 29. pr. & 4. sex. (b) 16. sex. (c) pr. secund. (d) ex iis, quæ in pr. epist. demõstrata sunt. (e) ex hyp. (f) Pr. sex.

tãtur, quæ remanent, sunt æqualia: ideò si tam à solidis quæ supra, quã à duplo cubo rectæ AB, auferatur solidũ sub quadrato BD in DH una cũ solido sub quadrato AB in BD, erit residuũ, nẽpe solidũ sub quadrato BD in HF, unà cum solido sub tribus AB, BD, HF æquale duplo cubo sub AB — solido sub quadrato AB in BD — solido sub quadrato BD in DH. Sed solidum sub quadrato BD in HF, una cum solido sub tribus AB, BD, HF producitur multiplicatione rectarũ FH, BD, sivè FX, intellige FX parallelæ AB, & rectæ AD, sive FR. At duplus cubus ab AB, minus solido sub quadrato AB in BD, minus solido sub quadrato BD in DH producitur à tribus etiã rectis, data videlicet HD, sive AB, & recta ID, si ponemus IA æqualem AB, nec nõ recta MD, si ponemus BM æqualem AB, sivè à tribus rectis data DH, FP, FZ, modo HP, MZ, AR parallelas rectæ BX ponamus esse: ergo solidum quod à tribus FH, FX, FR æquatur solido, quod fit à tribus data videlicet recta EB, FP, FZ. His præmissis facile est problema enodare, quod Cartesius secundo suæ Geomet. libro insolutum reliquit; id verò hujusmodi est.

In figura sexta datis quatuor rectis lineis parallelis inter se PI, RA, XB, ZM, ita ut distantia inter has sit data, atque eadem; quinta autem KN easdem datas ad quoslibet angulos secante, puta rectos; oportet invenire punctum, ut F, à quo, ductis rectis perpendicularibus ad positione datas, ut FH, FR, FP, FZ, FX; solidum sub tribus FH, FX, FR æquatur solido sub reliquis duabus FP, FZ in quamlibet datam, puta EB, vel AB: & quia punctum F inveniendum unicum non est; ideò determinanda insuper proponitur linea, in qua hæc puncta reperiuntur.

Solvit hoc problema Cartesius, cum solidum ex tribus ductis ad tres parallelas æquatur solido, quod continetur sub reliquis duabus, quarum una cadit super quintam, & data quapiam linea; demonstravitque punctum quæsitum cadere in curva, quam ille motu parabolæ descripsit, quæque allatæ

majam

etiam methodo, & forsan facilius, describi potest. Verùm quando solidum continetur sub duabus ductis ad parallelas, & tertia, quæ cadit supra quintam, ut supra dictum est; aliter se res habet, quod & novit Cartesius; at curvam solutioni inservientem non tradidit; nisi tam obscurè, & breviter, ut manifestè appareat, nō omninò illi perspectam fuisse. Quotquot autem ipsius Geometriam explanare susceperūt, ne ullum quidem hac de re verbum fecerunt, in cæteris alioquin, quæ obscuritate non laborant, nimis multi. Quarè hunc locum inter cæteros explicandum suscepi; cùm enim difficillimus sit, non ingratum me facturum Matheseos amatoribus confido.

Sed hæc solutio ab iis, quæ dicta sunt erui potest, cum enim demonstratum sit (vide fig. 6.) solidum, quod continetur, sub duabus FX, FR, quæ cadunt super duas ex parallelis, & tertia FH, quæ cadit supra quintam positione datam, æquari solido, quod continetur sub duabus FP, FZ, quæ ducuntur ad reliquas duas ex parallelis in datam, quæ sit BE, patet punctum F esse unum ex quæsitis; curvam verò FO modò descriptam fore illam, in qua omnia puncta quæsita reperiuntur. Quod si distantia inter parallelas non sit eadem, quemadmodum modo assumta est, idem etiam accidit; sicut idem omninò accidit in Cartesii exemplo. Ab hujus verò demonstratione me nunc abstineo, non enim omnia dicere suscepi, cùm præcipuè non defuturi sint, quibus idem hic locus explanandus continget; à quibus majori elegantia, & doctrina illustrabitur.

Placuit autem, Vir Amplissime, demonstrationem hac de re texere veterum Geometrarum more, sepositis algebricis notis; non solum, ut iis etiam, qui Algebræ, quam Speciosam vocant, præcepta non callent, satisfacerem; sed ut hoc etiam palam fieret, methodum videlicet Syntheticam ab ipsa Analysi pendere, nec fieri posse, ut ad illam perveniatur, nisi hæc, velut Dux, aditum ad eandem patefaciat, & muniat: quarè & Analysim Algebricam ab iniuria, quam ei non-

nul-

nulli ex pseudogeometris nimis perfricatioris inferre conantur, vindicavi, dicentes ipsam in hoc deficere, quod imaginationi non serviat, unde putant non pejus in Mathesi peccari posse, quam si Geometrica problemata, quæ figuris explicari, atque oculis subjici possunt, methodo Algebricæ addicantur, & sub hoc quasi velamine in publicū prodeant. Omnes quippe demonstrationes, quæ hoc tractatu continentur, quæ quidem, & plurimæ, eæque non inelegantes sunt, atque à nullo adhuc excogitatæ, invenire mihi licuit Analysis vestigiis insistenti, idque tantillo temporis intervallo, quemadmodum spectatæ fidei Viri testari possunt. An verò id etiam præstare valuisset syntheticus Geometra videant, qui hæc maturè legerint, atque perpenderint.

Quod si Tibi, Vir humanissime, cui utraque methodus, seu potius quicquid scientiarum est patet, magis volupe erit, notis Algebricis uti; en quomodo facillimè ea omnia demonstro, quæ modò de hoc problemate attuli.

Sint datæ quatuor rectæ positione parallelæ inter se, ut supra, quarum distantia sit recta, quam vocabo d. & quinta easdem ad angulos rectos secans, ut in figura sexta explanatum est. Data autem recta sit etiam, d. Centro deinde B asymptotis BE, BC hyperbola describatur FO, cujus hæc sit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto, ut F, ductaque FD, parallela asymptoto BE solidum, quod continetur sub quadrato BD in applicatam DF, unà cum solido sub duabus BD, DF & tertia data d, æquetur duplo cubo ex d. Quomodo verò hujusmodi curva describi possit, supra demonstratum est. Dico hanc esse, &c. Constructa enim figura, ut factum apparet, sit BD, sive EH, dicamus x, HF verò y. ER erit $x * d$; solidum verò sub his tribus erit $yxx * ydx$. Similiter FP erit $x * 2d$, FZ autem $d + x$. Solidum verò sub his & tertia data d, est $2d^3 - ddx - dxx$ unde habebitur hujusmodi æquatio $xxy * dxy \propto 2d^3 + ddx - dxx$. Sed & eadē æquatio producitur ex ipsa curvæ proprietate; etenim DF est $d * y$; ergò solidum sub quadrato BD in DF, una cum solido

sub

ſub tribus BD, DF, & d erit $dxx * yxx * ddx * dxy$, quod cum æquari debeat duplo cubo ex d. exurget hujuſmodi æquatio $dxx * yxx * ddx * dyx \propto 2d^3$; vel facta congrua trāſpoſitione $xxy * dxy \propto 2d^3 - ddx - dxx$; e quibus manifeſta ſunt ea omnia, quæ demonſtranda erant. Sed nec amplius immorabor in aliis caſibus explanandis; multa enim dicenda reſtant ad ea illuſtranda, quæ de ſuperſolidorum problematum æquationibus conſtruendis tradidit Carteſius tertio ſuæ Geometriæ libro.

Quòd autem difficillima hæc etiam ſint, indicat eorum ſilentium, qui commentaria in ejuſdem Geometriam edidere. Qui autem aliqua de his attulere, in hoc maximè laborarunt, quòd his curvis uſi ſunt, nec tamen demonſtrarunt, quomodò eædem in plano deſcribi poſſent. Nunc autem, quòd via ad has curvas deſcribendas patuit, dicere auſim, parum, aut nihil diſtare inter quadratæ æquationis conſtructionem, & ejus, quæ ad ſexcenteſimam dimenſionem uſquè aſſurgat.

Carteſius tertio ſuæ Geometriæ libro regulā tradidit, qua æquationes omnes, in quibus unica ignota quantitas reperitur, quæque ad quintam, vel ſextā dimenſionē aſſurgunt, cōſtrui poſſint. Quamvis autem hujuſmodi regula mirum, portentoſumque Authoris ingenium prodat, certum tamen eſt, vel ipſo Authore fatente, maximis eam difficultatibus laborare, atquè à ſimpliciſſima, quod maximè in Mathematicis cavendum eſt, via deflectere. Si enim conſtruenda proponatur æquatio per hos terminos expreſſa $x^6 \propto ax^5 - b^6$. Quis non videt, maximoperè laborare Carteſii regulam, quæ jubet prius reducendam eſſe ad formulam, in qua omnes termini adſint, omneſque radices veræ ſint, & quantitas cognita tertii termini excedat quadratū à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini, eaque deinde peragenda, quæ ferreum hominem defatigarent, cum ipſius conſtructio facillima obtineri poſſit? nil aliud quippè eſt faciendū, fig. 73, quā circulū ADC deſcribere, cujus diameter æqualis quantitati notæ, quam in æquatione per a, designavi. Tum ex puncto A ducta AS perpendiculari ad diametrum AC, opus est cētro A, asymptotis AC, AS secūdam hyperbolā describere *DO*, ita ut ex quolibet ejus puncto, ut *D*, ducta perpendiculari *DB* ad asymptotum AC, solidum, quod continetur sub quadrato *AB* in B*D* æquetur b^3. Si enim hæc hyperbola datum circulum in aliquo puncto, ut D secet, atquè ex hoc demittatur *DS* parallela diametro circuli AC, hæc erit propositæ æquationis radix x.

Quarè ejus erit, qui Cartesianam Geometriam explanare debet, huic difficultati occurrere, cum præcipuè ipse Cartesius id expostulet; ait enim circa finem Tertii. *Verùm notandum est in plurimis horum exemplorum, quòd circulus hic tam obliquè hanc parabolam secundi generis secare possit, ut intersectionis punctum cognitu sit difficile; atquè adeo hac constructio ad praxim non sit idonea. Cui quidem rei facile remedium afferri potest, componendo alias regulas ad imitationem hujus, &c.* Nullus autem, quem sciam, quænam sint hæ regulæ demonstravit, nec forsan ipse Cartesius novit; curvis enim, quas modò descripsi, ignotis, nulla methodus ad has æquationes construendas, saltem, quæ simplicissima sit, inveniri potest. Nec ego hìc ostendam, quomodò unica regula æquationes omnes, quæ sub quinta, vel sexta dimensione comprehenduntur, construere possibile sit: quamvis enim facillimum id mihi esset, satius tamen duco demonstrare, quamlibet æquationem datam, cujuscumque ea dimensionis fuerit, facillìmè construi posse aliqua ex his adhibita; ut facilior evadat operatio, atquè adeò molœstiæ omnes evitentur, quæ ex laboriosissimis calculis oriri solent, qui æneum quemque lassare valent. Ea item demonstrabo, quæ ignoravit Cartesius, dum putavit ad constructionem æquationis, v.g. quæ ad nonam dimensionem assurgit, opus esse curvam adhibere, quæ quarti generis esset, vel cujus æquatio constitutiva ad septimam, vel octavam dimensionem as-

surgfurgeret (a),& tamen illa conſtrui poteſt ope curvæ ſecundi generis, quæ ad tertium gradum aſſurgit.

Sed jam proponatur conſtruenda æquatio ſex dimenſionum his terminis expreſſa $x^6 - qx^5 - ppx^4 - rxx * n^6 \propto 0$. Contro A, in fig. 8. aſymptotis AC,AL ſibi invicem ad angulos rectos in puncto A iunctis, ſecunda hyperbola deſcribatur DN, cujus potentia ſit n^3, hujus autem hæc ſit proprietas, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D, ductaque DE parallela aſymptoto AL, ſolidum ſub quadrato AE in ED æquetur potentiæ n^3. Sumta deindè in AC aſymptoto recta AC æquali dimidio quantitatis q, ex puncto C erigatur perpendicularis CB æqualis quantitati r^4 diu. per $2n^3$: juncta deindè AB, ex puncto A erigatur perpendicularis AF æqualis p, & jungatur BF. Centro deindè B, intervallo BF circulus deſcribatur, qui quidem deſcriptam hyperbolam in aliquo puncto ſecare poteſt. Secet itaque in D, atquè ex puncto D ducatur DL parallela AE. & ipſi AL occurrens in L. Dico DL radicem eſſe propoſitæ æquationis. Ex puncto enim D, ducatur perpendicularis DE parallela aſymptoto AL, atq; AE, ſivè DL dicamus x. Ex proprietate itaquè hyp. DN, DE erit n^3 diu. per xx. DG verò erit n^3 diu. per xx, $-r^4$ diu. per $2n^3$. hujus autē quātitatis quadratum eſt n^6 diu. per x^4, $-r^4$ diu. per xx, $* r^8$ diu. per $4n^6$. Quia verò AC eſt dimidium quantitatis q, AE autem x, CE, vel GB erit dimidium quantitatis $q - x$, & huius quadratum erit quarta pars quadrati ex $q - qx * xx$. Cum autem quadratum GB, una cum quadrato DG æquetur quadrato BD (b), ſivè BF, omnes enim ſunt circuli DF radii; ideò habebitur hujuſmodi æquatio n^6 diu. per x^4, $-r^4$ diu per xx, $* r^8$ diu. per $4n^6 * qq$ diu. per 4, $- qx * xx \propto qq$ diu. per $4 * r^8$ diu. per $4n_6 * pp$: quadratū quippè FB æquatur quadratis AF, AB, ablatiſque iis, quæ ſe invicem tollunt, factaque congrua multiplicatione,

(a) Ex iis, quæ habentur in fine libr. pr. & initio ſec.
(b) 47. pr.

ne, atquè transpositione exurget hujusmodi æquatio $x^6 - qx^5 - ppx^4 - r^4xx * n^6 \infty 0$. Et patet, quod erat demonstrandum.

Quod si centro A, asymptotis AM, AL hyperbola secunda describatur QK, ita ut solidum, quod sub quadrato AR in rectam QR continetur æquetur n^3; atquè hæc circulum in aliquo puncto ut Q secet, ab eoque ad asymptotum AM ducatur RQ parallela asymptoto AL, recta AR erit propositæ æquationis falsa radix, quod facillimè cognosci potest.

Atquè ex hujus æquationis constructione manifestè colligi potest, reliquas omnes quibuscũq; signis, terminisque affectas construi posse, easque etiam, quæ ad quamlibet dimensionem assurgunt. Vt enim aliquod exemplum afferam, si in figura 7. pro circulo ADC ponamus curvam, quæ ex genere ellipsium est, cujusque hæc est proprietas, ut sumto quolibet puncto, ut A, ductaque AE parallela asymptoto AS solidum, quod continetur sub quadrato AB in BC æquetur cubo applicatæ BA: hyperbola autem AO hanc curvam in aliquo puncto, ut A, secet, ducta DB parallela asymptoto AS, intercæpta AB erit radix æquationis, quæ ad nonam dimensionem assurgit. Potentia enim secundæ hyperbolæ AO statuatur b^3 AC autem sit a, AB verò indeterminata sit x, BD ex proprietate hujus hyperbolæ erit b^3 diu. per xx, & hujus cubus b^9 diu. per x^6, & quoniã AB est x & AC a, erit BC, $a - x$, & solidum sub quadrato AB in BC erit $axx - x^3$, quod cum æquari debeat cubo BA, habebitur hujusmodi æquatio b^9 diu. per $x^6 \infty axx - x^3$, & facta multiplicatione per x^6, exurget æquatio novem dimensionum, quæ per hos terminos exprimetur $x^9 - ax^8 * b^9 \infty 0$. Similiter si opus sit sex medias continuè proportionales inter duas datas invenire, quarum prima sit a; ultima verò b: posita prima ex inveniendis x habebitur hujusmodi æquatio $x^7 \infty ba^6$, quam quidem satis expeditè hoc modo construere possumus.

In fig. nona sint duæ rectæ AB, AD se se ad quoslibet angulos, puta rectos, in puncto A intersecantes. Vertice autem

A

A, axe verò AD, parametro autem prima ex datis, hoc est a parabola secũda describatur AOC, ita ut cubus cujuscumque applicatæ CD æquetur solido sub parametri a quadrato in intercæptam AD (a). Similiter vertice A, axe verò AB parametro autem ultima ex datis b, secunda item parabola describatur, qualem in prima epistola tradidi, in qua videlicet ordinatæ cubus æquatur solido sub quadrato intercæptæ in parametrum: hæ enim parabolæ se se in aliquo puncto secabunt; secent itaquè in C, atquè ex hoc demittatur CD applicata ad axem AD; dico hanc esse primam ex quæsitis. Ducta enim CB ad angulos rectos, hoc est, ordinata ad axem AB, si CD, vel AB vocetur z, CB ex proprietate parabolæ, AOC erit z_3 diu. per aa. Quoniam autem cubus CB, sivè z^9 diu. per a^6, æquatur solido sub quadrato AB in parametrum, hoc est, bzz. Ideò habebitur hujusmodi æquatio z_9 diu. per $a^6 \infty bzz$; vel facta convenienti multiplicatione, atquè divisione, exurget æquatio $z^7 \infty ba^9$. Q. E. D.

Ex hoc autem, & superiori exemplo satis patet non benè à Cartesio institutam esse problematum in certas classes divisionem: ut supra etiam dictum est.

At verò prætereundum hoc loco non est, rationem inveniendi medias proportionales ope harum parabolarum pulcherrimam quidem esse, dum facillimè eadem uti possumus ad quaslibet inveniendas, variatis secundum opus fuerit, curvis. Si enim ambæ hæ parabolæ primæ fuerint, CD erit prima ex inveniendis, quando inter duas datas duæ mediæ proportionales inveniendæ sunt. Quòd si curva AOC secunda parabola fuerit, qualem in tertia epistola describo; at curva parabolica ASC sit prima parabola; DC erit prima ex quæsitis, quando inter duas datas inveniendæ sunt quatuor mediæ continuè proportionales. Si verò parabola ASC sit secũda parabola in prima epistola descripta, CD erit prima ex inveniendis; quandò inter duas datas reperiri debent sex mediæ

(a) *Vide Epist. tertiam.*

diæ continuè proportionales. Tandem si parabola AOC sit ea, quam in tertia epistola tertiam voco; At parabola ASC sit secunda ejusdem tertiæ epistolæ, in qua cubus applicatæ æquetur solido sub rectangulo ex datis in intercæptam, DC erit prima ex quæsitis; si inter duas datas inveniendæ sint decem mediæ continuè proportionales; idem, si plures inveniendæ proponantur. Similiter demonstrabo; id etiam accidere, si parabola, & hyperbola ad mediarum quarumlibet inventionem adhibeantur.

Ab his autem, quæ modò attuli, non parva oriri potest utilitas pro quarumlibet æquationum, problematumque constructione.

Quoniam autem ad constructionem æquationis, quæ ad nonam dimensionem assurgebat, curvam ex genere ellipsium assumpsimus, cujus descriptionem nōdum tradidi; ideò paucis hic ostendam, quomodò hæc etiam in plano describi possit; ne idem mihi vitio vertatur, quod in aliis, ceù non omninò perfectum, notavi. Sed, ut veritati locus sit, fatendum mihi est, rationem, qua hujusmodi curvam describam, non posse cum ea comparari, qua hyperbolas, vel parabolas describo; non enim in simplicissimam incidere mihi contigit. Ideò autem hic exponam, cum, ut si fieri possibile sit, aliquis acutiori, quam ego ingenio abundans veram, maximèque his curvis cōsonam methodum invenire possit, his mox dicendis instructus; tum, ut, si cui libeat in iis saltem locis componendis, quæ tertium gradum non excedunt, aliquid laboris insumere, hanc curvam, qua opus est, etiam calleat. Sed ità hujus descriptio procedit.

In figura decima, sit æquicrure triangulum ABL rectangulum in A. cuius æqualia latera sint AL, AB. In uno autem æqualium laterum, ut AB, cōstituatur rectus angulus ADB; ita ut latera DB, DA, indefinita sint ad partes A, B; atquè per eadem hæc puncta liberè etiam excurrere possint; ut, dum recta ECD semper sibi ipsi, & lateri AL parallela movetur, in latere BL dato sui puncto, ut E, incedens, eundem

hunc

hunc rectum angulum secum ducat. Intellige autem, rectam ECD indefinitam ad partes D. Porrò in puncto *E* constituatur recta EB indefinita ad partes L, atquè circulariter mobilis in puncto E; hæc autem, ita nectatur in recta DB, ut cum eadem angulum rectum faciens, per illam liberè excurrere possit; sed maneat etiam semper in latere *AB*, in quo angulum faciat cum DB, ita ut ubicumquè fuerit recta ECD, quemadmodũ apparet in recta GHF, angulus D sit semper rectus, atquè in eadem recta GHF reperiatur, ut apparet in F: item angulus DBE sit etiam semper rectus, semperque maneat in recta AB, ut videre est in puncto I; at recta BE transeat semper per punctum G, ut manifestè constat in recta GI. Dico angulum rectum ADB curvam AFDB describere, cujus hæc erit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto ut F, ductaque FH perpendiculari ad AB, solidum, quod cõtinetur sub quadrato AH in HB æquetur cubo à ducta FH. Ita verò se habet demonstratio. Constructa figura, ut apparet, ita ut rectæ, quibus curva descripta est, in ea statione sint, in qua erant, cum descriptum est pũctum F: quoniam ex hyp. triangulum BAL est æquicrure, HG verò parallela AL, erit & HG æqualis HB*(a)*. Quoniam autem anguli AFI, FIG sunt recti; atque adeò AF, GI parallelæ inter se, erit AH ad HF, ut HI ad HG*(b)*, ac propterea rectangulũ AHG, vel AH*B* æquale rectangulo FHI *(c)*: quarè si tam rectangulum AHB, quam FHI ducantur in AH, erit solidũ sub quadrato AH in HB æquale solido sub tribus AH, *HF*, HI. Sed solidum sub his tribus æquatur cubo HF*(d)*; ergò patet, solidum sub quadrato AH in HB æquari cubo HF. Q. E. F.

E quibus facillimè etiam deducitur ita esse quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad reliquam HB. Vndè manifestè cognoscitur hanc curvam talem esse, quæ circulũ uno gradu excedat. In circulo enim ità est AH ad HF, ut eadem

(a) 4. *sex.* (b) 29. *pr.* 4. *sex.* (c) 16. *sex.*
(d) 36. *Vnd.*

dem HF ad HB: Quoniam autem post latus quadratum sequitur; ideò & post circulum illa subsequetur curva, in qua ita erit quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad HB. Quarè ab iis, quæ supra demonstrata sunt, omnia patent, quæ demonstranda suscepi.

Quòd si triangulum *BAL*, in eadem decima, non sit æquicrure, curva AFDB eodem modo descripta illa erit, quæ ellipsim subsequetur, in qua videlicet solidum sub quadrato *A*H in HB eandem habet proportionem ad cubum HF, ut latus AB ad latus AL. Quod ita demonstratur. Quoniam parallelæ sunt GI, *A*F, similia erùnt triangula AHF, GHI; quarè rectangulum AHG æquabitur rectangulo FHI (*a*); & si omnia ducantur in *A*H, erit solidũ sub quadrato AH in HG æquale solido sub tribus AH, H*F*, HI, vel cubo HF (*b*). Et quoniam solidum sub quadrato AH in HG ad solidum sub eodem quadrato AH in HB eandem habet proportionem, ac HG ad HB; quarè cubus *HF* ad solidum sub quadrato *A*H in *H*B eandem habebit rationem, ac GH ad HB(*c*), vel LA ad AB (*d*). Ergo & solidum sub quadrato *A*H in HB ad cubum HF eandem habebit proportionem, quam AB ad latus *A*L (*e*). Q. E. D.

Quod si curvam velimus, quæ hanc subsequatur, vel quæ secundum locum post circulum obtineat, ita in plano describi potest.

In fig. Vnd. sit semicirculus A*B*C, cujus diameter AC; recta autem B*D* ad diametrum *B*D applicata moveatur semper sibi ipsi parallela ita, ut ejus punctum B maneat semper in semicirculo A*B*C. In eodem autem puncto B constituta sit recta *B*E in angulo semirecto, quæque moveatur etiam motu rectæ *BF*, eundem semper cum ipsa angulum faciens, hoc est semper sibi ipsi parallela. Porrò eadem BDF indefinitè producta ad partes F movere faciat angulum rectum AFE ita

(a) 4. & 16. *Sex.* (b) 36. *Vnd.* (c) 7. *Quinti.*
(d) 4. *Sex.* (e) 4. *Quinti.*

ita, ut vertex anguli maneat semper in recta BDF, & latera FA, FE transeant semper per puncta A, E, intellige autem punctum *E* esse ubi recta BE incidit in diametrum AC. Dico angulum rectum AFE curvam designare, in qua sumto quolibet puncto F, atquè ab eo ducta *F*D perpendiculari, sivè applicata ad diametrum AC, planoplanum, quod continetur sub cubo A*D* in DC æquetur quadratoquadrato à recta DF. Quod ita patet. Constructa figura, ut apparet, quoniam rectus est angulus AFE, proportionales continuè erunt AD, DF, DE, vel D*B* (*a*); ac propterea, & qui ab ipsis cubi (*b*); hoc est, ita erit cubus AD ad cubum DF, ut idem cubus DF ad cubum *DE*, vel DB, vel ad solidum sub tribus A*D*, DE, DC. Sed cubus DF ad solidum sub tribus AD, *D*E, *D*C, eandem habet proportionem, ac DF ad DC; cubus enim DF, & solidum sub tribus AD, DE, DC eandem habent basim, rectangulum videlicet ADE (*c*); quarè & cubus AD ad cubum *D*F eandem habet rationem, ac recta *D*F ad rectam *D*C. Vndè patet planoplanum sub cubo A*D* in DC æquari quadratoquadrato sub DF. Quod erat demonstrandum.

Cum itaquè demõstratum in hac curva sit, ita esse cubum AD ad cubum DF, ut eadem *D*F ad rectam DC, atquè angulus, quem facit F*D* cum diametro DC sit rectus, cubus verò quadratum subsequatur, vel secundum locum post latus obtineat; ideò & hæc curvam, quam superiori loco descripsi, uno gradu superat; at circulum duobus.

Quod si pro circulo ellipsis adhibeatur, curva, quæ eodem modo describetur talis erit, ut ellipsim planam, sivè primam duobus etiam gradibus excedat, quemadmodum manifestè patet.

Hinc & locus per hanc æquationem designatus dy^3 diu. per $b\infty axx-x^3$ compositus jam erit; est enim ad curvam, quæ uno gradu ellipsim planam, aut circulum subsequitur:

I fal-

(a) 8. *sex.* & 6. *pr.* & 7. *Quinti* (b) 37. *Vnd.*
(c) 36. *Vnd.*

saltem si quantitates d, & b æquales fuerint; quemadmodum supra demonstratum est. Si verò æquatio fuerit dy^4 diu. per $b \propto ax^3 - x^4$; locus erit ad curvam modò descriptam. Idem in altioribus dicendum.

Ex his autem, quæ usquè adhuc dicta sunt, satis, ut puto, manifestum est, Vir Præstantissime, quantum incrementi Geometriæ accesserit; ea enim ita in immensum crevit, ampliorque effecta est, ut nullis jam limitibus contineri possit. An verò Cartesianam Geometriam, quam, ut à nonnullis accepi, inposterum explicãdam decrevisti ab hujus scientiæ publico Professore, cuicumq; id oneris iniunctũ erit, quãque ipse, una cùm aliis explanandam coram Te susceperam; non explanaverim modò, atquè in iis quæ difficillima sunt; sed promoverim etiam, Tibi judicandum relinquo. Hæc autem non eò dico, quò Te, cæterosque, quorum est, persuasos velim, ut mihi id oneris, atquè honoris à Vobis tribuatur, non enim ita mihi indulgeo, ut non planè videam, atquè cognoscam, plurimos esse, qui acutiori ingenii acie præditi longè me in his, reliquisque scientiis præstant; sed ut Tibi pateat animi mei studium, atquè obsequium, qui ita in Te exardescit, ut grandia, majoraque his offerre gestiat, si modò mearum virium imbecillitas id ferret. Quod si Tibi hæc ingrata non erunt, non solum id mihi iucundissimum accidet; sed & ad majora capessenda me induxeris; nil enim adeò difficile, aut arduum excogitari posse puto, quod ipse aggredi non audeam Te Duce, Tuisque auspiciis fretus. Vale; Teque D.O.M. nobis pro bono literarum omnium incremẽto Nestoreos annos servet. Ex S. Marci Oppido. Nonis Sext.

EPISTOLA
TERTIA

Ad Illustriss. Clarissimumque Virum, tum Generis splendore, tum morum, cæterarumque Virtutum ornamento

D. IOHANNEM
MICHAELEM GABANILIUM,

E MARCHIONIBUS S. MARCI,

equitum Catholici Monarchæ Præfectum, &c.

In qua de genesi, atquè in plano descriptione infinitarum parabolarum, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum, &c. æquantur solido, vel quod sub parametri quadrato in interceptam, vel plano-plano sub cubo parametri in intercæptam.

ne, atquè transpositione exurget hujusmodi æquatio $x^6 - qx^5 - ppx^4 - r^4xx + n^6 \infty 0$. Et patet, quod erat demonstrandum.

Quod si centro A, asymptotis AM, AL hyperbola secunda describatur QK, ita ut solidum, quod sub quadrato AR in rectam QR continetur æquetur n^3; atquè hæc circulum in aliquo puncto ut Q secet, ab eoque ad asymptotum AM ducatur RQ parallela asymptoto AL, recta AR erit propositæ æquationis falsa radix, quod facillimè cognosci potest.

Atquè ex hujus æquationis constructione manifestè colligi potest, reliquas omnes quibuscũq; signis, terminisque affectas construi posse, easque etiam, quæ ad quamlibet dimensionem assurgunt. Vt enim aliquod exemplum afferam, si in figura 7. pro circulo ADC ponamus curvam, quæ ex genere ellipsium est, cujusque hæc est proprietas, ut sumto quolibet puncto, ut A, ductaque AE parallela asymptoto AS solidum, quod continetur sub quadrato AB in BC æquetur cubo applicatæ BA: hyperbola autem AO hanc curvam in aliquo puncto, ut A, secet, ducta DB parallela asymptoto AS, intercæpta AB erit radix æquationis, quæ ad nonam dimensionem assurgit. Potentia enim secundæ hyperbolæ AO statuatur b^3 AC autem sit a, AB verò indeterminata sit x, BD ex proprietate hujus hyperbolæ erit b^3 diu. per xx, & hujus cubus b^9 diu. per x^6, & quoniã AB est x & AC a, erit BC, $a - x$, & solidum sub quadrato AB in BC erit $axx - x^3$, quod cum æquari debeat cubo BA, habebitur hujusmodi æquatio b^9 diu. per $x^6 \infty axx - x^3$, & facta multiplicatione per x^6, exurget æquatio novem dimensionum, quæ per hos terminos exprimetur $x^9 - ax^8 + b^9 \infty 0$. Similiter si opus sit sex medias continuè proportionales inter duas datas invenire, quarum prima sit a; ultima verò b: posita prima ex inveniendis x habebitur hujusmodi æquatio $x^7 \infty ba^6$, quam quidem satis expeditè hoc modo construere possumus.

In fig. nona sint duæ rectæ AB, AD se se ad quoslibet angulos, puta rectos, in puncto A intersecantes. Vertice autem

A,

A, axe verò AD, parametro autem prima ex datis, hoc est a parabola secũda describatur AOC, ita ut cubus cujuscumque applicatæ CD æquetur solido sub parametri a quadrato in intercæptam AD (a). Similiter vertice A, axe verò AB parametro autem ultima ex datis b, secunda item parabola describatur, qualem in prima epistola tradidi, in qua videlicet ordinatæ cubus æquatur solido sub quadrato intercæptæ in parametrum: hæ enim parabolæ se se in aliquo puncto secabunt; secent itaquè in C, atquè ex hoc demittatur CD applicata ad axem AD; dico hanc esse primam ex quæsitis. Ducta enim CB ad angulos rectos, hoc est, ordinata ad axem AB, si CD, vel AB vocetur z, CB ex proprietate parabolæ, AOC erit z^3 diu. per aa. Quoniam autem cubus CB, sivè z^9 diu. per a^6, æquatur solido sub quadrato AB in parametrum, hoc est, bzz. Ideò habebitur hujusmodi æquatio z^9 diu. per $a^6 \propto bzz$; vel facta convenienti multiplicatione, atquè divisione, exurget æquatio $z^7 \propto ba^9$. Q. E. D.

Ex hoc autem, & superiori exemplo satis patet non benè à Cartesio institutam esse problematum in certas classes divisionem: ut supra etiam dictum est.

At verò prætereundum hoc loco non est, rationem inveniendi medias proportionales ope harum parabolarum pulcherrimam quidem esse, dum facillimè eadem uti possumus ad quaslibet inveniendas, variatis secundum opus fuerit, curvis. Si enim ambæ hæ parabolæ primæ fuerint, CD erit prima ex inveniendis, quando inter duas datas duæ mediæ proportionales inveniendæ sunt. Quòd si curva AOC secunda parabola fuerit, qualem in tertia epistola describo; at curva parabolica ASC sit prima parabola; DC erit prima ex quæsitis, quando inter duas datas inveniendæ sunt quatuor mediæ continuè proportionales. Si verò parabola ASC sit secũda parabola in prima epistola descripta, CD erit prima ex inveniendis, quandò inter duas datas reperiri debent sex mediæ

diæ

(a) *Vide* Epist. *tertiam*.

diæ continuè proportionales. Tandem si parabola AOC sit ea, quam in tertia epistola tertiam voco; At parabola ASC sit secunda ejusdem tertiæ epistolæ, in qua cubus applicatæ æquetur solido sub rectangulo ex datis in intercæptam, DC erit prima ex quæsitis, si inter duas datas inveniendæ sint decem mediæ continuè proportionales; idem, si plures inveniendæ proponantur. Similiter demonstrabo, id etiam accidere, si parabola, & hyperbola ad mediarum quarumlibet inventionem adhibeantur.

Ab his autem, quæ modò attuli, non parva oriri potest utilitas pro quarumlibet æquationumque, problematumque constructione.

Quoniam autem ad constructionem æquationis, quæ ad nonam dimẽsionem assurgebat, curvam ex genere ellipsium assumplimus, cujus descriptionem nõdum tradidi; ideò paucis hic ostendam, quomodò hæc etiam in plano describi possit; ne idem mihi vitio vertatur, quod in aliis, ceù non omninò perfectum, notavi. Sed, ut veritati locus sit, fatendum mihi est, rationem, qua hujusmodi curvam describam, non posse cum ea comparari, qua hyperbolas, vel parabolas describo; non enim in simplicissimam incidere mihi contigit. Ideò autem hic exponam, cum, ut si fieri possibile sit, aliquis acutiori, quam ego ingenio abundans veram, maximèque his curvis cõsonam methodum invenire possit, his mox dicendis instructus; tum, ut, si cui libeat in iis saltem locis componendis, quæ tertium gradum non excedunt, aliquid laboris insumere, hanc curvam, qua opus est, etiam calleat: Sed ità hujus descriptio procedit.

In figura decima, sit æquicrure triangulum ABL rectangulum in A. cuius æqualia latera sint AL, AB. In uno autem æqualium laterum, ut AB, cõstituatur rectus angulus ADB; ita ut latera DB, DA, indefinita sint ad partes A, B; atquè per eadem hæc puncta liberè etiam excurrere possint; ut, dum recta ECD semper sibi ipsi, & lateri AL parallela movetur, in latere BL dato sui puncto, ut E, incedens, eundem

hunc

hunc rectum angulum secum ducat. Intellige autem, rectam ECD indefinitam ad partes D. Porrò in puncto *E* constituatur recta EB indefinita ad partes L, atquè circulariter mobilis in puncto E; hæc autem, ita nectatur in recta DB, ut cum eadem angulum rectum faciens, per illam liberè excurrere possit; sed maneat etiam semper in latere A*B*, in quo angulum faciat cum D*B*, ita ut ubicumquè fuerit recta ECD, quemadmodũ apparet in recta GHF, angulus D sit semper rectus, atquè in eadem recta GHF reperiatur, ut apparet in F: item angulus DBE sit etiam semper rectus, semperque maneat in recta AB, ut videre est in puncto I; at recta BE transeat semper per punctum G, ut manifestè constat in recta GI. Dico angulum rectum ADB curvam AFDB describere, cujus hæc erit proprietas, ut sumto in ipsa quolibet puncto ut F, ductaque FH perpendiculari ad AB, solidum, quod cõtinetur sub quadrato AH in HB æquetur cubo à ducta FH. Ita verò se habet demonstratio. Constructa figura, ut apparet, ita ut rectæ, quibus curva descripta est, in ea statione sint, in qua erant, cum descriptum est pũctum F: quoniam ex hyp. triangulum BAL est æquicrure, HG verò parallela AL, erit & HG æqualis HB*(a)*. Quoniam autem anguli AFI, FIG sunt recti; atque adeò AF, GI parallelæ inter se, erit AH ad HF, ut HI ad HG*(b)*, ac propterea rectangulũ AHG, vel AH*B* æquale rectangulo FHI *(c)*: quarè si tam rectangulum AHB, quam FHI ducantur in AH, erit solidũ sub quadrato AH in H*B* æquale solido sub tribus AH, *HF*, HI. Sed solidum sub his tribus æquatur cubo HF*(d)*; ergò patet, solidum sub quadrato AH in HB æquari cubo HF. Q. E. F.

E quibus facillimè etiam deducitur ita esse quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad reliquam HB. Vndè manifestè cognoscitur hanc curvam talem esse, quæ circulũ uno gradu excedat. In circulo enim ità est AH ad HF, ut eadem

(a) 4. *sex.* (b) 29. *pr.* 4. *sex.* (c) 16. *sex.*
(d) 36. *Vnd.*

dem HF ad HB. Quoniam autem post latus quadratum sequitur; ideò & post circulum illa subsequetur curva, in qua ita erit quadratum AH ad quadratum HF, ut eadem HF ad HB. Quarè ab iis, quæ supra demonstrata sunt, omnia patent, quæ demonstranda suscepi.

Quòd si triangulum *BAL*, in eadem decima, non sit æqui crure, curva AFDB eodem modo descripta illa erit, quæ ellipsim subsequetur, in qua videlicet solidum sub quadrato *A*H in HB eandem habet proportionem ad cubum HF, ut latus AB ad latus AL. Quod ita demonstratur. Quoniam parallelæ sunt GI, *A*F, similia erunt triangula AHF, GHI; quarè rectangulum AHG æquabitur rectangulo FHI (*a*); & si omnia ducantur in *A*H, erit solidũ sub quadrato AH in HG æquale solido sub tribus AH, H*F*, HI, vel cubo HF (*b*). Et quoniam solidum sub quadrato AH in HG ad solidum sub eodem quadrato AH in HB eandem habet proportionem, ac HG ad HB; quarè cubus *HF* ad solidum sub quadrato *A*H in *HB* eandem habebit rationem, ac GH ad HB(*c*), vel LA ad AB (*d*). Ergo & solidum sub quadrato *A*H in HB ad cubum HF eandem habebit proportionem, quam AB ad latus *AL* (*e*). Q. E. D.

Quod si curvam velimus, quæ hanc subsequatur, vel quæ secundum locum post circulum obtineat, ita in plano describi potest.

In fig. Vnd. sit semicirculus A*B*C, cujus diameter AC; recta autem *BD* ad diametrum *B*D applicata moveatur semper sibi ipsi parallela ita, ut ejus punctum B maneat semper in semicirculo A*B*C. In eodem autem puncto B constituta sit recta *B*E in angulo semirecto, quæque moveatur etiam motu rectæ *BF*, eundem semper cum ipsa angulum faciens, hoc est semper sibi ipsi parallela. Porrò eadem BDF indefinitè producta ad partes F movere faciat angulum rectum AFE

ita

(a) 4. & 16. *sex.* (b) 36. *Vnd.* (c) 7. *Quinti.*
(d) 4. *sex.* (e) 4. *Quinti.*

ita, ut vertex anguli maneat semper in recta BDF, & latera FA, FE transeant semper per puncta A, E, intellige autem punctum *E* esse ubi recta BE incidit in diametrum AC. Dico angulum rectum AFE curvam designare, in qua sumto quolibet puncto F, atquè ab eo ducta *F*D perpendiculari, sivè applicata ad diametrum AC, planoplanum, quod continetur sub cubo A*D* in DC æquetur quadratoquadrato à recta DF. Quod ita patet. Constructa figura, ut apparet, quoniam rectus est angulus AFE, proportionales continuè erunt AD, DF, DE, vel DB (*a*); ac propterea, & qui ab ipsis cubi (*b*); hoc est, ita erit cubus AD ad cubum DF, ut idem cubus DF ad cubum *DE*, vel DB, vel ad solidum sub tribus A*D*, DE, DC. Sed cubus DF ad solidum sub tribus AD, *D*E, *D*C, eandem habet proportionem, ac DF ad DC; cubus enim DF, & solidum sub tribus AD, DE, DC eandem habent basim, rectangulum videlicet ADF (*c*); quarè & cubus AD ad cubum *D*F eandem habet rationem, ac recta *D*F ad rectam *D*C. Vndè patet planoplanum sub cubo A*D* in DC æquari quadratoquadrato sub DF. Quod erat demonstrandum.

Cum itaquè demõstratum in hac curva sit, ita esse cubum AD ad cubum DF, ut eadem *D*F ad rectam DC, atquè angulus, quem facit F*D* cum diametro DC sit rectus; cubus verò quadratum subsequatur, vel secundum locum post latus obtineat; ideò & hæc curvam, quam superiori loco descripsi, uno gradu superat; at circulum duobus.

Quod si pro circulo ellipsis adhibeatur, curva, quæ eodem modo describetur talis erit, ut ellipsim planam, sivè primam duobus etiam gradibus excedat, quemadmodum manifestè patet.

Hinc & locus per hanc æquationem designatus dy^3 diu. per $b\infty axx - x^3$ compositus jam erit; est enim ad curvam, quæ uno gradu ellipsim planam, aut circulum subsequitur:

 fal-

(a) 8 *sex.* & 6. *7r.* & 7. *Quinti* (b) 37. *Vnd.*
(c) 36. *Vnd.*

saltem si quantitates d, & b æquales fuerint; quemadmodum supra demonstratum est. Si verò æquatio fuerit dy^4 diu. per $b \propto ax^3 - x^4$; locus erit ad curvam modò descriptam. Idem in altioribus dicendum.

Ex his autem, quæ usquè adhuc dicta sunt, satis, ut puto, manifestum est, Vir Præstantissime, quantum incrementi Geometriæ accesserit; ea enim ita in immensum crevit, ampliorque effecta est, ut nullis jam limitibus contineri posſit. An verò Cartesianam Geometriam, quam, ut à nonnullis accepi, inposterum explicãdam decrevisti ab hujus scientiæ publico Professore, cuicumq; id oneris iniunctũ erit, quãque ipse, una cùm aliis explanandam coram Te susceperam; non explanaverim modò, atquè in iis quæ difficillima sunt; sed promoverim etiam, Tibi judicandum relinquo. Hæc autem non eò dico, quò Te, cæterosque, quorum est, persuasos vellim, ut mihi id oneris, atquè honoris à Vobis tribuatur, non enim ita mihi indulgeo, ut non planè videam, atquè cognoscam, plurimos esse, qui acutiori ingenii acie præditi longè me in his, reliquisque scientiis præstant; sed ut Tibi pateat animi mei studium, atquè obsequium, qui ita in Te exardescit, ut grandia, majoraque his offerre gestiat, si modò mearum virium imbecillitas id ferret. Quod si Tibi hæc ingrata non erunt, non solum id mihi iucundissimum accidet; sed & ad majora capessenda me induxeris; nil enim adeò difficile, aut arduum excogitari posse puto, quod ipse aggredi non audeam Te Duce, Tuisque auspiciis fretus. Vale; Teque D.O.M. nobis pro bono literarum omnium incremẽto Nestoreos annos servet. Ex S. Marci Oppido. Nonis Sext.

EPISTOLA
TERTIA

Ad Illustriss. Clarissimumque Virum, tum Generis splendore, tum morum, cæterarumque Virtutum ornamento

D. IOHANNEM

MICHAELEM GABANILIVM,

E MARCHIONIBVS S. MARCI,

equitum Catholici Monarchæ Præfectum, &c.

In qua de genesi, atquè in plano descriptione infinitarum parabolarum, in quibus cubi, vel quadratoquadrata applicatarum, &c. æquantur solido, vel quod sub parametri quadrato in interceptam, vel planoplano sub cubo parametri in intercæptam.

Illustriss. Nobilissimoque Viro Domino

D. IOHANNI MICHAELI CABANILIO

BARTHOLOMÆUS INTIERI S. P. D.

JUcundissimum quidem mihi accidit, quod nuper de parabolis, quas modò tradam, invenire mihi cōtigit, hac potissimum de causa, quia his meum in Te amorem, studium, & obsequium, quibus semper Te colui, atquè observavi; semperque, colam, atquè observabo, notum quidem aliqua ex parte reddere possem. Etenim pro certo habe, me ità Tibi ob egregias animi Tui dotes devinctum esse, ut nihil potiùs habuerim, de quo majori studio laboraverim, quam ut occasio mihi daretur aperiendi Tibi animum meum, qui Te summa cum veneratione prosequutus est. In Te enim uno omnia ea splēdent, atquè elucent, quæ Viros clarissimo genere natos, & optimis, sanctissimisque moribus institutos maximè decent. Fervet generosum Tuum pectus veræ laudis, & gloriæ amore; undè Majorum Tuorum, qui bello, & pace insignes Cabanilium nomen ad astra extulere, vestigia sequens, inter sanguinei Martis pericula Te immittis, Tuumque Caput, quod Deus Optimus Max: Tuis, mihique, & Patriæ incolume servet, maximis objectare periculis non dubitas. Hoc etiam in Te admiramur, quod nunquam, aut rarò in iis,

Qui castra sequuntur

accidit, Tibi scilicet inter cædes, ferosque belli tumultus, non minus Pietatem cordi esse, quam dum hic inter nos, Consanguineosque Tuos, non sinè ingenti omnium admiratione obversabaris: ex quo (crede mihi) summa Tibi laus provenit. Quòd enim, cum opus est, & consilio, & manu polleas; quòd omnes morum suavitate vincas; quòd disciplinis omnibus ornatus, & Musis pariter, & bellicis rebus operam naves; hoc quidem magnum. Quòd verò miles,

Et primo in flore Iuventæ

ità Te belli præbeas, qualem in sacris sanctissimorum virorum cætibus religiosum hominem esse decet; maximum hoc est, omnique gloria majus; quo bonorum omnium animos Tibi ità devincis, ut nullus satis sibi esse possit in Te laudando, atquè extollendo. Nunc itaquè hæc ad Te, qualiacumque sint, mitto, quibus & Tibi, & cuicumque hæc legerit manifestum sit, me ex eorum numero esse, qui Te summo amore, summo studio, totòque animo colunt, atquè observant. Quid enim præstantius excogitari unquam potest, quàm virtutes tota animi contentione in honore habere? At profectò, dum omni, qua possum veneratione, Te cūctis virtutibus ornatum prosequor, id me omninò curare quisque noverit. Accedit etiam, quòd hæc inventa infirmis ingenii mei viribus excogitata, multaque adhuc lima egentia, cum præclaram nominis Tui inscriptionem præseferant, eorum rabiem, dentesque effugient, qui iniquo livore exagitati, nil aliud prorsus curant, quàm aliena scripta lacerare, ipsos verò authores sævis, atroquè conspersis veneno dictis incessere. Quòd si quis verò ita mihi, scriptisque meis iniquus, tantum oris habuerit, ut me Tua tutela, præsidioque munitum petere nihilominus audeat, id pro certo habe, me nihil penitus talia curare; modò non in-

gra-

grata nec iniucunda fuerint, quæ libens Tibi offero. Id enim si accidet (quod Di precor faxint) absque dubio certus ero, omnibus etiam accepta fore, qui de his disciplinis benemeriti, an aliquid boni ista contineat judicare possunt.

Quæ verò excogitata à me sunt, illa ipsissima esse scies, de quibus Tecum sæpissime colloquutus sum,

Exercet dum sol raucas per rura cicadas

in his amœnissimis, fælicibusq; cœli tẽperie regionibus; multò quidẽ fælicioribus, quòd à Parente tuo, nostri sæculi ornamẽto, cui plurimũ bonæ literæ debẽt, gubernãtur, atquè regũtur: ea, inquam, illa sunt, quæ Tu ipse perquam utilia geometricis rebus cognoscens, me assiduè stimulis concitabas, ut in his inveniendis omni cura incumberem, Tuam insuper mihi operam spondens, quantum majora studia, quibus tunc temporis totum Te dederas, paterentur. Postquam autem ad munus obeundum, quod in præsentia fæliciter, & pro Tua dignitate geris, profectus es; dum hìc in amœna Villa, quæ à *Divo* Severo nomen habet, morã cũ Tuis facio, ut mærem, quem ex Tua profectione concæperamus, ex animo demeremus, ea mihi invenire contigit, à quibus tanta perfusus lætitia fui, ut & amœna vireta, placidique leni susurro fontes, dulcesque avium concentus, cæteræque ruris deliciæ, quibus locus hic, non sine largo Naturæ dono, abundat, sorderent. Etenim nihil deindè animo versare cæpi, quam novum hoc inventum expolire, atquè omnibus numeris absolvere; si meæ vires id ferrent. Verùm quia id non exigua temporis mora opus habuisset; æquum duxi, hæc Tibi, ut primò à me inventa sunt, dicare, atquè mittere, quæ ad genesim, atquè in plano descriptionem spectant earum parabolarum, quarum æquationes constitutivæ duobus terminis exprimuntur, quorum unum ignota una quomodolibet in se ducta constituit; reliquum verò altera ignota, ità in datam quantitatem ducta, ut numerus dimensionum notæ quantitatis excedat numerum dimensionũ ignotæ. Quomodò autem reliquæ parabolæ, nec non hyperbolæ

in

in plano ortum ducant, cognoscere poteris ex iis, quæ ad Excellentissimum Dominum D. Dominicum Iudice Iuvenacii Ducem, &c. & ad Illustrissimum Dominum D. Didacum Vincentium à Vidania Regii Sacelli Præsulem, scripta sunt. Sed nec hìc rursus exponam, quomodò prima parabola (pro prima autem parabola Apollonianam intelligo) in plano perquam facillimè, atquè tali methodo, ut & in cæteris altioribus describendis locum habeat, delineari possit; id enim suprà factum est. Quarè secundæ parabolæ descriptionem primo loco aggrediar.

Verùm manifestum est in secundo genere parabolarum duas quidem comprehendi; quarum altera hac proprietate gaudet, ut solidum sub quadrato interceptæ in datam rectã, sivè parametrum æquetur cubo applicatæ: alterà verò in qua solidum sub quadrato parametri in interceptam æquetur cubo applicatæ. Illa quidem supra descripta est; hanc verò ita describo, sed quidem ipsissima methodo, ac supra factum est.

In figura enim prima hujus epistolæ vertice A, diametro quacumque AG, parametro autem recta EB data, parabola prima describatur ACH (a), ità ut applicatæ ad eandem diametrum AG sint parallelæ ipsi AB parabolam AC in vertice A tangenti. Recta autèm CED, parallela diametro AG, ita semper moveri concipiatur, ut punctum ejus C sit semper in parabola, ipsa verò semper sibi ipsi parallela existat. In recta autem AEB constituatur recta data EB, quæ liberè excurrere possit, ita ut semper in ipsa applicata maneat: sed hanc movere faciat recta DEC. In puncto autem, sivè vertice A recta constituatur AD circulariter in ipso mobilis, quæ semper parallela existat rectæ lineæ, quæ per puncta C, B, transit; ut in fig. apparet. Intersecabunt itaquè sese recta AD, & CD, quæ indefinitæ intelligi debent ad partes D, ut patet ex exelementis. Dico ex hac intersectione curvã genera-

(a) *In pr. Epist.*

rari, quæ secunda parabola erit;cujus quidem vertex erit *A*, idem, qui parabolæ AG; diameter verò AF; at applicatæ ad eandem eæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipsi AB ad AF ducuntur: præcipua verò hujus curvæ proprietas erit, ut cubus cujuscumque ex applicatis, ut *DF*, æquetur solido, quod continetur sub rectangulo ex recta BE, & parametro parabolæ, vel quia EB est ipsa diameter, sub quadrato BE in intercæptam AF. Id verò ita demonstro. Similia sunt triangula, CE*B*, *A*ED (*a*); ergò ita *D*E ad *A*E, ut CE ad EB; Quòd si tam CE, quàm *E*B ducantur in parametrum; erit ita DE ad AE, ut rectangulum sub CE in parametrum, vel ut quadratum AE (*b*) ad quadratum EB, nam EB est ipsa diameter: ergò cubus AE, sivè applicatæ DF æquatur solido, quod continetnr sub *D*E, vel intercæpta AF in quadratum EB, vel si EB non fuerit æqualis parametro; solido, quod continetur sub DE, vel AF intercæpta in rectãgulum, quod continetur sub parametro parabolæ AC, & recta data EB.

Hinc autem patet A esse verticem curvæ modò descriptæ AOD; rectam autem AF, sivè ipsam diametrum AG productam, fore diametrum: rectas verò omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipsi *A*EB ducuntur, esse ad eandẽ diametrum AF ordinatim applicatas, quæ quidem, si eadem curva ad partes M continuetur, productæ, ita ut in curva terminentur, bifariam ab ipsa diametro dividentur: quæ omnia ità facillima sunt, ut demonstratione penitus non egeant.

Quomodò verò ipsa hæc curva ab altera parte continuari possit, ità patet. In eadem figura, producatur AE ad partes I; tũ recta HLM parallela diametro AG, dato sui pũcto H semper sibi ipsi parallela moveatur in parabola AH, ut supra de recta DEC dictum est: motu autẽ suo movere etiam faciat

 re-

(a) Hyp. 29. pr. & 4. sex. (b) 11. lib. pr. Apoll. vel per ea, quæ in pri. Epist. demonstrata sunt.

rectam LI, semper applicatã in recta AI; at in extremo puncto ejusdem, ut I, recta constituatur IH, quæ etiam per punctum H transeat: huic autem parallela existat recta AM indefinita ad partes M: nam curva, quæ ex intersectione rectarum HM, MA producitur, erit eadem ab altera parte continuata; cujus quidem demonstrationem non affero.

Sed & de hac curva ea omnia demonstrari possunt, quæ in prima epistola de secunda parabola dicta sunt, videlicet omnes rectas, quæ diametro AF æquidistantes ducũtur, modò genitæ curvæ in uno tantum puncto occurrere, productasque eandem secare; quæ verò angulum cum diametro AF faciunt curvæ in duobus punctis occurrere; item rectas omnes, quæ ex vertice A ad aliquod curvæ punctum ducuntur, totas intra curvam cadere, productas verò totas extra, & plurima alia, quæ brevitati studens prætermitto.

13 Quòd autem modò descripta parabola secunda dicenda sit, hinc etiam patet. Prima parabola, sivè Apolloniana illa est, in qua data recta ad applicatam eandem habet rationem, ac eadem applicata ad intercæptam: quoniam verò post latus quadratum subsequitur, ideò & secunda parabola illa dicẽda erit, in qua ita est data recta ad applicatam, ut ejusdem applicatæ quadratum ad quadratum intercæptæ; tertia verò parabola, &c. ut in prima epistola demonstratum est. Eadem etiam ratione illa secunda parabola vocari poterit, in qua ita erit quadratum cujuscumque datæ rectæ ad quadratum applicatæ, quemadmodum eadem applicata ad intercæptam: quarè cum hoc ita se habere in curva modò genita demonstratum sit: manifestum est, eandem secundam parabolam dici posse. Similiter, quoniam post quadratum cubus subsequitur; ideò & tertia parabola illa erit, in qua ita est cubus cujuscumque datæ ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam. Idem in cæteris dicendum. At quoniam à nonnullis prima parabola, plana etiam nominatur; ideo & quam secundam dixi, solida, vel cubica appellari poterit; ita tertia planoplana, vel quadratoquadratica ab

ipso

ipsarum præcipuis proprietatibus; idem in cæteris observandum.

At verò operæ pretium est, ut & nomina iis curvis imponam, quibus in cæterarum parabolarum descriptione mentio deinceps facienda est. Quarè curva AC, cuiuscumque generis fuerit, DIRECTRIX esto. Recta CED, quæ semper sibi ipsi parallela movetur, DESCRIBENS. Quæ verò in puncto A circulariter moveri debet, EFFICIENS. Data EB, INTERVALLVM dicatur; punctũ, sivè vertex A, POLVS.

His verò præmissis tertiæ parabolæ descriptionem aggrediar. Tertia autem parabola ex supra allatis illa est, in qua datæ cubus eandem habet rationem ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam; hanc autem ita, immutata tantummodò Directrice, describo.

In figura prima huius epistolæ intelligatur parabola Directrix AC esse non prima, sed secunda, & modò descripta; tam autem Describens, quam Efficiens iisdem, ut suprà, motibus cieri concipiantur. Polus autem sit eiusdem parabolæ vertex. Intervallum verò eiusdem secundæ parabolæ Directricis parameter. Dico ex Describentis, Efficientisque intersectione curvam AOD procreari, in qua ducta DF parallela ipsi AB, planoplanum sub cubo Intervalli EB in intercæptam AF æquabitur quadratoquadrato DF; vel in qua cubus Intervalli eandem habebit rationem ad cubum applicatæ FD, ut eadem FD ad intercæptatam AF. Demonstratio autem eodem modo procedit, ac illa, qua in secunda parabola usus sum. Quod, ut reor, methodi elegantiam demonstrat. Hæc autem ita se habet. Quoniam, ut supra dictum est, similia sunt triangula AED, CEB, erit DE ad EA, ut EC ad EB; quòd si tam EC, quàm EB in quadratum EB ducantur, erit DE ad EA, vt solidum sub quadrato Intervalli EB in EC ad cubum EB; sed ex iis, quæ modò in secunda parabola demonstrata sunt, solidum sub quadrato EB parametri in EC æquatur cubo AE; ergò & DE ad AE eandem habebit proportionem, ac cubus eiusdem AE, vel ap-

 pli-

plicatæ DF ad datum cubum parametri (a); vel ita erit datus cubus ad cubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam (b); vel planoplanum ſub cubo Intervalli EB in intercæptam AF æquabitur quadratoquadrato applicatæ DF; cumque id accidat ubicumque aſſumptum fuerit punctum D, patet deſcriptam curvam illam eſſe, quam deſcribere ſuſceperam.

Quæ autem ſupra de ſecunda parabola dicta ſunt, eadem omnia & de hac intelligi debent; quemadmodum etiam & de omnibus iis, quas quis imaginatus fuerit. Illud autem ſilentio præterire nolo in ſecũda parabola cubos ab applicatis eſſe inter ſe, ut ſegmẽta intercæptarũ inter applicatas, & verticẽ; in hac verò tertia ita inter ſe ſunt quadratoquadrata ab applicatis, ut ſegmenta intercæptarum inter eaſdem applicatas & verticem. Idem in altioribus dicendum, modò quæ hic de quadratoquadratis, in quarta de quadratocubis, in quinta decubocubis, & ita deinceps.

Sed & hæc curva eadem ratione, ac ſupra factum eſt ab altera parte continuari poteſt, ita ut ſuperfluum putem in his amplius immorari, undè ad quartæ parabolæ deſcriptionem tranſitum faciam.

Quarta autem parabola ex iis, quæ ſupra dicta ſunt illa eſt, in qua ita eſt datum quadratoquadratum ad applicatæ quadratoquadratum, ut eadem applicata ad intercæptam; vel in qua planoſolidum ſub dato quadratoquadrato in intercæptam æquatur quadratocubo applicatæ. Hæc verò ita eadem methodo deſcribitur.

In eadem fig. ut ſupra, pro Directrice AC conſtituatur non ſecũda, ſed tertia parabola modò deſcripta; curva enim, quæ Deſcribente DC, Efficiente autem AD, Polo vertice A, Intervallo recta EB æquali parametro parabolæ Directricis deſcribitur, quarta parabola erit. Sũto enim in ipſa quolibet pũcto, ut D, cõſtructaque figura, ut apparet, ſimilia item erũt trian-

(a) 7. *Quinti*. (b) 4. *Quinti*.

triangula DEA, CEB; ergò ita DE ad AE, ut CE ad EB; vel multiplicatis CE, EB per cubum Intervalli BE, ita erit DE ad AE, ut planoplanum sub cubo BE in CE, vel ex proprietate tertiæ parabolæ Directricis, ut quadratoquadtatum AE ad quadratoquadratum Intervalli BE (a), vel ità erit quadratoquadratum Intervalli ad quadratoquadratum AE, vel applicatæ DF, ut eadem DF ad ED, vel intercæptam AF (b); vel planosolidum sub quadratoquadrato Intervalli in intercæptam æquabitur quadratoquadrato applicatæ. Q.E.D.

Eadem ratione, si pro tertia parabola Directrice quartam modò descriptam ponamus, curva procreabitur AOD, in qua sumto quolibet puncto, ut D, ductaque DE parallela diametro AF solidosolidum, quod continetur sub planocubo Intervalli in intercæptam æquabitur cubocubo applicatæ; hoc est curva procreabitur, quæ quinta parabola erit. Etenim, ut supra, similia sunt triangula ADE, CEB; ergò ita DE ad AE, ut CE ad EB, vel facta congrua multiplicatione per planoplanum ex BE, erit etiam DE ad AE, ut planosolidum sub CE in quadratoquadratum EB ad quadratocubũ EB, sivè ex proprietate huius parabolæ Directricis, ita DE ad AE, ut quadratocubus AE, ad quadratocubum EB; hoc est, ità datus quadratocubus ad quadratocubum applicatæ, ut eadem applicata ad intercæptam; e quibus patet solidosolidum sub planocubo Intervalli in intercæptam æquari cubocubo applicatæ. Q. E. D.

Simili ratione, & cæteræ in infinitum parabolæ describi possunt, modò curva pro Directrice assumatur, quæ proximè describendam anteeat. Nec puto, faciliorem methodum excogitari posse, qua pari elegantia in plano describantur.

At prætermittenda hoc loco non est alia etiam ratio, qua eædem parabolæ describi possunt ope earum hyperbolarum, quæ in secunda epistola descriptæ sunt. Ea autem huiusmodi est.

In

(a) *7. & 12. Quinti*. (b) *4. Quinti*.

In figura secunda huius epistolæ circa asymptotos AB, AG ad angulos rectos in puncto A iunctas hyperbola prima describatur CZ, cujus potentia sit quadratum à recta S. In centro autem A collocetur rectus angulus DAC circulariter mobilis in puncto A; recta autem CED parallela asymptoto AG, ita semper sibi ipsi parallela moveri concipiatur, ut dato sui puncto C maneat semper in hyperbola CZ, motu autem suo movere etiam faciat, secumque ducat latus AC, ita ut idem hoc latus transeat semper per punctum C; ergo fiet intersectio hujus rectæ CD, & reliqui lateris AD. Dico ex hac intersectione curvam generari, quæ ipsissima erit, ac illa, quæ superius secunda parabola dicta est; ita ut sumto in ipsa quolibet puncto, ut D, ductaque DF, huius cubus æquetur solido, quod continetur sub intercæpta AF in hyperbolæ potentiam. Demonstratio verò ita procedit. Quoniam angulus A est rectus, recta verò AE perpendicularis ipsi CD ex hyp. erit DE ad EA, ut eadem AE ad EC: quòd si tam AE, quàm EC per EA multiplicentur, erit DE ad AE, ut eiusdem AE quadratum ad rectangulum AEC; Sed rectangulum AEC æquatur potentiæ hyperbolæ? (a); ergò & ita DE ad AE, ut eiusdem AE quadratum ad hyperbolæ potētiam: & patet propositum. Atquè hæc etiam demonstrationis methodus locum in altioribus habet.

Cæterum, ut supra dictum est, hyperbola CZ vocari potest Directrix, CD verò Describens AD Efficiens, punctum autem A, sivè centrum hyperbolæ Polus. Quomodò autem ab altera parte hæc curva continuari possit, satis ex apposita fig. per se patet, in qua Directrix est curva HIS, quæ etiā hyperbola est, cuius potentia æquatur potentiæ hyperbolæ CZ, hoc est quadrato rectæ S, Describens verò HM; & Efficiens AM, &c.

Ad describendam verò tertiam parabolam, eadem manente Describente, atquè Efficiente, hyperbola CZ non sit pri-

(a) *Ex iis, quæ in secunda epist. dem. sunt.*

prima, ſed ſecunda, qualis in ſecunda epiſtola deſcripta eſt, in qua videlicet ſolidum ſub quadrato AE in EC æquetur dato ſolido; nam curva, quæ hac Directrice deſcribitur tertia parabola erit, cujus vertex erit A, diameter AF, ut ſupra: quadratoquadratum verò cuiuſcumque applicatarum, ut DF æquabitur planoplano ſub potentia hyperbolæ Directricis in interceptam AF. Demonſtratio verò eadem prorſus ratione, ut ſupra, procedit. Etenim cum ſit DE ad AE, ut eadem AE ad EC, ſi tam AE, quam EC multiplicentur per quadratum AE, erit DE ad AE, ut ejuſdem AE cubus ad ſolidum ſub quadrato AE in EC; vel ex proprietate hujus ſecundæ hyperbolæ ad datum ſolidum. Quarè patet planoplanum ſub DE, vel intercæpta AF in potentiam hyperbolæ Directricis æquari quadratoquadrato AE, vel applicatæ DF. Quod erat demonſtrandum.

Quòd ſi pro hac ſecunda hyperbola Directrice, tertia ponatur; quarta parabola procreabitur; ſi verò quarta hyperbola aſſumatur, quinta exurget parabola, & ita deinceps, quæ omnia facillima demonſtratu ſunt, cum & ipſa demonſtratio ad inſtar ſuperioris concinnanda ſit. Similiter ex iis, quæ in prima parabola dicta ſunt, manifeſta etiam evadit ratio, qua & eædem parabolæ in plano deſcribi poſſint, cum data poſitione diameter non eſt axis. Quarè his omnibus prætermiſſis ad eorum locorum compoſitionem accedam, quæ adhuc componenda ſuperſunt.

Hæc autem ſunt ea omnia, quorum æquationes duobus terminis exprimuntur, quorum alterum ignota quomodolibet in ſe ducta conſtituit; reliquum verò ignota altera in datam quantitatem ducta, ut numerus dimenſionum ignotæ non excedat numerum dimenſionum notæ quantitatis. Quæ loca, poſtquam demonſtravero, quomodò componi poſſint, id quod ſupra me facturum recepi, præſtaſſe cognoveris.

Primus itaquè locus, qui ſe poſt ſolida componendum præbet, per hujuſmodi terminos exprimitur x^3 æ aay. (quantititates x, & y indeterminatas; a verò, & quæ per similes designatur, notas, datasq; intellige) si itaquè in fig. prima hujus epistolæ, A sit immutabile initium quantitatis indeterminatæ x, quæque per rectam positione datam AEB sese extendere intelligatur; y verò supra hanc in dato angulo exurgere concipiatur, puta AED (hæc autem ita semper se habeant in cæteris deinceps locis componendis, ne eadem sæpius repetendo molestiæ Tibi sim) facillimè quidem construi idem poterit; ex puncto enim A, opus est rectam ducere AF in dato angulo AED; tum producta etiam ad partes G, oportet vertice A, diametro AG parabolam primam describere, cujus parameter sit recta a, applicatæ verò rectæ omnes, quæ ex quolibet hujus curvæ puncto parallelæ ipsi AE ducuntur; Si enim Polo vertice A, Directrice verò modò descripta prima parabola AC, Intervallo EB æquali a; quod quidem Intervallum per rectam AE incedere concipiatur. Describente verò recta CED, Efficiente autem AD curva describatur AOD erit hæc locus quæsitus. Sumto enim in ipsa quolibet puncto, ut D, ductaque DE, si AE dicatur x; recta verò ED y: cum ex iis, quæ superius demonstrata sunt cubus AE, vel DF, sivè x^3 æquetur solido sub quadrato EB, sivè Intervallo in rectam ED, vel AF, hoc est aay; habebitur hujusmodi æquatio $x^3 \infty aay$, & patet propositum. Nec absimili ratione operandum, si construenda æquatio his terminis designetur $y^3 \infty aax$.

Quòd si locus componẽdus his terminis notetur $x^4 \infty a^3 y$ eadem facilitate habebitur propositum; modò vertice A, diametro AF, Intervallo autẽ recta a, quæ æquetur parametro Directricis, parabola describatur, quã supra tertiã parabolam nuncupavimus, hæc enim locus erit quæsitus. Ex quolibet enim hujus puncto, ut D, demissa recta DE, parallela diametro AF, reliquisque constitutis, ut in figura prima apparet, si AE dicatur x, DE y; cum quadratoquadratum à recta AE, vel DF æquetur planoplano sub cubo Intervalli in ED, vel AF, habebitur hujusmodi æquatio $x^4 \infty a^3 y$; & patet

pro-

propositum. Eadem ferè methodo locus construetur hujusmodi $y^4 \infty a^3 x$.

Si verò æquatio per quam locus exprimitur ad quintam dimensionem assurgat, atquè his terminis exprimatur $x^5 \infty a^4 y$; facillimè haberi potest compositio. Si enim existente A initio quantitatis x, parabola quarta describatur AOD, omnibus, ut supra positis, hæc locus erit quæsitus; quod demonstratione non eget.

At verò fieri etiam potest, ut, & alia sub hoc eodem genere consideranda parabola veniat, cuius ope locus his terminis expressus $x^5 \infty a^3 y^2$, componi potest, quemadmodum ex iis, quæ in prima epistola dicta sunt, patet. Quomodò verò hujusmodi parabolam describere possibile sit, modò exposita methodus id manifestè demonstrat. In eadem quippè hujus epistolæ figura, vertice A, diametro AG, parametro autem recta, quam in æquatione vocavi a, parabola secunda describatur AC, in qua cubus cujuscumque ex applicatis æquetur solido, quod continetur sub intercæptæ quadrato in parametrum a: applicatæ autem ad diametrum AG parallelæ sint recta AE positione datæ. Directrice deindè hac parabola, Describente verò recta CD semper parallela diametro AG, Efficiente autem AD, Polo A, atque Intervallo recta EB, vel a, curva describatur AOD: dico hanc esse locum quæsitum. Sumto quippè in ipsa aliquo puncto, ut D, ductaque DE parallela diametro AF, reliquisque constructis, ut in figura apparet. Quoniam, ut supra dictum est, similia sunt triangula CEB, AED, erit & AE ad ED, vel x ad y, ut EB ad EC, vel ut a ad quartam, quæ erit ay diu. per x. Quoniam verò solidum sub quadrato ejusdem CE, hoc est $aayy$ diu. per xx in parabolæ AC parametrum, quæ etiam est a hoc est a^3yy diu. per x^2 æquatur cubo CG, vel AE, hoc est x^3; ideò habebitur hujusmodi æquatio a^3yy diu. per $x^2 \infty x^3$, & facta congrua multiplicatione per xx habebitur $a^3yy \infty x^5$; undè patet hanc esse locum quæsitum.

Sed hujus parabolæ vertex erit etiam punctum A; diameter verò AF, parameter a; applicatæ autem eæ omnes,

L quæ

quæ ipsi AB parallelæ ducuntur. At præcipua hujus curvæ proprietas erit, ut quadratocubus cujuscumque ex applicatis æquetur planosolido sub cubo Intervalli EB in quadratum interceptæ AF; demonstratio verò eadem ratione, ac reliquæ; procedit. Quoniam enim similia sunt triangula DEA, ECB, erit & quadratum DE ad quadratum AE, ut quadratum EC ad quadratum EB (a): quòd si tam quadratum EC, quam quadratum EB ducantur in EB; erit quadratum DE ad quadratum AE, ut solidum sub quadrato EC in EB, hoc est ut cubus AE ad cubum EB; ergò quadratocubus AE, vel applicatæ DF æquabitur planosolido sub quadrato DE in cubum Intervalli. Q. E. D.

Sed si locus componendus per æquationem exprimatur, quæ ad sextam dimẽsionem assurgat; cum unica curva, quæ sub hoc genere cadit, opus sit: facillimè componi poterit: quarèad eorum locorum compositionem transitum faciam, quorum æquationes ad septimam potestatem assurgunt.

Quoniam verò in prima epistola ea loca composita fuere, quæ per hos terminos exprimebātur $x^7 \propto ay^6$. $x^7 \propto aay^5$. $x^7 \propto a^3y^4$; ea hoc loco componenda supersunt, quæ his terminis designantur $x^7 \propto a^6y$. $x^7 \propto a^5yy$. $x^7 \propto a^4y^3$. his verò ad finem perductis nullus alius locus superest ad parabolam.

Si itaque primo loco hæc æquatio $x^7 \propto a^6y$ componenda proponatur, nullo negotio id assequi poterimus, beneficio ejus curvæ, quæ sexta parabola dici potest, hæcque in hunc modũ allata methodo describitur. Curva Directrix AC ea sit, quam supra quintam vocavi, in qua solidosolidũ sub planocubo dato a^5 in interceptam æquetur cubocubo applicatæ: tum iisdem Describente, Efficiente, Polo, & Intervallo æquali a, curva describatur AOD, & hæc erit locus quæsitus, quod quidem demonstratione non eget.

Si verò locus hic $x^7 \propto aay^5$ componẽdus proponatur, curva quæ hac ratione describi potest, dabit, quod faciendum proponitur. In eadem figura prima omnibus, ut supra, po-
sitis,

(a) 4. & 20. sex.

fitis., Directrix AC ea sit, quæ proximè superiori loco descripta fuit, in qua quadratocubus cuiuscumque applicatarum, ut CG æquetur planosolido sub quadrato intercæptæ in cubum datæ, puta Intervalli BE; curva enim AOD hac proprietate prædita erit, ut quadratoquadratocubus cujuscumque ex applicatis, ut DF æquetur ei, quod producitur ex multiplicatione quadratocubi Intervalli in quadratum intercæptæ AF. Etenim cum sit, ut quadratum DE ad quadratum AE, ita quadratum CE ad quadratum EB; vel facta multiplicatione quadratorum CE, EB in cubum BE, ut quadratum DE ad quadratum AE, ita planosolidum sub quadrato EC in cubum EB ad quadratocubum EB; vel ex proprietate parabolæ Directricis, ut quadratocubus AE ad quadratocubum Intervalli EB? erit etiam, ut quadratum DE ad quadratū AE, ita quadratocubus ejusdem AE ad quadratocubum EB; & patet propositum. Hinc si Intervallum EB dicatur a, AE verò, atque ED, eadem, quæ supra, nomina retineant; cum sit, ut quadratum DE, sivè yy ad quadratum AE, sivè xx, ut ejusdem AE quadratocubus, vel x^5 ad quadratocubum Intervalli, vel a^5: facta congrua multiplicatione habebitur hujusmodi æquatio $x^7 \propto a^5yy$. Quod quidem erat faciendum, demonstrandumque.

Locus autem, qui jam componendus superest $x^7 \propto a^4y^3$ in hunc modum componi potest. Ponatur Directrix AC esse ea, quam in prima epistola tertiam vocavi, hoc est, in qua quadratoquadratum applicatæ CG æquetur planoplano sub cubo intercæptæ in parametrum, sivè Intervallum EB; nam curva AOD, quæ Directrice AC describitur, ea erit, qua opus est ad hujus loci compositionem. Sumto namque in ipsa quolibet puncto, ut D, &c. demonstrabitur facillimè CE esse ay diu. per x, modò Intervallum vocetur a. Quoniam verò hujus CE cubus hoc est a^3y^3 diu. per x^3 in Intervallum a, hoc est a^4y^3 diu. per x^3 æquatur quadratoquadrato AE, vel x^4, habebitur hujusmodi æquatio a^4y^3 diu. per $x^3 \propto x^4$; vel facta congrua multiplicatione $a^4y^3 \propto x^7$. Q.E.F.

Eadem ratione omnia loca componi possunt, quorum

 æqua-

æquationes ad quemlibet gradum aſcendunt, quod quidem ulterius demonſtrare Tibi non pergo; cum his præmiſſis cętera pateant.

Atquè ex modò allatis, quæque in prima, & ſecunda epiſtola dicta fuere, manifeſta ſunt ea, quæ me facturum promiſi, videlicet, ut ea loca componerem, quorum æquationes ad ſimpliciſſimas reductæ duobus tantum terminis exprimuntur. Hæc autem, quantæ Geometricis rebus utilitati futura ſint, probe Tu ipſe noſcis.

Poſſunt autem hæc eadem loca ſecunda methodo expoſita componi adhibēdo hyperbolas pro Directricibus; verùm, & hoc ſilentio præteribo, ne Te nimia moleſtia afficiam.

Quod verò attinet ad cætera loca componenda, quorum æquationes pluribus, quam duobus terminis exprimuntur, quæque ad parabolas ſunt, etiam hac eadem methodo componi poſſe, autumo. Verùm id in præſentiarū otium nō mihi ſuppetit; cū præcipuè nō exigui laboris res hæc ſit, quāquā his curvis detectis eò reducta hæc fuerit, ut jam aditus ad eandē pateat. Quin & in hāc ſententiā adducor, ut credā, ſi loca, quæ ad tertiam, aut quartam dimenſionem aſcendūt, componantur, nullo negotio, & reliqua cujuſque gradus componi poſſe; quemadmodum, & hoc etiam pro certo habeo; ſi proprietates curvarum, quæ ſub ſecūdo genere comprehenduntur, eruantur; facillimè etiam fore, eas noſcere, quæ cæteris altioribus curvis conveniunt, quod ab unico exemplo colligi poteſt, quod modo afferam; quamvis ex iis, quæ in ſecunda epiſtola dicta ſunt, ſatis, niſi fallor, pateat:

Cum demonſtratum ſit in figura 8. epiſtolæ primæ, ſi fuerit triangulum iſoſcele AEV, atque Polo A, Deſcribente CBD indefinita ad partes D, quæ in Directrice EV dato ſui puncto C parallela ſemper incedat ipſi AE. Intervallo autem recta data quacumque BI, quod in latere AV moveatur: Efficiente autem AD ſemper parallela rectæ CI curva deſcribatur ADV, hanc talem eſſe, ut ſumto in ipſa quolibet puncto, ut D ductaque DB rectangulum ſub AB in BV

æque-

æquetur plano sub BD in datam BI; Si verò fig. 7. ejusdem primæ epistolæ recta VE non sit recta, sed curva parabolica prima, ita ut punctum V sit vertex, diameter verò AV, parameter Intervallum BI, applicatæ sint ipsi CBD, parallelæ, curvam ADV, quæ describitur, talem esse, ut si sumatur in ipsa quodlibet punctum, ut D, atquè ab eo ducatur BD, solidum sub quadrato *AB* in BV æquetur solido, quod continetur sub quadrato *BD* in BI; & tandem si pro parabola VCE *D*irectrice hujusmodi curva assumatur, quam secundam in hac epistola voco, cujus vertex sit V, diameter AV, parameter autem Intervallum BI, curvam procreari ADV, in qua sumto quolibet puncto, ut *D*, ductaque DB, planoplanum sub cubo *AB* in BV æquabitur planoplano sub cubo D*B* in Intervallum; & ita deinceps. Hoc loco demonstrabo eadem methodo curvam describi posse, in qua solidum sub quadrato A*B* in BV æquabitur solido sub dato quadrato in ductam BD.

*I*n figura enim tertia hujus epistolæ, vertice A, diametro AG, parametro autem recta BI prima parabola describatur ACE, quam in puncto A tangat recta AV: In hac autem curva, ceù Directrice, Describens CBD moveri concipiatur parallela diametro *A*G. *A*ccepta autem in recta AV qualibet data recta, ut AV, Polo V, Intervallo autem Parabolæ Directricis parametro, sivè recta *B*I, quæ in AV semper applicata manet, Efficiente autem VD, quæ semper parallela existat rectæ, quæ per puncta CI transit, curva describatur ADV. Dico hanc hujusmodi proprietate gaudere, ut sumto in ipsa quolibet puncto, ut D, ductaque DB, &c. Solidum, quod continetur sub quadrato AB in *B*V æquetur solido sub quadrato Intervalli in ductam BD. Atenim cum similia sint triangula DBV, CBI, erit V*B* ad BD, quemadmodum IB ad BC. Quòd si tam IB, quam BC in parametrum IB ducantur, erit VB ad BD, velut quadratum IB ad rectangulum sub I*B*, BC, vel ex proprietate Parabolæ AC ad quadratum A*B*: quarè erit etiam solidum sub quadrato A*B* in

BV

BV æquale solido sub dato quadrato Intervalli in ductam IB. Q. E. D.

Ex iis autem, quæ in prima epistola demonstrata sunt, patet, si recta *AV*, ita in B dividatur, ut AB contineat duas tertias ipsius AV, atque ex puncto B recta ducatur BD, curvæ in puncto D occurrens, hanc esse maximam earum, quæ duci possunt, ita ut si ex puncto D recta ducatur DR parallela AV, hæc curvam in puncto B tanget.

Similiter si curva Directrix ACE secunda parabola fuerit supra hac epistola descripta, in qua cubus cujuscumque ex applicatis æquetur solido sub intercæpta in datum parametri quadratum, quæ sit recta data BI, curva quæ hac Directrice describetur eadem Describente, Intervallo, & Efficiente hujus erit Naturæ, ut planoplanum sub cubo AB in BV æquetur planoplano, quod continetur sub Intervalli cubo in *DB*. Etenim ob similitudinem triangulorum, ita erit VB ad *B*D, ut *I*B ad BC, vel multiplicatis, tam recta data BI, quàm BC per quadratum BI; erit VB ad BD, quemadmodum cubus IB ad solidum sub quadrato *IB* in BC. Quoniam verò ex proprietate parabolæ Directricis *A*CE idem solidum sub quadrato IB in BC æquatur cubo AB; ideò ita erit VB ad BD quemadmodum datus cubus IB ad cubum *AB*, & patet propositum.

Eodem modo si VB quarta pars fuerit totius *AV*, ductaque BD ex puncto *D* ducatur recta DR parallela rectæ AV, hæc curvam in puncto *D* tanget.

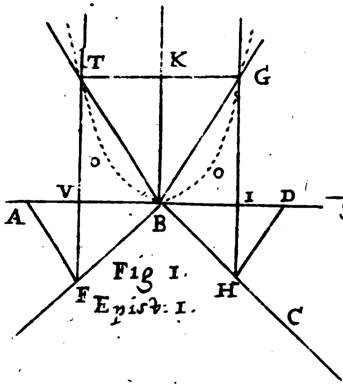
Quòd si curva Directrix *A*C fuerit tertia parabola hac etiam epistola descripta, curva ADV hac proprietate prædita erit, ut planosolidum sub quadratoquadrato AB in *B*V æquetur planosolido sub quadratoquadrato Intervalli in BD. Demonstratio verò, ut & in cæteris casibus, eadem ratione concinnari potest, ac modò allata.

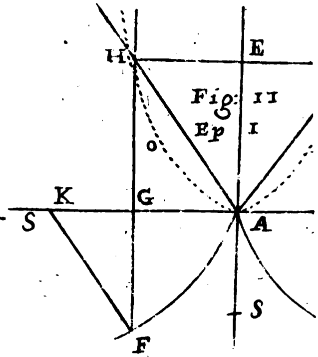
Quarè cum ex his, & ab iis, quæ in prima, & secunda epistola dicta sunt, pateat, proprietates, quæ primæ parabolæ, vel hyperbolæ conveniunt, easdem etiam convenire aliotioribus, habita ratione potestatum, seu dimensionum, prout curvæ assumuntur; ideò in hanc sententiam adducor, ut credam, quarumcumque curvarum proprietates detegi posse, modò eæ perspectæ sint, quæ curvis secundi generis conveniunt. Possem quoquè id Tibi demonstrare pluribus aliis exemplis, à quibus manifestum fit, plurimas proprietates, quæ primæ parabolæ conveniunt, cæteris etiam curvis altioribus convenire, eádemque ratione demonstrationes erui posse, modò in simplicissimas incidere detur. At verò id manifestius apparet ex methodo, qua utor ad inveniendas rectas, quæ tangant quascumque parabolas in dato puncto, qua quidem methodo eadem prorsus ratione, & facilitate id absoluitur tam, in prima, quàm in qualibet alia parabola; Hanc autem nunc Tibi non exponam, brevi enim benedicente Deo laboribus meis uberiorem tractatum de his curvis editurus sum. Prætereo quoquè plurima alia, quæ ad earum æquationum constructionem spectant, in quibus unica ignota reperitur; facile enim est ex iis, quæ in superioribus epistolis dicta sunt, easdem æquationes his etiam curvis cōstruere.

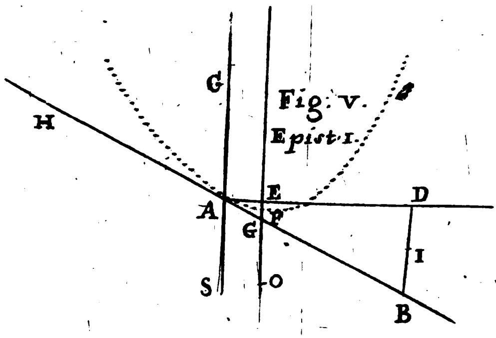
Quarè his omnibus missis hoc unum omni studio, majóremque in modum Te rogo, atquè peto, ut hæc, qualiacumque sint, pro tua humanitate benignè accipias, ceù exiguum animi mei summo Te amore, & veneratione prosequentis pignus: quamvis enim tenue, & munusculum levidensæ hæc sint, spernere tamen *Ipse* non debes, utpotè quæ ab eo Tibi dono mittuntur, qui majora, si vires id ferrent, dono dare vellet; quique Te unum præ omnibus plurimi faciens, ita diligit, amatque, ut nihil apud se optatius habeat, quam ea omni studio, & diligentia curare, quæ Tibi gratissima fore arbitratur.

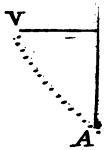
Me una cum Tuis omnibus Severiana Villa nunc habet, quæ quidem, quamvis, & loci amœnitate, irriguisque salientium aquarum fontibus, gratisque nemorum recessibus nihil decantatis Thessaliæ locis decedat; squallida tamen mœ-

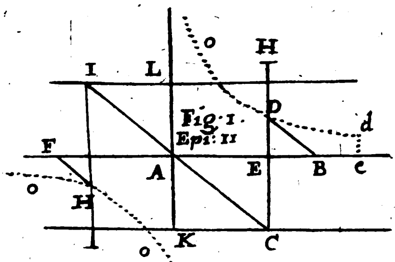
stitiaftitiaque confecta jacere mihi videtur, ex quo illam reliquisti; sivè id accidat, quia Te absentem luget, sivè queritur, quod dulcibus hæc nemora carminibus amplius non resonent ob sacrarum ex his regionibus Musarum discessum, quæ Te suum Alumnum pariter sequutæ, quocumque jeris comites semper erunt. Omnes Tui, qui bellissimè valent, plurimam Tibi salutem dicunt; in primis verò Illustrissimus Frater Tuus Petrus Marcellus, optimæ indolis Adolescens, qui ita in his scientiis proficit, ut certam spem præbeat se ad summorum virorum culmen facilè perventurum. Vale veræ Virtutis exemplar. Vale. Ex Severiana Villa XIX. Kalend. Sept.

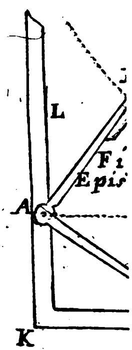

T K G
V I D
A B
Fig I.
F H
Epist. I.
C

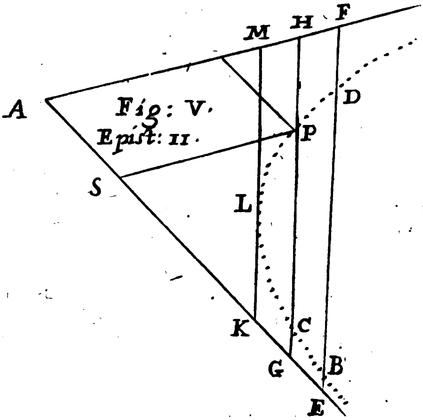

H E
Fig. II
Ep I
K G
S A
S
F

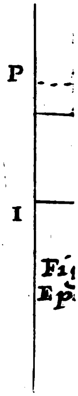

G
Fig. V.
H
Epist. I.
E D
A
F
G
I
S O
B

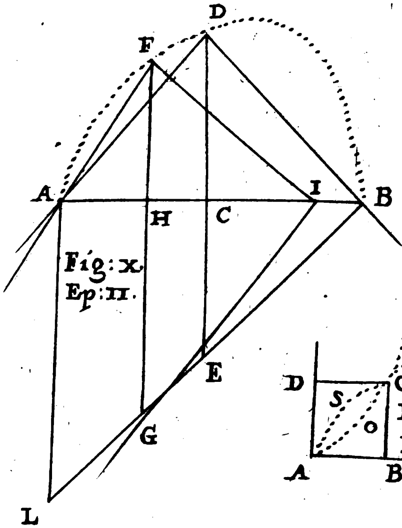

V
A

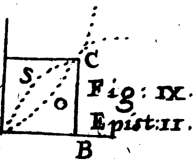

H
I L
Fig. I.
D d
Epi: II
F
A E B c
H
K C

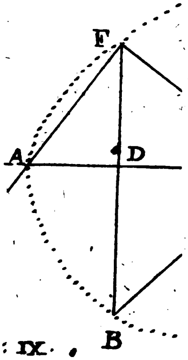

L
A
K


M H F
A
Fig: V.
Epist: II.
D
P
S
L
K
C
G
B
E


P
I


D
F
A
I
B
H
C
Fig: X.
Ep: II.
E
G
L


D
C
S
o
Fig: IX.
Epist: II.
A
B


F
A
D
B

Faciliſsimo Metodo

PER LA QUADRATURA DELLE PARABOLE

Di qualſivoglia grado,

Colla riſpoſta alla Queſtione propoſta dal Sig. G. C.

All' Illuſtriſs. Sig. D. Serafino Biſcardi Patritio Coſentino, Reggente nel Supremo Collateral Conſiglio di Napoli.

AL LETTORE

D. A.

Lodevole, se alcuno altro mai, è il costume tenuto da' Matematici, che propongono altrui per pruova d'ingegno, a sciogliere Problemi, o di Geometria, o d' Arimmetica, quando tal costume venga accompagnato da quelle condizioni, che la civiltà, e non la gara, richiede. E non solo lodevole è, ma così pure antichissimo, quanto antichi sono il savissimo Rè degli Ebrei Salamone, ed Iramo Rè di Tiro, che simiglianti questioni inviavansi a snodare l'uno all'altro. Queste da Dio scrittore delle cose de' Fenici, vengon dette Enimmi, *αἰνίγματα, ma loro Menandro Efesio dà il nome di* Problemi, *προβλήματα, come pur fà Giosefo Ebreo scrivendo contra Apione; che non essere stati, se non di cose alla Geometria, ò all'Arimmetica pertinenti, la sapienza di que' due gran Rè agevolmente ce'l persuade. Nè ci dia noja il nome* d'Enimmi; *perocche i Problemi, quando tolti da quella usitata loro spinosità, e per modo vago, e quasi in gergo messi in campo, di cotal titolo non si sdegnano. Anche dal Clavio nella giunta della sua Algebra,* Enimmi *si dissero i Problemi figuratamente proposti nel primo libro dell' Antologia cap.46., e'n maggior numero rapportatici dal Bachet al fine del lib.5. di Diofanto. Nè d'altra fatta mi sembra, che fossero gli* Enimmi, *che la Reina degli Etiopi, andò fin da Saba, ò sia Meroe, a proporre allo stesso Rè Salamone, come ne' Sagri libri si rammenta, che'n quella loro lingua gli appellano* Chidoth, *Se così è, dobbiam credere, che sì alta Reina fù in nulla inferiore alla tanto rinomata Ipazia Alessandrina, che nelle scienze Matematiche avanzò d'assai il suo padre, e maestro Teone, per rapporto di Filostorgio. Seguirono a loro usanza, l'esemplo i Greci: e sappiamo, che Platone propose a' Matematici*

matici dell' Accademia il Problema della duplicazione del Cubo. Altri esempli non mancano, che ci fanno avvertiti quest'uso non essere stato meno frequente tra gli antichi, ch'oggi sia tra noi. Pochi dì sono ne fù quì in Napoli per mezzo delle stampe dato in luce uno da G. C., per quanto dalla scrittura appare, valentissimo Matematico. Ed è, se'l metodo tenuto dal grande Archimede in quadrar la Parabola del primo grado, abbia luogo, o riesca anche nelle Parabole di grado superiore. Nacque il dubbio da due diversi pareri, che'n ciò ebbero Scooten, e Fermat, quegli che par dica di sì, questi che chiaramente afferma di nò. E' il Problema senza dubbio ingegnoso, ma agevole a sciogliersi da chi che sia, purche voglia la briga di così un poco fermarvisi co'l pensiero. E' agevole dico appigliarsi alla parte del nò, tenuta dal Fermat, ed insieme producerne la dimostrazione. Impresa forse più malagevole è quadrar tutte le Parabole di qualunque grado sieno, e questo con un sol modo, veramente Geometrico, e generale. Or chè sia? Chiunque à veduto l'opere di Bartolomeo Intieri, non istimerà arroganza, se'n età tanto giovanile, come è la sua, abbia l'animo d'entrare, e mescolarsi co' Matematici, e voglia far pruova del suo talento così nell'una, come nell'altra delle due cose quì sopra accennate; tuttocche sopraggiuntole in tempo, che a studi molto da questi lontani, e diversi teneva fisso ogni suo pensiero. Se gli è riuscito bene, potrà participar della gloria, che s'acquistò Abdemono di Tiro, ch'ebbe la sorte di sciorre alcuni Problemi di Salamone, da' quali il Rè Iramo non seppe sviluppparsi, e pur costui altro non era, ch'un giovanetto παισ νεώτερουσ è detto da Menandro. Ora per mio avviso, tutto ciò è venuto fatto all'Intieri con pochissimi Teoremi così propi, e facili, che sarà maraviglia, come tanti sovrani Matematici ad un sentiero così pronto, e spedito, e che loro era quasi tra' piedi, non si sieno abbattuti. Vivi felice.

Illu-

Illustriss. Sig. mio, e Padrone Colendissimo.

ESsendo proprio delle Geometriche speculazioni, Illustrissimo Signor mio, d'esser talmente tra di loro unite, e dipendenti, che difficilmente possa, chi d'alcuna di quelle si diletta, divenirne à bastanza appagato, senza essere obbligato ad apprēdere insieme almeno qualche leggiera notizia della maggior parte di quelle; ne segue, che spesse fiate, chi ad alcuna delle medesime per diletto attende, si trovi poi costretto ad intraprendere fatiche maggiori allettato, ò dalla dolcezza, che le stesse arrecano, ò dalla speranza dell'acquisto d'altre verità nō conosciute. Quindi è, che una fatica si chiami dietro l'altra; come appunto vedo ora essere avvenuto à me, che per aver promossa nelle curve superiori la dottrina de' Moderni, e de gli antichi Geometri intorno quelle sole curve, che Sezzioni Coniche s'appellano, mi trovo in obbligo di dimostrare un nuovo, e general metodo (se non m'inganno) per quella parte, che riguarda la quadratura delle Parabole di qualsisia grado, spinto non tanto dall'invito fatto da un valente, e dottissimo Matematico col proporre un Problema à questa materia spettāte; quanto dà una cagione molto più alta, e potente d'abbracciare un'occasione di recare a V. S. Illustrissima qualche picciola testimonianza dell'ossequiosa riverenza, che porto al suo singolar merito. Peroche è così grande in me l'ammirazione, e la stima, che hò concepita verso V. S. Illustrissima per le tante, e singolari virtù delle quali è ella sopra chi si sia ornata, e così vivo l'affetto, che umilissimamente le porto, che non hò potuto far dimeno d'offerirle questo picciolo dono, mosso dalla riverenza, e dall'amore, che di pari han luogo nell'animo mio. Ne voglio io quì entrare nell'ampio, e spazioso campo delle tante, e rare doti del suo grand'animo; poichè sarebbe questa impresa troppo malagevole, e disuguale alle mie deboli forze, che ſenza fallo reſterebbero oppreſſe dalla grandezza delle coſe, che ella glorioſamente, e con raro eſempio hà operate. Sallo, e'l ſaprà ſempre, finche ſarà in pregio la virtù, Italia tutta, e ſpezialmente queſta noſtra Città, che tante volte hà ammirato in V.S.Illuſtriſs. l'eloquenza de' più illuſtri Oratori della Grecia, e del Lazio; ed ora nel veder collocata la ſua integrità, e'l ſuo valore in coteſto ſupremo Senato, non può non godere, ch'ella abbia conſeguito il frutto delle ſue glorioſe fatiche, come che inſeparabile dal beneficio che ne riceve. Sallo, e'l ſaprà ſempre, e la Spagna, e la Francia tutta, che han fatto a gara in celebrare il ſuo merito; avendo quella conferiti largamẽte in V.S.Illuſtriſs. tutti quei premj, ed onori, che poteva, ciaſcun de' quali ad altri raramente ſi concede; e queſta cõ mille trombe di lode celebrati i glorioſi parti del ſuo maraviglioſo ingegno, miracolo de' tempi noſtri, eſſendo egli arricchito di tante, e sì varie ſcienze, e della più profonda, e varia Erudizione. Nè più agevole mi ſarebbe ſpiegar colla penna quella ſua dolce umanità, e ſuave gentilezza di coſtumi; doni così largamente, e in tanta copia dalla bontà del ſupremo Fattore conceſſile, che ſicome è l'ornamento, e lo ſplendore; così è ancora la delizia del ſecol noſtro. Laonde ſe à quanto fin'ora hò detto s'aggiungerà la particolar obbligazione, che debbo à i tanti, e ſingolari favori, che ella ſi degna tutto giorno compartirmi, compiacendoſi ammettermi nel numero de' ſuoi più intimi, e divoti ſervitori: ſenza dubbio ſi accorgerà ogn'uno, non aver io abbracciata queſt'impreſa moſſo da deſiderio, ò vana ambizione di gloria, ma ſolamente per porgere un tributo della mia gratitudine à V. S. Ill. mio ſingolar padrone, e ſicuriſſimo difenſore della vera virtù. Ma perche le lodi, ch' al ſuo gran merito convengono, ſon tante, e tali, che ſolo da V.S. Illuſtriſs. lume, e ſplẽdore di vera eloquenza, potrebbero eſſere degnamente celebrate, perciò laſciando un' impreſa troppo alle mie forze ineguale, darò principio all'affare intrapreſo.

Lo

Lo Schooten nella ſezzione 17. delle ſue eſercitazio trattando della quadratura della prima Parabola afferma ch' il metodo d'Archimede ſia ſufficiente anco nelle quadrature delle curve ſuperiori, cioè, come credo, delle Parabole di gradi più composti. Ma all'incontro il Fermat geometra ſottiliſſimo nel trattato *de Æquationum localium tranſmutatione* giudica il detto metodo inſufficiente per l quadratura delle medeſime curve ſuperiori. I quali diverſ pareri,perche nè dall'uno,nè dall'altro ſono ſtati confermati con qualche dimoſtrazione, perciò hanno dato occaſione al dottiſſimo Autore di proporre la ſeguente queſtione co tali parole.

Or noi deſideriamo ſapere,ſe ſia vero il giudicio dello Schooten,ò pure il ſentimento del Fermat,ſe vero il giudicio di quello domandiamo il proceſſo del metodo Archimedeo per la quadratura dell'altre curve ſuperiori;ſe vero all'incontro il ſentimento di queſto la dimoſtrazione dell'inſufficienza dell'accennato metodo.

Or io,benchè tal propoſta non ſia ſtata fatta à me, com quello,che mi conoſco immeritevole del nome di Matematico,hò nõdimeno riſoluto sforzarmi di ſodisfare non ſolo all domanda di sì valente Autore,ma ancora paſſando inanzi ſpeculazioni più ſublimi, e che ricercano una ſingolar diligenza,dar un metodo elegantiſſimo, e puro geometrico d quadrar qualſivoglia ſorte di Parabole, che hanno queſt proprietà, che i cubi, o pure i quadrato-quadrati delle ſemiapplicate,&c. hannò tra loro la proporzione dell'intercette,ò de'quadrati,ò cubi fatti dalle ſteſſe intercette,delle qual ſi fà menzione nelle propoſizioni 8. e 9. del mio Apollonio e Sereno promoſſo; ſperando di far coſa grata a V. S. Illuſtriſſima,ciò,che è ſtata la vera,e principal cagione, che m'h ſpinto ad intraprendere queſt'affare.

Riſponderò dunque primieramente alla domanda dell' Autore;dimoſtrando, che il metodo d'Archimede non pu ſtenderſi alla quadratura delle Parabole ſuperiori, come affermò il Fermat ; e doppo darò il modo di quadrare qualsivoglia dell'accennate Parabole, mantenendomi sempre dentro le leggi della più rigorosa Geometria, il che non sò se sia stato osservato dal Fermat nel mentovato trattato.

Ma il primo scrupolo, che mi fece dubitare del metodo Archimedeo, nacque da questo, che le seconde, terze, e quarte Parabole, &c. dell'accennate proposizioni non hanno altro, che un sol diametro, dal quale son divise in due parti uguali tutte l'applicate al medesimo, come poco appresso si dimostrerà; onde essendo il metodo Archimedeo appoggiato a quella proprietà della Parabola prima, che qualsivoglia diametro divide in due parti uguali tutte l'applicate al medesimo, par che ne segua ancora, che mancando questa proprietà de' diametri nell'altre Parabole, mancherà anco il metodo diventando inefficace per la desiderata quadratura.

Quello però, ch'hà fatto uniformarmi in tutto col sentimento del Fermat è stato l'aver conosciuto, (*fig.* 1.) che nella Parabola cubica, il primo triangolo ADC nõ hà la proporzione dovuta al secondo triangolo ABC; la di cui cuspide è in B, punto fatto dalla toccante FBG parallela ad AC. Imperòche nella Parabola cubica della prop. 8. AF è uguale alla radice q. di $\frac{4}{27}$ del quadrato AD; e per il metodo Archimedeo dovrebbe essere $\frac{1}{3}$ d'AD.

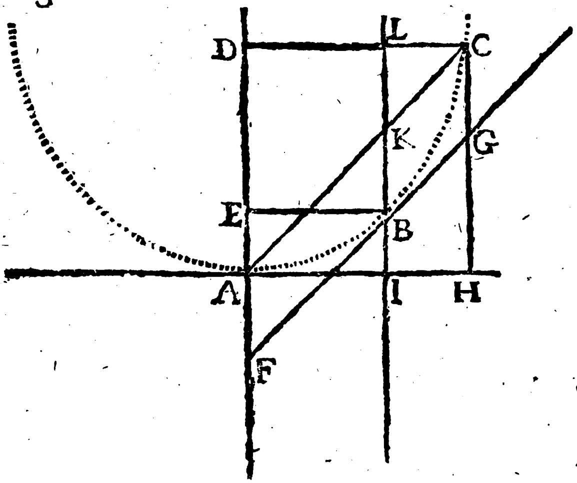
Dalle quali cose si vede chiaramente, che lo Schooten nel citato luogo parlò con conjetture, lasciando d'accertarsene colla dimostrazione. Nella qual' opinione via più mi ci confermo, considerando aver inciampato nel medesimo errore alla sezzione 19. dello stesso trattato; dove, doppo d'aver trovato il centro della gravità nella prima Parabola cõ metodo dipendente dalla nominata proprietà de' diametri, affermò, che anco questo metodo riusciva nelle curve superiori; onde, se per curve superiori intende Parabole, il che nõ può negarsi, parmi, che senza dubbio si sia allontanato dal vero.

Egl'è ben vero però, che consistendo il metodo Archimedeo nell'inscrizione d'infiniti triangoli dentro la Parabola, la pro-

proporzione de' quali è ſempre la medeſima, e nota; non intendo di dimoſtrare inſufficiente per la quadratura qualſivoglia metodo, che può dipendere dall'inſcrizzione, anco de' triangoli, ma ſolamente quello, che adoperò il principe de' Geometri Archimede.

Che poi le Parabole ſuperiori non abbino altro, che un diametro, dal quale ſiano diviſe in due parti uguali tutte l'applicate, ſi può in tal maniera brevemente dimoſtrare.

Fig. 1.



Sia la Parabola ABC la ſeconda della propoſizione 8. del mio Apollonio, nella quale i cubi delle ſemiapplicate hanno tra di loro la ſteſſa proporzione, che l'intercette. Il vertice di queſta ſia A, il diametro, che taglia ugualmente tutte l'applicate AD. l'applicate al medeſimo ſiano DC, BE. Da qualſivoglia punto preſo in queſta curva, come B, ſi tiri la toccante FBG, dalla quale ſia tagliato il diametro prolongato, in F. Dal pũto A ſi tiri AC parallela alla toccante FBG, e da punti B, C, le rette BL, CH parallele al diametro AD, e dal vertice A, la toccante AIH. Tirate doppo da punti B, C, le ſemiapplicate BE, CD al diametro AD, dico, che BL non taglia ugualmente in K la retta AC parallela alla toccante FB, e terminata nella Parabola.

Sia la retta AI ꝏ x. AH ꝏ y. e il quadrato del parametro ſia aa. Per la proprietà di queſta Parabola, AE, o pure IB ſarà ꝏ $\frac{xxx}{aa}$. onde eſſendo AE ſubdupla d'AF per la propoſi-

zio-

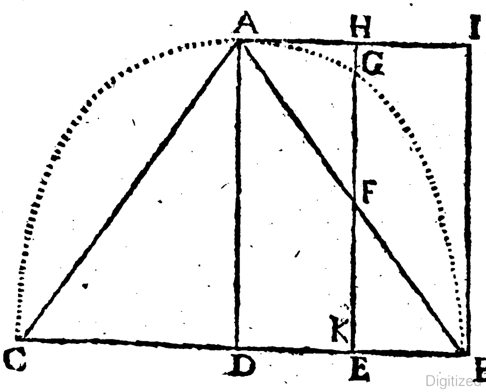
zione 21. del mio Apollonio; sarà tutta la retta FE, ò pure IK uguale a questa quantità $\frac{3xxx}{aa}$. Parimente AD, ò pur CH sarà $\frac{yyy}{aa}$. E perche i triangoli AIK, AHC son simili: perciò fatte le dovute operazioni, averemo quest' equazione $3xx \infty yy$. dalla quale si conosce, che x non è la metà d'y, cioè, che AI non è uguale ad IH. onde ne anco AK sarà uguale à KC. la qual cosa si doveva dimostrare.

Ed ecco, Illustrissimo Signor mio, chiaramente dimostrata l'insufficienza del metodo Archimedeo, come domanda l'erudito Autore; resta ora, che passi al secondo punto, la qual cosa acciòche sia dą me fatta colla maggior chiarezza, e ordine, che sia possibile, la tratterò in questo modo.

Primieramente darò un metodo facilissimo di quadrar tutte le Parabole della proposizione 3. dell'accennato Apollonio, premettendo a questo fine due facilissimi Teoremi. Secondo passerò alla quadratura delle Parabole della 9. proposizione del medesimo trattato, servendomi quasi dello stesso metodo, e premettendo medesimamente due altri Teoremi facilissimi, e similissimi a maggior segno a' primi due; le dimostrazioni de' quali Teoremi saranno da me passate sotto silenzio, per non abusarmi della pazienza di V. Ill. à cui saranno molto ben note. Sia dunque questo il

PRIMO TEOREMA.

Fig. 2.

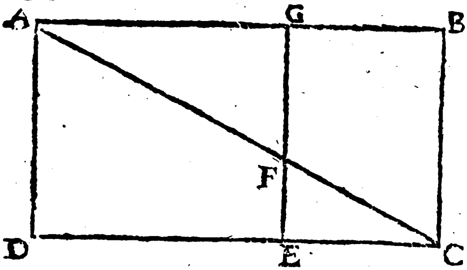


Se nel parallelogrammo DI, il di cui diametro AB, vertice A, diametro il lato AD, l'applicate nell' angolo ADB, si descriverà la prima Parabola AGB, di modo, che passi per il punto B. dico, che la somma di tutti i quadrati, che si possono fa.

re da tutte l'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela alla retta AD, una delle quali si rappresenta dalla linea EH, sarà alla somma di tutti i quadrati dell'infinite linee del triangolo AFBI, una delle quali si rappresenta dalla retta HF; come tutte le linee del parallelogrammo DI, a tutte le linee del trilineo AGBI; cioè, come il parallelogrãmo al trilineo. Ma, se la curva AGB sarà la seconda, ò cubica dell'accennata proposizione, nella quale i cubi delle semiapplicate sono come l'intercette, dico, che la somma di tutti i cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela al diametro, come sopra s'è detto, sarà alla somma de' cubi dell'infinite linee del triangolo ABI; come tutte le linee del parallelogrammo DI, a tutte le linee del trilineo AGBI; ò pure, come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI. Il simile si deve intendere delle Parabole più alte, mutando sempre le Potestà, secondo il grado delle medesime curve.

TEOREMA SECONDO.

Fig. 3.



Nel parallelogrammo DB, tirato il diametro AC, dico, che la somma di tutti i quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo, ogn' una delle quali è uguale, e parallela al lato BC, sarà tripla della somma di tutti i quadrati, fatti dall'infinite linee, che si possono tirare dentro il triangolo ACB parallele al lato BC, una delle quali si rappresenta dalla retta GF. Ma la somma de' cubi, fatti dall'infinite linee del parallelogrammo, sarà quadrupla della somma di tutti i cubi, fatti dall'infinite linee del triangolo. Lo stesso s'intenda delle Potestà più alte, osservando sempre la proporzione accennata.

Da'

Da' quali Teoremi, credo, che di già abbia V.S.Ill. compreso quanto sarò per dire intorno la quadratura (*fig.2*); peròche, per il secondo Teorema, la somma di tutti i quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo DI è tripla della somma di tutti i quadrati dell'infinite linee del triangolo ABI. ma, per il primo Teorema, come è la somma de' quadrati del parallelogrãmo allà somma de' quadrati del triangolo, così il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI; dunque anco il parallelogrammo sarà triplo del trilineo AGBI: mà allo spazio Parabolico AGBD, sarà, come tre à due; e tutta la Parabola CAGB, sarà sesquiterza del massimo triangolo CAB. Se poi la curva AGB sarà la seconda dell'ottava proposizione, nella quale i cubi delle semiapplicate sono tra loro, come l'intercette: operando della medesima maniera, troveremo, che il parallelogrammo DI, sarà quadruplo del trilineo AGBI; e per conseguenza tutto lo spazio Parabolico CAGB sarà al massimo triangolo CAB, come 3. à 2.

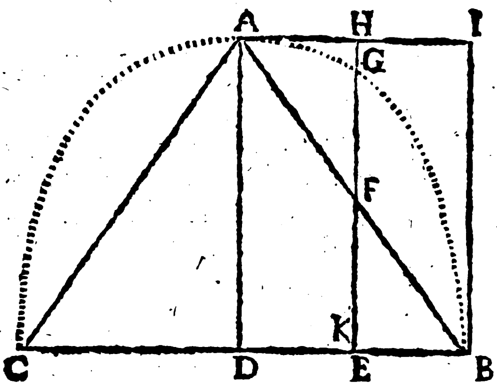
Lo stesso modo si terrà per aver la quadratura delle curve più composte, intorno alle quali non mi tratterrò di vantaggio; ma passerò alla quadratura dell'altre Parabole, nelle quali i cubi, ò quadrato-quadrati, &c. delle semiapplicate hanno tra di loro la medesima proporzione, che i quadrati, ò cubi dell'intercette; premettendo a questo fine i seguenti due Teoremi.

TEOREMA TERZO.

Ripigliata la fig. 2. del primo Teorema, se la curva AGB sarà la seconda, ò cubica Parabola della 9. proposizione, nella quale i cubi delle semiapplicate hanno tra loro la medesima proporzione de' quadrati dell'intercette, e tirata qualsivoglia EH parallela al diametro, si troverà una media proporzionale tra le rette EH, HF. dico, che la somma de' cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, ogn'una delle quali è uguale, e parallela alla retta DA, come apparisce della

la

Fig.2.



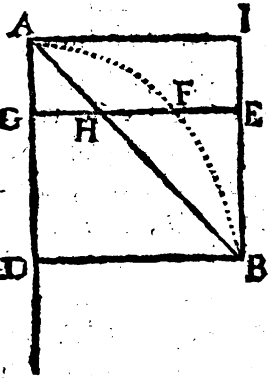
la retta HE, ſarà alla ſomma di tutti i cubi d'altrettante infinite linee medie proporzionali trà tutte le rette del parallelogrammo DI, e quelle del triangolo ABI, una delle quali ſi rappreſēta dalla retta HK, come la ſomma di tutte le linee del parallelogrammo DI, alla ſomma di tutte le linee del trilineo AGBI; cioè, come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI.

Ma ſe la curva AGB ſarà la terza della medeſima 9. propoſizione, nella quale i quadratoquadrati delle ſemiapplicate ſono tra di loro, come i cubi dell'intercette, e tra le rette EH, HF ſi troveranno due medie proporzionali, la prima, e la maggior delle quali ſia HK, dico, che la ſomma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite linee del parallegrammo DI, ſarà alla ſomma di tutti i quadrato-quadrati d'altrettante infinite medie proporzionali, una delle quali ſi rappreſenta dalla retta EK, come il parallelogrammo DI, al trilineo AGBI. Il medeſimo s'intenda delle curve più compoſte, mutato però l'ordine delle Poteſtà, come è conveniente.

TEOREMA QUARTO.

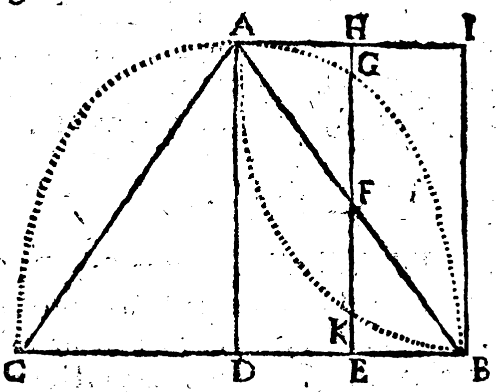
Se nel parallelogrammo DI, il di cui diametro ſia AB, ſi deſcriverà la Parabola prima AFB, che paſſi per il punto B, il di cui vertice ſia A, diametro AD, l'applicate nell'angolo ADB; dico, che, ſe ſi tirerà qualſivoglia applicata GF, che tagli il diametro del parallelogrammo in H, e il lato BI in E, ne ſeguiranno due proprietà: la prima delle quali ſarà, che le rette GE, GF, GH; ſaranno in una continua proporzione,

Fig.4.



ne, e la seconda, che il composto di tutti i cubi dell' infinite linee del parallelogrammo DI, una delle quali si rappresenta dalla retta GE, sarà al composto di tutti i cubi dell' infinite semiapplicate dentro la semiparabola AFB, una delle quali si rappresenta dalla retta GF, come 5. à 2. Ma se la Parabola AFB sarà la seconda, ò cubica della proposizione 8., dico, che GF sarà la maggiore delle due proporzionali, che cadono tra le rette EG, GH; e che la somma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite linee del parallelogrammo DI, sarà alla somma di tutti i quadrato-quadrati dell'infinite semiapplicate, una delle quali si rappresenta dalla retta GF, come 7. a 3. Lo stesso s'intenda dell'altre parabole, mutato però sempre il numero delle Potestà secondo l'ordine accennato.

Fig.2.



Da' quali due Teoremi si cava maravigliosamẽte la quadratura di tutte le parabole della 9. proposizione. Imperoche sia la parabola AGB la seconda, ò pure la cubica dell'accẽnata proposizione, nella quale i cubi delle semiapplicate hanno tra di loro la proporzione de' quadrati dell'intercette, e costruita la figura 2. ci si aggiunga di più la Parabola prima, il di cui vertice sia A, diametro AI, le semiapplicate nel-

nell'angolo AIB, e con tal' parametro, che passi per il punto B. Tirata qualsivoglia HE parallela ad AD, per il secondo Teorema, così sarà HE, a KH, come HK, ad HF; onde per il primo Teorema, la somma di tutti i cubi dell'infinite linee del parallelogrammo DI, sarà alla somma di tutti i cubi dell'infinite semiapplicate dentro la semiparabola AKB, una delle quali si rappresenta dall'applicata HK, come il parallelogrammo DI al trilineo AGBI; ma la somma di tutti questi cubi, alla somma degli altri, per il secondo Teorema è, come 5. à 2.; dunque anco il parallelogrammo DI sarà al trilineo AGBI, come 5. à 2. Ma allo spazio semiparabolico, come 5. à 3. Il che da altri è stato dimostrato. Della stessa maniera facendo nelle Parabole più alte di questo genere troveremo la di loro quadratura.

E questo basti per adempire quanto da me s'era promesso appartenēte alla quadratura delle Parabole, soggiungendo di più, che se lo Schooten avesse usata un pò più di diligenza in esaminare attentamente il metodo intorno la quadratura della prima Parabola addotto nella sezzione 17. del medesimo trattato, e nell'ultimo capitolo della descrizzione in piano delle Sezzioni Coniche, poteva senza dubbio affermare, che avesse luogo nelle curve superiori, il che forse nō conobbe per non essersi incamminato per la strada diritta, usando dimostrazioni improprie, e non naturali, come conoscerà chiaramente, chi paragonerà il metodo da me quì addotto con quello riferito dal medesimo Autore ne'luoghi citati. La qual cosa è degna di grandissimo biasmo sopratutto nella Geometria, scienza sopra qualsivoglia, semplice, e pura.

Gradisca intanto V. S. Illustriss. questa mia picciola, ma ossequiosa offerta, in quella guisa, che anco i Principi grandi non sdegnano gradire qualsivoglia picciolo dono, che venga da mano divota, e riverente; assicurandola, che se averò la fortuna di conoscere esserle stato grato questo segno dell'osservanza, e attenzione dell'animo mio, mi stimerò sommamamente onorato, e contento per aver cōseguito quanto da me ardentemente si desiderava. E pregandole dal Cielo ogni felicità per l'avanzamento delle belle lettere, e di tutti i buoni spezialmente, resto facendole divotissima riverenza.

Di V. S. Illustriss.

Napoli 6. Maggio 1706.

Divotiss., ed Obbligatiss. Servitore
Bartolomeo Intieri.